Ն. ՌԻԲԿԻՆ

ՈՒՂՂԱԳԻԾ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

ԴԱՍԱԳԻՐՔ
ՄԻՋՆԱԿԱՐԳ ԴՊՐՈՑՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

ՊԵՏՀՐԱՏ ՈՒՍՄԱՆԿՀՐԱՏԲԱԺԻՆ
ՅԵՐԵՎԱՆ 1934

Բնագիրը հաստատված ե ՌՍՖՍՀ ԼԺԿ Կոլեգիայի կողմից

Ն. ՌԻԲԿԻՆ

ՈՒՂՂԱԳԻԾ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

ԴԱՍԱԳԻՐՔ
ՄԻՋՆԱԿԱՐԳ ԴՊՐՈՑՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Բնագրի 12-րդ բարեփոխված հրատարակությունից
թարգմանեց ԱՐԱ ԽԱՆՋՅԱՆ

ՊԵՏՀՐԱՏ — ՈՒՍՄԱՆԿՀՐԱՏԲԱԺԻՆ

ՅԵՐԵՎԱՆ 1933

Պատ. խմբագիր՝ Արտ Խանջյան. տեխ. խմբագիր՝ Գ. Զենյան, լեզվական խմբագիր՝ Հար. Գևորգյան. սրբագրիչ՝ Վ. Տերոյան. Պետհրատի տպարան պ. № 2131, գլավլիտ № 8320(բ), հրատ. № 2757, տիրաժ 5000
Հանձնված է արտադրության 15 հոկտեմբերի 1933
Ստորագրված է տպագրության 25 նոյեմբերի 1933

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

§ 1. Յեռանկյունաչափության առարկան.— *Յեռանկյունաչափություն* բառը հունարեն նշանակում է յեռանկյունների չափում։ Իր բովանդակությամբ յեռանկյունաչափությունը կազմում է յերկրաչափության մի ճյուղը։

Յերկրաչափության մեջ յեռանկյան կողմերն ու անկյունները մեծ մասամբ ուսումնասիրվում են մեկը մյուսից անկախ կերպով, առանց անկյունների ու կողմերի մեծությունների միջև ճշգրիտ առնչություններ հաստատելու։ Բացառություններ լինում են, բայց շատ քիչ (օրինակ՝ 30° անկյան դիմաց գտնվող էջը հավասար է ներքնաձիգի կեսին)։ Ընդհակառակը, այդ առնչությունների արտածումը յեռանկյունաչափության հիմնական նպատակն է։ Յեռանկյան կողմերի և անկյունների առնչությունների թեորեմները մի կայուն սիստեմ են կազմում։

Գծերի և անկյունների առնչությունների ուսումնասիրելու համար յեռանկյունաչափության մեջ գործածում են հատուկ ոժանդակ մեծություններ, վորոնք կոչվում են յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներ։ Այդ մեծություններն են սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը, կոտանգենսը, սեկանսը և կոսեկանսը։

Յեռանկյունաչափությունը բաժանվում է յերկու մասի— բուն յեռանկյունաչափություն և անկյունաչափություն (ուսմունք անկյունների մասին), վորի մեջ ուսումնասիրվում են յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների հատկությունները։

Յեռանկյունաչափությունը գործնականում մեծ կիրառություններ ունի—գեոդեզիկ աշխատանքների ժամանակ՝ բարձրություններ և հեռավորություններ վորոշելը, պլաններ վերցնելը, տրիանգուլյացիա. աստղաբաշխության մեջ՝ լուսատուների բարձրություններն ու ազիմուտները վորոշելը, խոնարհում և ուղիղ բարձրացում, ընդհանրապես յերկնային կոորդինատներ վորոշելը. իսկ յերկնային կոորդինատներ գտնելը հնարավորություն է տալիս աշխարհագրական կոորդինատները հաշվելու. մեխանիկայի մեջ՝ ուժի պրոեկտումը առանցքի վրա, համազորի ուղղությունը, պարբերական շարժման օրենքները. մեքենագիտության մեջ ատամնավոր անիվների փորակների հաշվումը և այլն։

Եռանկյունաչափությունը ծնունդ է առել Հունաստանում։ Նրա առաջացումը կապված է աստղաբաշխության զարգացման հետ։ Աստղաբաշխությունն էլ իր հերթին զարգացել է ծովագնացության և հողագործության ազդեցությամբ։

Ծովային անվտանգ ճանապարհորդության համար պահանջվում էր աստղերի միջոցով որոշել նավի շարժման ուղղությունը։ Հողագործության համար պահանջվում էր ճշգրիտ օրացույց, որը կարող էր տալ աստղաբաշխությունը՝ հիմնվելով մաթեմատիկայի և հատկապես եռանկյունաչափության վրա։

Եռանկյունաչափական առաջին աղյուսակների հեղինակը համարվում է Հիպարխը, որ ապրել II է դարում, մեր թվականությունից առաջ։ Հիպարխի աղյուսակները պարունակում էին կենտրոնական անկյուններին համապատասխանող լարերի երկարությունները։

Մեր թվականությունից 100 տարի առաջ գիտնական Մենելայոսը գտավ սֆերիկ եռանկյունաչափության հիմունքները։ Կլավդիոս Պտղոմեոսը, մինչկոպերնիկյան արեգակնային սիստեմի հռչակավոր հեղինակը, իր Syntaxis Mathematica գրքում տեղավորեց լարերի երկարությունների աղյուսակները, երբ շառավիղն ունի միավոր երկարություն։ Նա շառավիղը բաժանեց 60 հավասար մասերի, յուրաքանչյուր մասը նորից բաժանեց 60 մասի և վերջին մասերից յուրաքանչյուրն էլի բաժանեց 60 մասի։ Այդ մասերն անվանեց partes minutae («փոքրացրած առաջին մասեր») և partes minutae secundae («փոքրացրած երկրորդ մասեր»)։ Պտղոմեոսի աղյուսակները պարունակում էին 1°, $1\frac{1}{2}^\circ$, 2°, $2\frac{1}{2}^\circ$... կենտրոնական անկյուններին համապատասխանող լարերի երկարությունները։

Միջին դարերում եռանկյունաչափությունը զարգացավ Հնդկաստանում։ Հնդիկները գործածում էին լարի կեսը, այսինքն սինուսի գիծը. հնդիկներին է պատկանում նաև կոսինուսը կիրառության մեջ մտցնելու աշխատանքը։ Հնդիկներին հայտնի էր՝ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ բանաձևը (որ նրանք գրում էին ոչ թե տառերով, այլ արտահայտում էին բառերով), բութ անկյան սինուսի և կոսինուսի վերածումը սուր անկյան սինուսի ու կոսինուսի և սինուսների աղյուսակը։

IX և X դարերում արաբները կիրառության մեջ մտցրին տանգենսը և կազմեցին սինուսների ավելի ճշգրիտ աղյուսակներ։ Եռանկյունաչափության զարգացումը արաբների մոտ նույնպես

բացատրվում է աստղաբաշխության և ծովագնացության պահանջներով, որովհետև արաբները մեծ առևտուր ունեին Միջերկրական ծովի ափերին։ Արաբական գիտնականներից հատկապես հայտնի են Ալ-Բատանին և Աբդ-ուլ-Ուաֆան։

Եվրոպայում առաջին անգամ եռանկյունաչափության գրողը եղավ գիտնական Բրադվարդինը (XIII և XIV դարերում)։ Եռանկյունաչափության սիստեմատիկ կուրսը գրեց Գերմանացի գիտնական Յոհան Մյուլլերը (Քյոնիգսբերգցի)։

«Բոլոր տեսակի եռանկյունների մասին» գրքում նա բերում է հարթ և սֆերիկ եռանկյունների լուծումները։ Մյուլլերը եռանկյունաչափությունը շարադրում է արդեն որպես ուրույն գիտություն, անկախ աստղաբաշխությունից։

XVI դարից սկսած, երբ Վիետն ստեղծել էր առաջին հանրահաշվական հաշվումը, եռանկյունաչափության բանաձևերը ժամանակակից հանրահաշվական բնույթ են ստանում։ Եռանկյունաչափության միացումը հանրահաշվի և անալիզի հետ նոր ազդակ հանդիսացավ ամբողջ մաթեմատիկայի զարգացմանը։

Մյուս գիտնականներից եռանկյունաչափության վրա աշխատել են Վիետը (հանրահաշվի հիմնադիրը), Ռոմանուսը, Նեպերը (բնական լոգարիթմների հայտնագործողը), Սնելիուսը (տրիանգուլյացիայի հանույթի հեղինակը), Պոտենոտը և հանճարեղ մաթեմատիկոս Էյլերը։ Վերջինին է պատկանում եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ուսումնասիրությունը եռանկյունաչափական շրջանի օգնությամբ։

§ 2. Հասկացողություն ֆունկցիայի մասին. Գոյություն ունեն փոփոխական մեծություններ, որոնք իրար հետ կապված են այնպես, որ նրանցից մեկի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է մյուսի մի որոշ արժեք։ Այդպիսի մեծություններ են, օրինակ՝ x և y փոփոխական մեծությունները հետևյալ հավասարությունների մեջ.

$$y=a+x;\quad y=x^2:\quad y=\sqrt{x}$$ և այլն։

Այդպիսի մեծություններ են քառակուսու կողմն ու նրա մակերեսը, գնդի շառավիղն ու ծավալը։

Այն փոփոխական մեծությունը, որի արժեքները համապատասխանում են մյուս մեծության արժեքներին, կոչվում է այդ մյուս մեծության ֆունկցիա։ Այսպես, օրինակ կարելի է ասել, որ շրջանի մակերեսը շրջանի շառավղի ֆունկցիան է. և իրոք, շառավղի փոխվելու դեպքում փոխվում է նաև մակերեսը, և շառավղի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է շրջանի մակերեսի մի վորոշ արժեք (և ընդհակառակը, շրջանի շառավիղը մենք կանվանենք մակերեսի ֆունկցիա, յեթե տված մակերեսի միջոցով գտնում ենք շառավիղը)։

Այն մեծությունը, վորի փոփոխությունից կախում ունի ֆունկցիայի փոփոխությունը, կոչվում է ֆունկցիայի արգումենտ։ Որինակ, յեթե $y=x^3$ հավասարությունից վորոշում ենք y-ը, յերբ տված է x-ը, ապա y-ը կլինի ֆունկցիան, իսկ x-ը՝ նրա արգումենտը։ Նույնպես և $y=\lg N$ հավասարության մեջ N-ն արգումենտն է, y-ը ֆունկցիայի արժեքն է, իսկ lg-ը ֆունկցիայի անունն է։

Արգումենտն անկախ փոփոխականն է, իսկ ֆունկցիան՝ կախյալ փոփոխականը։

§ 3. Անկյունների յեվ աղեղների փոփոխությունները. *Ինչպես հայտնի յե յերկրաչափությունից, անկյունները վորոշվում են աղեղների ոգնությամբ։*

Յերբ աղեղը ծառայում է անկյուն չափելու համար, այդ դեպքում աղեղն արտահայտում են շրջանի կամ շառավղի մասերով[1]։

Առաջին յեղանակը անկյան և աղեղի համար տալիս է աստիճանային *արտահայտություն, վոր հայտնի է յերկրաչափությունից։*

Յերկրորդ յեղանակն այն է, վոր աղեղն արտահայտում են մի վերացական թվով, վորը ցույց է տալիս աղեղի հարաբերությունը շառավղին. *յեթե, որինակ՝ ասում ենք, վոր «աղեղի յերկարությունը հավասար է 2,43-ի», ապա այդ նշանակում է, վոր ուղղած աղեղը պարունակում է 2,43 շառավիղ։ Այս յեղանակով կիսաշրջանագիծը կարտահայտվի $\pi R:R$ հարաբերությամբ, այսինքն π թվով, հետևաբար քառորդ շրջանագիծը կարտահայտվի $\frac{\pi}{2}$ թվով և այլն։ Աղեղի այսպիսի արտահայտությունը մենք կանվանենք* վերացական *կամ* ռադիանային (շառավղորդային)։

Վորպեսզի անկյան և աղեղի չափման այս յեղանակի դեպքում կենտրոնական անկյունն արտահայտվի այն թվով, ինչ թվով վոր արտահայտվում է նրա աղեղը, անհրաժեշտ է, վոր անկյան միավորը համապատասխանի մեկ շառավիղ *յերկարություն ունեցող աղեղին։ Այդպիսի անկյունը կոչվում է* ռադիան (շառավղորդ)*։ Այսպիսով մենք կարող ենք ասել, վոր անկյան*

---

[1]) *Առաջին յեղանակն ավելի պարզ է և կիրառվում է գործնական չափումների ժամանակ (անկյունաչափական գործիքների վրա)։*

վերացական արտահայտությունը նրա հարաբերությունն է ռադիանին. որինակ՝ «$\frac{3}{2}\pi$ անկյուն» արտահայտությունը հասկացվում է «$\frac{3}{2}\pi$ ռադիան պարունակող անկյուն»։

Քանի վոր շրջանագծի յերկարության մեջ շառավիղը պարունակվում է 2π անգամ, ապա ռադիանի աստիճանային մեծությունը կլինի՝ $\frac{360^\circ}{2\pi}$, վորը հավասար է $57^\circ 17' 44'',8$ ($0,05''$-ի մոտավոր ճշտությամբ)։

Ոգտակար է հիշել նաև հետևյալը։ Բոլոր շրջանագծերի վերացական արտահայտությունը հավասար է $2\pi R:R$, այսինքն 2π-ի, իսկ նրա աստիճանային արտահայտությունը հավասար է 360°-ի։ Այստեղից ստացվում է հետևյալ աղյուսակը.

360°	180°	90°	270°	60°	45°	30°	18°
2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}$

Այժմ արտածենք անկյան և աղեղի աստիճանային չափից ռադիանայինին անցնելու և, ընդհակառակը, ռադիանային չափից աստիճանայինին անցնելու բանաձևերը։

Վորևե անկյան կամ աղեղի աստիճանային չափը նշանակենք α-ով, իսկ վերացականը՝ a-ով։ Քանի վոր լրիվ շրջանագծի աստիճանային արտահայտությունը 360° է, իսկ ռադիանայինը՝ 2π, ապա կստանանք հետևյալ համեմատությունը.

$$\frac{\alpha}{360^\circ}=\frac{a}{2\pi} \quad \text{կամ} \quad \frac{\alpha}{180^\circ}=\frac{a}{\pi};$$

այստեղից՝

$$a=\pi\cdot\frac{\alpha}{180^\circ} \tag{1}$$

և

$$\alpha=180^\circ\,\frac{a}{\pi}. \tag{2}$$

Որինակ. *Պետք է գտնել $67^\circ 30'$ անկյան վերացական արտահայտությունը։*

(1) բանաձևի մեջ փոխարինելով α-ն 67°30′-ով, կստանանք՝

$$x = \pi \cdot \frac{67°30'}{180°} = \frac{3}{8}\pi.$$

Յեթե այստեղ տեղադրենք π-ի մոտավոր արժեքը, կստանանք $x = 1,17810$, մեկ հազարերորդականի կեսի մոտավոր ճշտությամբ։

Առանց բանաձևն օգտագործելու, կարելի յե x-ը գտնել հետևյալ հավասարություններից.

$$360° \ldots 2\pi;\ 1° \ldots \frac{2\pi}{360°};\ 67°30' = 67\frac{1°}{2} \ldots \frac{2\pi}{360°} \cdot 67\frac{1}{2} = \frac{3}{8}\pi։$$

§ 3ա. Աղեղի յերկարությունը. Յեթե r-ով նշանակենք շրջանագծի շառավիղը, l-ով՝ աղեղի յերկարությունը, իսկ a-ով՝ կենտրոնական անկյանը համապատասխանող ռադիանային արտահայտությունը, ապա ռադիանային չափման համաձայն կստանանք՝

$$a = \frac{l}{r},$$

վորից

$$l = ar,$$

Այսինքն աղեղի յերկարությունը հավասար է շառավղին՝ բազմապատկած աղեղի ռադիանային արտահայտությունով։

Այս բանաձևը հաճախ օգտագործվում է ֆիզիկայի և տեխնիկայի մեջ։

Ռադիանային չափի հետ կապված հաշիվներ կատարելիս անհրաժեշտ է լինում օգտվել աստիճանները ռադիանների և, ընդհակառակը, ռադիաններն աստիճանների վերածելու աղյուսակներից։ (Բրադիսի աղյուսակների մեջ այդ VII աղյուսակն է, իսկ Պրժևալսկու աղյուսակների մեջ՝ XI-ը)։

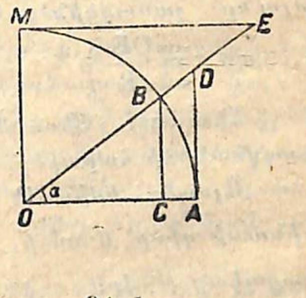
ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ (ԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ—ԳՈՆԻՈՄԵՏՐԻԱ)

1. ՍՈՒՐ ԱՆԿՅԱՆ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ

§ 4. Անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներն են՝ սինուս, կոսինուս, տանգենս, կոտանգենս, սեկանս յեվ կոսեկանս։

Այդ ֆունկցիաներն ունեն հետևյալ նշանակումները՝ sin, cos, tg, ctg, sec, cosec։ Անկյունը գրվում է ֆունկցիայի անվան կողքին, վերջից, այնպես, վոր α անկյան սինուսը գրվում է՝ sin α։

§ 5. Սուր անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների սահմանումը. Վերցնենք մի վորևե α սուր անկյուն, դարձնենք այն կենտրոնական՝ գծելով նրա գագաթից R շառավղով աղեղ։ Վորպեսզի անկյունը կազմող կողմերն իրարից զանազանենք, կպատկերացնենք մեզ, վոր α անկյան փոփոխության ժամանակ OA շառավիղն անշարժ է մնում, իսկ OB շառավիղը պտտվում է O կետի շուրջը (գծ. 1). այդ իմաստով էլ OB շառավիղն անվանում ենք շարժական շառավիղ, իսկ OA շառավիղն՝ անշարժ։ Անցնելով յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների սահմանումին, ամենից առաջ ասենք, վոր ընդհանրապես այդ ֆունկցիաները շրջանի մեջ տվյալ անկյան համար տարած հատուկ գծերի—հարաբերություններ են շրջանի շառավղին։ Այդ գծերը կառուցելու համար բացի AB աղեղից օգտվում ենք նրա շարունակությամբ և OM շառավղով, վորն ուղղահայաց է OA շառավղին։



Գծ 1.

Սուր անկյան յեռանկյունաչափական գծերի և անկյունների սահմանումներն են.

1) Շարժական շառավղի ծայրից անշարժի վրա իջեցրած

(BC) ուղղահայացը կոչվում սինուսի գիծ։ Այդ գծի հարաբերությունը շառավղին՝ կոչվում է տված անկյան սինուս $\left(\sin\alpha = \frac{BC}{R}\right)$։

2) Կենտրոնի (OC) հեռավորությունը սինուսի գծից՝ կոչվում է կոսինուսի գիծ, իսկ այդ գծի հարաբերությունը շառավղին՝ կոչվում է տված անկյան կոսինուս $\left(\cos\alpha = \frac{OC}{R}\right)$։

3) Անշարժ շառավղի ծայրից տարած շոշափողի այն (AD) հատվածը, որն ստացվում է այդ շոշափողի հատումից շարժական շառավղի շարունակության հետ, կոչվում է տանգենսի գիծ, իսկ այդ գծի հարաբերությունը շառավղին՝ կոչվում է տված անկյան տանգենս $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{AD}{R}\right)$։

4) Անշարժ շառավղին ուղղահայաց շառավղի ծայրից տարած շոշափողի այն (ME) հատվածը, որն ստացվում է այդ շոշափողի հատումից շարժական շառավղի շարունակության հետ, կոչվում է կոտանգենսի գիծ, իսկ այդ գծի հարաբերությունը շառավղին՝ կոչվում է տված անկյան կոտանգենս $\left(\operatorname{ctg}\alpha = \frac{ME}{R}\right)$։

5) Կենտրոնի (OD) հեռավորությունը տանգենսի գծի ծայրից՝ կոչվում է սեկանսի գիծ, իսկ այդ գծի հարաբերությունը շառավղին՝ կոչվում է տված անկյան սեկանս $\left(\sec\alpha = \frac{OD}{R}\right)$։

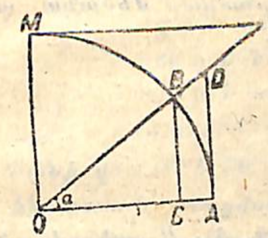
6) Կենտրոնի (OE) հեռավորությունը կոտանգենսի գծի ծայրից՝ կոչվում է կոսեկանսի գիծ, իսկ այդ գծի հարաբերությունը շառավղին՝ կոչվում է տված անկյան կոսեկանս $\left(\operatorname{cosec}\alpha = \frac{OE}{R}\right)$։

Հետևանք. *Եռանկյունաչափական ֆունկցիաները, որպես հատվածների հարաբերություններ,* վերացական թվեր են։

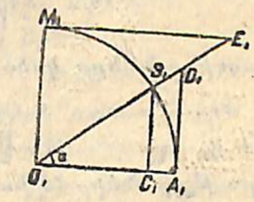
Այսպես, օրինակ՝ եթե շառավիղը հավասար է 9 սմ-ի, իսկ սինուսի գիծը՝ 6 սմ-ի, ապա սինուսի համար կստանանք $\frac{2}{3}$ վերացական թիվը։

§ 6. *Թեորեմ.* Տված անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաները կախում չունեն շառավղի երկարությունից։ Դիցուք 2-րդ և 3-րդ գծագրերի վրա AOB և $A_1O_1B_1$ անկյունները հավասար են տված α անկյանը, իսկ աղեղների շառավիղները հավասար չեն։ Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները, երբ

շառավիղը R է, նշանակենք sin, cos..., իսկ երբ շառավիղը R_1 է՝ $\sin_1$, $\cos_1$..., պահանջվում է ապացուցել, որ $\sin_1\alpha = \sin\alpha$, $\cos_1\alpha = \cos\alpha$ և այլն։



Գծ. 2.



Գծ. 3.

Ապացուցում. $O_1B_1C_1$, $O_1D_1A_1$ և $O_1M_1E_1$ եռանկյունները համապատասխանաբար նման են OBC, ODA և OME եռանկյուններին (ընդհանրապես 1-ին գծագիրը նման է երկրորդ գծագրին), որից հետևում է, որ՝

$$\frac{B_1C_1}{R_1} = \frac{BC}{R},\quad \frac{O_1C_1}{R_1} = \frac{OC}{R},\quad \frac{A_1D_1}{R} = \frac{AD}{R}$$

և այլն. այսինքն՝

$$\sin_1\alpha = \sin\alpha,\ \cos_1\alpha = \cos\alpha,\ \operatorname{tg}_1\alpha = \operatorname{tg}\alpha \text{ և այլն։}$$

Այսպիսով ամեն մի շառավղի դեպքում միևնույն անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիան միևնույն արժեքն ունի։ Այդ նշանակում է, որ անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաները կախում չունեն շառավղի երկարությունից։

§ 7. Նախորդ հոդվածում ապացուցեցինք, որ շառավղի փոփոխվելու դեպքում տված անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաները չեն փոփոխվում, բայց եթե մենք փոփոխենք անկյան մեծությունը, ապա, ինչպես երևում է գծագրից, յուրաքանչյուր եռանկյունաչափական ֆունկցիայի արժեքը փոխվում է։ Այստեղից էլ եռանկյունաչափական թվերն ստացել են անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիա անունը։

§ 8. Քանի որ կենտրոնական անկյունն ու նրա աղեղն արտահայտվում են միևնույն թվով, ապա անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաները միաժամանակ աղեղի եռանկյունաչափական ֆունկցիաներն են (հասկանալով աղեղ բառի տակ նրա աստիճանային կամ վերացական արտահայտությունը)։ Նկատի առնելով այդ, մենք երբեմն անկյան փոխարեն կվերցնենք աղեղը և յերբեմն էլ անկյունն ու աղեղը կվերցնենք արգումենտ ընդհանուր անունով։

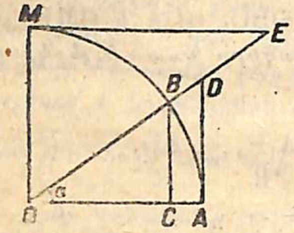
§ 9. Անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների փոփոխությունները, յերբ անկյունը փոխվում է 0°-ից մինչեվ 90°. *Յեթե 4-րդ գծագրի վրա α անկյունն աստիճանաբար մեծանա, ապա՝*

$$\frac{BC}{R},\ \frac{AD}{R} \text{ և } \frac{OD}{R}$$

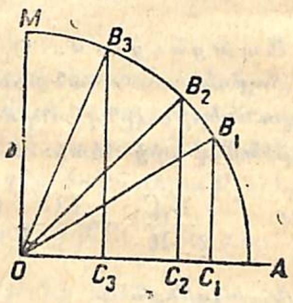
հարաբերությունները կմեծանան, իսկ

$$\frac{OC}{R},\ \frac{ME}{R} \text{ և } \frac{OE}{R}$$

հարաբերությունները կփոքրանան (գծ. 5)։ Այսպիսով անկյան



Գծ. 4.



Գծ. 5.

աճելու դեպքում նրա սինուսը, տանգենսն ու սեկանսն աճում են, իսկ կոսինուսը, կոտանգենսն ու կոսեկանսը նվազում են։ Յերբ α անկյունը հասնում է 90°-ի, ապա $\frac{BC}{R}$ *հարաբերությունը դառնում է 1,* $\frac{OC}{R}$*-ը՝ 0,* $\frac{AD}{R}$*-ը՝ ∞,* $\frac{ME}{R}$*-ը՝ 0,* $\frac{OD}{R}$*-ը՝ ∞ և* $\frac{OE}{R}$*-ը՝ 1։ Այսպիսով՝*

$\sin 90°=1$, $\cos 90°=0$, $\operatorname{tg} 90°=\infty$, $\operatorname{ctg} 90°=0$, $\sec 90°=\infty$ և $\operatorname{cosec} 90°=1$։

Յերբ α անկյունն աստիճանաբար փոքրանում է, ապա $\frac{BC}{R}$, $\frac{AD}{R}$ *և* $\frac{OD}{R}$ *հարաբերությունները նվազում են, իսկ* $\frac{OC}{R}$, $\frac{ME}{R}$ *և* $\frac{OE}{R}$ *հարաբերություններն աճում են։ Յեթե α անկյունը հավասարվում է զերոյի, ապա* $\frac{BC}{R}$ *հարաբերությունը դառնում է 0,* $\frac{OC}{R}$*-ը՝ 1,* $\frac{AD}{R}$*-ը՝ 0,* $\frac{ME}{R}$*-ը՝ ∞,* $\frac{OD}{R}$*-ը՝ 1 և* $\frac{OE}{R}$*-ը՝ ∞։ Այսպիսով՝*

$\sin 0°=0$, $\cos 0°=1$, $\operatorname{tg} 0°=0$, $\operatorname{ctg} 0°=\infty$, $\sec 0°=1$ և $\operatorname{cosec} 0°=\infty$։

Այսպիսով, յերբ α-ն աճում է 0°-ից մինչև 90°, ապա՝

sin α-ն աճում է 0-ից մինչև 1,
cos α-ն նվազում է 1-ից մինչև 0,
tg α-ն աճում է 0-ից մինչև ∞,
ctg α-ն նվազում է ∞-ից մինչև 0,
sec α-ն աճում է 1-ից մինչև ∞,
և cosec α-ն նվազում է ∞-ից մինչև 1։

Քանի վոր 0° և 90°-ը սուր անկյան սահմանային արժեքներն են, ուստի ստացված յեզրակացությունը ցույց է տալիս, թե յուրաքանչյուր յեռանկյունաչափական ֆունկցիա ինչպիսի արժեքներ կարող է ստանալ. այսպես օրինակ՝ 3 թիվը կարող է լինել տանգենս, կոտանգենս, սեկանս և կոսեկանս, բայց սինուս և կոսինուս յերբեք չի կարող լինել։

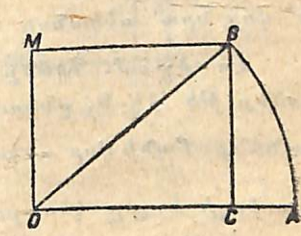
∞ պարունակող հավասարությունները պայմանական են. $\operatorname{tg} 90° = \infty$ *հավասարությունն արտահայտում է այն միտքը, վոր յերբ անկյունը մոտենում է 90°-ին, նրա տանգենսն անսահմանորեն աճում է։*

§ 10. Սուր անկյան կառուցումը տված յեռանկյունաչափական ֆունկցիայի օգնությամբ. *6-րդ և 9-րդ պարագրաֆներից յերևում է, վոր α անկյան յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է յուրաքանչյուր յեռանկյունաչափական ֆունկցիայի մի վորոշ արժեք։ Այժմ զբաղվենք հակադարձ խնդրով, այսինքն գտնենք անկյունը, յերբ տված է նրա յեռանկյունաչափական ֆունկցիան.*

Դրա համար օգտվում ենք կառուցման յեղանակով։

Օ ր ի ն ա կ 1. Պետք է կառուցել անկյուն, յեթե հայտնի է, վոր նրա սինուսը հավասար է $\frac{2}{3}$*-ի (գծ. 6)*

Լ ու ծ ու մ. Անցկացնենք OA կամավոր ուղիղը։ O կետն ընդունենք կենտրոն, իսկ OA-ն՝ վորոնելի անկյան անշարժ շառավիղը և այդ շառավղով գծենք ուղիղ։ Վորպեսզի սինուսը հավասար լինի $\frac{2}{3}$*-ի, անհրաժեշտ է, վոր աղեղի ծայրի հեռավորությունը OA-ից՝ հարաբերի շառավղին այնպես, ինչպես 2:3։ Այդ պատճառով խնդիրը լուծելու համար հետևյալ կերպ ենք վարվում.*

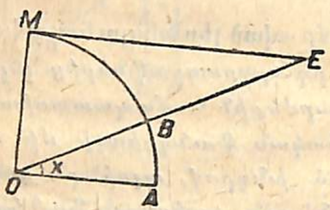


Գծ. 6.

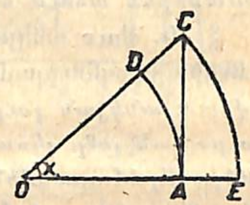
կանգնեցնում ենք $\frac{2}{3}$ OA-ին հավասար OM ուղղահայացը և M կետից տանում ենք OA-ի զուգահեռը և այդ զուգահեռի և աղեղի հատման կետով անց ենք կացնում շառավիղ։ Ստացված AOB անկյունը կլինի վորոնելին, այսինքն՝ $\sin AOB = \frac{2}{3}$։ Նկատենք, վոր այս անկյունը կախում չունի շառավղի յերկարությունից, վորովհետև ամեն մի այլ շառավղի դեպքում կստանանք OBC-ին նման յեռանկյուն, հետևաբար, նույն մեծության անկյուններ։

Օրինակ 2. Պետք է կառուցել անկյունը, յեթե հայտնի յե, վոր նրա կոտանգենսը հավասար է 2-ի (գծ. 7)։

Լուծում. Վերցնենք AOM կենտրոնական ուղիղ անկյունը, M կետից տանենք յերկու շառավղի հավասար ME շոշափողը և E կետը միացնենք կենտրոնին։ AOB անկյունը կլինի վորոնելի անկյունը, վորովհետև $\operatorname{ctg} AOB = \frac{ME}{R} = \frac{2R}{R} = 2$։ Փոփոխելով շառավղի յերկարությունը, կստանանք MOE յեռանկյան նման յեռանկյուն, այդ պատճառով MEO և, հետևաբար, AOB անկյունը չի փոխվի։



Գծ. 7.



Գծ. 8.

Օրինակ 3։ Պետք է կառուցել անկյունը, յեթե հայտնի յե, վոր նրա սեկանսը հավասար է $\frac{4}{3}$-ի։

Լուծում. Գծենք մի վորևե աղեղ և շառավիղներից մեկը, ասենք թե OA-ն, ընդունենք անշարժ և նրա ծայրից շոշափող տանենք։ Քանի վոր սեկանսը պետք է հավասար լինի $\frac{4}{3}$-ի, ապա շոշափողի ծայրը կենտրոնից $\frac{4}{3}$ շառավղի հեռավորություն պետք է ունենա։ Այդ նպատակին հասնելու համար վերցնենք $\frac{4}{3}$ AO-ին հավասար OE հատվածը և նրա ծայրը փոխադրենք շոշափողի վրա։ AOD կլինի վորոնելի անկյունը։ Ինչպես և նախորդ յերկու օրինակներում, կառուցման արդյունքը կախում չունի շառավղի յերկարությունից (գծ. 8)։

Առաջարկվում է, վոր աշակերտները իրենք կատարեն կառուցումները մյուս դեպքերում. օգտվելով, օրինակ. հետևյալ թվերով.

$$\cos x = \frac{3}{5},\ \operatorname{tg} x = \frac{4}{7} \text{ և } \operatorname{cosec} x = 2։$$

§ 11. *Այսպիսով յեռանկյունաչափական ֆունկցիայի յուրաքանչյուր արժեքի համար ստացվում է վորոշ սուր անկյուն, վորը կախում չունի շառավղի յերկարությունից. իսկ առաջ մենք ապացուցել ենք, վոր յուրաքանչյուր անկյան համապատասխանում է յեռանկյունաչափական ֆունկցիայի մի վորոշ արժեք, վորը նույնպես կախում չունի շառավղի յերկարությունից։ Այսպիսով կարելի յե ասել, վոր* սուր անկյունն ու նրա յեռանկյունաչափական ֆունկցիան լրիվ կերպով վորոշում են մեկը մյուսին։

§ 12. Միևնույն անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների առնչությունները. *Միևնույն անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների միջև հեշտ է նկատել շատ պարզ առնչություններ (նկ. 9)։*

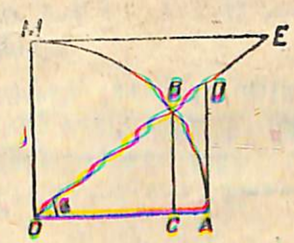
1) OBC *ուղղանկյուն յեռանկյունուց ունենք* $BC^2 + OC^2 = OB^2$։ *Բաժանելով այս հավասարության յերկու մասն էլ* R^2 *վրա կստանանք՝*

$$\left(\frac{BC}{R}\right)^2 + \left(\frac{OC}{R}\right)^2 = \left(\frac{OB}{R}\right)^2,$$

կամ

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1։ \qquad \text{(I)}$$

2) ODA և OBC *յեռանկյունների նմանությունից հետևում է վոր* $\frac{AD}{OA} = \frac{BC}{OC}$, *վորտեղ փոխարինելով* OA-*ն* R-*ով և բաժանելով յերկրորդ հարաբերության յերկու անդամներն էլ* R-*ի վրա, կստանանք՝*



Գծ. 9.

$$\frac{AD}{R} = \frac{\left(\frac{BC}{R}\right)}{\left(\frac{OC}{R}\right)},\ \text{կամ}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \qquad \text{(II)}$$

3) EOM և OBC եռանկյունների նմանությունից գտնում ենք՝ $\frac{ME}{OM}=\frac{OC}{BC}$, որից՝

$$\frac{ME}{R}=\frac{\left(\frac{OC}{R}\right)}{\left(\frac{BC}{R}\right)},$$ կամ

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \text{(III)}$$

4) ODA և OBC եռանկյունների նմանությունից գտնում ենք՝ $\frac{OD}{AO}=\frac{OB}{OC}$, այստեղից՝

$$\frac{OD}{R}=\frac{\left(\frac{OB}{R}\right)}{\left(\frac{OC}{R}\right)},$$ կամ

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},$$ որից՝

$$\sec\alpha\cdot\cos\alpha=1: \qquad \text{(IV)}$$

5) EOM և OBC եռանկյունների նմանությունից գտնում ենք՝ $\frac{OE}{OM}=\frac{OB}{BC}$, այստեղից՝

$$\frac{OE}{R}=\frac{\left(\frac{OB}{R}\right)}{\left(\frac{BC}{R}\right)},$$ կամ

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha},$$ որից՝

$$\operatorname{cosec}\alpha\cdot\sin\alpha=1: \qquad \text{(V)}$$

§ 13. Միևնույն անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների միջև գոյություն ունեն միայն հինգ իրարից անկախ առնչություններ: *Որպեսզի համոզվենք այդ բանում, սկսենք կառուցումից:*

Իրոք, բավական է գիտենանք մեկ ֆունկցիայի արժեքը, որպեսզի կարողանանք կառուցել անկյունը (§ 10), իսկ ստացված անկյունը որոշում է մնացած հինգ ֆունկցիաները: Այսպիսով, յեթե հայտնի յե ֆունկցիաներից մեկը, նրա միջոցով

կարող ենք գտնել մնացած հինգ ֆունկցիաները: Բայց հինգ անհայտներ որոշելու համար անհրաժեշտ է ունենալ մեկը մյուսից անկախ հինգ հավասարումներ: Յեթե այդպիսի հավասարումներ լինեյին վեց հատ, ապա բոլոր վեց ֆունկցիաների համար կստանայինք որոշ արժեքներ, այն ինչ, նրանք փոփոխվում են անկյան փոփոխության հետ միասին:

§ 14. *Բացի § 12-ի մեջ ստացված հինգ* **հիմնական** *բանաձևերից, օգտակար է հիշել նաև հետևյալ յերեքը, որ կարելի յե արտածել հիմնական բանաձևերից.*

1) Բազմապատկելով II և III հավասարությունների համապատասխան մասերը, կստանանք՝

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1: \qquad \text{(VI)}$$

2) Բաժանելով I հավասարությունն անդամ առ անդամ $\cos^2\alpha$-ի վրա և կիրառելով II և IV հավասարությունները, կստանանք (յեթե առաջին մասի գումարելիների տեղերը փոխենք)—

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha: \qquad \text{(VII)}$$

3) Բաժանելով I հավասարությունը $\sin^2\alpha$-ի վրա և կիրառելով III և V հավասարությունները, կստանանք՝

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha: \qquad \text{(VIII)}$$

Դիտողություն. 1. *VI բանաձևն անկախ կերպով կարելի յե ստանալ յեռանկյունների նմանությունից, իսկ VII և VIII բանաձևերը՝ Պյութագորի թեորեմի օգնությամբ:*

Դիտողություն 2. *Հիշելու համար նկատենք՝ յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների սովորական շարքի* —sin, cos, tg, ctg, sec, cosec— *մեջ ծայրից հավասարապես հեռացած ֆունկցիաների արտադրյալները հավասար են մեկի (տես IV, V և VI բանաձևերը):*

Հիմնական ֆունկցիաներ համարվում են sin-ը, cos-ը և tg-ը (դրանցից հասարակներն են sin-ն ու cos-ը), իսկ մյուս քանակությունները դրանց հակադարձ մեծություններն են.

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},\quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},\quad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}:$$

§ 15. *12-րդ և 14-րդ պարագրաֆներում ստացված բանաձևերի օգնությամբ հեշտ է գտնել բոլոր յեռանկյունաչափական* ֆունկցիաները, յեթե տված է նրանցից մեկը։ Այսպես օրինակ՝ յեթե տված է $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, ապա հաջորդաբար կստանանք.

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = ; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3},$$

$$\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha; \ \sec^2\alpha = \frac{25}{16}; \quad \sec\alpha = \frac{5}{4};$$

$$\sec\alpha \cdot \cos\alpha = 1; \ \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}; \ \cos\alpha = \frac{4}{5};$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha; \ \sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha; \ \sin\alpha = \frac{3}{5};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha \cdot \sin\alpha = 1; \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}; \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{5}{3}.$$

Վերցնենք մի ուրիշ օրինակ. արտահայտենք բոլոր ֆունկցիաները $\sin\alpha$-ով, կստանանք՝

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}; \quad \sec\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

$$\text{և } \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

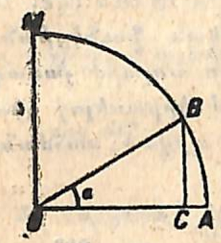
§ 16. OBC, ODA և EOM յեռանկյունների նմանությունից (գծ. 9), ի միջի այլոց յերևում է, վոր վեց յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները վոչ այլ ինչ են, յեթե վոչ ուղղանկյուն յեռանկյան կողմերի զույգ առ զույգ վերցրած վեց հնարավոր հարաբերությունները։

Յեվ իրոք. OBC յեռանկյան կողմերից կարելի յե կազմել հետևյալ հարաբերությունները՝ $\frac{BC}{OB}, \frac{OC}{OB}, \frac{BC}{OC}, \frac{OC}{BC}, \frac{OB}{OC}$ և $\frac{OB}{BC}$։ Բայց գծելով ABM աղեղը և կառուցելով ODA և EOM յեռանկյունները, մենք կարող ենք այդ հարաբերությունները փոխարինել հետևյալ հարաբերություններով՝ $\frac{BC}{R}, \frac{OC}{R}, \frac{AD}{R}, \frac{ME}{R}, \frac{OD}{R}$ և $\frac{OE}{R}$։

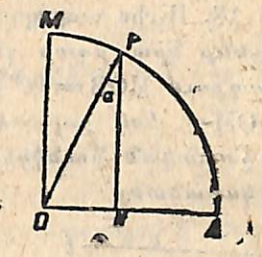
Այսպիսի փոխարինումը մեծ առավելություններ ունի, վորոնցից մեկն էլ այն է, վոր հարաբերություններն ստանում են ընդհանուր հայտարարի բերված կոտորակի տեսք, վորը հեշտացնում է այդ հարաբերությունների համեմատությունն իրար հետ։

§ 17. Լրացուցիչ անկյունների յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների առնչությունները. Լրացուցիչ կոչվում են այն անկյունները, վորոնց գումարը հավասար է 90°-ի։

Օրինակ՝ α և $90^\circ - \alpha$; α և $\frac{\pi}{2} - \alpha$; 26° և 64°։



Գծ. 10.



Գծ. 11.

10-րդ գծագրի վրա կառուցված է $\angle AOB = \alpha$ և նրա սինուսի և կոսինուսի գծերը, այնպես, վոր $\sin\alpha = \frac{BC}{R}$; $\cos\alpha = \frac{OC}{R}$։

11-րդ գծագրի վրա կառուցված է $\angle AOP = 90^\circ - \alpha$ և նրա սինուսի ու կոսինուսի գծերը, այնպես, վոր $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{NP}{R}$ և $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{ON}{P}$։

Քանի վոր OBC և NOP յեռանկյունները հավասար են, ապա՝ $NP = OC$; $ON = BC$; հետևաբար՝

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha, \tag{1}$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha. \tag{2}$$

Մյուս ֆունկցիաների համար, գծագրերը նոր գծերով չբարդացնելու նպատակով, մենք կկիրառենք հանրահաշվական յեղանակը, այսինքն, արտածումները կկատարենք (1) և (2) հավասարություններից, հիմնվելով այդ ֆունկցիաների sin-ից ու cos-ից ունեցած առնչությունների վրա (§ 12), կստանանք.

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha; \tag{3}$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha; \tag{4}$$

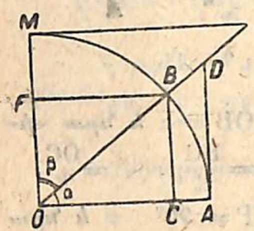
$$\sec(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha; \tag{5}$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha. \tag{6}$$

Այստեղից նկատում ենք՝ անկյան ֆունկցիան հավասար է լրացուցիչ անկյան զուգամետ ֆունկցիային։

Այսպես, օրինակ՝ $\operatorname{tg} 63^\circ = \operatorname{ctg} 27^\circ$, $\sec \frac{\pi}{6} = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{3}$ և այլն։

§ 18. **Ուրիշ ապացույց.** Վերցնենք $\angle AOB = \alpha$ (գծ. 12) և կառուցենք նրա բոլոր յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները։ Այդ դեպքում $MOB = 90^\circ - \alpha$ անկյան համար անշարժ շառավիղը կլինի OM-ը, իսկ շարժականը՝ OB-ն։ Այժմ կիրառելով յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների § 5-ի մեջ տրված սահմանումները, կստանանք՝



Գծ. 12

$$\sin \alpha = \frac{BC}{R} = \frac{OF}{R} = \cos (90^\circ - \alpha);$$

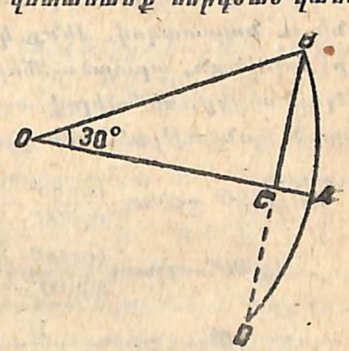
$$\cos \alpha = \frac{OC}{R} = \frac{BF}{R} = \sin (90^\circ - \alpha);$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AD}{R} = \operatorname{ctg} (90^\circ - \alpha);$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{ME}{R} = \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha)։$$

§ 19. **Տված անկյունով յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները հաշվելու օրինակներ.** Մեկ կողմ թողնելով ընդհանուր յեղանակը, այստեղ վերցնենք մի քանի այնպիսի դեպքեր, վորոնք հեշտ լուծվում են յերկրաչափության օգնությամբ։

1) Տված է $30^\circ \left(\frac{\pi}{6}\right)$ անկյուն (գծ. 13)։ Սինուսի գիծը լրացնենք մինչև լար։ Այդ դեպքում կստանանք ներգծած կանոնավոր վեց անկյան կողմը, վորը հավասար է շառավղին։ Այսպիսով $BC = \frac{R}{2}$, և հետևաբար, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$։ Մնացած հինգ ֆունկցիաները կգտնենք առնչության բանաձևերի օգնությամբ.



Գծ. 13

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}\left(\text{կամ } \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ}\right) = \sqrt{3};$$

2) $60^\circ \left(\frac{\pi}{3}\right)$ անկյան համար ունենք՝

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}a_3}{R} = \frac{\frac{1}{2}R\sqrt{3}}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

ապա, վարվելով այնպես, ինչպես նախորդ օրինակում, կստանանք՝

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3) Վերցնենք $45^\circ \left(\frac{\pi}{4}\right)$ անկյունը։ Կիրառելով § 17-ը, կունենանք՝ $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$, $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ$։ Յեթե $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$, ապա $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, հետևաբար և $\operatorname{ctg} 45^\circ = 1$։ Այնուհետև կստանանք՝

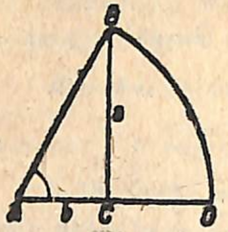
$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\operatorname{cosec} 45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$ վորից հետևում է, վոր $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4) Յեթե անկյունը հավասար է $18^\circ \left(\frac{\pi}{10}\right)$, ապա սինուսի գիծը հավասար կլինի ներգծած կանոնավոր տասնանկյան կողմի կեսին, և քանի վոր այդ կողմի արտահայտությունն է $\frac{R}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$, ապա սինուսի գիծը հավասար կլինի $\frac{R}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right)$ և $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right)$։

§ 20. **Ուղղանկյան յեռանկյան կողմերի յեվ անկյունների առնչությունները.** Այժմ օրինակով ցույց տանք, թե յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների օգնությամբ ինչպես են արտահայտվում յեռանկյան անկյունների ու կողմերի առնչությունները։ Դրա համար, վորպես ամենից պարզ և հիմնական դեպք, վերցնենք ուղղանկյուն յեռանկյունը։

Սկզբից պայմանավորվենք կատարել հետևյալ նշանակումները։ Յեռանկյան կողմերի յերկարությունները նշանակենք a, b և c տառերով, իսկ դրանց դիմաց գտնվող անկյունները համապատասխանաբար A, B և C տառերով, ընդ վորում բոլոր կողմերը պետք է չափված լինեն միևնույն միավորով։ Ուղղանկյուն յեռանկյան մեջ ուղիղ անկյունը նշանակենք C տառով։

Այժմ անցնենք բանաձևերի արտածմանը։



Գծ. 14.

I. 14-րդ գծագրի վրա գծելով c շառավղով BD աղեղը, § 5-ի հիման վրա կունենանք՝

$$\frac{a}{c}=\sin A; \qquad (1)$$

$$\frac{b}{c}=\cos A; \qquad (2)$$

Այսինքն՝ էջի բաժանումը ներքնաձիգի վրա տալիս է 1) սուր անկյան սինուսը, երբ այդ անկյան դիմացի էջը ենք բաժանում, կամ 2) սուր անկյան կոսինուսը, երբ կից էջ ենք բաժանում։

II. Բաժանելով (1) հավասարությունը (2)-ի վրա և հետո ընդհակառակը՝ (2)-ը (1)-ի վրա, կստանանք.

$$\frac{a}{b}=\operatorname{tg} A; \qquad (3)$$

$$\frac{b}{a}=\operatorname{ctg} A. \qquad (4)$$

Այսինքն՝ էջն էջի վրա բաժանելուց ստանում ենք 1) սուր անկյան տանգենսը, եթե այդ սուր անկյան դիմացի էջն ենք բաժանում կից էջի վրա, կամ 2) սուր անկյան կոտանգենսը, եթե կից էջն ենք բաժանում դիմացի էջի վրա։

§ 21. § 20-ի (1) հավասարությունից հետևում է, որ $a=b\cdot\sin A$, բայց $\sin A$-ն § 17-ի հիման վրա կարելի է փոխարինել $\operatorname{coc} B$-ով, որովհետև $A+B=90°$. այդ դեպքում կունենանք $a=c\cdot\operatorname{cs} B$։

Այսպիսով ստացանք, որ էջը հավասար է ներքնաձիգին՝ բազմապատկած այդ էջի դիմացի անկյան սինուսով կամ կից անկյան կոսինուսով։

§ 20-ի (3)-րդ հավասարությունից հետևում է, որ $a=b\cdot\operatorname{tg}A$, և փոխարինելով $\operatorname{tg} A$-ն $\operatorname{ctg} B$-ով, կստանանք՝ $a=b\cdot\operatorname{ctg} B$։

Այսպիսով ստացանք՝ էջը հավասար է մյուս էջին՝ բազմապատկած առաջին էջի դիմացի անկյան տանգենսով կամ կից անկյան կոտանգենսով։

$\frac{a}{c}=\sin A$ և $\sin A=\cos B$ հավասարությունների օգնությամբ կստանանք՝

$$c=\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\cos B},$$

Այսպիսով ստացանք, որ ներքնաձիգը հավասար է էջերից մեկին՝ բաժանած այդ էջի դիմացի անկյան սինուսի կամ կից անկյան կոսինուսի վրա։

§ 22. Եռանկյունների լուծումը պարզաբանող օրինակներ. գաղափար աղյուսակների մասին։ Եռանկյունների լուծման համար, բացի եռանկյունաչափական բանաձևերից, անհրաժեշտ է ունենալ նաև աղյուսակներ, որոնցից տված անկյունով կարողանանք գտնել եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները և, ընդհակառակը, տված եռանկյունաչափական ֆունկցիայով՝ կարողանանք գտնել անկյունը։ Այդպիսի աղյուսակները եռանկյունաչափության համար չափազանց կարևոր են։ Ամենից շատ հայտնի են Վ. Բրադիսի «Մաթեմատիկական քառանիշ աղյուսակները» և Յե. Պրժևալսկու հնգանիշ աղյուսակները։

Օ ր ի ն ա կ 1. Ենթադրենք, որ ABC ուղղանկյուն եռանկյան մեջ տված է՝ $AB=5$ սմ և $\angle A=24°$։ Պահանջվում է լուծել եռանկյունը, այսինքն հաշվել BC, AC կողմերը և B անկյունը.

Լ ու ծ ու մ. $B=90°-A=60°$։ Ապա § 21-ի օգնությամբ գտնում ենք՝ $a=c\cdot\sin A=5\cdot\sin 24°$ և $b=c\cdot\cos A=5\cdot\cos 24°$. այժմ տեղադրելով աղյուսակից $\sin 24°$ և $\cos 24°$-ը, կստանանք՝ $a=5\cdot0{,}407=2{,}032$ և $b=5\cdot0{,}914=4{,}57$։ Այսպիսով ստացանք, $BC=2{,}035$ սմ, իսկ $AC=4{,}57$ սմ։

Ստուգենք արդյունքը. $a^2=2{,}035^2=4{,}1412$, $b^2=4{,}57^2=20{,}8849$, ուստի $a^2+b^2=25{,}0261$, այն ինչ պետք է լիներ 25։ Պատասխանի այս անճշտությունն առաջանում է այն բանից, որ ֆունկցիաների մեր վերցրած արժեքները մոտավոր թվեր էին միայն։

Օ ր ի ն ա կ 2. Դիցուք ուղղանկյուն եռանկյան մեջ տված են՝ $a=14$ և $b=15$։ Պահանջվում է գտնել ներքնաձիգը և անկյունները։

Լ ու ծ ու մ. § 20-ից ունենք՝ $\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}=\frac{14}{15}$. հաշվելով այս հարաբերությունը երեք տասնորդական նիշի մոտավոր ճշտությամբ, կստանանք՝ $\operatorname{tg} A=0{,}933$։ Այս տանգենսին աղյուսակում համապատասխանում է 43° անկյունը։ Այդ նշանակում է, որ $A=43°$, ուստի $B=90°-A=47°$։

Այժմ գտնենք եռանկյունաչափական եղանակով. $c=\frac{a}{\sin A}=\frac{14}{\sin 43°}$. աղյուսակից տեղադրելով $\sin 43°$-ը, կունենանք՝ $c=14:0{,}682=20{,}528$։

Կատարենք ստուգում. Պյութագորասի թեորեմի հիման վրա կունենանք՝ $c=\sqrt{14^2+15^2}=20,518$; իսկ առաջ ստացել եյինք 20,528:

Ստուգումը ցույց է տալիս, վոր կատարված հաշվումները չունեն զգալի ճշտություն։ Ավելի մեծ ճշտության հասնելու համար պետք է վերցնել ավելի մանրամասն աղյուսակներ, վորոնք ավելի մեծ թվով տասնորդական նշաններ ունենան։ Բայց այդ դեպքում հաշվումները կդժվարանան, այդ պատճառով էլ գերադասում են այդ հաշվումները կատարել լոգարիթմների օգնությամբ. իսկ դրա համար հարմար է աղյուսակներում ունենալ վոչ թե յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները, այլ այդ արժեքների լոգարիթմները։ Գործնականում այդպես էլ վարվում են, իսկ բնական յեռանկյունաչափական մեծությունների [1]) աղյուսակները համեմատաբար քիչ են օգտագործվում։

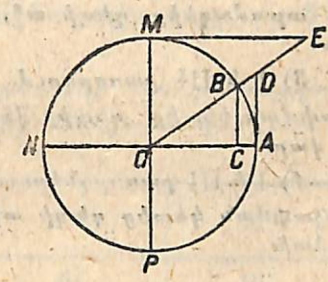
Նախորդ օրինակում մենք բոլորովին չխոսեցինք շեղանկյուն յեռանկյունների մասին։ Նրանց լուծումը շատ հեշտ է վերածել ուղղանկյուն յեռանկյունների լուծման՝ բարձրություն տանելով, բայց հետագայում կտեսնենք, վոր ավելի ձեռնտու է շեղանկյուն յեռանկյունների համար հատուկ թեորեմներ օգտագործել։

[1]) Ֆունկցիաները լոգարիթմած արժեքներից զանազանելու համար, նրանց փոփոխության չենթարկված արժեքները կոչվում են բնական արժեքներ։

II. 90°-ԻՑ ՄԻՆՉԵՎ 360° ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆՆԵՐԸ

§ 23. **Նախնական դիտողություններ.** Քառորդ շրջանի փոխարեն (տես. էջ 9 գծ. 1), այժմ վերցնենք լրիվ շրջան (գծ. 15), տանենք OA անշարժ շառավիղը և դրան ուղղահայաց OM շառավիղը և այդ յերկուսն էլ շարունակենք կենտրոնից այն կողմ։ AN և MP տրամագծերը կարճության համար կանվանենք հորիզոնական տրամագիծ և ուղղաձիգ տրամագիծ, իսկ ստացված քառորդ շրջանները (կվադրանտներ) կանվանենք այսպես. AOM-ն՝ առաջին քառորդ, MON՝ յերկրորդ քառորդ, NOP-ը՝ յերրորդ, POA-ն՝ չորրորդ քառորդ։

Անկյուններն ու աղեղները կվերցնենք այնպես, ինչպես առաջ, այսինքն OA ընդհանուր սկզբից դեպի վեր (ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ)։



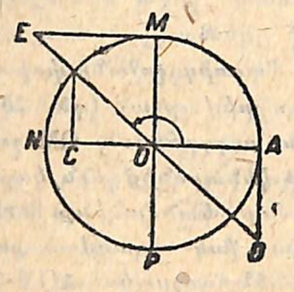
Գծ. 15.

§ 24. **Յեռանկյունաչափական գծերի կառուցումը.** Այն սահմանումները, վոր մենք § 5-ում տվինք սուր անկյան յեռանկյունաչափական գծերին, այժմ մենք կտարածենք ուղիղ անկյունից մեծ անկյունների յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների վրա։

Վերցնենք AOB բութ անկյունը (գծ. 16)։ Այդ անկյան սինուսի գիծը կլինի շարժական շառավղի ծայրից անշարժի շարունակության վրա իջեցրած BC ուղղահայացը։ Կոսինուսի գիծը կլինի OC-ն։ Տանգենսի գիծը կստանանք, յեթե A կետից տանենք շոշափող և OB շառավիղը շարունակենք այնպես, վոր հատվի այդ շոշափողի հետ։ Դրա համար շոշափողը պետք է ուղղել A կետից դեպի ներքև, իսկ OB շառավիղը շարունակել կենտրոնից՝ OD-ի ուղղությամբ։ Տանգենսի գիծը կլինի AD-ն։ Կոտանգենսի գիծը ստանալու համար M կետից պետք է տանել շոշափող՝ մինչև OB շառավղի շարունակության հետ հատվելը.

իսկ վորպեսզի այդ հատումը տեղի ունենա, անհրաժեշտ է շոշափող ուղղել M կետից դեպի ձախ։ Այդ դեպքում կոտանգենսի գիծը կլինի ME-ն։ Սեկանսի և կոսեկանսի գծերը կլինեն OD-ն ու OE-ն։

Ճիշտ նույն ձևով են կառուցվում յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներն այն դեպքերում, յերբ շարժական շառավիղը գտնվում է III և IV քառորդներում (գծ. 17 և 18)։



Գծ. 16.

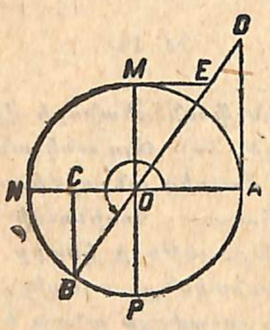
Բաղդատելով 15-րդ գծագիրը մյուս յերեք գծագրերի հետ, կնկատենք, վոր նույնանուն յեռանկյունաչափական գծերը նրանց վրա նույն դասավորությունը չունեն, այն է՝

1) I և II քառորդներում սինուսի գիծը (BC) գտնվում է հորիզոնական տրամագծից վեր, իսկ III և IV քառորդներում՝ նրանց վրա։

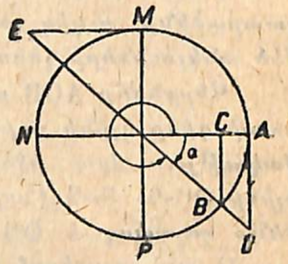
2) I և IV քառորդներում կոսինուսի գիծը (OC) գտնվում է ուղղաձիգ տրամագծից դեպի աջ, իսկ II և III քառորդներում՝ դեպի ձախ։

3) I և III քառորդում տանգենսի գիծը՝ AD-ն ուղղված է շոշափման կետից դեպի վեր, իսկ II և IV քառորդներում՝ դեպի վար։

4) I և III քառորդներում կոտանգենսի գիծը՝ ME-ն ուղղված է շոշափման կետից դեպի աջ, իսկ II և IV քառորդներում՝ դեպի ձախ։



Գծ. 17.



Գծ. 18.

5) I և IV քառորդներում սեկանսի (OD) գիծն ուղղված է կենտրոնից շարժական շառավղի կողմը, իսկ II և III քառորդներում՝ շարժական շառավղի հակառակ ուղղությամբ։

6) I և II քառորդներում կոսեկանսի (OE) գիծն ուղղված է կենտրոնից շարժական շառավղի կողմը, իսկ III և IV քառորդներում՝ կենտրոնից շարժական շառավղի հակառակ ուղղությամբ։

Այսպիսով, յերբ անկյունը փոփոխվում է 90°-ից մինչև 360°, նրա յեռանկյունաչափական գծերը յերկու տեսակի ուղղություն են ստանում — կամ այն ուղղությունը, վոր ունի տվյալ ֆունկցիան առաջին քառորդում, կամ դրան հակառակ ուղղությունը։

§ 25. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ կազմելը. Նախորդ պարագրաֆում ասացինք, վոր յուրաքանչյուր յեռանկյունաչափական գիծ կարող է ունենալ յերկու հակադիր ուղղություն, այն է՝ ուղիղ, այսինքն այն ուղղությունը, վոր ունի տվյալ յեռանկյունաչափական գիծն առաջին քառորդում, և դրա հակադիր ուղղությունը։ Դրանցից թե մեկը և թե մյուսը կախում ունի անկյան մեծությունից, այդ պատճառով էլ, 0°-ից մինչև 360° անկյունների ֆունկցիաները կազմելիս, մենք պետք է տարբերենք նաև յեռանկյունաչափական գծերի ուղղությունները։ Այդ նպատակի համար ոգտվում են պլյուս և մինուս նշաններով։ Յերբ յեռանկյունաչափական գծի ուղղությունն ուղիղ է, ապա նրա առջև դնում են պլյուս (+) նշանը, իսկ յերբ հակադիր ուղղություն է՝ մինուս (—) նշանը։

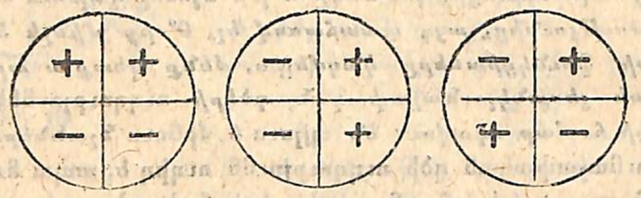
Այդ յեղանակով յուրաքանչյուր քառորդի համար ստացվում է յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների հետևյալ կազմը (15—18 գծագրից)։

	I	II	III	IV
sin	$+\frac{BC}{R}$	$+\frac{BC}{R}$	$-\frac{BC}{R}$	$-\frac{BC}{R}$
cos	$+\frac{OC}{R}$	$-\frac{OC}{R}$	$-\frac{OC}{R}$	$+\frac{OC}{R}$
tg	$+\frac{AD}{R}$	$-\frac{AD}{R}$	$+\frac{AD}{R}$	$-\frac{AD}{R}$
ctg	$+\frac{ME}{R}$	$-\frac{ME}{R}$	$+\frac{ME}{R}$	$-\frac{ME}{R}$
sec	$+\frac{OD}{R}$	$-\frac{OD}{R}$	$-\frac{OD}{R}$	$+\frac{OD}{R}$
cosec	$+\frac{OE}{R}$	$+\frac{OE}{R}$	$-\frac{OE}{R}$	$-\frac{OE}{R}$

Այսպիսով 0°-ից մինչև 360° անկյունների յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներն արդեն կազմված են յերկու ելեմենտից՝ նշանից և բացարձակ արժեքից, և հետևաբար դրանք կլինեն արդեն հանրահաշվական թվեր։

Այսպես, օրինակ՝ յեթե 17-րդ գծագրի վրա $\angle AOB = \alpha$, $R = 1{,}2$ սմ *և* $BC = 0{,}9$ սմ, *ապա* $\sin\alpha = -\frac{3}{4}$։

Վերջապես, ինչ վերաբերում է յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների սահմանման ընդհանրացումին, կարելի յե արտահայտել այն այսպես՝ յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները այն դրական կամ բացասական թվերն են, վորոնք ցույց են տալիս յեռանկյունաչափական գծերի հարաբերությունները շառավղին։



Գծ. 19.

19-րդ գծագրում ցույց են տրված յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների նշանները ըստ քառորդների։

Յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների կախում չունենալը շառավղից (§ 6)—գոյություն ունի և այժմ. նշանների համար այդ ակներև է, իսկ բացարձակ մեծությունների համար ապացուցվում է այնպես, ինչպես առաջ։

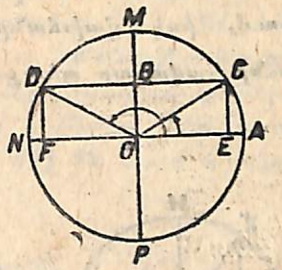
§ 26. Տված յեռանկյունաչափական ֆունկցիայով անկյուն կառուցելը. *Ֆունկցիաների արժեքներն այժմ կարելի յե վերցնել և՛ դրական, և՛ բացասական։ Կառուցման մանրամասնությունները և արդյունքը, ինչպես կտեսնենք, այստեղ մի քիչ տարբեր կլինի § 10-ից։*

Կառուցման համար մենք այժմ կօգտվենք լրիվ շրջանով (ցանկացած շառավղով), վերցնելով նրա մեջ յերկու գլխավոր տրամագծերը (հորիզոնական և ուղղաձիգ)։ Ֆունկցիայի նշանը ցույց կտա մեզ յեռանկյունաչափական գծի ուղղությունը, իսկ բացարձակ արժեքը՝ նրա հարաբերությունը շառավղին։

Անցնենք օրինակներին։

Օ ր ի ն ա կ 1. $\sin x = \frac{1}{2}$։

Լ ու ծ ու մ. Քանի վոր տված սինուսը դրական է, ապա սինուսի գիծը պետք է գտնվի վերևի կիսաշրջանում և նրա յերկարությունը հավասար պետք է լինի $\frac{1}{2}$ *շառավղի։ Այդ պատճառով խնդրի լուծման համար վարվում ենք հետևյալ կերպ (գծ. 20). հորիզոնական տրամագծից վերև* $OB = \frac{R}{2}$ *հեռավորությունից տանում ենք այդ տրամագծի զուգահեռը՝ մինչև շրջագծի հետ հատվելը։ Այդ զուգահեռը շրջանագծի հետ կհատվի յերկու կետերում (C և D), վորոնցով և վորոշվում են յերկու անկյունները։ Կստանանք՝*



Գծ. 20.

$$x_1 = \angle AOC \text{ և } x_2 = AOD\text{։ Իրոք՝}$$

$$\sin AOC = \frac{CE}{R} = \frac{\frac{1}{2}R}{R} = \frac{1}{2}; \qquad \sin AOD = \frac{DE}{R} = \frac{\frac{1}{2}R}{R} = \frac{1}{2}\text{։}$$

Օ ր ի ն ա կ 2. $\cos x = -\frac{3}{5}$։

Լ ու ծ ու մ. Կոսինուսի գիծը պետք է գտնվի կենտրոնից դեպի ձախ և նա պետք է կազմված լինի այնպիսի յերեք մասերից, ինչպիսի հինգ մասերից կազմված է շառավիղը։ Այդ պատճառով վերցնում ենք $OE = \frac{3}{R}R$, *վորից հետո E կետից տանում ենք հորիզոնական՝ տրամագծին ուղղահայաց (կամ զուգահեռ MP)-ին), մինչև շրջանագծի հետ հատվելը. հատվում է յերկու կետերում (F և C)։ Վորոնելի անկյունները կլինեն՝*

$$x_1 = \angle AOF \text{ և } x_2 = \angle AOC \ (> 180°\text{-ից}) \ (\text{գծ. } 21)$$

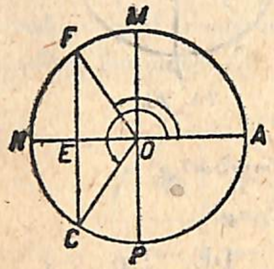
Օ ր ի ն ա կ 3. $\operatorname{tg} x = 1$։

Լ ու ծ ու մ. Նախ կառուցենք տանգենսի գիծը, վորը պետք է ուղղված լինի A կետից վեր (քանի վոր տված տանգենսը դրական է), իսկ նրա յերկարությունը պետք է հավասար լինի շառավղին. տանենք $AB = R$ *շոշափողը։ B կետով պետք է անցնի շարժական շառավղի շարունակությունը, ընդ վորում այդ շարունակությունը կարող է ուղղված լինել դեպի առաջ, կամ դեպի յետ։ Այդ պատճառով B կետից տանենք կենտրոնով անցնող BCOD հատողը (գծ. 22)։ Կստանանք յերկու անկյուն՝*

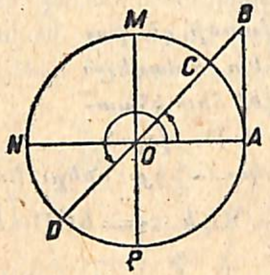
$$x_1 = \angle AOC \text{ և } x_2 = \angle AOD \ (> 180°)\text{։}$$

Օրինակ 4. $\operatorname{cosec} x = -\frac{4}{3}$։

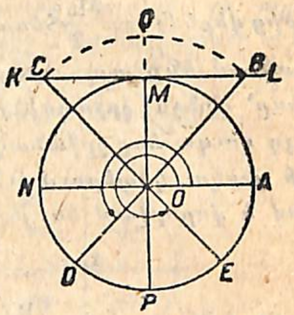
Լուծում. Կոսեկանսի գծի սկիզբը պետք է լինի կենտրոնում, իսկ վախճանը՝ KL շոշափողի վրա, իսկ յերկարությունը հավասար պետք է լինի $\frac{4}{3}$R-ի։ Այդ պատճառով O կենտ-



Գծ. 21.



Գծ. 22.



Գծ. 23.

րոնից, $OQ = \frac{4}{3}$ R շառավղով, գծում ենք աղեղ (գծ. 23), վորը KL ը կհատի B և C կետերում։ OB-ը և OC-ն կոսեկանսի գծի յերկու հնարավոր դիրքերն են։ Քանի վոր տված կոսեկանսը բացասական է, պետք է BO-ն և CO-ն դարձնել շարժական շառավղի հակադիր շարունակությունը, այնպես, վոր շարժական շառավղի վորոնելի դիրքերը կլինեն OD-ն և OE-ն, իսկ անկյունները՝

$$x_1 = \angle AOD (> 180^\circ) \text{ և } x_2 = \angle AOE (> 180^\circ)։$$

Թողնում ենք, վոր մնացած դիրքերում աշակերտները կատարեն կառուցումները (վերցնելով, $\sin x = -\frac{3}{5}$; $\cos x = \frac{3}{4}$;

$\operatorname{tg} x = -2$; $\operatorname{ctg} x = \frac{7}{4}$; $\operatorname{ctg} x = -3$; $\sec x = 2$; $\operatorname{cosec} x = \frac{5}{4}$)։

Ինչ վերաբերվում է կառուցումների արդյունքներին, կարելի յե նկատել, վոր այժմ յուրաքանչյուր դեպքի համար յերկու պատասխան ենք ստանում, վորը համապատասխանում է այն բանին, վոր § 25-ի մեջ տրված աղյուսակի մեջ յուրաքանչյուր ֆունկցիայի ամեն մի նշանը կրկնվում է յերկու քառորդների մեջ։

§ 27. § 12-ի բանաձևերի ընդհանրացումը. *Ապացուցենք, վոր I քառորդի համար մեր արտածած միևնույն անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների առնչությունները ճիշտ են նաև մյուս քառորդների համար։*

12-րդ պարագրաֆում մեր օգտագործած OBC, ODA և EOM յեռանկյունների ուղղանկյուն լինելն ու նմանությունը գոյություն ունի վոչ միայն I քառորդում, այլև մնացյալ քառորդներում (գծ. 15—18), այդ պատճառով էլ § 12-ում մեր ստացած յերկրաչափական առնչությունները *ուժի մեջ են մնում և այստեղ։ Այսպիսով բոլոր քառորդների մեջ.*

$$\left(\frac{BC}{R}\right)^2 + \left(\frac{OC}{R}\right)^2 = 1; \qquad (1)$$

$$\frac{AD}{R} = \frac{BC}{R} : \frac{OC}{R}; \qquad (2)$$

$$\frac{ME}{R} = \frac{OC}{R} : \frac{BC}{R}; \qquad (3)$$

$$\frac{OD}{R} \cdot \frac{OC}{R} = 1; \qquad (4)$$

$$\frac{OE}{R} \cdot \frac{BC}{R} = 1։ \qquad (5)$$

Այստեղ ունենք ֆունկցիաների բացարձակ արժեքները *միայն. վորպեսզի ֆունկցիաներն ունենանք, պետք է բացարձակ արժեքների առաջ դնենք նաև ֆունկցիաների նշանները։ Բայց նայելով § 25-ի աղյուսակին, ըստ առանձին քառորդների, մենք կնկատենք, վոր պահանջվող նշանների միացումից (1) - (5) հավասարությունները չեն խախտվի։*

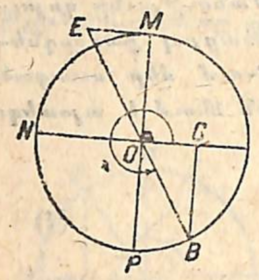
Իրոք, (1) հավասարության փակագծերի մեջ կարելի է գրել նշաններ, վորովհետև ունենք զույգ աստիճաններ։ (2) և (3) բանաձևերը չեն խախտվի, վորովհետև աջ մասում բացակայող նշանների «քանորդը» միշտ նույնն է, ինչ վոր ձախ մասում բացակայող նշանը[1]*. (4) և (5) հավասարությունները չեն խախտվի, վորովհետև բացակայող նշանները միշտ միատեսակ են։*

Այսպիսով, I—V (§ 12) բանաձևերը տարածվում են նաև ուզիղ անկյունների վրա։ Այդ ճիշտ կլինի նաև VI—VII բանաձևերի համար, վորովհետև դրանք ստացվում են առաջին հինգ բանաձևերից՝ վորպես նրանց անմիջական հետևանքներ։

[1]) *§ 25-ի աղյուսակից յերևում է՝ վորտեղ sin-ն և cos-ը միատեսակ նշան ունեն (I և III), այնտեղ tg-ն և ctg-ը դրական են, իսկ այնտեղ, վորտեղ sin-ն ու cos-ը տարբեր նշաններ ունեն (II և IV), այնտեղ tg-ն ու ctg-ը բացասական են։*

Օրինակ. Պարզ լինելու համար, դեպքերից գոնե մեկն ուսումնասիրենք մանրամասնորեն։ Արտածենք, օրինակ, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ բանաձևը՝ IV քառորդի համար։

24-րդ գծագրից կստանանք՝



Գծ. 24.

$$\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{ME}{R};\quad \cos\alpha = +\frac{OC}{R} \text{ և}$$

$$\sin\alpha = -\frac{BC}{R}\text{։} \qquad \text{(a)}$$

Քանի որ $\triangle OME \backsim \triangle OBC$, ապա $\frac{ME}{OM} = \frac{OC}{BC}$, իսկ սրանից՝

$$\frac{ME}{R} = \frac{\left(\frac{OC}{R}\right)}{\left(\frac{BC}{R}\right)}\text{։} \qquad \text{(b)}$$

Կցադրենք այստեղ մեզ անհրաժեշտ նշանները. այդ նշաններն այնպիսի նշաններ են, որոնցից հավասարությունը չի խախտվի [տես (a)]. կստանանք՝

$$-\frac{ME}{R} = \frac{\left(+\frac{OC}{R}\right)}{\left(-\frac{BC}{R}\right)},\ \text{այսինքն՝}\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\text{։}$$

§ 28. I—VIII բանաձևերի կիրառումը. Ինչպես օրինակները ցույց կտան, այս կիրառումները մի քիչ զանազանվում են § 15-ից։

Օրինակ 1. Պետք է գտնել cosec α-ն, յեթե α-ն վերջանում է IV քառորդում[1] և $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{15}{8}$։

Լուծում. VIII բանաձևի համաձայն ունենք՝ $\operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1 + \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{289}{64}$. Քանի որ cosecans-ը IV քառորդում բացասական է, ապա կարող ենք գրել՝ $\operatorname{cosec}\alpha = -\sqrt{\frac{289}{64}} = -\frac{17}{8}$։

Օրինակ 2. cos α-ն պետք է արտահայտել sin α-ով։

Լուծում. I բանաձևից կստանանք՝ $\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$. Քանի որ կոսինուսը կարող է ստանալ թե՛ դրական և թե՛ բացասական

1) Այսինքն α անկյան շարժական շառավիղը գտնվում է IV քառորդում։

արժեքներ, իսկ նշանի ընտրության համար մենք այս խնդրում տվյալներ չունենք, ապա ընդունում ենք, որ.

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}\text{։}$$

Օրինակ 3. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$։ Պետք է գտնել մյուս ֆունկցիաները։

Լուծում. Հաշվենք այն կարգով ինչ կարգով հաշվեցինք § 15-ում, բայց, սեկանսը որոշելիս, այժմ արմատ ենք հանում նշաններով և յերկու նշանն էլ պահում ենք, որովհետև բացասական տանգենսի դեպքում սեկանսը կարող է լինել և՛ դրական (IV քառորդ), և՛ բացասական (II քառորդ)։ Այդ պատճառով յերկակի նշան՝ ենք ստանում և հետագայում։ Վերջնականապես կունենանք.

$$\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3};\quad \sec\alpha = \pm\frac{5}{4}\quad \cos\alpha = \pm\frac{4}{5};\quad \sin\alpha = \pm\frac{3}{5};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \pm\frac{5}{3},$$

կամ ամեն մի պատասխանն առանձին գրելով՝

1) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3},\quad \sec\alpha = +\frac{5}{4},\quad \cos\alpha = +\frac{4}{5},\quad \sin\alpha = -\frac{3}{5},$

$\operatorname{cosec}\alpha = -\frac{5}{3};$

2) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3},\quad \sec\alpha = -\frac{5}{4},\quad \cos\alpha = -\frac{4}{5},\quad \sin\alpha = +\frac{3}{5},$

$\operatorname{cosec}\alpha = +\frac{5}{3}$։

(Առաջին պատասխանը վերաբերում է IV քառորդին, իսկ յերկրորդը՝ II քառորդին)։

§ 29. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների փոփոխությունները, յերբ անկյունն աճում է 0°-ից մինչև 360°։ Անկյան 0°-ից մինչև 90° փոփոխվելու դեպքն արդեն ուսումնասիրել ենք առաջ՝ § 9-ի մեջ։ Անկյան 90°-ից մինչև 180°, 180°-ից մինչև 270° և 270°-ից մինչև 360° փոփոխվելու դեպքերի համար օգտվում ենք 15-րդ, 16 րդ և 17-րդ գծագրերից (§ 24)։ Նախորոք որոշելով ֆունկցիաների նշանները, նրանց բացարձակ արժեքների մասին դատում ենք այնպես, ինչպես § 9-ում։ Վերջնական արդյունքները բերված են ներքևի աղյուսակում։ Յուրաքանչյուր քառորդի համար նշված են գումարների և ֆունկցիայի սահմանային արժեքները միայն։ Այդ արժեքների մեջ ֆունկցիան կամ միայն նվազում է, կամ միայն աճում է։

	I	II	III	IV
	$0 \ldots 90^\circ$ $\left(0 \ldots \frac{1}{2}\pi\right)$	$90^\circ \ldots 180^\circ$ $\left(\frac{1}{2}\pi \ldots \pi\right)$	$180^\circ \ldots 270^\circ$ $\left(\pi \ldots \frac{3}{2}\pi\right)$	$270^\circ \ldots 360^\circ$ $\left(\frac{3}{2}\pi \ldots 2\pi\right)$
sin	$0 \ldots +1$	$+1 \ldots 0$	$0 \ldots -1$	$-1 \ldots 0$
cos	$+1 \ldots 0$	$0 \ldots -1$	$-1 \ldots 0$	$0 \ldots +1$
tg	$0 \ldots +\infty$	$-\infty \ldots 0$	$0 \ldots +\infty$	$-\infty \ldots 0$
ctg	$+\infty \ldots 0$	$0 \ldots -\infty$	$+\infty \ldots 0$	$0 \ldots \infty$
sec	$+1 \ldots +\infty$	$-\infty \ldots -1$	$-1 \ldots -\infty$	$+\infty \ldots +1$
cosec	$+\infty \ldots +1$	$+1 \ldots +\infty$	$-\infty \ldots -1$	$-1 \ldots -\infty$

Քանի վոր այժմ յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներն արտահայտվում են հանրահաշվական քանակություններով, ապա ֆունկցիայի մեծանալն ու փոքրանալը պետք է զանազանել իր բացարձակ արժեքի մեծանալուց ու փոքրանալուց։ Օրինակ՝ յերբ արգումենտն աճում է 90°-ից մինչև 180°, կոսինուսի բացարձակ արժեքը մեծանում է, բայց ինքը կոսինուսն, (այստեղ բացասական թիվ լինելով, բացարձակ արժեքի մեծանալու դեպքում, ընդհակառակը, նվազում է։ Ճիշտ նույնպես արգումենտի աճելու դեպքում բացասական *իմաստով տանգենսը* միշտ *աճում է, իսկ կոտանգենսը նվազում է։*

Վերն ասացածներին ավելացնենք մի քանի ցուցումներ.

I. *Աղյուսակից յերևում է, թե վոր սահմաններում է փոփոխվում յուրաքանչյուր ֆունկցիա։*

1) Սինուսն ու կոսինուսը փոփոխվում են +1-ից մինչև −1 (այնպես, վոր նրանց բացարձակ արժեքները չեն կարող մեկից մեծ լինել)։

2) Տանգենսն ու կոտանգենսը փոխվում են +∞-ի և −∞-ի միջև (այդ պատճառով էլ ամեն մի թիվ կարող է լինել տանգենս կամ կոտանգենս)։

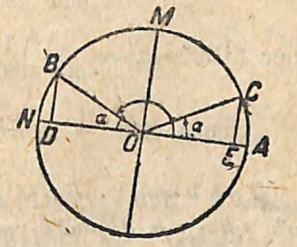
3) Սեկանսն ու կոսեկանսը փոխվում են +1-ից մինչև +∞ և −1-ից մինչև −∞ (հետևաբար նրանց բացարձակ արժեքը մեկից փոքր լինել չի կարող)։

II. *Ուշադրություն դարձնենք մի քանի արդյունքների յերկվության* (двойственность) *վրա։ Այսպես, մենք տեսնում ենք, վոր* $\operatorname{tg} 90^\circ = +\infty$, *յեթե 90°-ն ստացվել է սուր անկյունը մեծացնելով, և* $\operatorname{tg} 90^\circ = -\infty$, *յեթե 90°-ն ստացվել է բութ անկյունը փոքրացնելով։ Նույն ձևով մենք վերցնում ենք* $\cos 270^\circ = -0$, *կամ* $\cos 270^\circ = +0$, *նայած թե 270°-ը* III *քառորդի անկյուն ենք հաշվում, թե* IV *քառորդի, այսպիսով* $\cos 270^\circ = \pm 0$։ *Ճիշտ նույն ձևով կունենանք՝* $\operatorname{ctg} 180^\circ = \pm\infty$ *և այլն։*

Դիտողություն. *Մենք անկյան սինուսի և կոսինուսի փոփոխություններին հետևելով գծագրով, մյուս ֆունկցիաների փոփոխություններին կարող ենք հետևել և առանց գծագրի. մենք կարող ենք այդ փոփոխություններին հետևել ֆունկցիաների սինուսից և կոսինուսից ունեցած առնչությունների օգնությամբ։ Օրինակ՝* $\operatorname{tg}\alpha$-*ի փոփոխությունները կարելի յե դիտել վորպես* $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ *կոտորակի փոփոխություններ,* $\sec\alpha$-*ի փոփոխությունները կարելի յե դիտել վորպես* $\frac{1}{\cos\alpha}$ *կոտորակի փոփոխություններ և այլն։*

§ 30. Վերածման բանաձևեր. *Ուղիղ անկյունից մեծ անկյունների յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները շատ հեշտ վերածվում են սուր անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների։ Այդ նպատակի համար ծառայում են այն յերկու սուր անկյունները, շարժական շառավիղը կազմում է հորիզոնական և ուղղաձիգ՝ տրամագծերի հետ (դրանք լրացուցիչ անկյուններ են)։ Այսպես, յեթե 16-րդ գծագրի վրա* $\angle AOB = 143^\circ$, *ապա հիշված սուր անկյունները կլինեն՝* $\angle NOB - 37^\circ$ *և* $\angle MOB = 53^\circ$, *և կարելի յե անցնել դրանցից մեկնումեկը։ Թե ինչպես է այդ արվում, նախ ցույց տանք օրինակներով*

Օրինակ 1. *Բութ անկյան ֆունկցիան. այդ անկյունը պետք է վերածել մինչև 180° լրացնող անկյան ֆունկցիայի։ 25 րդ գծագրի վրա* AOB *բութ անկյան համար մինչև 180° լրացնող անկյուն հանդիսանում է* NOB *սուր անկյունը, վորի մեծությունը նշանակենք* α *տառով. այդ դեպքում* $\angle AOB = 180^\circ - \alpha$։ α *անկյան ֆունկցիաները կազմելու համար, նախ այդ անկյունը վերցնենք* AO ընդհանուր *սկզբից։ Դիցուք* $\angle AOC = \alpha$։ *Տանելով սինուսի* BD *և* CE *գծերը, կստանանք՝*



Գծ. 25.

$$\sin(180^\circ-\alpha)=+\frac{BD}{R} \text{ և } \sin\alpha=+\frac{CE}{R},$$

և քանի վոր BD = CE, *ապա՝*

$$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha: \qquad (a)$$

Այնուհետև՝

$$\cos(180^\circ-\alpha)=-\frac{OD}{R} \qquad (1)$$

և

$$\cos\alpha=+\frac{OE}{R} \qquad (2)$$

Այստեղ յերկրորդ մասերը հավասար բացարձակ արժեքներ ունեն (վորովհետև OD = OE*), բայց դանազանվում են նշաններով. վորպեսզի դրանց լրիվ հավասարեցնենք, անփոփոխ կթողնենք (1) հավասարությունը, իսկ (2) հավասարության յերկու մասն էլ կբազմապատկենք —1-ով, վորով կստանանք՝*

$$-\cos\alpha=-\frac{OE}{R} \qquad (3)$$

(1) և (3) հավասարությունների աջ մասերը հավասար են, հետևաբար՝

$$\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha \qquad (b)$$

(a) *և* (b) *բանաձևերի ոգնությամբ կգրենք համապատասխան բանաձևեր մյուս ֆունկցիաների համար (համաձայն* §§ 28 *և 12-ի).*

$$\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=\frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{\cos(180_\circ-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)=\frac{\cos(180^\circ-\alpha)}{\sin(180^\circ-\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\sec(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{\cos(180^\circ-\alpha)}=\frac{1}{-\cos\alpha}=-\frac{1}{\sin\alpha}=-\sec\alpha;$$

$$\operatorname{cosec}(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{\sin(180^\circ-\alpha)}=\frac{1}{\sin\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha:$$

Ո ր ի ն ա կ 2. Բութ անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիան պետք է վերածել այն սուր անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիային, վորն անհրաժեշտ է ավելացնել 90°-ի վրա՝ տված բութ անկյունն ստանալու համար:

26-րդ գծագրի վրա AOB *անկյունը կարելի յե դիտել վորպես* $90^\circ+\alpha$*, վորտեղ* α*-ն* MOB *անկյունն է: Վերցնելով ընդհա-*

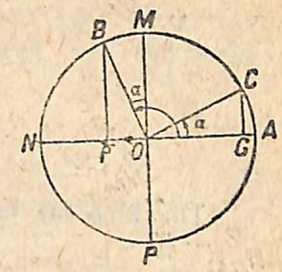
նուր սկզբից $\angle AOC=\alpha$ *և տանելով որդինատի* BE *և* CG *գծերը, կունենանք՝*

$$\sin(90^\circ+\alpha)=+\frac{BE}{R}; \qquad (1)$$

$$\cos(90^\circ+\alpha)=-\frac{OF}{R}; \qquad (2)$$

$$\sin\alpha=+\frac{CG}{R}; \qquad (3)$$

$$\cos\alpha=+\frac{OG}{R}, \qquad (4)$$



Գծ. 26.

Քանի վոր BF = OG, *ապա՝*

$$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha: \qquad (a)$$

Քանի վոր OF = CG, *ապա, բազմապատկելով (3) հավասարության յերկու մասն էլ —1-ով, կտեսնենք, վոր*

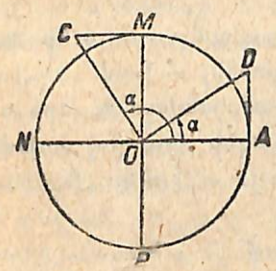
$$\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha: \qquad (b)$$

(a) *և* (b) *հավասարություններից կարելի յե մյուս ֆունկցիաների համար յեզրակացություններ հանել, ճիշտ այնպես, ինչպես 1-ին որինակի մեջ:*

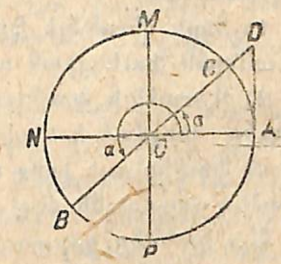
Այդպես վարվելով կստանանք՝

$$\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha; \quad \operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\sec(90^\circ+\alpha)=-\operatorname{cosec}\alpha; \quad \operatorname{cosec}(90^\circ+\alpha)=\sec\alpha:$$



Գծ. 27.



Գծ. 28.

Ո ր ի ն ա կ 3. $\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha)$*-ը պետք է վերածել* α *անկյան ֆունկցիաների (առանց* ctg*-ը նույն անկյան այլ ֆունկցիաների վերածելու) (գծ. 27): Անցկացնելով* AOC *անկյան կոտանգենսի* MC *գիծը, կստանանք* MOC *յեռանկյունը, այնուհետև վերցնում ենք* α *անկյունն ընդհանուր սկզբից և կազմում ենք ստացված* յեռանկյանը հավասար յեռանկյուն։ Այդպիսի յեռանկյուն կլինի AOD յեռանկյունը։ Այնուհետև կունենանք՝

$$\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha)=-\frac{MC}{R} \qquad (1)$$

$$MC=MD \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=+\frac{AD}{R} \qquad (3)$$

$$-\operatorname{tg}\alpha=-\frac{AD}{R} \qquad (4)$$

(1), (2) և (4) հավասարություններից հետևում է՝

$$\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha։$$

Օրինակ 4. $\sec(180^\circ+\alpha)$-ն պետք է վերածել α անկյան ֆունկցիայի։ 28-րդ գծագրից կունենանք՝

$$\sec(180^\circ+\alpha)=-\frac{OD}{R}; \qquad (1)$$

$$\sec\alpha=+\frac{OD}{R} \qquad (2)$$

$$-\sec\alpha=-\frac{OD}{R}։ \qquad (3)$$

(1) և (3) հավասարություններից հետևում է՝

$$\sec(180^\circ+\alpha)=-\sec\alpha։$$

Կանոն յեվ որինակներ. Բոլոր դեպքերի ($90^\circ\mp\alpha$, $180^\circ\mp\alpha$, $270^\circ\mp\alpha$, $360^\circ-\alpha$) հետազոտությունը մեզ կտար վերածման 42 բանաձև, [1]) բայց այդ բոլոր դեպքերն էլ յենթարկվում են հետևյալ պարզ կանոնին.

1) Յեթե վերածելի ֆունկցիան բացասական արժեք ունի, ապա սուր անկյան ֆունկցիան պետք է բազմապատկել -1-ով։

2) Վերածելի ֆունկցիայի անունը պահպանվում է, յերբ սուր անկյունը վերցված է հորիզոնական տրամագծի մոտ, յեվ փոխվում է նման ֆունկցիայի (բուն անվան), յերբ սուր անկյունը վերցված է ուղղաձիգ տրամագծի մոտ:

Այս կանոնը կիրառենք որինակներով.

1. $\operatorname{tg}130^\circ$-ը պետք է վերածել սուր անկյան ֆունկցիայի։ Քանի վոր $130^\circ=180^\circ-50^\circ=90^\circ+40$, ապա կարելի յե վերածել և 50°-ի և 40°-ի, ֆունկցիայի։ Գիտենալով, վոր՝ $\operatorname{tg}130^\circ$-ը բացասական է, 50°-ը հաշվում է հորիզոնական տրամագծից, իսկ 40°-ն՝ ուղղաձիգ տրամագծից, կգրենք՝

$$\operatorname{tg}130^\circ=-\operatorname{tg}50^\circ \text{ և } \operatorname{tg}130^\circ=-\operatorname{ctg}40^\circ։$$

[1]) Այդ անունը տրվում է § 17-ի բանաձևերին ևս։

2. $\sec 295^\circ$-ը պետք է վերածել 45°-ից փոքր անկյան ֆունկցիայի։ $295^\circ=360^\circ-65^\circ=270^\circ+25^\circ$, ուստի վորոշելի անկյունը 25° է։ Քանի վոր $\sec 295^\circ$-ն ունի դրական արժեք և 25°-ը հաշված է ուղղաձիգ տրամագծից, ապա կանոնի համաձայն կունենանք՝

$$\sec 295^\circ=\operatorname{cosec}25^\circ։$$

3. Բերենք հետևյալ որինակներն էլ.

a) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$;

b) $\operatorname{tg}1{,}2\pi=\operatorname{tg}(\pi+0{,}2\pi)=\operatorname{tg}0{,}2\pi$;

c) $\sin 240^\circ=\sin(180^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$։

§ 31. Վերածման բանաձևերի ուրիշ ապացույց. 1) Նախորոք ուշադրություն դարձնենք այն բանի վրա, վոր I քառորդում յեռանկյունաչափական գծերի հարաբերությունները շառավղին՝ միշտ հանդիսանում են ֆունկցիաների լրիվ արժեքները, իսկ մյուս քառորդներում՝ յերբեմն միայն ֆունկցիաների բացարձակ արժեքներն են հանդիսանում [1])։ Այժմ անցնենք 29-րդ գծագրին։ Բաղդատելով AMC, AMND և AMNPE աղեղի յեռանկյունաչափական գծերն AB աղեղի յեռանկյունաչափական գծերի հետ, կնկատենք, վոր դրանք միևնույնն են, կամ համապատասխանաբար հավասար են։ Այստեղից յեզրակացնում ենք, վոր $180^\circ-\alpha$, $180^\circ+\alpha$ և և $360^\circ-\alpha$ աղեղների համար ֆունկցիաների բացարձակ մեծությունները համապատասխանաբար հավասար են α աղեղի ֆունկցիաներին։

2) Քանի վոր $180^\circ-\alpha$, $801+\alpha$ և $360^\circ-\alpha$ արտահայտությունները կարելի յե փոխարինել $90^\circ+\beta$, $270^\circ-\beta$ և $270^\circ+\beta$ արտահայտություններով, իսկ α անկյան ֆունկցիաները հավասար են β անկյան անունով նման ֆունկցիաներին (վորպես լրացուցիչ անկյունների), ապա սույն հոդվածի 1 կետի համաձայն յեզրակացնում ենք, վոր $90^\circ+\beta$, $270^\circ-\beta$ և $270^\circ+\beta$ աղեղների յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների բացարձակ արժեքները հավասար են β անկյան անունով նման ֆունկցիային։

3) 1) և 2) հավասարություններից միասին՝ կհետևի, վոր վորևե վերածման բանաձև կազմելու համար անհրաժեշտ է վերածելի ֆունկցիան արտահայտել նշանով և բացարձակ արժեքով,

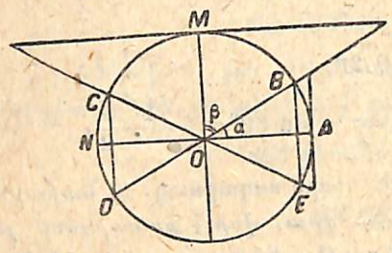
[1]) Յեթե այդ ֆունկցիան բացասական է։

փոխարինելով բացարձակ մեծությունը սուր անկյան ֆունկցիայով։ Այս դեպքում պետք է վերածելի ֆունկցիայի անունը պահպանել, եթե արգումենտն իր կազմում պարունակում է 180° կամ 360°, և փոխել անունով նման ֆունկցիայի, եթե արգումենտը պարունակում է 90° և 270°։ Այսպիսով՝ ստանում ենք՝

$$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha;\quad \mathrm{tg}\,(360^\circ-\alpha)=-\,\mathrm{tg}\,\alpha;$$

$$\cos(270^\circ-\beta)=-\sin\beta$$ և այլն։

§ 32. **Անկյան հաշվումը, երբ տված է նրա եռանկյունաչափական ֆունկցիայի արժեքը (0°-ից մինչև 360°-ի սահմաններում)**. Մենք արդեն 26-րդ պարագրաֆում տեսանք, որ երբ կառուցում ենք եռանկյունաչափական ֆունկցիայի տված արժեքին համապատասխան անկյուն, ստանում ենք երկու անկյուն, որոնք պատկանում են երկու տարբեր քառորդների։ Այդ անկյունների մեծությունները կարելի է որոշել վերածման բանաձևերի միջոցով, օգտվելով այդ բանաձևերից հակառակ իմաստով։



Գծ. 29.

Բացատրենք այդ օրինակներով.

1) $\sin x=\frac{1}{2}$։ Պահանջվում է գտնել α անկյունը։ Առաջին պատասխանը՝ 30° է. տվյալ սինուսն ունեցող երկրորդ անկյունը պատկանում է երկրորդ քառորդին՝ $180^\circ-30^\circ=150^\circ$։ Պատասխան՝ $x_1=30^\circ$, $x_2=150^\circ$։

2) $\cos x=0{,}974$։ Բնական աղյուսակներից ունենք՝ $x_1=13^\circ$, բացի դրանից՝ կոսինուսը դրական արժեք ունի նաև IV քառորդում. $x_2=360^\circ-13^\circ=347^\circ$։

3) $\mathrm{tg}\,x=1$։ Համապատասխան սուր անկյունը 45° է, $x_1=45^\circ$։ 22-րդ գծագրից երևում է, որ $x_2=180^\circ+45^\circ=225^\circ$։

4) $\sin x=-\frac{1}{2}$. պահանջվում է գտնել x անկյունը։ Սինուսը բացասական արժեքներ ունի III և IV քառորդներում։ Գիտենալով, որ $\sin=+\frac{1}{2}$, եզրակացնում ենք, որ որոնելի անկյունը՝ $x_1=180^\circ+30^\circ=210^\circ$; $x_2=360^\circ-30^\circ=330^\circ$։

III. ԲԱՑԱՍԱԿԱՆ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ. 360°-ԻՑ ՄԵԾ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

§ 33. **Բացասական անկյունների մասին.** Եթե հաշվի են առնում ոչ միայն անկյան մեծությունը, այլև այն ուղղությունը, որով այդ անկյունը հաշվում են, ապա սովորականի հակադիր ուղղությամբ պտտելուց առաջացած անկյունը, համաձայն Դեկարտի կանոնի, արտահայտում են բացասական թվով։

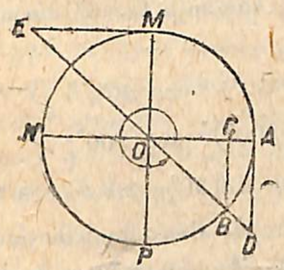
Եռանկյունաչափական շրջանի վրա բացասական կլինեն OA շառավղից ներքև վերցրած անկյունները (գծ. 30)։

Բացասական անկյուններին համապատասխանում են և բացասական աղեղներ։ Բացասական պետք է համարել այն աղեղները, որոնք A ընդհանուր կենտրոնից դեպի ներքև են վերցրած։

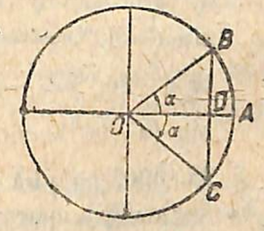
Բացասական անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաները կազմվում են ճիշտ այնպես, ինչպես նրանց կցված դրական անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաները։

Այսպես, 30-րդ գծագրից ստացվում է՝

$$\sin(-\alpha)=-\frac{BC}{R},\quad \mathrm{ctg}\,(-\alpha)=-\frac{ME}{R};\quad \sec(-\alpha)=+\frac{OD}{R}$$ և այլն։



Գծ. 30.



Գծ. 31.

§ 34. Գտնենք բացասական անկյան և նրան իր մեծությամբ հավասար դրական անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների առնչությունները։

31-րդ գծագրից ունենք՝

$$\sin(-\alpha)=-\frac{CD}{R}$$ և $$\sin\alpha=\frac{BD}{R}$$։

Այստեղից, նկատելով, որ CD=BD, և բազմապատկելով յերկրորդ հավասարության յերկու մասն էլ —1-ով, կստանանք՝

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha:$$

Այնուհետև՝

$$\cos(-\alpha) = +\frac{OD}{R} \text{ և } \cos\alpha = +\frac{OD}{R},$$

ուստի՝

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha:$$

Այսպիսով ստացանք, որ

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

և

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha:$$

Սրանից գտնում ենք՝

$$\mathrm{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\,\alpha$$

և նույն ձևով ստանում ենք՝

$$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha;$$

$$\sec(-\alpha) = \sec\alpha;$$

$$\mathrm{cosec}(-\alpha) = -\mathrm{cosec}\,\alpha:$$

Կանոն. **Կոսինուսի և սեկանսի դեպքում կարող ենք արգումենտի մինուս նշանը բաց թողնել: Իսկ մնացած դեպքերում կարող ենք արգումենտի մինուս նշանը տանել ֆունկցիայի նշանի առաջ**[1]:

Օրինակներ.

$$\sin(-50^\circ) = -\sin 50^\circ; \quad \cos(-50^\circ) = \cos 50^\circ;$$

$$\mathrm{tg}(-300^\circ) = -\mathrm{tg}\,300^\circ; \ \sec(-300^\circ) = \sec 300^\circ;$$

$$\sin(\alpha - 90^\circ) = \sin[-(90 - \alpha)] = -\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos\alpha.$$

§ 35. 360°-ից մեծ անկյունների մասին. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների պարբերականությունը. *Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների տեսության մեջ դիտվում են նաև 360°-ից մեծ անկյուններ:*

Բացասական և 360°-ը գերազանցող անկյուններ մտցնելուց հետո անկյունը դառնում է մի այնպիսի փոփոխական մեծու-

[1]) *Բացասական թիվը զույգ և կենտ աստիճան բարձրացնելու նմանությամբ՝ սինուսը և կոսինուսը կոչվում են կենտ ֆունկցիաներ, իսկ կոսինուսն ու սեկանսը՝ զույգ ֆունկցիաներ:*

թյուն, որը կարող է ստանալ ամեն մի արժեք՝ 0-ից մինչև $+\infty$ և 0-ից մինչև $-\infty$:

29-րդ պարագրաֆում ցույց տվեց, թե ինչպես են փոփոխվում յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները, յերբ անկյունը աճում է 0°-ից մինչև 360°, այսինքն շարժական շառավիղը կատարում է մի լրիվ պտույտ: Անկյան հետագա աճման դեպքում, շարժական շառավիղը կընդունի հաջորդաբար այն բոլոր դիրքերը, որ նա անցել եր առաջին պտույտի ժամանակ, ուստի յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներն էլ կստանան իրենց նախկին արժեքները՝ նախկին հաջորդականությամբ:

Բացասական անկյունների դեպքում, յերբ անկյունը փոփոխվում է 0°-ից մինչև −360°, −360°-ից մինչև −720° և այլն, շարժական շառավիղը պտտվում է ճիշտ այնպես, ինչպես 360° անկյունը մինչև 0° փոքրանալիս, ուստի յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներն էլ փոփոխվում են ճիշտ անպես, ինչպես այդ անցման ժամանակ:

Այսպիսով, յերբ անկյունը փոփոխվում է 0-ից մինչև $+\infty$ և 0-ից մինչև $-\infty$, յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների փոփոխությունները կլինեն **պարբերական**, *այսինքն՝ արգումենտի որոշ հավասար միջակայքերի ժամանակ կրկնվում են: Արգումենտի այն* **ամենափոքր** *արժեքը, որից հետո ֆունկցիայի փոփոխության ընթացքը կրկնվում է, կոչվում է այդ ֆունկցիայի* **պարբերություն**: *Նախորդ դատողությունը ցույց է տալիս, որ 360° անցնելուց հետո բոլոր յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները կրկնվում են: Մնում է լուծել այն հարցը, թե այդ միջակայքն ամենափոքրն է: Դրա համար դիմենք § 29-ին. կնկատենք, որ այդ ամենափոքրը չե միայն տանգենսի և կոտանգենսի համար, որոնց մեջ առաջին կրկնումը տեղի յե ունենում 180°-ից հետո: Մնացած ֆունկցիաների մեջ մինչև լրիվ շրջանի վերջանալը փոփոխման ընթացքը չի կրկնվում:*

Այսպիսով յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները պարբերական են, ընդ որում սինուսի, կոսինուսի, սեկանսի և կոսեկանսի պարբերությունը հավասար է 360°-ի կամ 2π ի, իսկ տանգենսի և կոտանգեսի պարբերությունը՝ 180°-ի կամ π-ի:

§ 36. *Յեթե պարբերական ֆունկցիայի արգումենտին ավելացնենք պարբերություն, ապա այդ ֆունկցիայի արժեքը չի փոխվի, ինչ մեծություն էլ որ ունենա արգումենտը: Յեվ, ընդհակառակը, յեթե տվյալ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի մի այնպիսի* **հաստատուն** *քանակություն, որ կարելի յե ավե-*

ացնել արգումենտի ամեն մի արժեքի վրա՝ առանց փոփոխելու ֆունկցիայի արժեքը, ապա այդ ֆունկցիան պարբերական ֆունկցիա չէ։

Յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների պարբերականության հիման վրա կարելի է գրել հետևյալ բանաձևերը, վորոնց մեջ α-ն կարող է ունենալ ամեն մի արժեք՝ $-\infty$-ից մինչև $+\infty$։

$$\sin(\alpha+360^\circ)=\sin\alpha;\quad \cos(\alpha+360^\circ)=\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+180^\circ)=\operatorname{tg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}(\alpha+180^\circ)=\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\sec(\alpha+360^\circ)=\sec\alpha;\quad \operatorname{cosec}(\alpha+360^\circ)=\operatorname{cosec}\alpha.$$

Որինակներ. 1) Պարզել $m=\operatorname{tg}(\alpha-\pi)$ արտահայտությունը։ Ավելացնելով արգումենտին տանգենսի պարբերությունը, այսինքն π, կստանանք՝ $m=\operatorname{tg}\alpha$։

2) Պարզել $n=\operatorname{ctg}\frac{19}{6}\pi$։ Քանի վոր π-ն կոտանգենսի պարբերությունն է, յերեք անգամ այդ հանենք արգումենտից, կստանանք՝ $n=\operatorname{ctg}\frac{1}{6}\pi=\sqrt{3}$

§ 37. Ամեն մի անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների վերածումը պարզագույն արգումենտի. Ամեն մի անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիան, ինչ նշան և բացարձակ արժեք էլ վոր այն ունենա, հեշտ վերածվում է 45°-ը չգերազանցող դրական անկյան ֆունկցիայի։

ա) Դիցուք տված է դրական անկյուն (45°-ից մեծ)։ Յեթե այդ անկյունը փոքր է 360°-ից, ապա կիրառում ենք 17 և 30. պարագրաֆները։ Յեթե այդ անկյունը մեծ է 360°-ից, նախ դրանից անջատում ենք բոլոր լրիվ պտույտները. այդպիսով, տված անկյունը փոխարինում ենք 360-ի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդով։

Որինակ.

1) $\sin 63^\circ=\cos 27^\circ$;

2) $\cos 145^\circ=\cos(180^\circ-35^\circ)=-\cos 35^\circ$;

3) $\operatorname{tg}2085^\circ=\operatorname{tg}(360^\circ\cdot 5+285^\circ)=\operatorname{tg}285^\circ=\operatorname{tg}(270^\circ+15^\circ)=$
$=-\operatorname{ctg}15^\circ$։

բ) Յեթե տված է բացասական անկյուն, նախ անցնում ենք նույն մեծությունն ունեցող դրական անկյան, իսկ վերջինի հետ վարվում ենք այնպես, ինչպես ցույց տրվեց վերը։ Վերցնենք, որինակ, $\sin(-1596^\circ)$։ Կիրառելով § 34-ի բանաձևերը՝ կստա-

նանք $\sin(-1596^\circ)=-\sin 1596^\circ$։ Այժմ ձևափոխենք $\sin 1596^\circ$-ը. բաժանելով 1596-ը 360-ի վրա, կստանանք մնացորդում 156, ուստի $\sin 1596=\sin 156$, բայց $\sin 156=\sin(180^\circ-24^\circ)=\sin 24^\circ$։

Այսպիսով վերջնականապես ստանում ենք՝

$$\sin(-1596^\circ)=-\sin 24^\circ։$$

§ 38. Վերածման բանաձևերի ընդհանրությունը. 17-րդ, 30-րդ և 34-րդ պարագրաֆներում ցույց տրվեց, թե՝ $-\alpha$, $90^\circ\mp\alpha$, $180^\circ\mp\alpha$, $270^\circ\mp\alpha$ և $360^\circ\mp\alpha$ անկյունների յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներն ինչպես են վերածվում α անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների։ Վորտեղ յենթադրվում էր, վոր α-ն դրական սուր անկյուն է։ Այժմ ապացուցենք, վոր ստացված բանաձևերն ընդհանուր են, այսինքն դրանք ճիշտ են α անկյան ամեն մի արժեքի դեպքում, $-\infty$-ից մինչև $+\infty$։ Բավական է ապացուցել այդ սինուսի և կոսինուսի համար, վորովհետև մնացյալն ստացվում է վորպես հետևանք։

Ապացուցման ժամանակ մենք ի միջի այլոց ոգտվում ենք այն բանից, վոր կոսինուսի գիծը շարժական շառավղի պրոեկցիան է հորիզոնական տրամագծի վրա, իսկ սինուսի գիծը հավասար է նրա ուղղաձիգ առանցքի վրա վերցրած պրոեկցիային։

Անցնենք ապացուցման։

§ 39. 1. Դիցուք α-ն մի կամայական անկյուն է. այդ դեպքում (—α)-ն կլինի նույն բացարձակ մեծությունը, բայց հակառակ նշան ունեցող մի անկյուն։ Հեշտ է համոզվել, վոր այդպիսի անկյունների շարժական շառավիղները դասավորված են հորիզոնական տրամագծի տարբեր կողմերում և հավասար թեքություն ունեն նրանից։ Այդ պատճառով նրանց սինուսի գծերը հավասար են, բայց ունեն հակադիր ուղղություն, իսկ կոսինուսի գծերը համընկնում են. այստեղից յեզրակացնում ենք, վոր՝

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

և

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha։$$

§ 40. 2. ա) $(90^\circ+\alpha)$-ն պատկերացնենք $\alpha+90^\circ$ տեսքով։ Յեթե վորևէ անկյան ավելացնենք 90°, ապա շարժական շառավիղը կանցնի հաջորդ քառորդը և ուղղաձիգ տրամագծի հետ կկազմի այնպիսի սուր անկյուն, ինչպիսի անկյուն նա առաջ կազմում էր հորիզոնական տրամագծի հետ, և ընդհակառակը։ Այդ պատճառով նրա նոր ուղղաձիգ պրոեկցիան հավասար կլինի նախկին հորիզոնական պրոեկցիային, իսկ նոր հորիզոնական պրոեկցիան հավասար կլինի նախկին ուղղաձիգ պրոեկցիային։ Այստեղից հետևում է, վոր $\sin(\alpha+90^\circ)$-ը և $\cos(\alpha+90^\circ)$-ը համապատասխանաբար ունեն այն բացարձակ մեծությունները, ինչ վոր cos α-ն և sin α-ն։ Ինչ վերաբերում է նշաններին, նրանք կախում ունեն այն բանից, թե վոր քառորդում է վերջանում α անկյունը։ Այդ նշանները բերված են ստորև զետեղված աղյուսակում։

$\alpha+90°$	sin	cos	α
II	+	+	I
III	—	—	II
IV	—	—	III
I	+	+	IV

$\alpha+90°$	cos	sin	α
II	—	+	I
III	—	+	II
IV	+	—	III
I	+	—	IV

Տեսնում ենք, վոր sin $(\alpha+90°)$-ը և cos α-ն միշտ ունեն միևնույն նշանը, իսկ sin $(\alpha+90°)$-ը և sin α-ն՝ հակադիր նշաններ։

Այսպիսով՝

$$\sin(90°+\alpha)=\cos\alpha;$$

$$\cos(90°+\alpha)=-\sin\alpha։$$

բ) Նոր ստացված բանաձևերը կիրառելով —α անկյան նկատմամբ և օգտվելով § 39-ից, կստանանք՝

$$\sin(90°-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha;$$

$$\cos(90°-\alpha)=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha։$$

§ 41. 3. ա) $(180°+\alpha)$-ն պատկերացնենք $\alpha+180°$ տեսքով։ Յեթե վորևե անկյան ավելացնենք 180°, այդ դեպքում շարժական շառավիղը կանցնի հակադիր քառորդը և իր սկզբնական դիրքի հետ կկազմի ուղիղ գիծ [1]) ուստի սինուսն ու կոսինուսը պահպանում են իրենց բացարձակ մեծությունները, իսկ յերկսի նշաններն էլ փոխվում են, այդ պատճառով՝

$$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha;$$

$$\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha։$$

բ) Կիրառելով այդ բանաձևերը —α անկյան նկատմամբ, կունենանք՝

$$\sin(180°-\alpha)=\sin(-\alpha)=\sin\alpha;$$

$$\cos(180°-\alpha)=-\cos(-\alpha)=-\cos\alpha։$$

[1]) Դիրքի կամ աղեղի ծայրը տրամագծերին հակառակ է ընկնում։

§ 42. 4. ա) $(270°+\alpha)$-ն վերցնենք $\alpha+270°$ տեսքով։ Յեթե վորևե անկյուն ավելացնենք 270°, ապա շարժական շառավիղը կփոխի իր դիրքը ճիշտ այնպես, ինչպես —90° պտույտի դեպքում։

Դատելով այնպես, ինչպես § 40-ի մեջ, յեզրակացնում ենք, վոր շարժական շառավղի նոր ուղղաձիգ պրոեկցիան հավասար է նախկին հորիզոնական պրոեկցիային, և ընդհակառակը. ուստի sin $(\alpha+270°)$-ի և cos $(\alpha+270°)$-ի բացարձակ մեծությունները համապատասխանաբար հավասար են cos α-ի և sin α-ի բացարձակ մեծություններին։

Նշանները կախում ունեն այն բանից, α անկյունը վոր քառորդում է վերջանում։ Այդ նշանները բերված են ստորև զետեղված աղյուսակներում։

$\alpha+270°$	sin	cos	α
IV	—	+	I
I	+	—	II
II	+	—	III
III	—	+	IV

$\alpha+270°$	cos	sin	α
IV	+	+	I
I	+	+	II
II	—	—	III
III	—	—	IV

Տեսնում ենք վոր sin $(\alpha+270°)$-ը և cos α-ն միշտ հակադիր նշաններ ունեն, իսկ cos $(\alpha+270°)$-ը և sin α-ն՝ միևնույն նշանները։

Այսպիսով՝

$$\sin(270°+\alpha)=-\cos\alpha;$$

$$\cos(270°+\alpha)=\sin\alpha։$$

բ) Կիրառելով այս բանաձևերը —α-ի նկատմամբ, ստանում ենք.

$$\sin(270°-\alpha)=-\cos(-\alpha)=-\sin\alpha;$$

$$\cos(270°-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha։$$

§ 43. 5. $(360°-\alpha)$-ն գրենք $-\alpha+360°$ տեսքով։ Յեթե վորևե անկյան ավելացնենք 360°, ապա շարժական շառավղի վերջնական դիրքը համընկնում է սկզբնականի հետ. ուստի՝

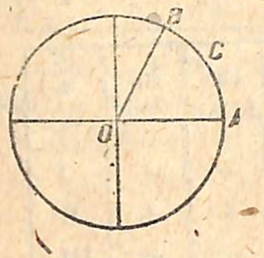
$$\sin(360°-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha;$$

$$\cos(360°-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha։$$

§ 44. 39—43 պարագրաֆների մեջ տրված բանաձևերը նույնն են, ինչ որ 17, 30 և 34 պարագրաֆներում տրվածները։ Այսպիսով վերածման բանաձևերի ընդհանրությունն ապացուցված է։

Խնդիրների մեջ, յերբ պահանջվում է հիշել միայն բանաձևը, պետք է պատկերացնել α-ն 0°-ի և 90°-ի միջև և կիրառել § 30-ում տված կանոնը։

§ 45. Շրջանագծի տվյալ կետում վերջացող աղեղների ընդհանուր տեսքը. Դիցուք 32-րդ գծագրի վրա ACB աղեղը պարունակում է 64°։ Պարզ է, որ այն բոլոր աղեղները, վորոնք 64-ից տարբերվում են լրիվ շրջաններով, նույնպես վերջանում են B կետում (յենթադրվում է, վոր A-ն ընդհանուր կենտրոն է)։



Գծ. 32.

Այստեղից տեսնում ենք, վոր B կետում վերջացող աղեղներն են՝ 64°, 424°, 784°, 1144° և այլն, նույնպես և՝ —296°, —656°, —1016° և այլն։ Այս բոլոր անկյունները կարելի յե արտահայտել մի բանաձևով, այն է՝

$$64^\circ+360^\circ\cdot n,$$

n-ը ընդունելով վորևե դրական կամ բացասական ամբողջ թիվ, նույնպես և զերո։

Ընդհանրապես, յեթե α-ն տված սկիզբն ու վախճանն անցնող աղեղներից մեկն է, ապա նույն սկիզբն ու վախճանն անցնող աղեղների ընդհանուր տեսքը կլինի՝

$$\alpha+360^\circ\cdot n \ (\text{կամ } \alpha+2\pi n)։$$

Մենք խոսում ենք աղեղների մասին, սակայն տրված բանաձևերը կարելի յե վերագրել նաև այնպիսի անկյունների, վորոնց ժամանակին շառավիղները միևնույնն են։

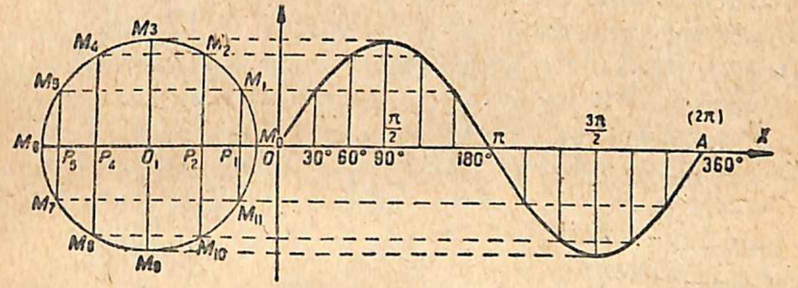
§ 46. Յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների գրաֆիկները. Յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների փոփոխությունները, յերբ արգումենտը փոփոխվում է 0°-ից մինչև 360°, ներկայացված են § 29-ի աղյուսակում, բայց այդ աղյուսակները պարունակում են ֆունկցիաների առանձին արժեքների մի շարք և այդ պատճառով էլ լրիվ պատկերացում չեն տալիս ֆունկցիայի անընդհատ փոփոխության ընթացքի մասին։ Ֆունկցիայի անընդհատ փոփոխության մասին լրիվ պատկերացում ունենալու համար դիմում են նրանց փոփոխությունների գրաֆիկական պատկերացմանը։

Այդ նպատակի համար վերցնում ենք յերկու, փոխուղղա-

հայաց OX և OY առանցքները, վորոնք կոչվում կոորդինատային առանցքներ (գծ. 33)։ OX առանցքի վրա վերցնում ենք (կամավոր մասշտաբով) արգումենտի թվական արժեքներն արտահայտող հատվածները, իսկ OY-ի վրա՝ ֆունկցիայի թվական արժեքները պատկերացնող հատվածները (մի ուրիշ կամավոր մասշտաբով)։ Հատվածներն առանցքների վրա վերցնելիս պահպանում ենք Դեկարտի կանոնը։

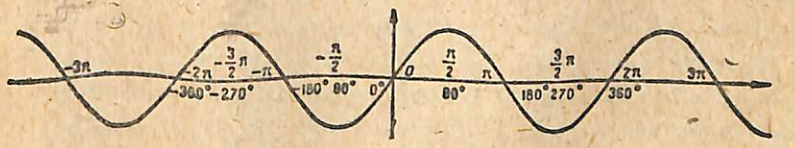
Դրական արժեքները վերցվում են O սկզբնակետից դեպի աջ և դեպի վեր, իսկ բացասական արժեքները՝ դեպի ձախ և վար (գծագրի վրա առանցքների դրական ուղղությունները ցույց են տրված սլաքներով)։

OX-առանցքի վրա վերցնենք 12 հավասար հատվածներ։ Դիցուք այդ հատվածներից յուրաքանչյուրը պատկերացնում է 30° $\left(\text{կամ } \frac{\pi}{2}\right)$ անկյուն։ Այսպիսով բոլոր 12 հատվածները միասին, կամ OA հատվածը, պատկերացնում են 360° կամ 2π անկյուն (գծ. 33)։



Գծ. 33.

Վորպեսզի OY առանցքի վրա վերցնենք սինուս յեռանկյունաչափական ֆունկցիայի արժեքները, գծենք մի ոժանդակ շրջանագիծ, վորի O_1 կենտրոնը գտնվում է վորևե տեղ OX առանցքի վրա։

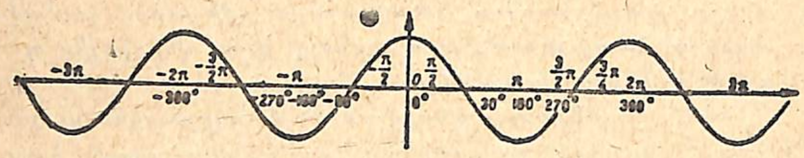


Գծ. 34.

Շրջանի O_1M շառավիղը պատկերացնում է ֆունկ-

Ուղղագիծ յեռանկ — 4

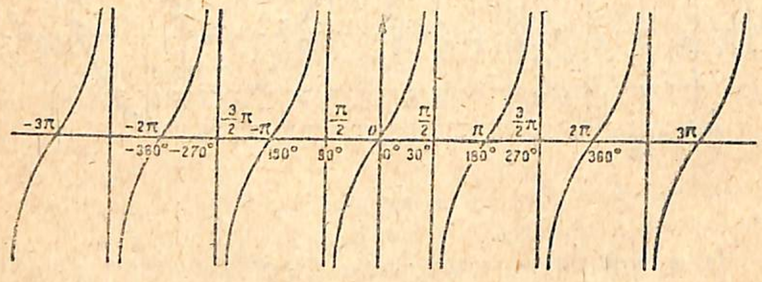
ցիայի 1-ի հավասար թվական արժեքը։ Սկսելով M_0 կետից, շրջանագիծը բաժանում ենք 12 հավասար մասերի (այսինքն OX առանցքի 360°-ին համապատասխանող հատվածի բաժանումների թվին հավասար մասերի)։



Գծ. 35.

Գտած M_0, M_1, $M_2 \dots M_{11}$ կետերի համար կառուցում ենք M_1P_1, M_2P_2, $M_3P_3 \dots M_{11}P_{11}$ սինուսի գծերը։ Քանի վոր շրջանի շառավիղը հավասար է մեկի, ապա կառուցված յեռանկյունաչափական գծերը, մեր ընդունած մասշտաբով, կպատկերացնեն սինուսի արժեքները։ OX առանցքին զուգահեռ գծերի օգնությամբ սինուսի արժեքները փոխադրում ենք OY առանցքի վրա։

OX առանցքի բաժանման յուրաքանչյուր կետից այդ առանցքին կանգնեցնում ենք ուղղահայացներ և այդ ուղղահայացների վրա վերցնում ենք սինուսի համապատասխան թվական



Գծ. 36.

արժեքը։ Երբ ուղղահայացների վորոնելի յերկարությունները կառուցված կլինեն, պետք է նրանց ծայրերից անցկացնել կոր գիծ։ Գծագրի վրա սինուսի արժեքները պատկերացնող գծերի ծայրերով անցնող գիծը կպատկերացնի սինուս յեռանկյունաչափական ֆունկցիայի փոփոխությունները՝ կապված արգումենտի (աղեղի) փոփոխությունների հետ։ Այդպիսի գիծը կոչվում է ֆունկցիայի գրաֆիկ։ 33-րդ գծագրի վրա պատկերացված է սինուսի գրաֆիկն անկյուն 0°-ից մինչև 360° սահմաններում։

Ինչքան շատ բաժանման կետեր վերցնենք, ինչքան շատ մասերի բաժանենք OA հատվածը և օժանդակ շրջանագիծը, այնքան գրաֆիկի շատ կետեր կստանանք և այնքան ճիշտ կկառուցենք գրաֆիկը կորաքանոնի օգնությամբ։

Սինուսի արժեքները կարելի յե գտնել վոչ յերկրաչափական կառուցումով, այլ աղյուսակից։

Սինուսի գրաֆիկը ներկայացնում է մի կոր գիծ, վորը կոչվում է սինուսոիդ։

Մեկ շրջանագծի սահմանում դրական անկյունների համար կառուցած սինուսի գրաֆիկը կարելի յե տարածել անկյան կամավոր դրական և բացասական արժեքների վրա։ Սինուսի գրաֆիկը կառուցելու ձևով կարելի յե կառուցել կոսինուսի, տանգենսի և կոտանգենսի գրաֆիկները։

34-րդ, 35-րդ և 36-րդ գծագրերի վրա պատկերացված են սինուսոիդը, կոսինուսոիդը, և տանգենսոիդը)—3π-ից +3π սահմաններում։

§ 47. Տված յեռանկյունաչափական ֆունկցիային համապատասխանող անկյունների ընդհանուր տեսքը. 26-րդ պարագրաֆում ցույց տրվեց, վոր տված յեռանկյունաչափական ֆունկցիայով ստացվում է շարժական շառավղի յերկու դիրք։ 32-րդ պարագրաֆում մենք այդ դիրքերն արտահայտեցինք 360°-ից փոքր x_1 և x_2 անկյուններով։ Բայց արգումենտի սահմանների ընդարձակումով 0-ից մինչև $+\infty$ և 0-ից մինչև $-\infty$՝ յուրաքանչյուր վորպես սահմանային ընդունած շառավղին համապատասխանում է վոչ թե մեկ անկյուն, այլ դրական և բացասական անկյունների մի անվերջ շարք։ Այսպիսով ֆունկցիայի տվյալ արժեքին այժմ համապատասխանում են յերկու անվերջ շարք կազմող անկյուններ։ Այդ բոլոր անկյունները, ըստ § 45-ի, կարելի յե արտահայտել x_1-ի և x_2-ի օգնությամբ, այն է՝ մի շարքի անկյունների ընդհանուր տեսքը կլինի՝ $x_1+360°\cdot n$, իսկ մյուս շարքինը՝ $x_2+360°\cdot n$։

Մենք ստացանք հարցի ընդհանուր պատասխանը յերկու բանաձևերի տեսքով, յերկու հիմնական անկյունների օգնությամբ։ Այժմ կտեսնենք, վոր դրանք բերվում են մեկ հիմնական անկյան, բայց տարբեր ֆունկցիաների համար այդ անկյունն արդեն տարբեր կլինի։

Անցնենք առանձին ֆունկցիաներին (պարզության համար վերցնենք թվական օրինակներ, այն էլ այնպիսի օրինակներ, վոր աղյուսակների կիրառման պահանջ չլինի)։

1. ա) $\sin x = \frac{1}{2}$։

Վորոնելի անկյունը հավասար է 30° կամ 150°, ուստի կունենանք՝

$$x_1 = 30° + 360° \cdot n \text{ և } x_2 = 150° + 360° \cdot n.$$

Այս արտահայտությունները ձևափոխում ենք այսպես՝

$$x_1 = 180° \cdot 2n + 30°;$$

$$x_2 = 180° - 30° + 180° \cdot 2n = 180°(2n+1) - 30°։$$

Այստեղ 30°-ի առաջի նշանը կախում ունի 180°-ի (2n) բազմապատիկի զույգ լինելուց կամ (2n+1) ի կենտ լինելուց, իսկ այդ առնչությունը կարելի յե արտահայտել բացասական միավորի աստիճանով։ Այդ դեպքում յերկու բանաձևերի փոխարեն կստանանք հետևյալ բանաձևը՝

$$x = 180° \cdot m + 30°(-1)^m,$$

վորտեղ m-ը կամավոր ամբողջ թիվ է, նա կարող է լինել և զույգ թիվ, և կենտ։ Յեթե m-ը զույգ է, այս բանաձևը տալիս է x_1-ը, իսկ յեթե կենտ է՝ x_2-ը։

բ) $\sin x = -\frac{1}{2}$։

$$x_1 = 210° + 360° \cdot n \text{ և } x_2 = 330° + 360° \cdot n.$$

Մենք կարող ենք հիմնական անկյունների բացարձակ մեծությունները փոքրացնել, յեթե դրանց համար վերցնենք բացասական արժեքներ։ Այդ դեպքում կունենանք՝

$$x_1 = -150° + 360° \cdot k \text{ և } x_2 = -30° + 360° \cdot k,$$

կամ ուրիշ տեսքով՝

$$x_1 = -150° + 180° \cdot 2k = -150° + 180° - 180° + 180° \cdot 2k =$$
$$= 30° + 180°(2k-1)$$

և

$$x_2 = 180° \cdot 2k - 30°։$$

Այս բանաձևերը ևս կարելի յե միացնել և ստանալ հետևյալ բանաձևը՝

$$x = 180° \cdot m - 30° \cdot (-1)^m,$$

վորն m-ի կենտ լինելու դեպքում տալիս է x_2-ը, իսկ զույգ լինելու դեպքում՝ x_1-ը։

2. ա) $\cos x = \frac{1}{2}$;

$$x_1 = 60° + 360° \cdot n \text{ և } x_2 = 300° + 360° \cdot n.$$

Յեթե վորպես հիմնական անկյուն վերցնենք նաև բացասական անկյուն, կստանանք՝

$$x_1 = 60° + 360° \cdot m \text{ և } x_2 = -60° + 360° \cdot m,$$

վոր կարելի յե միացած գրել հետևյալ տեսքով՝

$$x = 360° \cdot m \mp 60°։$$

բ) $\cos x = -\frac{1}{2}$։

$$x_1 = 120° + 360° \cdot n \text{ և } x_2 = 240° + 360° \cdot n.$$

x_1-ը և x_2-ը կարելի յե արտահայտել նաև հետևյալ բանաձևերով.

$$x_1 = 120° + 360° \cdot m \text{ և } x_2 = -120° + 360° \cdot m.$$

Այս բանաձևերը միացնելով կստանանք՝

$$x = 360° \cdot m \mp 120°։$$

3. ա) $\operatorname{tg} x = 1$;

$$x_1 = 45° + 360° \cdot n \text{ և } x_2 = 225° + 360° \cdot n,$$

վոր կարելի յե ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$x_1 = 45° + 180° \cdot 2n \text{ և } x_2 = 45° + 180°(2n+1),$$

իսկ վերջին յերկու բանաձևերը կարելի յե փոխարինել հետևյալ մեկ բանաձևով՝

$$x = 45° + 180° \cdot m,$$

վորը զույգ m-ի դեպքում տալիս է x_1-ը, իսկ կենտ m-ի դեպքում՝ x_2-ը։

$x = 44° + 180° \cdot m$ բանաձևը հեշտ կստացվի նաև հետևյալից. 22-րդ գծագիրը վորտեղ C և D կետերը գտնվում են միևնույն տրամագծի վրա, ցույց է տալիս, վոր միևնույն տանգենս ունեցող բոլոր աղեղները կրկնվում են յուրաքանչյուր 180°-ից հետո։ Այսպիսով վորոնելի աղեղները կազմում են 180° տարբերություն ունեցող թվաբանական պրոգրեսիա։ Այդ պրոգրեսիայի ընդհանուր անդամը կլինի՝

$$x = 45° + 180° \cdot m։$$

բ) $\operatorname{tg} x = -1$։

Դատելով այնպես, ինչպես նախորդ որինակում, կստանանք՝

$$x_1 = 135° + 360° \cdot n \text{ և } x_2 = 315° + 360° \cdot n,$$

կամ՝

$$x = 135° + 180° \cdot m$$

և կամ՝

$$x = -45^\circ + 180^\circ \cdot k$$

4. ա) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$

Հարցը լուծվում է ճիշտ այնպես, ինչպես տանգենսի դեպքում։ Ստանում ենք՝

$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ \cdot n \text{ և } x_2 = 210^\circ + 360^\circ \cdot n,$$

կամ՝

$$x = 30^\circ + 180^\circ \cdot m$$

բ) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$։

Դատելով այնպես, ինչպես տանգենսի դեպքում, ստանում ենք՝

$$x_1 = 150^\circ + 360^\circ \cdot n \text{ և } x_2 = 330^\circ + 360^\circ \cdot n,$$

կամ

$$x = 150^\circ + 180^\circ \cdot m,$$

նույնպես և՝

$$x = -30^\circ + 180^\circ \cdot k$$

5 յեվ 6. *Յեթե տված են սեկանսը և կոսեկանսը, ապա նախորոք անցնում ենք համապատասխանաբար սինուսին և կոսինուսին։*

§ 48. Հակադարձ շրջանային ֆունկցիաներ. *Յեթե մենք ունենք մի յերկանհայտ հավասարում, ապա դրանից կարող ենք անհայտներից մեկն ու մեկն արտահայտել մյուսով։*

Օրինակ՝ յեթե ունենք

$$2x + 3y = 6,$$

ապա՝

$$\text{ա) } y = 2 - \frac{2}{3}x;$$

$$\text{բ) } x = 3 - \frac{3}{2}y\text{։}$$

Առաջին արտահայտությունը տալիս է y*-ի արտահայտությունը վորպես* x*-ի ֆունկցիա։ Յերկրորդն, ընդհակառակը, տալիս է* x*-ի արտահայտությունը վորպես* y*-ի ֆունկցիա։ Ընդհանրապես այդ յերեք հավասարումներն էլ արտահայտում են* x *և* y *փոփոխականների միևնույն առնչությունը, միայն այդ առնչության արտահայտման ձևն է տարբեր։ Առաջին հավասարումը չի լուծված վոչ* x*-ի և վոչ էլ* y*-ի նկատմամբ, հաջորդի մեջ վորպես ֆունկցիա ընդունված է* y*-ը և վորպես արգումենտ՝* x*-ը.*

վերջինի մեջ վորպես ֆունկցիա ընդունված է x*-ը և վորպես արգումենտ՝* y*-ը։*

Այսպիսի յերկու ֆունկցիաներ, վորոնք արտահայտում են x *և* y *փոփոխականների միևնույն առնչությունը, բայց մեկի մեջ վորպես ֆունկցիա ընդունված է* y*-ը, իսկ մյուսի մեջ՝* x*-ը, կոչվում են* փոխհակադարձ *ֆունկցիաներ։ Դրանցից վորևե մեկը կարելի յե վերցնել վորպես ուղիղ ֆունկցիա, այդ դեպքում մյուսը կլինի հակադարձ։*

Փոխհակադարձ ֆունկցիաների օրինակներ.

$$y = 5x + 3; \qquad x = \frac{y-3}{5};$$

$$y = 2x; \qquad x = \frac{1}{2}y;$$

$$y = x^2; \qquad x = \mp\sqrt{y};$$

$$y = \sqrt[3]{x}; \qquad x = y^3\text{։}$$

Հակադարձելիության գաղափարը կարելի յե կիրառել նաև յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների նկատմամբ։

Օրինակ՝ մենք գործածում ենք $y = \sin x$ *հավասարությունը. այս նշանակում է, վոր* y*-ն* x *աղեղի սինուսն է. հակադարձը կլինի՝* x*-ն այն աղեղն է, վորի սինուսը հավասար է* y*-ի։ Ճիշտ նույնպես՝* $\frac{1}{2} = \sin 30^\circ$*, այսինքն կեսը* 30° *աղեղի սինուսն է. հակառակը,* 30°*-ը այն աղեղն է, վորի սինուսը հավասար է կեսի։*

Հակադարձ կախումը բառերով բացատրելու փոխարեն, գործածվում է հատուկ նշան՝ arc *(կարդացվում է «արկ», ֆրանսերեն նշանակում է աղեղ)։*

Այսպիսով կարող ենք գրել.

$$\frac{1}{2} = \sin 30^\circ; \qquad 30^\circ = \operatorname{arc} \sin \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2} = \cos 60^\circ; \qquad 60^\circ = \operatorname{arc} \cos \frac{1}{2};$$

$$1 = \operatorname{tg} 45^\circ; \qquad 45^\circ = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1;$$

$$\sin 16^\circ = 0{,}276; \qquad 16^\circ = \operatorname{arc} \sin 0{,}276;$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = 0{,}707; \qquad \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc} \cos 0{,}707;$$

$$1 = \sin 90^\circ; \qquad 90^\circ = \operatorname{arc} \sin 1;$$

$$1 = \cos 0^\circ; \qquad 0^\circ = \operatorname{arc} \cos 1;$$

$$-1 = \cos \pi; \qquad \pi = \operatorname{arc} \cos (-1);$$

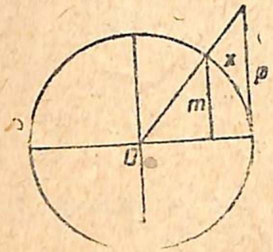
$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty; \qquad \frac{\pi}{2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \infty;$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}; \quad \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc} \sin \frac{1}{2}\sqrt{2} = \operatorname{arc} \cos \frac{1}{2}\sqrt{2}\text{։}$$

Առաջին սյունակում աղեղը վերցված է վորպես արգումենտ, իսկ յերկրորդ սյունակում՝ վորպես ֆունկցիա։ 37-րդ գծագրի վրա աղեղը նշանակված է x տառով, նրա սինուսը՝ m-ով, իսկ տանգենսը՝ p-ով։ Նշանակում է՝ x-ն այն աղեղն է, վորի սինուսն m է, իսկ տանգենսը՝ p, կամ՝

$$x=\text{arc}\sin m;\quad x=\text{arc tg}\ p.$$

Օգտվելով յեռանկյունաչափական աղյուսակներով, մենք լուծում ենք նաև յերկու հակադարձ խնդիրներ և օգտվում ենք յես ուղիղ, այդպես նաև հակադարձ յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներով։ Յեթե տված է աղեղը (կամ անկյունը), ապա մենք վորոնում ենք յեռանկյունաչափական ֆունկցիան. ընդհակառակը, յեթե տված է յեռանկյունաչափական ֆունկցիան և մենք վորոնում ենք անկյունը, ապա մենք ունենք հակադարձ յեռանկյունաչափական ֆունկցիա։



Գծ. 37.

§ 47-ից մենք գիտենք, վոր միևնույն յեռանկյունաչափական ֆունկցիային համապատասխանում են միևնույն սկիզբն ունեցող անթիվ բազմությամբ աղեղներ։ Օրինակ՝ կեսի հավասար սինուսին համապատասխանում են՝ 30°, 150°, 390°, 510°... աղեղները։ Դրանցից հիմնականների՝ 30°-ի և 150°-ի սինուսները կես են, բայց յեթե դրանցից յուրաքանչյուրին ավելացնենք 360°, ապա նոր աղեղները կունենան նույն սինուսը։ Հետևաբար, հակադարձ յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները բազմարժեք ֆունկցիաներ են։

§ 49. Նախորդ օրինակների մեջ մենք սահմանափակվեցինք տված յեռանկյունաչափական ֆունկցիային համապատասխանող աղեղներից ամենափոքրով։ Բայց կարելի յեր տալ տված սինուսը, կոսինուսը և տանգենսն ունեցող աղեղների ընդհանուր արտահայտությունը. յեթե նկատի յենք ունենում վոչ թե տված սինուսն ունեցող բոլոր աղեղների ընդհանուր արտահայտությունը, ապա աղեղի անունը գրում ենք մեծատառով։

Օրինակ՝

$$\text{arc}\sin\frac{1}{2}=30°,\ \text{բայց}\ \text{Arc}\sin\frac{1}{2}=180°\cdot m+(-1)^m\cdot 30°,$$

կամ՝

$$\text{arc tg}\ 1=45°,\ \text{բայց}\ \text{Arc tg}\ 1=45°+180°\cdot m.$$

Այս բանաձևերը վերցված են 47-րդ պարագրաֆից (յեռանկյունաչափական ֆունկցիայի տված արժեքին համապատասխանող աղեղների ընդհանուր տեսքը), բայց այնտեղ դեռ չէր գործածվում հակադարձ յեռանկյունաչափական ֆունկցիայի նշանը։

Յեթե օգտվենք 47-րդ պարագրաֆի բանաձևերով և ընդհանրացնենք այդ բանաձևերը, փոխարինելով թվական արժեքները տառերով, ապա կստանանք ուղիղ և հակադարձ յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների հետևյալ աղյուսակը.

$$y=\sin x;\quad \text{Arc}\sin y=m\pi+(-1)^m x;$$
$$y=\cos x;\quad \text{Arc}\cos y=2m\pi\mp x;$$
$$y=\text{tg}\ x;\quad \text{Arc tg}\ y=m\pi+x;$$
$$y=\text{ctg}\ x;\quad \text{Arc ctg}\ y=m\pi+x.$$

Սակայն, տված յեռանկյունաչափական ֆունկցիայով մեծ մասամբ վորոնում են ամենափոքր աղեղը (arc)։ Այդ դեպքում յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների բացասական արժեքների դեպքում աղեղը վերցնում են I քառորդի մեջ $\left(0\text{-ից մինչև }\frac{\pi}{2}\right)$։ Սինուսի, տանգենսի, կոտանգենսի և կոսեկանսի բացասական արժեքների համար աղեղը վերցնում են առաջին բացասական քառորդում $\left(0\text{-ից մինչև }-\frac{\pi}{2}\right)$, իսկ կոսինուսի և սեկանսի բացասական արժեքների համար աղեղը վերցնում են II քառորդում $\left(\frac{\pi}{2}\text{-ից մինչև }\pi\right)$։

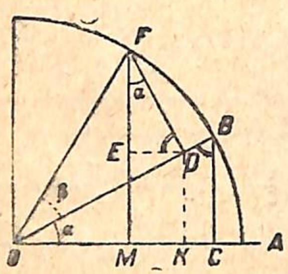
Այսպիսով սինուսի, տանգենսի, կոտանգենսի և կոսինուսի բոլոր հնարավոր արժեքների դեպքում աղեղը վերցնում են,— $-\frac{\pi}{2}$-ից մինչև $\frac{\pi}{2}$ սահմաններում, իսկ կոսինուսի և սեկանսի համար՝ 0-ից մինչև π սահմաններում։

Հակադարձ յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները, նրանց շրջանի հետ կապ ունենալու հետևանքով, կոչվում են նաև հակադարձ շրջանային ֆունկցիաներ։

IV. ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐԻ ԵՎ ՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅԱՆ, ԿՐԿՆԱԿԻ ԱՆԿՅՈՒՆ ԵՎ ԿԵՍ ԱՆԿՅԱՆ ՍԻՆՈՒՍԻ, ԿՈՍԻՆՈՒՍԻ ԵՎ ՏԱՆԳԵՆՍԻ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

§ 50. **Երկու անկյունների գումարի և տարբերության սինուսն ու կոսինուսը.** *Դիցուք α-ն և β-ն դրական սուր անկյուններ են և միասին կազմում են 90°-ից փոքր անկյուն։*

Եռանկյունաչափական շրջանի մեջ վերցնենք $\alpha+\beta$ *անկյունը (գծ. 38)։*



Գծ. 38.

Կառուցենք α, β *և* $\alpha+\beta$ *անկյունների սինուսի գծերը։ Գծերից տեսնում ենք, որ*

$$\sin\alpha=\frac{BC}{R};\ \cos\alpha=\frac{OC}{R};\ \sin\beta=\frac{FD}{R};$$

$$\cos\beta=\frac{OD}{R};\ \sin(\alpha+\beta)=\frac{FM}{R}$$

և $$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OM}{R}։$$

51. ա) **Գումարի սինուսը։** *Որպեսզի* $\alpha+\beta$ *անկյան սինուսն արտահայտենք* α *և* β *անկյունների ֆունկցիաների օգնությամբ, կառուցում ենք այդ անկյունների եռանկյունաչափական գծերը պարունակող (որպես կողմ) եռանկյունները։ Դրա համար տանում ենք* $DE \parallel OA$ *և* $DK \parallel BC$։

Գծագրից ստանում ենք՝ $FM=EM+EF=KD+EF$։

KD-*ն հաշվելու համար դիտենք* ODK *և* OBC *ուղղանկյուն եռանկյունները։ Դրանք նման են, որովհետև ունեն* α *ընդհանուր սուր անկյունը։ Արտահայտենք կողմերի համեմատականությունը.*

$$\frac{DK}{BC}=\frac{OD}{OB};\ DK=BC\cdot\frac{OD}{OB}=EM։$$

EF *հատվածը կհաշվենք* FED *և* OBC *ուղղանկյուն եռանկյուններից, որոնք նման են, որովհետև կողմերը համապատասխանաբար ուղղահայաց են։ Այդ եռանկյունների նմանությունից հետևում է՝*

$$\frac{EF}{OC}=\frac{FD}{OB};\ EF=OC\cdot\frac{FD}{OB}.$$

Գումարելով արդյունքները, կստանանք՝

$$FM=EM+EF=BC\cdot\frac{OD}{OB}+OC\cdot\frac{FD}{OB}.$$

Հավասարության երկու կողմն էլ բաժանենք շառավղի վրա, կստանանք՝

$$\frac{FM}{R}=\frac{BC}{R}\cdot\frac{OD}{OB}+\frac{OC}{R}\cdot\frac{FD}{OB}.$$

Անցնելով եռանկյունաչափական ֆունկցիաներին, կստանանք՝

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta։$$

բ) **Տարբերության սինուսը.** *(ենթադրում ենք, որ* $\alpha>\beta$*)։ Տարբերության սինուսը ստանալու համար, նախորդ բանաձևի մեջ* β-*ն փոխարինում ենք* $(-\beta)$-*ով. ստանում ենք՝*

$$\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)։$$

Նկատի առնելով այն, որ $\cos(-\beta)=\cos\beta$ *և* $\sin(-\beta)=-\sin\beta$, *կստանանք՝*

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

§ 52. ա) **Գումարի կոսինուսը։** *Գումարի կոսինուսի բանաձևը կարելի է ստանալ տարբերության սինուսի բանաձևից՝ համապատասխան վերածման բանաձևի կիրառումով. այն է՝*

$$\cos(\alpha+\beta)=\sin[90^\circ-(\alpha+\beta)]։$$

Բաց անելով փակագծերը և խմբավորելով, կստանանք,

$$\cos(\alpha+\beta)=\sin[(90^\circ-\alpha)-\beta]։$$

Քառակուսի փակագծերի մեջի արտահայտությունը դիտելով որպես $90^\circ-\alpha$ *և* β *անկյունների տարբերություն և դրա մասին կիրառելով տարբերության սինուսի բանաձևը, ստանում ենք.*

$$\cos(\alpha+\beta)=\sin(90^\circ-\alpha)\cdot\cos\beta-\cos(90^\circ-\alpha)\cdot\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta։$$

բ) Տարբերության կոսինուսը. Նախորդ բանաձևի մեջ β-ն փոխարինելով (—β)-ով, կստանանք՝

$$\cos[\alpha+(-\beta)]=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin(-\beta),$$

որից՝

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

§ 53 Այսպիսով ստացանք հետևյալ չորս բանաձևերը.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta; \qquad (I)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta; \qquad (II)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta; \qquad (III)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta. \qquad (IV)$$

Այս բանաձևերի արտածման ժամանակ մենք ընդունել էինք, որ $\alpha+\beta<90^\circ$ և $\alpha>\beta$։ Հաջորդ հոդվածում կապացուցենք, որ այդ բանաձևերն ընդհանուր են, այսինքն դրանք ճիշտ են α և β անկյունների ամեն մի արժեքի համար։

§ 54. § 53-ի բանաձևերի ընդհանուր լինելու ապացույցը. Նախ ապացուցենք այդ գումարի բանաձևերի համար, որից հեշտ է ստանալ բանաձևեր տարբերության համար։ Ապացուցման ժամանակ մենք ի միջի այլոց կօգտվենք նաև վերածման բանաձևերով. նրանց ընդհանրությունն արդեն ապացուցված է (§ 38)։ Անցնենք ապացուցմանը։

I. ա) Երկու գումարելի անկյունները դրական են։

1) $\alpha+\beta<90^\circ$ դեպքի համար բանաձևը ապացուցված է։

2) Դիցուք $\alpha<90^\circ$ և $\beta<90^\circ$, բայց $\alpha+\beta>90^\circ$, այդ դեպքում ընդունելով՝ $\alpha=90^\circ-\alpha_1$ և $\beta=90^\circ-\beta_1$, կունենանք՝

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin[180^\circ-(\alpha_1+\beta_1)]=\sin(\alpha_1+\beta_1);$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos[180^\circ-(\alpha_1+\beta_1)]=-\cos(\alpha_1+\beta_1).$$

Քանի որ $\alpha_1+\beta_1<90^\circ$, ապա կիրառելով այդ գումարի նկատմամբ ապացուցված բանաձևերը և օգտվելով վերածման բանաձևերով, կստանանք՝

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha_1\cdot\cos\beta_1+\cos\alpha_1\cdot\sin\beta_1=\cos\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=-\cos\alpha_1\cdot\cos\beta_1+\sin\alpha_1\cdot\sin\beta_1=-\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta.$$

Ստացվեց նույնը, ինչ որ § 53-ում։

1) և 2) կետերից հետևում է, որ I և II բանաձևերը ճիշտ են բոլոր սուր անկյունների համար։

3) Այժմ ապացուցենք, որ եթե I և II բանաձևերը ճիշտ են երկու անկյունների համար, ապա դրանք ճիշտ կլինեն նաև

այն դեպքում, երբ այդ անկյուններից մեկն ու մեկն ավելացնում ենք 90°։ Դիցուք α-ն և β-ն երկու այնպիսի անկյուններ են, որոնց համար I և II բանաձևերը ճիշտ են։ Ընդունենք, որ $\alpha+90^\circ=\alpha_1$, այդ դեպքում՝

$$\sin(\alpha_1+\beta)=\sin[90^\circ+(\alpha+\beta)]=\cos(\alpha+\beta);$$

$$\cos(\alpha_1+\beta)=\cos[90^\circ+(\alpha+\beta)]=-\sin(\alpha+\beta).$$

Վերլուծելով այստեղ $\cos(\alpha+\beta)$-ն և $\sin(\alpha+\beta)$, α և β անկյունների վերաբերյալ մեր ունեցած պայմանի համաձայն կստանանք՝

$$\sin(\alpha_1+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta; \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha_1+\beta)=-(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta). \qquad (2)$$

Երկրորդ մասերում α_1-ից անցնենք α-ին։ Քանի որ $\alpha+90^\circ=\alpha_1$, ապա $\alpha=\alpha_1-90^\circ$, կամ $\alpha=-(90^\circ-\alpha_1)$, իսկ սրանից հետևում է, որ

$$\sin\alpha=-\sin(90^\circ-\alpha_1)=-\cos\alpha_1;$$

$$\cos\alpha=\cos(90^\circ-\alpha_1)=\sin\alpha_1.$$

Այժմ (1) և (2) հավասարությունների մեջ sin α-ն փոխարինելով $(-\cos\alpha_1)$-ով, իսկ cos α-ն՝ $\sin\alpha_1$-ով, կստանանք՝

$$\sin(\alpha_1+\beta)=\sin\alpha_1\cdot\cos\beta-(-\cos\alpha_1)\cdot\sin\beta=$$
$$=\sin\alpha_1\cdot\cos\beta+\cos\alpha_1\cdot\sin\beta.$$

$$\cos(\alpha_1+\beta)=-[(-\cos\alpha_1)\cdot\cos\beta+\sin\alpha_1\cdot\sin\beta]=$$
$$=\cos\alpha_1\cdot\cos\beta-\sin\alpha_1\cdot\sin\beta.$$

Առնչությունը մնաց ճիշտ այնպես, ինչպիսի առնչությունն ենթադրված էր α-ի համար։

4) Յուրաքանչյուր 90°-ից մեծ դրական անկյուն կարելի է ստանալ՝ սուր անկյունը հաջորդաբար 90° ավելացնելով։ I և II բանաձևերը սուր անկյունների համար արդեն ապացուցված են, իսկ այս կամ այն անկյունը 90° ավելացնելը, ինչպես տեսանք, չի խախտում առնչությունը, այդ պատճառով էլ բանաձևերը ճիշտ կլինեն որևէ մեծության դրական անկյունների համար։

I. բ) Գումարելի անկյուններից մեկը, կամ երկուսն էլ բացասական են։

Բացասական անկյունը կարող է ստացվել՝ դրական անկյունը հաջորդաբար −360° ավելացնելով։ Դրական անկյունների համար I և II բանաձևերն ապացուցված են, իսկ α-ին կամ β-ին և կամ թե մեկին և թե մյուսին −360° ավելացնելով՝ չենք փոխում վոչ գումարի sin-ն ու կոսինուսը և վոչ առանձին անկյունների սինուսներն ու կոսինուսները. ուստի բանաձևերը ճիշտ կլինեն և այն դեպքում, յերբ անկյուններից մեկը կամ յերկուսը միասին բացասական են։

Այսպիսով ապացուցեցինք, վոր I և II անկյունները ճիշտ են α և β անկյունների բոլոր արժեքների համար՝ թե դրական և թե բացասական։

II. Յերկու անկյունների տարբերության դեպքը. Բանաձևերի մեջ փոխարինելով β-ն $(-\beta)$-ով կստանանք՝

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Այս բանաձևերն արտածելիս վոչ մի սահմանափակում չենք մտցրել։ Ինչպես տեսնում ենք, այս բանաձևերը նույնն են, ինչ վոր § 53-ի III և IV բանաձևերը։

Այսպիսով I—IV բանաձևերի ընդհանրությունն ապացուցված է։

§ 55. Յերկու անկյունների գումարի յեվ տարբերության տանգենսը.

$$1)\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta},$$

Վորպեսզի անցնենք tg α-ի և tg β-ի, բաժանենք այս հավասարության յերկրորդ մասի թե համարիչը և թե հայտարարը $\cos\alpha.\cos\beta$-ի վրա. կստանանք՝

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\qquad(\mathrm{V})$$

Նույն ձևով, կստանանք՝

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\qquad(\mathrm{VI})$$

§ 56. Յերկու անկյունների գումարից ու հանումից հա-

ջորդաբար կարելի չե անցնել ցանկացած թվով գումարելիների և հանելիների զուգորդման։

Որինակ.

$$\sin(\alpha-\beta+\gamma)=\sin[(\alpha-\beta)+\gamma]=\sin(\alpha-\beta)\cdot\cos\gamma+$$
$$+\cos(\alpha-\beta).\sin\gamma=(\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha.\sin\beta)\cos\gamma+$$
$$+(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)\cdot\sin\gamma=\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma-$$
$$-\cos\alpha.\sin\beta\cdot\cos\gamma+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma+\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma.$$

§ 57. Կրկնակի անկյան սինուսը, կոսինուսն ու տանգենսը. Յերկու անկյունների գումարի բանաձևի մեջ ընդունելով $\beta=\alpha$, կստանանք՝

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;\qquad(\mathrm{VII})$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;\qquad(\mathrm{VIII})$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.\qquad(\mathrm{IX})$$

§ 58. 3α և 4α անկյունների յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները վերլուծելու համար, այդ անկյուններին տալիս ենք $2\alpha+\alpha$ և $2(2\alpha)$ տեսքը։

Որինակ.

$$1)\ \sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha+\cos 2\alpha\cdot\sin\alpha=$$
$$=(2\sin\alpha.\cos\alpha)\cdot\cos\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha=$$
$$=\sin\alpha(3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$$

$$2)\ \sin 4\alpha=\sin 2(2\alpha)=2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=$$
$$=4\sin\alpha.\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$

§ 59. Հաճախ անհրաժեշտ է լինում տված անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներն արտահայտել այդ անկյան կեսի ֆունկցիաների միջոցով։ Այդ նպատակով ամբողջ անկյունը դիտում ենք վորպես կեսի կրկնապատիկ և կիրառում ենք § 57-ը։

Որինակ.

$$a)\ \sin\alpha=\sin 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2};$$

$$b)\ \cos\alpha=\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

§ 60. Կես անկյան սինուսը, կոսինուսը յեվ տանգենսը. 12-րդ և 59-րդ պարագրաֆներից ունենք հետևյալ հավասարությունները՝

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=1;\ \cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha.$$

Գումարելով և հանելով այդ հավասարությունները կստանանք՝

$$\cos^2 — = 1 + \cos$$

և

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha։$$

Այստեղից՝

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \text{(X)}$$

և

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}։ \qquad \text{(XI)}$$

X հավասարությունը բաժանենք XI-ի վրա, կստանանք՝

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}։ \qquad \text{(XII)}$$

Հաջորդ պարագրաֆում կտրվի ավելի հարմար բանաձև։

Ստացված բանաձևերը կիրառելիս պետք է պահել արմատի առաջի կրկնակի նշանը միայն այն դեպքում, երբ տվյալներ չկան նրանցից մեկն ու մեկն ընտրելու համար. հակառակ դեպքում վերցնում ենք պահանջված նշանը։

Օրինակ. պետք է գտնել $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, եթե α-ն գտնվում է $270°$-ի և $360°$-ի միջև և $\cos\alpha = 0{,}6$։ Քանի որ $270° < \alpha < 360°$, ապա $135° < \frac{\alpha}{2} < 180°$։ Այսպիսով $\frac{\alpha}{2}$ անկյունը բութ է և $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$-ն ունի բացասական նշան։ Ուստի մենք պետք է վերցնենք՝

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-0{,}6}{1+0{,}6}} = -\frac{1}{2}։$$

§ 61. X յեվ XI բանաձևերի կրկնակի նշանների մասին. Եթե տված է $\cos\alpha$-ն և α-ի արժեքի վերաբերյալ ոչ մի սահմանափակում չկա, ապա $\frac{\alpha}{2}$-ի ֆունկցիաները որոշելը համազոր է այդ ֆունկցիան որոշելուն՝ α անկյան տված կոսինուսին համապատասխանող բոլոր արժեքների համար։ Դիցուք φ-ն այդ արժեքներից ամենափոքր դրական արժեքն է. այդ դեպքում $\alpha = \pm\varphi + 360°\cdot n$, հետևաբար՝ $\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\varphi}{2} + 180°\cdot n$։ Վերջին արտահայտությունը ցույց է տալիս, թե որ կետերում են վերջանում $\frac{\alpha}{2}$ աղեղները $+\frac{\varphi}{2}$ և $-\frac{\varphi}{2}$ աղեղների ծայրերը գտնվում են

I և IV քառորդներում, միացնելով $180°\cdot n$, մենք զույգ n-ի դեպքում ստանում ենք աղեղների նույն ծայրերը (այսինքն I և IV քառորդներում), իսկ կենտ n-ի դեպքում ստանում ենք դրանց տրամագծորեն հակառակ կետեր։ Այսպիսով $\frac{\alpha}{2}$ աղեղների ծայրերը բաշխվում են բոլոր չորս քառորդներում, ուստի $\frac{\alpha}{2}$ անկյան ֆունկցիաները կարող են լինել և՛ դրական, և՛ բացասական։

§ 62. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$-ն արտահայտենք $\sin\alpha$-ի և $\cos\alpha$-ի միջոցով։

Այդ նպատակով $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$-ը կարտահայտենք $\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$-ով և կլրացնենք նախ համարիչը, ապա հայտարարը մինչև $\sin\alpha \left(= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)$, կստանանք (համաձայն § 59-ի և § 60-ի) —

$$\text{a)}\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}};\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$

$$\text{b)}\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}};\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}։$$

Օրինակ. a) և b) բանաձևերը կիրառենք 60-րդ հոդվածի օրինակի նկատմամբ։

Տված էր $270° < \alpha < 360°$ և $\cos\alpha = 0{,}6$։ Այստեղից $\sin\alpha = -\sqrt{1-(0{,}6)^2} = -0{,}8$։

Այսպիսով՝

$$\text{a)}\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{-0{,}8}{1+0{,}6} = \frac{-0{,}8}{1{,}6} = -\frac{1}{2};$$

$$\text{b)}\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-0{,}6}{-0{,}8} = \frac{0{,}4}{-0{,}8} = -\frac{1}{2}։$$

V. ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԼՈԳԱՐԻԹՄԵԼՈՒ ՀԱՐՄԱՐ ՁԵՎԻ ՎԵՐԱԾԵԼԸ

§ 63. **Ընդհանուր դիտողություններ.** *Որպեսզի արտահայտությունը հարմար լինի լոգարիթմելու, նա գումար և տարբերություն չպետք է պարունակի, բացի այն դեպքերից, յերբ այդ գումարն ու տարբերությունները կարելի յե* անմիջականորեն *հաշվել:*

Յեթե արտահայտությունն այդ պայմանները չի բավարարում, ապա պետք է տված արտահայտությունը ձևափոխել, ինչքան վոր այդ հնարավոր է և ձեռնտու: Այդ ձևափոխությունների գլխավորները կուսումնասիրենք այժմ:

§ 64. **Յերկու սինուսների կամ կոսինուսների գումարի յեվ տարբերության ձևափոխություն.** *Ձևափոխենք* $\sin\alpha+\sin\beta$ *արտահայտությունը: Դրա համար յենթադրենք, վոր*

$$\alpha=x+y \qquad (1)$$

և

$$\beta=x-y. \qquad (2)$$

Կիրառելով I *և* III *բանաձևերը, կստանանք՝*

$$\sin\alpha=\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y;$$

$$\sin\beta=\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y.$$

Այստեղից՝

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin x\cdot\cos y.$$

Բայց (1) *և* (2) *հավասարություններից բխում է, վոր*

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

և

$$y=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Այսպիսով՝

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \text{(XIII)}$$

Նույն յեղանակը կիրառելով կստանանք՝

ա) $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$ (XIV)

բ) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$ (XV)

գ) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=$

$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$[1], (XVI)

Օրինակներ.

1) $\sin 100^\circ-\sin 16^\circ=2\cos\frac{100^\circ+16^\circ}{2}\cdot\sin\frac{100^\circ-16^\circ}{2}=$
$=2\cos 58^\circ\cdot\sin 42.$

2) $\cos 12^\circ-\cos 60^\circ=2\sin 36^\circ\cdot\sin 24^\circ.$

3) $\cos 50^\circ+\sin 70^\circ=\cos 50^\circ+\cos 20^\circ=2\cos 35^\circ\cdot\cos 15^\circ.$

4) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\sin(90^\circ-\alpha)=2\sin 45^\circ\cdot\cos(\alpha-45^\circ)=$
$=\sqrt{2}\cdot\cos(\alpha-45^\circ).$

§ 65. *Ձևափոխենք նաև հետևյալ, սինուս և կոսինուս պարունակող, արտահայտությունները:*

ա) Բաժանելով XIII *հավասարությունը* XIV*-ի վրա, կստանանք՝*

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}:\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Հետևաբար՝

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}. \qquad \text{(XVII)}$$

բ) Համաձայն 60-րդ պարագրաֆի ունենք՝

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \qquad \text{(XVIII)}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad \text{(XIX)}$$

---

[1] $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin\left(-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=-\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$, Բանաձևը կարդում ենք այսպես՝ յերկու կոսինուսների տարբերությունը հավասար է անկյունների կիսագումարի սինուսի յեվ կիսատարբերության սինուսի կրկնապատիկ արտադրյալին:

Օրինակներ.

1) $\frac{\sin 35^\circ+\sin 14^\circ}{\sin 35^\circ-\sin 14^\circ}=\frac{\operatorname{tg}\frac{35^\circ+14^\circ}{2}}{\operatorname{tg}\frac{35^\circ-14^\circ}{2}}=\frac{\operatorname{tg} 24^\circ 30'}{\operatorname{tg} 10^\circ 30'}$;

2) $1+\cos 10^\circ 23'=2\cos^2 5^\circ 11'30''$;

3) $1-\sin 40^\circ=1-\cos 50^\circ=2\sin^2 25^\circ$։

§ 66. Երկու տանգենսների կամ կոտանգենսների գումարի յեվ տարբերության ձեվափոխությունը։ $\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta$, $\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta$ և $\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta$ *արտահայտությունները ձեվափոխելու համար նախ պետք է անցնել սինուսների և կոսինուսների օրինակ՝*

ա) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

բ) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$;

գ) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}$,

§ 67. Օժանդակ անկյուն մտցնելը. *Արտահայտությունները լոգարիթմական տեսքի բերելիս, յերբեմն նպատակահարմար է լինում վորոշ թվեր փոխարինել անկյունների յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներով։ Ահա մի քանի այդպիսի օրինակներ.*

1) $\sqrt{\sqrt{5}-1}=\sqrt{4\sin 18^\circ}=2\sqrt{\sin 18^\circ}$;

2) $1+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos 45^\circ\cdot\cos\alpha}$;

3) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cdot\left(\sin\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=$

$=\sqrt{2}\cdot(\sin\alpha\cdot\cos 45^\circ+\cos\alpha\cdot\sin 45^\circ)=\sqrt{2}\cdot\sin(\alpha+45^\circ)$ [հմմտ. § 64];

4) $1+2\sin 50^\circ=2\cdot\left(\frac{1}{2}+\sin 50^\circ\right)=2\cdot(\sin 30^\circ+\sin 50^\circ)=$

$=4\sin 40^\circ\cdot\cos 10^\circ$։

§ 68. *67-րդ հոդվածում ձեվափոխությունները հաջողվեցին վորոշ պարզագույն անկյունների օգնությամբ։ Այժմ զբաղվենք ընդհանուր դեպքով, այն է՝ օժանդակ անկյուն մտցնենք* A+B *և* A—B*-ի համար, վորտեղ* A*-ն և* B*-ն նշանակում են վորևե արտահայտություն։*

1) *Ունենք՝* $A+B=A\left(1+\frac{B}{A}\right)$։ *Այստեղ* $\frac{B}{A}$*-ն ընդունենք վորպես անկյան տանգենս, վորը միշտ հնարավոր է, վորովհետև ամեն մի թիվ կարող է լինել տանգենս։ Ընդունելով* $\frac{B}{A}=\operatorname{tg}\varphi$, *կստանանք՝* $A+B=A(1+\operatorname{tg}\varphi)$, *բայց 67-րդ հոդվածի համաձայն*

$$1+\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin(45^\circ+\varphi)}{\cos 45^\circ\cdot\cos\varphi};$$

Այսպիսով՝

$$A+B=A\cdot\frac{\sin(45^\circ+\varphi)}{\cos 45^\circ\cdot\cos\varphi}.$$

(Յերկրորդ մասը հաշվելու համար պարզ է, վոր նախ պետք է գտնել φ օժանդակ անկյունը աղյուսակների օգնությամբ)։

2) *Նույն յեղանակով կստանանք՝*

$$A-B=A\cdot\frac{\sin(45^\circ-\varphi)}{\cos 45^\circ\cdot\cos\varphi}.$$

3) *Վերը ստացած արտահայտությունների օգնությամբ կստանանք՝*

$$\frac{A+B}{A-B}=\frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi}=\operatorname{tg}(45^\circ+\varphi).$$

§ 69. A+B *և* A—B *արտահայտությունները կձեվափոխվեն § 68-ից ավելի պարզ, այն դեպքում, յերբ հայտնի է, վոր* A*-ն ու* B*-ն ունեն դրական արժեքներ։*

1) *Ունենք՝* $A+B=A\left(1+\frac{B}{A}\right)$։ *Քանի վոր* $\frac{B}{A}$*-ն դրական է, ապա ընդունում ենք՝*

$$\frac{B}{A}=\operatorname{tg}^2\varphi,$$

այդ ժամանակ՝

$$A+B=A(1+\operatorname{tg}^2\varphi)=A\sec^2\varphi=\frac{A}{\cos^2\varphi}.$$

2) $A-B$ *տարբերության համար, յերբ* $A>B$, *վերցնում ենք* $A-B=A\left(1-\frac{B}{A}\right)$ *և ընդունում՝*

$$\frac{B}{A}=\sin^2\varphi,$$

վորը միշտ հնարավոր է, վորովհետև $\frac{B}{A}$-ն դրական է և փոքր մեկից։

Այդ ժամանակ՝

$$A - B = A(1 - \sin^2\varphi) = A\cdot\cos^2\varphi ։$$

Յեթե $A<B$, ապա նախ վերցնում ենք $A-B=-(B-A)$, վորից հետո $(B-A)$-ն ձևափոխում ենք այնպես, ինչպես առաջ։

VI. ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

§ 70. Ընդհանուր դիտողություններ. Հավասարումը կոչվում է յեռանկյունաչափական, յերբ անհայտը գտնվում է յեռանկյունաչափական ֆունկցիայի նշանի տակ։ Այդպիսին են օրինակ, հետևյալ հավասարումները.

$2\sin^2x+3\cos x=0$; $\sin 5x=\sin 4x$; $tg(\alpha+x)=m\,tg\,x$,

(առաջին հավասարման մեջ անհայտը ծառայում է վորպես արգումենտ, յերկրորդում մտնում է արգումենտի կազմի մեջ, իսկ յերրորդ հավասարման մեջ՝ թե մեկը և թե մյուսը)։

Յեռանկյունաչափական հավասարումներից պետք է զանազանել յեռանկյունաչափական նույնությունները։ Յեռանկյունաչափական նույնություններն այն յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներ պարունակող հավասարություններն են, վորոնք ճիշտ են արգումենտի բոլոր արժեքների համար։ Օրինակ՝ $\sin^2x+\cos^2x=1$ հավասարության առաջին մասը միշտ հավասար է յերկրորդ մասին։ Այդ հավասարությունը նույնություն է։ Իսկ $\sin^2x-\cos^2x=1$ հավասարությունը ճիշտ է արգումենտի վորոշ արժեքների համար միայն [1])։

Այդ հավասարությունը մի հավասարում է։

Լուծել յեռանկյունաչափական հավասարումը՝ նշանակում է վորոշել այն անկյունները, վորոնք բավարարում են այդ հավասարմանը, այսինքն նրա յերկու մասերը դարձնում են հավասար (դրանք կոչվում են հավասարման արմատներ)։ Լուծման համար անհրաժեշտ է նախ վորոշել անհայտ անկյան (կամ անհայտ պարունակող արգումենտի) ֆունկցիաներից մեկն ու մեկը, վորից վորոշում ենք արգումենտը (սովորաբար աղյուսակների օգնությամբ)։ Բայց 47-րդ հոդվածից մենք գիտենք, վոր ֆունկցիայի տված արժեքին համապատասխանում է անկյունների անվերջ շատ, այդպիսով յեռանկյունաչափական հավասարումը (յեթե այդ հնարավոր է) ունի անվերջ թվով արմատներ։ Սովորաբար գտնում են նրանց ընդհանուր ձևը։

---

[1]) Օրինակ՝ յերբ $x=45°$, առաջին մասը հավասար չէ յերկրորդին։

Դիցուք, լուծելով մի որևէ յեռանկյունաչափական հավասարում, մենք ստացել ենք $\operatorname{tg} 3x=1$։ Տանգենսի այդ արժեքին համապատասխանում է հետևյալ կազմն ունեցող արգումենտը՝ $45^\circ+180^\circ\cdot n$, վորտեղ n-ը կամայորեն վերցված ամբողջ թիվ է, ուստի՝ $3x=45^\circ+180^\circ\cdot n$, վորից բաժանելով հավասարության յերկու կողմն էլ 3-ի վրա՝ կստանանք.

$$x=15^\circ+60^\circ\cdot n,$$

այս կլինի տված հավասարման արմատների ընդհանուր ձևը։

Բերենք մի հավասարում էլ, վորը հնարավոր չէ.

$5 \sin x=7$, վորից $\sin x=\frac{7}{5}$, իսկ այս հնարավոր չէ, վորովհետև սինուսի բացարձակ մեծությունը մեկից մեծ չպետք է լինի։

Յեթե վորոնելի անկյան ֆունկցիայի համար ստացվում է տառային արտահայտություն (օրինակ՝ $\sin x=a\cdot b$), ապա այդ կհամարվի վերջնական պատասխան։

Ինչ վերաբերում է լուծման յեղանակներին, ապա մեծ մասամբ հարմար է լինում հավասարումը բերել մեկ ֆունկցիայի, գերադանցապես սինուսի կամ կոսինուսի, և մեկ արգումենտի։ Այդ ժամանակ ընդունելով այդ ֆունկցիան վորպես հատուկ անհայտ, լուծում ենք վորպես հանրահաշվական հավասարում և բացառում ենք այն արմատները, վորոնք չեն կարող ծառայել վորոշվող ֆունկցիայի արմատներ։ Յերբեմն նպատակահարմար է լինում զերոյի հավասարեցնել արտադրյալներ կամ կոտորակներ։ Բոլոր ասածները պարզաբանենք օրինակներով։

§ 71. *Օրինակներ*. I. $2 \sin^2 x=3 \sin x$։

Լուծում. Հավասարումը բերելով

$$\sin x(2 \sin x-3)=0,$$

կստանանք՝

$$1)\ \sin x=0;\quad 2)\ 2 \sin x-3=0,$$

վորից՝

$$\sin x=\frac{3}{2}.$$

$\sin x$-ի յերկրորդ արժեքը հնարավոր չէ (վորովհետև սինուսը չի կարող մեկից մեծ լինել), իսկ առաջին արժեքին համապատասխանում է՝

$$x=180^\circ\cdot n \ (\text{կամ } x=\pi n).$$

II. $2 \sin^2 x+3 \cos x=0$։

Լուծում. $\sin^2 x$-ը փոխարինելով $(1-\cos^2 x)$-ով, կստանանք՝

$$2(1-\cos^2 x)+3 \cos x=0 \text{ և ապա՝}$$

$$\cos^2 x-\frac{3}{2}\cos x-1=0,$$

վորից՝

$$\cos x=\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}+1}=2 \text{ կամ } -\frac{1}{2}.$$

Առաջին արժեքը կոսինուսի համար հնարավոր չէ, իսկ վերցնելով $\cos x=-\frac{1}{2}$, կստանանք՝

$$x=360^\circ\cdot n\pm120^\circ \left(\text{կամ } x=2\pi n\pm\frac{2\pi}{3}\right).$$

III. $\operatorname{ctg}(270^\circ-x)=3 \operatorname{ctg} x$։

Լուծում. Փոխարինելով $\operatorname{ctg}(270^\circ-x)$ և $\operatorname{ctg} x$-ը համապատասխանաբար $\operatorname{tg} x$ և $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$-ով, կունենանք՝

$$\operatorname{tg} x=\frac{3}{\operatorname{tg} x}, \text{ վորից } \operatorname{tg} x=\pm\sqrt{3}.$$

Ստացված յերկու արժեքներն էլ $\operatorname{tg} x$-ի համար հնարավոր են։

Յեթե $\operatorname{tg} x_1=\sqrt{3}$, ապա $x_1=60^\circ+180^\circ\cdot n$;

յեթե $\operatorname{tg} x_2=-\sqrt{3}$, ապա $x_2=-60^\circ+180^\circ\cdot n$։

Այսպիսով՝

$$x=180^\circ\cdot n\pm60^\circ \text{ կամ } x=\pi n\pm\frac{\pi}{3}$$

IV. $\operatorname{tg}(\alpha+x)=m \operatorname{tg} x$, վորտեղ, յենթադրվում է, վոր α և m-ը հայտնի յեն։

Լուծում. Վերլուծելով $\operatorname{tg}(\alpha+x)$-ը, հաջորդաբար կստանանք՝

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg} x}=m \operatorname{tg} x;\quad \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg} x=m \operatorname{tg} x-m \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}^2 x;$$

$$m \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}^2 x-(m-1)\cdot\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\alpha=0,$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{m-1\pm\sqrt{(m-1)^2-4m \operatorname{tg}^2\alpha}}{2m \operatorname{tg}\alpha},$$

V. $\sin x-\operatorname{coo} x=\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Լուծում. *Այստեղ նպատակահարմար է առաջին մասը փոխարինել արտադրյալով (տես. § 64-ի 4-րդ օրինակը).*

$$\sin x-\sin(90^\circ-x)=\sqrt{\frac{1}{2}};\quad 2\cos 45^\circ\cdot\sin(x-45^\circ)=\sqrt{\frac{1}{2}};$$

$$\sqrt{2}\cdot\sin(x-45^\circ)=\sqrt{\frac{1}{2}};\quad \sin(x-45)=\frac{1}{2}.$$

Այստեղից՝

$$x-45^\circ=30^\circ+360^\circ\cdot n \text{ և } 150^\circ+360^\circ\cdot n,$$

և, հետևաբար,

$$x=75^\circ+360^\circ\cdot n \text{ և } 195^\circ+360^\circ\cdot n \left(\text{կամ } x=\frac{5}{12}\pi+2\pi n \text{ և } \frac{13}{12}\pi+2\pi n\right)։$$

VI. $\sin^2 x-2\sin x\cos x=3\cos^2 x$։

Լուծում. *Յերկու մասն էլ* $\cos^2 x$*-ի վրա բաժանելով կստանանք՝*

$$tg^2 x-2\,tg\,x=3,$$

որից՝

$$tg\,x=-1 \text{ և } 3։$$

$tg\,x$*-ի այս արժեքներին համապատասխան գտնում ենք՝*

$$x_1=135^\circ+180^\circ\cdot n \ (\text{կամ } x_1=-45^\circ+180^\circ\cdot n)$$

և

$$x_2=71^\circ 33' 54''+180^\circ\cdot n։$$

VII. $\sin 5x=\sin 4x$։

Լուծում. $\sin 5x-\sin 4x=0$; $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{9x}{2}=0$; *ուստի՝*

1) $\sin\frac{x}{2}=0$, *որից* $\frac{x}{2}=180^\circ\cdot n$ *և, հետևաբար* $x=360^\circ\cdot n$։

2) $\cos\frac{9x}{2}=0$, *որից* $\frac{9x}{2}=90^\circ+180^\circ\cdot n$ *և հետևաբար,* $x=20^\circ+40^\circ\cdot n$։ *Այսպիսով,* $x=360^\circ\cdot n;\ 20^\circ+40^\circ\cdot n$։

VIII. $a\cdot\sin x=b\cdot\cos^2\frac{x}{2}$.

Լուծում. $a\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=b\cdot\cos^2\frac{x}{2}$; $\cos\frac{x}{2}\left(2a\cdot\sin\frac{x}{2}-b\cdot\cos\frac{x}{2}\right)=0$, *այստեղից՝*

1) $\cos\frac{x}{2}=0$; 2) $2a\cdot\sin\frac{x}{2}-b\cdot\cos\frac{x}{2}=0$, *որից* $tg\frac{x}{2}=\frac{b}{2a}$.

IX. $tg\,5x=tg\,2x$։

Լուծում. *Բերելով հավասարումը* $tg\,5x-tg\,2x=0$ *տեսքին և կիրառելով § 67-ը, կստանանք՝*

$$\frac{\sin(5x-2x)}{\cos 5x\cdot\cos 2x}=0, \text{ որը տալիս է՝ } \sin 3x=0,$$

որանից էլ՝

$$3x=180^\circ\cdot n \text{ և } x=60^\circ n։$$

X. $a\sin x+b\cdot\cos x=c$.

Լուծում. 1-ին յեղանակ. *Քանի որ* $\sin x$*-ը և* $\cos x$*-ը մեկը մյուսով արտահայտելիս ստանում ենք իռռացիոնալ արտահայտություն, ապա նախ* $a\cdot\sin x$ *կամ* $b\cdot\cos x$) *փոխադրում ենք հավասարության մյուս կողմը, յերկու կողմն էլ քառակուսի ենք բարձրացնում և այնուհետև* $\sin^2 x$*-ը արտահայտում ենք* $\cos^2 x$*-ով (կամ* $\cos^2 x$*-ը* $\sin^2 x$*-ով)։*

2-րդ յեղանակ. *Օգտվում ենք այն բանից, որ* $\sin x$*-ը և* $\cos x$*-ը կարող ենք արտահայտել* $tg\frac{x}{2}$*-ով և ստանալ ռացիոնալ արտահայտություն.*

$$\sin\alpha=\frac{2\,tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} \text{ և } \cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}\,[1]։$$

Յեթե այսպիսի փոխարինում կատարենք մեր հավասարման մեջ, ապա կստանանք $tg\frac{x}{2}$*-ի վերաբերյալ քառակուսի հավասարում, որից կստանանք՝*

$$tg\frac{x}{2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}.$$

Այստեղից ի միջի այլոց յերևում է, որ խնդրի հնարավորության պայմանն է՝ $a^2+b^2\geq c^2$.

3-րդ յեղանակ. *Բարդ թվերի դեպքում նախորդ յեղանակը դժվար է. այդ դեպքում տված հավասարումը լուծում ենք օժան-*

---

[1]) *Վերցնելով* $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ *և* $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$*, յերկրորդ մասերը կբաժանենք* $\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$*-ի վրա (որը, ինչպես գիտենք, հավասար է 1) և ապա համարիչն ու հայտարարը կբաժանենք* $\cos^2\frac{\alpha}{2}$*-ի վրա*

դակ անկյան օգնությամբ, հետևյալ ձևով. հավասարության յերկու մասն էլ բաժանելով b-ի վրա և ընդունելով $\frac{a}{b}=\text{tg}\,\varphi$, կունենանք՝

$$\text{tg}\,\varphi\cdot\sin x+\cos x=\frac{c}{b}$$

Այժմ յերկու մասն էլ բազմապատկելով cos φ-ով, կստանանք՝

$$\cos(x-\varphi)=\frac{c}{b}\cos\varphi.$$

§ 72. Այս հատվածի օրինակները շոշափելու չեն արմատների կորստի և կողմնակի արմատների առաջացման հարցը, ընդ որում յենթադրվում ե, վոր այս հարցի ընդհանուր տեսությունն արդեն հայտնի յե աշակերտին հանրահաշվից.

I. Յերբ արտադրյալը զերոյի հավասարեցնելու նպատակով արտադրիչներից մեկը հավասարեցնում ենք զերոյի, պետք է հետևենք, թե արդյոք մյուս արտադրիչը չի՞ դառնա ∞:

Վերցնենք, օրինակ, $\sin x\cdot\text{ctg}\,2x=0$: Առանձին արտադրիչները զերոյի հավասարեցնելով ստանում ենք՝

1) $\sin x=0$, $x=180°\cdot n$; 2) $\text{ctg}\,2x=0$, $2x=90°+180°\cdot n$, և հետևաբար, $x=45°+90°\cdot n$.

Այժմ կատարենք ստուգում.

Տեղադրելով տված հավասարման մեջ $x=180°\,n$ արմատը, առաջին մասում կստանանք $\sin(180°\,n)\cdot\text{ctg}(360°\cdot n)$, վորը հավասար է $0\cdot\infty$:

Այս անորոշությունը բաց անելու համար ձևափոխում ենք $\sin x\cdot\text{ctg}\,2x$ արտադրյալը: Ամեն մի x-ի դեպքում ունենք՝

$$\sin x\cdot\text{ctg}\,2x=\sin x\cdot\frac{\cos 2x}{\sin x}=\frac{\cos 2x}{2\cos x}$$

Տեղադրելով այստեղ $x=180°\cdot n$, կստանանք՝

$$\frac{\cos(360°\cdot n)}{2\cos(180°\cdot n)}=\frac{1}{2\cdot(-1)^n}=\frac{1}{2}\cdot(-1)^n:$$

Այսպիսով $x=180°\cdot n$ արմատը չի բավարարում տված հավասարմանը, վորովհետև այդ արմատն առաջին մասը հավասարեցնում է վոչ թե զերոյի, այլ $\frac{1}{2}$ կամ $-\frac{1}{2}$-ի:

Տեղադրենք տված հավասարման մեջ $x=45°+90°\cdot n$ արմատը: Քանի վոր sin x-ը յերբեք չի դառնում ∞, ապա արտադրյալում ստանում ենք զերո, հետևաբար ստուգվող արմատը պիտքական ե:

Այսպիսով հետազոտությունից հետո մնաց միայն $x=45°+90°n$ արմատը:

II. $\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{\cos 2x}{\cos x}$.

Լուծում. Ազատվելով հայտարարներից, կստանանք՝

$$\sin 2x\cdot\cos x=\cos 2x\cdot\sin x,\ \text{կամ}\ \sin 2x\cdot\cos x-\cos 2x\sin x=0:$$

Այստեղ, առաջին մասում մենք ունենք տարբերության սինուս, վերածված ձևով. այսպիսով ստանում ենք՝

$$\sin x=0,\ \text{վորտեղից}\ x=180°\cdot n:$$

Քանի վոր, յերբ $\sin x=0$, $\sin x\cdot\cos x$ ընդհանուր հայտարարը հավասարվում է զերոյի, ապա ստացված արմատը կասկածելի յե:

Տեղադրելով $x=180°\cdot n$ արմատը տված հավասարման մեջ, կունենանք՝

$$\frac{\sin(360°\cdot n)}{\sin(180°\cdot n)}=\frac{\cos(360°\cdot n)}{\cos(180°\cdot n)}\ \text{կամ}\ \frac{0}{0}=\frac{1}{(-1)^n}:$$

Առաջին մասի անորոշությունը պարզելու համար, նկատենք, վոր $\frac{\sin 2x}{\sin x}$-ը նույնաբար հավասար է $\frac{2\sin x\cdot\cos x}{\sin x}$, կամ $2\cos x$:

Հետևաբար առաջին մասի բուն արժեքը հավասար է $2\cos(180°\,n)$, կամ $2\cdot(-1)^n$:

Այսպիսով $x=180°\cdot n$ արմատը չի բավարարում տված հավասարմանը

Ընդհանրապես, յեթե հավասարման մեջ կան հայտարարներ, ապա լուծման ավելի վստահելի յեղանակը կլինի հետևյալը. բոլոր անդամները հավաքում ենք հավասարության մի կողմը և բոլորը միացնելով՝ ստանում ենք մի կոտորակ: Այդ կոտորակը կրճատում ենք, յեթե հնարավոր է, և հետո վորոշում ենք, թե ինչ յեղանակով կարելի յե այդ կոտորակը հավասարեցնել զերոյի:

Տված հավասարման հետ այդ ձևով վարվելով կստանանք՝

$$\frac{\sin 2x\cdot\cos x-\cos 2x\cdot\sin x}{\sin x\cdot\cos x}=0;\ \frac{\sin(2x-x)}{\sin x\cdot\cos x}=0;\ \frac{1}{\cos x}=0;\ \sec x=0:$$

Բայց սեկանսը յերբեք զերո լինել չի կարող, ուստի տված հավասարումը հնարավոր չե:

III. Յեթե § 71-ի I օրինակի մեջ յերկու մասն էլ բաժանեյինք sin x-ի վրա, ապա կկորցնեյինք $\sin x=0$ արմատը:

§ 71-ի VI օրինակի մեջ մենք հավասարության յերկու կողմն էլ բաժանեցինք $\cos^2 x$-ի վրա․ բայց $\cos x=0$ արժեքը չի բավարարում տված հավասարմանը․ այդ պատճառով էլ արմատ կորուստ չառաջացավ։

IV․ $\sin x+7\cos x=5$ (a)

Լուծում․

Վերցնելով $\sin x=5-7\cos x$, (b)

Այստեղ յերկու կողմն էլ բարձրացնում ենք քառակուսի, կստանանք՝

$$\sin^2 x=25-70\cos x+49\cos^2 x$$

Այնուհետև գտնում ենք՝

$$50\cos^2 x-70\cos x+24=0;$$

$$\cos^2 x-\frac{7}{5}\cos x+\frac{12}{5}=0;$$

$$\cos x=\frac{7}{10}\pm\sqrt{\frac{49}{100}-\frac{12}{25}}=\frac{7}{10}\pm\frac{1}{10}։$$

Այսպիսով՝

1) $\cos x_1=0{,}8$, վորից $x_1=360^\circ\cdot n\pm 36^\circ 52'12''$;

2) $\cos x_2=0{,}6$, վորից $x_2=360^\circ\cdot n\pm 53^\circ 7'49''$։

Հիշենք, վոր լուծման ժամանակ հավասարության յերկու կողմն էլ քառակուսի բարձրացրինք, իսկ, դրանից կարող եյին առաջանալ կողմնակի արմատներ։ Այդպիսի արմատները, ինչպես հայտնի յե, կպատկանեին այն հավասարմանը, վորը քառակուսի բարձրացածից զանազանվում ե իր մի մասի նշանով, այսինքն՝ $\sin x=-(5-7\cos x)$ հավասարմանը․ ուստի արմատների սինուսները չեն ունենա պահանջված նշանը։ Դրա համար վորոշենք, թե տված հավասարման բավարարելու համար ինչ նշան պետք ե ունենա սինուսը։ $\cos x$-ի արժեքների տեղադրումը (b) հավասարման մեջ տալիս ե՝

$$1)\ \sin x_1=5-7\cdot 0{,}8<0;\quad 2)\ \sin x_2=5-7\cdot 0{,}6>0։$$

Այսպիսով մեր լուծումներից պետք ե բացառենք հետևյալ անկյունները, $x_1=360^\circ n+36^\circ 52'12''$, վորպես դրական սինուս ունեցողներ, և $x_2=360^\circ\cdot n\ \ 53^\circ 7'49'$, վորպես բացասական սինուս ունեցող անկյուններ։

Այսպիսով (a) հավասարման վերջնական լուծումը կարտահայտվի հետևյալ բանաձևերով․

$$x_1=360^\circ\cdot n-36^\circ 52'12''\ \text{և}\ x_2=360^\circ\cdot n+53^\circ 7'49''։$$

Նույն հավասարումը լուծելով $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$-ին անցնելու միջոցով կստանանք՝

1) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$; $\frac{x}{2}=26^\circ 33'54''+180^\circ\cdot n$;

$$x=53^\circ 7'48''+360^\circ\cdot n։$$

2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\frac{1}{3}$; $\frac{x}{2}=-18^\circ 26'6''+180^\circ\cdot n$;

$$x=-36^\circ 52'12''+360^\circ\cdot n։$$

ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ԱՂՅՈՒՍԱԿՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

VII. ԳԱՂԱՓԱՐ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ԱՂՅՈՒՍԱԿՆԵՐ ԿԱԶՄԵԼՈՒ ՄԱՍԻՆ

§ 73. *Ցույց տանք, թե ինչպես կարելի յե գտնել ամեն մի անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների մոտավոր արժեքները։*

Ինչպես մենք գիտենք, ամեն մի անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները վերածվում են 45°-ը չգերազանցող սուր անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների։ Բացի այդ, գիտենք, վոր բոլոր յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները կարող ենք հաշվել նրանցից մեկի, որինակ՝ սինուսի, միջոցով։ Այստեղից հետևում ե, վոր մեր նպատակի համար բավական ե ցույց տալ 0°-ի և 45°-ի միջև գտնվող ամեն մի անկյան սինուսը գտնելու յեղանակը։

Յեղանակներից մեկը հիմնված ե այն բանի վրա, վոր շատ փոքր *անկյան դեպքում կարելի յե առանց մեծ սխալ կատարելու* սինուսի գիծը *փոխարինել* աղեղով։ *Դիցուք, որինակ, 35-րդ գծագրի վրա* $\angle AOB = 10'$։ *Սինուսի սահմանման համաձայն՝* $\sin 10' = \frac{BC}{R}$, *իսկ հիշված յեղանակը կայանում ե նրանում, վոր* $\frac{BC}{R}$*-ի փոխարեն վերցնում ենք* $\frac{\smile AB}{R}$։ *Այս հարաբերությունը հաշվելու համար մենք ունենք՝*

$$\smile AB = \frac{2\pi R . 10}{360 \cdot 60} = \frac{\pi R}{1080},$$

վորից՝

$$\frac{\smile AB}{R} = \frac{\pi}{1080}.$$

Տեղադրելով այստեղ π-ի արժեքը, կստանանք՝

$$\frac{\smile AB}{R} = 0{,}002908882\ldots$$

Այս թիվը կլինի sin 10'*-ի մոտավոր արժեքը։*

Քանի վոր $\frac{\smile AB}{R}$ *հարաբերության մեծությունն աղեղի ռադիանային արտահայտությունն ե, կարելի յե ասել, վոր շատ փոքր անկյան կամ աղեղի սինուսը մենք փոխարինում ենք իր, աղեղի ռադիանային արտահայտությունով։*

Այս յեղանակով մենք սկսում ենք հաշվումները տված անկյան բավականին փոքր *մասից և անկյունն աստիճանաբար կմեծացնենք, կիրառելով կրկնակի անկյան և անկյունների գումարին վերաբերվող բանաձևերը։*

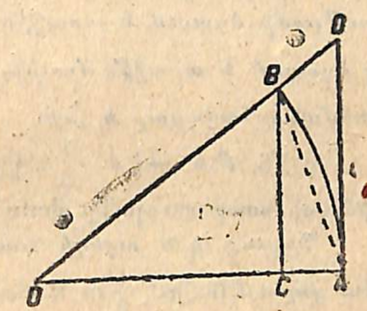
74—76-*րդ պարագրաֆներում կապացուցվեն յերեք թեորեմներ. դրանցից յերկրորդն արդարացնում ե շատ փոքր սինուսի գիծն աղեղով (արտահայտված ռադիաններով) փոխարինելը, իսկ յերրորդը հնարավորություն ե տալիս դատել այդպիսի փոխարինման ժամանակ առաջացած սխալի մասին։*

§ 74. *Թեորեմ.* $\frac{1}{2}\pi$-ից փոքր աղեղը մեծ ե իր սինուսից յեվ փոքր ե իր տանգենսից։

Դիցուք ունենք՝ $0 < a < \frac{1}{2}\pi$, *վորտեղ* a*-ն աղեղի ռադիանային արտահայտությունն ե։ Պահանջվում ե ապացուցել, վոր* $\sin a < a < \operatorname{tg} a$։

Ապացուցում. 39*-րդ գծագրի վրա տանելով* AB *ոժանդակ լարը, կունենանք՝*

$\triangle OAB$*-ի մակերեսը* < OAB *սեկտորի մակերեսից* < $\triangle ODA$*-ի մակերեսից, կամ վերցնելով այդ մակերեսների արտահայտությունները՝*



Գծ. 39.

$$\frac{1}{2} OA \cdot BC < \frac{1}{2} OA \cdot \smile AB < \frac{1}{2} OA \cdot AD.$$

Այստեղից՝

$BC < \smile AB < AD$, *իսկ յուրաքանչյուր մասը բաժանելով* R*-ի վրա, կունենանք՝*

$$\frac{BC}{R} < \frac{\smile AB}{R} < \frac{AD}{R},$$

այսինքն՝

$$\sin a < a < \operatorname{tg} a.$$

§ 75. *Թեորեմ.* Երբ աղեղը ձգտում է զրոյի, ապա սինուսի յեվ աղեղի հարաբերության սահմանը հավասար է մեկի:

Պետք է ապացուցենք, որ

$$\lim_{a\to 0}\frac{\sin a}{a}=1,$$

որտեղ a*-ն աղեղի ռադիանային արտահայտությունն է։*

Ապացուցում. 74*-րդ պարագրաֆի համաձայն ունենք՝*

$$\sin a<a<\operatorname{tg} a \qquad (1)$$

$\sin a$*-ն բաժանենք այս անհավասարության յուրաքանչյուր մասի վրա, կստանանք՝*

$$1>\frac{\sin a}{a}>\cos a. \qquad (2)$$

Յեթե a *աղեղը ձգտում է զրոյի, ապա* $\cos a$*-ն ձգտում է* 1*-ի։ Այսպիսով* (2) *անհավասարության յերրորդ մասն իր մեծությամբ ձգտում է առաջին մասին, հետևաբար յերկրորդ մասն էլ ձգտում է առաջին մասին, այսինքն* $\frac{\sin a}{a}$ *հարաբերության սահմանը հավասար է* 1*-ի։*

§ 76. *Թեորեմ.* $\frac{1}{2}\pi$-ից փոքր աղեղների համար, աղեղի յեվ սինուսի տարբերությունը փոքր է աղեղի խորանարդի մեկ քառորդից:

Դիցուք a*-ն աղեղի ռադիանային արտահայտությունն է, ընդ որում* $0<a<\frac{1}{2}\pi$. *Պահանջվում է ապացուցել, որ*

$$a-\sin a<\frac{a^3}{4}.$$

Ապացուցում. Սկսենք $\frac{a}{2}<\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ *անհավասարությունից (կիրառելով § 74-ը* $\frac{a}{2}$ *աղեղի նկատմամբ)։*

Այդ անհավասարության յերկու մասն էլ բազմապատկելով $2\cos^2\frac{a}{2}$, *կստանանք՝*

$a\cos^2\frac{a}{2}<2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$, *կամ, ձևափոխելով,* $a\left(1-\sin^2\frac{a}{2}\right)<\sin a$, *իսկ այստեղից էլ՝*

$$a-\sin a<a\sin^2\frac{a}{2}.$$

Այստեղ $\sin\frac{a}{2}$*-ը փոխարինելով իրենից մեծ* $\frac{a}{2}$ *մեծությամբ* (§ 74), *վերջնականապես կունենանք՝*

$$a-\sin a<\frac{a^3}{4}.$$

§ 77. *Կիրառելով վերը նշված յեղանակը (որոշ պարզեցումներով), կարելի յե կազմել այսպես կոչված* բնական յեռանկյունաչափական մեծությունների աղյուսակներ. *իսկ վերցնելով ստացված թվերի* լոգարիթմները, *կստանանք այն լոգարիթմական աղյուսակները, որ օգտագործում են յեռանկյունաչափական հաշվումների մեջ։*

Դիտողություն. Մենք ապացուցեցինք յեռանկյունաչափական աղյուսակներ կազմելու հնարավորությունը *միայն։ Ինչ վերաբերում է այն բանին, թե ինչպես են կազմված այդ աղյուսակներն առաջին անգամ, ապա նկատենք միայն, որ այդ ժամանակ կիրառված յեղանակները շատ բարդ են յեղել։*

VIII. ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ԱՂՅՈՒՍԱԿՆԵՐ

§ 78. *Տանք Վ. Բրադիսի* «Четырехзначные математические таблицы» *գրքում բերված յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների աղյուսակի համառոտ բացատրությունը։*

VIII *աղյուսակի մեջ զետեղված են բոլոր ամբողջ թվով աստիճաններ և րոպեներ պարունակող սուր անկյունների սինուսներն ու կոսինուսները։ Սինուսը վերցնելու համար պետք է ձախ կողմից գտնել տված թվով աստիճանները, իսկ վերևում՝ տված թվով՝ րոպեները. գտնվում է որոնելի սինուսը համապատասխան տողի և սյունակի հատման մասում։*

Օրինակներ. $\sin 20^\circ 12' = 0{,}3453;$

$$\sin 75^\circ 48' = 0{,}9694։$$

Հակառակը, տված սինուսով անկյունը որոնելու համար, պետք է գտնել սինուսի տված արժեքը և ձախ կողմից վերցնել աստիճանները, իսկ վերևից՝ րոպեները։

$$\sin x = 0{,}8949; \qquad x = 63^\circ 30'։$$

Կոսինուսը որոնելիս պետք է աստիճանները վերցնել աջ կողմից, իսկ րոպեները՝ ներքևից։

Օրինակ՝

$$\cos 35^\circ 42' = 0{,}8121։$$

Այս աղյուսակի մեջ րոպեները տրված են յուրաքանչյուր 6′-*ից հետո։ Միջանկյալ անկյունների ֆունկցիաները հաշվելու համար պետք է օգտվել* 1, 2 *և* 3 *րոպեների համար տրված ուղղումներով, աջ կողմի սյունակից։*

Օրինակ՝

$$\sin 34^\circ 15' = 0{,}5628$$

(sin 34°12′-*ին ավելացված է* 3′-*ի ուղղումը, որը հավասար է* 7-*ի*)։

Քանի որ անկյան մեծանալու դեպքում սինուսը մեծանում է, իսկ կոսինուսը փոքրանում, ապա սինուսի համար ուղղումները գումարվում են, իսկ կոսինուսինը՝ հանվում։

IX *աղյուսակը պարունակում է* 0°-*ից մինչև* 81° *անկյունների տանգենսներն ու կոտանգենսները։ Այս աղյուսակից պետք է օգտվել այնպես, ինչպես* VIII *աղյուսակից։*

X *աղյուսակը պարունակում է* 81°-*ից մինչև* 90 *անկյունների տանգենսներն ու կոտանգենսները և* 0°-*ից մինչև* 9° *անկյունների կոտանգենսները։ Այս միջակայքերում տանգենսը ու կոտանգենսը փոխվում են շատ արագ։ Այս աղյուսակի մեջ անկյունները տարբերվում են* 1′-*ով, այնպես որ ուղղումներ գտնելու անհրաժեշտություն չկա։*

§ 79. XI, XII, XIII, XIV *և* XV *աղյուսակները պարունակում են տանգենսների, կոտանգենսների, սինուսների և կոսինուսների լոգարիթմները։ Այս աղյուսակների կառուցվածքը ոչնչով չի տարբերվում վերը նկարագրած բնական աղյուսակներից։*

Օրինակներ.

$$\lg \sin 20^\circ 18' = \bar{1}{,}5402$$

$$\lg \cos 26^\circ 48' = \bar{1}{,}9506;$$

$$\lg \operatorname{tg} 61^\circ 54' = 0{,}2725;$$

$$\lg \operatorname{ctg} 18^\circ 30' = 0{,}4755։$$

§ 80. Լոգարիթմների հնգանիշ աղյուսակների գործածությունը. *Նկարագրենք Պրժևալսկու աղյուսակի կազմությունը։*

Այս աղյուսակները, ստերեոտիպ հրատարակության 62—151-*րդ էջերը, պարունակում են սուր անկյունների սինուսների, կոսինուսների, տանգենսների և կոտանգենսների լոգարիթմները, ընդ որում յերկու հարևան անկյուններն իրարից զանազանվում են* 1′-*ով, իսկ լոգարիթմները տրված են* $^1/_2$ *հարյուրհազարերորդականի մոտավոր ճշտությամբ։*

Բացասական քարակտերիստիկները, տպագրելիս, հարմարության համար մեծացված են 10-*ով, այնպես որ* 9 *քարակտերիստիկը նշանակված է* $\bar{1}$-*ով*, 8 *քարակտերիստիկը* $\bar{2}$-*ով և այլն։*

Աստիճանների 45°-*ից մեծ թվերը տպված են ներքևում. յերբ վերցնում ենք այդ թվերը, ապա րոպեները պետք է վերցնենք աջ կողմից, իսկ ֆունկցիայի անունը՝ ներքևից։*

Յեթե անկյունը պարունակում է վայրկյաններ, ապա աղյուսակային լոգարիթմի մեջ ուղղում է արվում։ Այդ ուղղումը հաշվվում է համեմատության օգնությամբ, որովհետև անկյան փոքր փոփոխություններն ու լոգարիթմի համապատասխան փոփոխությունները մոտավորապես համեմատական են։

Օրինակ 1. Գրեք $\lg \sin 34^\circ 16' 43''$։

Լուծում. 130-րդ էջում գտնում ենք՝

$$\lg \sin 34^\circ 16' = \bar{1},75054$$

Գրում ենք աղյուսակային տարբերությունը՝ $D=19$։ Կազմում ենք հետևյալը համեմատությունը՝

$$x:19 = 43'':60'',$$

Վորտեղ x-ը լոգարիթմի վորոնելի ուղղումն է, վոր համապատասխանում է 43"-ին,

Գտնում ենք՝

$$x = 19 \cdot \frac{43}{60} \approx 14։$$

Այսպիսով՝

$$\lg \sin 34^\circ 16' 43'' = \bar{1},75068։$$

Ուղղումները գտնելու համար կարելի յե օգտվել յուրաքանչյուր էջի լուսանցքում զետեղված աղյուսակներից։

Վերը բերած օրինակի մեջ նախ լուսանցքի աղյուսակով գտնում ենք ուղղում 40"-ի համար (կստացվի 12,7) և ապա 3"-ի համար (կստացվի 0,95), ընդամենը կլինի մոտավորապես 14։

Գործողությունը պետք է դասավորել այսպես՝

$$\begin{array}{lrl} \lg \sin 34^\circ 16' & =\bar{1},75054 & D=19. \\ +43'' & +14 & \\ \hline \lg \sin 34^\circ 16' 43'' = & \bar{1},75068։ & \end{array}$$

Օրինակ 2. Գտեք $\lg \cos 29^\circ 45' 23''$ $D=7$

Լուծում.

$$\begin{array}{lr} \lg \cos 29^\circ 45' & =\bar{1},93862 \\ +23'' & -3 \\ \hline \lg \cos 29^\circ 45' 23'' = & \bar{1},93859։ \end{array}$$

Ուղղումը հանում ենք, վորովհետև անկյան մեծանալու դեպքում կոսինուսը նվազում է, հետևաբար նվազում է և նրա լոգարիթմը։

Օրինակ 3. Գտեք $\lg \mathrm{tg}\, 57^\circ 20' 30''$։

Լուծում.

$$\begin{array}{lr} \lg \mathrm{tg}\, 57^\circ 20' & =0,19303 \\ +30'' & +14 \\ \hline \lg \mathrm{tg}\, 57^\circ 20' 30'' = & 0,19317։ \end{array}$$

Օրինակ 4. Գտեք x անկյունը, յեթե $\lg \sin x = \bar{1},63623$։

Լուծում. 113 րդ էջում գտնում ենք մոտավոր փոքր անկյունը և ապա համապատասխան ուղղում ենք անում։ Գործողությունը դասավորում ենք այսպես՝

$$\begin{array}{lrl} \bar{1},63610 \;.\;.\;.\; & 25^\circ 38' & D=26 \\ +13 \;.\;.\;. & 30'' & \\ \hline \bar{1},63623 \;.\;. & 25^\circ 38' 30'' & \end{array}$$

$$x = 25^\circ 38' 30''։$$

Ուղղումն ամենից հեշտ է վերցնել այն սյունակից, վորի գլխին գրված է 26։ Այդտեղ 1,3-ին համապատասխանում է 3", իսկ 13-ին՝ 30"։

Օրինակ 5. $\lg \mathrm{tg}\, x = \bar{2},95696$։

Լուծում.

$$\begin{array}{lrl} \bar{2},95627 \;.\;.\;.\;. & 5^\circ 10' & D=140 \\ +69 \;.\;. & 30'' & \\ \hline \bar{2},95696 \;.\;. & 5^\circ 10' 30'' & \end{array}$$

$$x = 5^\circ 10' 30''։$$

Օրինակ 6. Տված է $\lg \mathrm{ctg}\, x = 1,07085$; գտեք x-ը։

Լուծում.

$$\begin{array}{lrl} 1,06984 \;.\;.\;.\;. & 4^\circ 52' & D=150 \\ +101 \;.\;. & -40'' & \\ \hline 1,07085 \;.\;.\;. & 4^\circ 51' 20'' & \end{array}$$

$$x = 4^\circ 51' 20''։$$

§ 81. Շատ մեծ աղյուսակային տարբերության դեպքը։ *Աղյուսակային լոգարիթմի կամ աղյուսակային անկյան ուղղում գտնելիս մենք ընդունեցինք, վոր անկյան և լոգարիթմի փոփոխությունները համեմատական են, բայց իրականում այդ ճիշտ է միայն մոտավորապես։ Յեթե այդ միանգամայն ճիշտ լիներ, ապա միևնույն ֆունկցիայի բոլոր աղյուսակային տարբերությունները պետք է հավասար լինեյին իրար, վորը սակայն գոյություն չունի, չնայած ընդհանրապես նրանք փոփոխվում են շատ դանդաղ։ Աղյուսակի առաջին էջերում, շատ փոքր անկյունների սինուսների, տանգենսների և կոտանգենսների (հետևաբար, 90°-ին մոտ անկյունների կոսինուսների, կոտանգենսների և տանգենսների) լոգարիթմական տարբերությունները փոփոխվում են շատ արագ, այդ պատճառով էլ ուղղումների վերը նկարագրած յեղանակը վստահելի չէ։*

Բերենք մի որինակ։

Սովորական յեղանակով գտնում ենք՝

$$\lg \sin 22'48''=7{,}80615-10+0{,}01930\times\frac{8}{10}=7{,}82159-10,$$

այն ինչ ավելի լրիվ աղյուսակների մեջ կգտնենք՝

$$\lg \sin 22'48''=7{,}82166-10։$$

Այսպիսով պարզվում է, որ ուղղումը սովորական յեղանակով հաշվելը մեծ սխալ է տալիս (տարբերությունը հասնում է 7 հարյուր հազարերորդականի)։

Վերոհիշյալ պատճառով, աղյուսակային մեծ տարբերության դեպքում (որինակ՝ 2°-ից փոքր անկյունների սինուսների և տանգենսների համար), ուրիշ միջոց ենք գործադրում։ Ընդունում ենք, որ շատ փոքր անկյունների սինուսներն ու տանգենսները համեմատական են իրենց անկյուններին (իսկ մնացյալ դեպքերը բերվում են այդ դեպքին)։

Ցույց տանք այդ յեղանակն որինակներով։

Որինակ 1. Մենք վերը գտանք $\lg \sin 22'48''$-ը։

Կիրառենք նոր յեղանակը։ Կունենանք։

$$\frac{\sin 22'48''}{\sin 22'}=\frac{22'48''}{22'} \text{ կամ } \frac{\sin 22'48''}{\sin 22''}=\frac{22{,}8}{22};$$

Այստեղից՝

$$\lg \sin 22'48''=\lg \sin 22'+(\lg 22{,}8-\lg 22)=7{,}80615-10+$$
$$+(1{,}35793-1{,}34242)=7{,}82166-10,$$

որը համընկնում է ավելի լրիվ աղյուսակների տվյալներին։

Որինակ 2. Գտնել $\lg \operatorname{tg} 88^\circ 56'20''$։

Սովորական յեղանակով կստացվի 1,73232, իսկ պետք է լինի (լրիվ աղյուսակներով) 1,73231։

Այժմ կիրառենք նոր յեղանակը։

Կունենանք՝

$$1)\ \operatorname{tg} 88^\circ 56'20''=\operatorname{ctg} 1^\circ 3'40''=\frac{1}{\operatorname{tg} 1^\circ 3'40''};$$

$$2)\ \frac{\operatorname{tg} 1^\circ 3'40''}{\operatorname{tg} 1^\circ 3'}=\frac{1^\circ 3'40''}{1^\circ 3'}, \text{ կամ } \frac{\operatorname{tg} 1^\circ 3'40''}{\operatorname{tg} 1^\circ 3'}=\frac{191}{189},$$

Վորը և պետք է ստացվի (համաձայն ավելի լրիվ աղյուսակների)։

Որինակ 3. Տված է՝ $\lg \operatorname{ctg} \alpha=2{,}20443$. Պահանջվում է գտնել α-ն։

Սովորական յեղանակով գտնենք՝

$$\alpha=21'29''։$$

Կիրառենք նոր յեղանակը։

Վերցնենք $\lg \operatorname{tg} \alpha=\lg 1-\lg \operatorname{ctg} \alpha=7{,}79557-10$։

Աղյուսակում մոտակա փոքր լոգարիթմը հավասար է 7,78595, իսկ դրան համապատասխանում է $21''$ անկյունը։

Կազմենք հետևյալ համեմատությունը.

$$\frac{\alpha}{21'}=\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 21'}.$$

յենթադրելով $\alpha=x''$, կստանանք՝

$$\frac{x}{1260}=\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 21'},$$

վորից՝

$$\lg x=\lg 1260+(\lg \operatorname{tg} \alpha-\lg \operatorname{tg} 21')=3{,}10999։$$

Գտնելով այս լոգարիթմին ավելի շատ համապատասխանող ամբողջ թիվը, կունենանք՝ $x=1288$։

Այսպիսով՝

$$\alpha=1288''=21'28''։$$

Նույն անկյունը կստացվի, յեթե օգտագործենք ավելի լրիվ աղյուսակներ։

§ 82. Ճշտության աստիճանը՝ հնգանիշ աղյուսակով անկյուն վորոշելիս. Վորպեսզի վորևէ յեռանկյունաչափական ֆունկցիայի յերկու լոգարիթմներն իրարից զանազանվեն 0,00001-ով, անհրաժեշտ է, վոր դրանց համապատասխանող անկյունները տարբերվեն $\frac{60''}{d}$-ով, վորտեղ d-ն աղյուսակային տարբերության մեծությունն է (արտահայտված հարյուր հազարերորդական մասերով)։ Յեթե յերկու անկյունների տարբերությունը փոքր լինի $\frac{60''}{d}$-ից, ապա համապատասխան լոգարիթմները կտարբերվեն ավելի քիչ քան 0,00001-ը, և, հետևաբար, հինգ տասնորդական նիշով սահմանափակվելու դեպքում այդ լոգարիթմները հավասար կլինեն։ Այստեղից հետևում է, վոր լոգարիթմի օգնությամբ անկյունը գտնելիս սխալը կարող է հասնել մինչև $\frac{60''}{d}$։

Մինչև 12° անկյունների սինուսների դեպքում ունենք $d>60$, հետևաբար $\frac{60''}{d}$-ն փոքր է $1''$-ից։ Այնուհետև նա սկսում է աճել և 85°-ի դեպքում հասնում է $1'$-ի, իսկ 90°-ին մոտ անկյունների դեպքում միևնույն լոգարիթմն արդեն համապատասխանում է մի քանի անկյան, այնպես վոր այստեղ անկյան մեծության տատանումն արդեն կարող է հասնել մի քանի րոպեի։

Այսպիսով ստանում ենք, որ սինուսով, հետևաբար և կոսինուսով, անկյունները որոշվում են փոքր ճշտությամբ։ Հատկապես մեծ սխալ է արվում, երբ սինուսի օգնությամբ գտնում ենք 90°-ի մոտ անկյուն և կոսինուսի օգնությամբ՝ 0°-ի մոտ անկյուն։

Տանգենսի և կոտանգենսի լոգարիթմները տալիս են ճշտության մեծ աստիճան, որովհետև անկյան փոխվելով՝ տանգենսն ու կոտանգենսն անհամեմատ ավելի արագ են աճում քան սինուսն ու կոսինուսը, այնպես որ դրանց լոգարիթմների աղյուսակային տարբերությունը (որը տանգենսի և կոտանգենսի համար ընդհանուր է) միշտ ավելի է սինուսի և կոսինուսի լոգարիթմների համապատասխան աղյուսակային տարբերություններից։ Տանգենսի և կոտանգենսի դեպքում ամենից վատ են որոշվում 45°-ին մոտ անկյունները, բայց այստեղ էլ հնարավոր սխալը $\frac{60''}{25}$*-ից պակաս է լինում, այսինքն՝ 2″,4-ից պակաս։*

ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

IX. ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

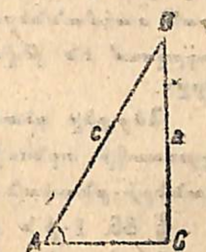
§ 83. **Ուղղանկյուն եռանկյան տարրերի առնչությունները.** *20-րդ պարագրաֆում արտածեցինք ուղղանկյուն տարրերի եռանկյունաչափական առնչությունները։ Հիմնվելով եռանկյունաչափական ֆունկցիաների սահմանումների վրա, արտածեցինք հետևյալ բանաձևերը (գծ. 40)։*

$$\sin A=\frac{a}{c};\quad \cos A=\frac{b}{c};\quad \operatorname{tg} A=\frac{a}{b}.$$

Որոշելով այս բանաձևերից a, b *և* c*-ն, կստանանք՝*

1) $a=c\cdot\sin A$; 2) $b=c\cdot\cos A$;

3) $a=b\cdot\operatorname{tg} A$.



Գծ. 40.

Այս բանաձևերին պետք է ավելացնել երկրաչափությունից հայտնի հետևյալ երեք բանաձևերը.

$$A+B=90^\circ;\quad c^2=a^3+b^2;\quad S=\frac{1}{2}ab.$$

§ 84. **Ամեն մի եռանկյան տարրերի միջև կարող են գոյություն ունենալ երեք անկախ առնչություններ միայն.** *Եռանկյունն ունի երեք կողմ և երեք անկյուն, բայց այս վեց տարրերից բավական է ունենալ երեքը (բացառելով երեք անկյունների դեպքը), որպեսզի կարողանանք կառուցել եռանկյունը և դրանով իսկ որոշել մյուս երեք տարրերը։*

Սրանից հետևում է, որ հաշվումների ժամանակ կարելի է որոշել եռանկյան երեք տարրեր, եթե տված են մնացած տարրերը, իսկ դրա համար եռանկյան տարրերի միջև պետք է գոյություն ունենան երեք տարբեր հավասարումներ։ Եթե ստացվել են երեքից ավելի հավասարումներ, ապա դրանց որոշ մասը հետևանք է մյուսների։

Ուղղանկյուն յեռանկյան մեջ սովորաբար հիմնական առնչություն համարվում են հետևյալ յերեքը.

$$A+B=90°;\ a=c\cdot\sin A;\ b=c\cdot\cos A.$$

Մյուս առնչությունները կարելի յե արտածել այս առնչությունների օգնությամբ։

§ 85. Ուղղանկյուն յեռանկյունների լուծումը. *Յեռանկյան հիմնական տարրեր համարվում են կողմերը և անկյունները։ Այդ պատճառով ուղղանկյուն յեռանկյունները լուծելիս կարող ե լինել չորս դեպք, վորոնք պարզաբանված են հետևյալ պարագրաֆներում, ընդ վորում տվյալների մեջ պետք ե լինի առնվազը մեկ գծային տարր, վորովհետև հակառակ դեպքում չի կարելի գտնել յեռանկյան չափերը. յերեք անկյուններով կարելի յե կառուցել ցանկացած թվով նման յեռանկյուններ։*

Յեռանկյունների լուծումը (ինչպես և ամեն մի մաթեմատիկական խնդրի լուծում) սկզբից մինչև վերջ, հնարավորության սահմաններում, կատարվում ե ընդհանուր ձևով, ապա տեղադրվում են թվական տվյալները և կատարվում են հաշվումները։

Ներքևը զետեղված բոլոր խնդիրները լուծված են Բրադիսի աղյուսակի օգնությամբ, նախ՝ յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների բնական արժեքներով, ապա՝ դրանց լոգարիթմներով։

§ 86. 1-ին դեպք. *Տված են ներքնաձիգն ու սուր անկյուններից մեկը* (c և A)։ *Գտեք մյուս սուր անկյունը, եջերը և մակերեսը* (B, a, b, S)։

I. *Լուծումն ընդհանուր ձևով.*

$$B=90°-A;\ a=c\cdot\sin A;\ b=c\cdot\cos A;$$

$$S=\frac{1}{2}ab=\frac{c^2}{2}\cdot\sin A\cos A=\frac{c^2}{4}\sin 2A.$$

II. *Թվային որինակ.* $c=627;\ A=23°30'$.

Լուծում.

$B=90°-23°30'=66°30'$;

$a=627\cdot\sin 23°30'=627\cdot\sin 23°30'$.

Բրադիսի VIII *աղյուսակով գտնում ենք*

$\sin 23°30'=0{,}3987$ *հետևաբար՝*

$a=627\cdot 0{,}3987=249{,}9849$;

$a\approx 250$ (*գծային միություն*).

$b=627\cdot\cos 23°30'=627\cdot 0{,}9171=575{,}0117$;

$b\approx 575$ (*գծային միություն*).

$S=\frac{1}{2}\cdot 249{,}98\cdot 575{,}01=71880\ldots$ (*քառակուսի միություն*)։

§ 87. 2-րդ դեպք. *Տված ե մի եջ և մի անկյուն* (a և A)։ *Պետք ե գտնել* B, c, b, S։

I. *Լուծումն ընդհանուր ձևով.*

$$B=90°-A;\ c=\frac{a}{\sin A};\ b=\frac{a}{\operatorname{tg} A}=a\cdot\operatorname{ctg} A;$$

$$S=\frac{ab}{2}=\frac{a^2}{2}\operatorname{ctg} A.$$

II. *Թվային որինակ.* $a=18;\ A=47°$.

Լուծում.

$$B=90°-47°=43°;\ c=\frac{18}{\sin 47°}=\frac{18}{0{,}7314};$$

$c=24{,}62\ldots$ (*գծային միություն*);

$b=18\operatorname{ctg} 47°=18\cdot 0{,}9325$;

$b=16{,}79$ (*գծային միություն*);

$S=\frac{18^2}{2}\cdot 0{,}9325=151{,}12$ (*քառակուսի միություն*)։

§ 88. 3-րդ դեպք. *Տված են ներքնաձիգը և եջերից մեկը* (c և a)։ *Գտեք* A, B, b, S։

I. *Լուծումն ընդհանուր ձևով.*

$$\sin A=\frac{a}{c};\ \cos B=\frac{a}{c};\ b=\sqrt{c^2-a^2};\ S=\frac{a}{2}\sqrt{c^2-a^2}.$$

II. *Թվային որինակ.* $c=65;\ a=16$.

Լուծում.

$\sin A=\frac{16}{65}=0{,}2461;\ A=14°12'+3'=14°15'$;

$B=90°-14°15'=75°45'$;

$b=\sqrt{65^2-16^2}=\sqrt{(65+16)(65-16)}=\sqrt{81\cdot 49}=9\cdot 7$;

$b=63$ (*գծային միություն*);

$S=\frac{16}{2}\cdot 63=504$ (*քառակուսի միություն*)

89. 4-րդ դեպք. *Տված են յերկու եջերը* (a և b)։ *Գտնել* A, B, c, S։

I. *Լուծումն ընդհանուր ձևով.*

$$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b};\ \operatorname{tg} B=\frac{b}{a};\ c=\sqrt{a^2+b^2};\ S=\frac{ab}{2}.$$

II. *Թվային օրինակ.* $a=25$; $b=40$։

Լուծում.

$\operatorname{tg} A=\frac{25}{40}=0,625$; $A=32^\circ$; $B=58^\circ$;

$c=\sqrt{25^2+40^2}\simeq 47,4$; $S=500\ldots$ *(քառակուսի միավոր)*,

Ուղղանկյուն յեռանկյունների լուծումը լոգարիթմական քառանիշ աղյուսակների օգնությամբ։

§ 90. *1-ին դեպք. Տված են ներքնաձիգն ու սուր անկյուններից մեկը* ($c=287,4$ *և* $A=42^\circ,6'$)։ *Պետք է գտնել* B, a, b, S։

Լուծում.

1) $B=90^\circ-42^\circ6'=47^\circ54'$.

2) $a=c\sin A$;

$a=287,4\cdot\sin 42^\circ6'$.

$\lg a=\lg 287,4+\lg\sin 42^\circ6'$;

$$+\begin{array}{r} \lg 287,4=2,4585 \\ \lg\sin 42^\circ6'=\bar{1},8264 \\ \hline \lg a=2,2849; \end{array}$$

$a=192,7$.

3) $b=c\cdot\cos A$;

$b=287,4\cos 42^\circ6'$;

$\lg b=\lg 287,4+\lg\cos 42^\circ6'$;

$$+\begin{array}{r} \lg 2874=2\ 4585 \\ \lg\cos 42^\circ6'=\bar{1},8704 \\ \hline \lg b=2,3289; \end{array}$$

$b=213,2$.

4) $S=\frac{1}{2}ab$;

$S=0,5\cdot192,7\cdot213,2$;

$\lg S=\lg 0,5+\lg 192,7+\lg 213,2$;

$$+\begin{array}{r} \lg 0,5=\bar{1},6990 \\ \lg 192,7=2,2849 \\ \lg 213,2=2,3289 \\ \hline \lg S=4,3128; \end{array}$$

$S=20\ 550$ (*քառ. միավ.*)

§ 91. *2-րդ դեպք. Տված են էջն ու սուր անկյունը՝* $a=797,9$; $A=66^\circ36'$ *պետք է գտնել՝* B, c, b, S.

Լուծում՝

1) $B=90^\circ-66^\circ36'=23^\circ24'$.

2) $c=\frac{a}{\sin A}$; $c=\frac{797,9}{\sin 66^\circ36'}$;

$\lg c=\lg 797,9-\lg\sin 66^\circ36'$;

$$-\begin{array}{r} \lg 797,9=2,9020 \\ \lg\sin 66^\circ36'=\bar{1},9627 \\ \hline \lg c=2\ 9393; \end{array}$$

$c=869,6$.

3) $b=a\cdot\operatorname{ctg} A$

$b=797,9\cdot\operatorname{ctg} 66^\circ36'$;

$\lg b=\lg 797,9+\lg\operatorname{ctg} 66^\circ36'$;

$$+\begin{array}{r} \lg 797,9=2,9020 \\ \lg\operatorname{ctg} 66^\circ36=\bar{1},6362 \\ \hline \lg b=2,5382 \end{array}$$

$b=345,3$.

4) $S=\frac{1}{2}ab$; $S=\frac{1}{2}\cdot797,9\cdot345,3$;

$\lg S=\lg 0,5+\lg 797,9+\lg 345,3$;

$$+\begin{array}{r} \lg 0\ 5=\bar{1},6990 \\ \lg 797,9=2,9020 \\ \lg 345,3=2,5382 \\ \hline \lg S=5,1392; \end{array}$$

$S=137800$ (*քառ. միավ.*)

§ 92. *3-րդ դեպք. Տված են ներքնաձիգն ու էջերից մեկը.* $a=35,47$; $c=45,93$։ *Պետք է գտնել* A, B, b, S։

Լուծում.

1) $\frac{a}{c}=\sin A$; $\sin A=\frac{35,47}{45,93}$;

$\lg\sin A=\lg 35,47-\lg 45,93$;

$$-\begin{array}{r} \lg 35,47=1,5499 \\ \lg 45,93=1,6621 \\ \hline \lg\sin A=\bar{1},8878; \end{array}$$

$A=50^\circ34'$

2) $B=90^\circ-50^\circ34'=39^\circ26'$.

3) $b=a\cdot\operatorname{tg} B$;

$b=35,47\cdot\operatorname{ctg} 50^\circ34'$;

$\lg b=\lg 35,47+\lg\operatorname{ctg} 50^\circ34'$;

$$+\begin{array}{r} \lg 35,47=1,5499 \\ \lg\operatorname{ctg} 50^\circ34'=\bar{1},9150 \\ \hline \lg b=1,4649; \end{array}$$

$b=29,17$.

4) $S=\frac{1}{2}ab$; $S=\frac{1}{2}\cdot35,47\cdot29,18$;

$\lg S=\lg 0,5+\lg 35,47+\lg 29,17$;

$$+\begin{array}{r} \lg 0,5=\bar{1},6990 \\ \lg 35\ 47=1,5499 \\ \lg 29,18=1,4649 \\ \hline \lg S=2,7138; \end{array}$$

$S=517,4\ldots$(*քառ. միավ.*).

§ 93. *4-րդ դեպք. Տված են յերկու էջերը՝* $a=104$; $b=20,49$։ *Պետք է գտնել* A, B, c, S։

Լուծում.

1) $\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}$; $\operatorname{tg} A=\frac{104}{20,49}$;

$\lg\operatorname{tg} A=\lg 104-\lg 20,49$;

$$-\begin{array}{r} \lg 104=2,0170 \\ \lg 20,49=1,3115 \\ \hline \lg\operatorname{tg} A=0,7055; \end{array}$$

$A=78^\circ51'$.

2) $B=90^\circ-78^\circ51'=11^\circ09'$.

3) $c=\frac{a}{\sin A}$; $c=\frac{104}{\sin 78^\circ51'}$;

$\lg c=\lg 104-\lg\sin 78^\circ51'$

$$-\begin{array}{r} \lg 104=2,0170 \\ \lg\sin 78^\circ51'=\bar{1},9917 \\ \hline \lg c=2,0253; \end{array}$$

$c=106$.

4) $S=\frac{1}{2}ab;\quad S=\frac{1}{2}\cdot 104\cdot 20{,}49;$

$$\lg S=\lg 52+\lg 20{,}49;$$

$$+\begin{array}{r} \lg 52=1{,}7160 \\ \lg 20{,}49=1{,}3115 \\ \hline \lg S=3{,}0275; \end{array}\quad S=1065\ \text{(քառ. մետ.):}$$

Ուղղանկյուն յեռանկյունների լուծման օրինակներ հնգանիշ աղյուսակների օգնությամբ.

§ 94. 1-ին դեպք. *Տված է ներքնաձիգն ու սուր անկյուններից մեկը* (c և A):

Թվական արժեքներ. $c=457;\ A=32^\circ 40'15''$:

Հաշվումներ. $B=90^\circ-A=57^\circ 19'45''$:

$$a=c\cdot\sin A \qquad\qquad b=c\cdot\sin B$$

$$+\begin{array}{r} \lg c=2{,}65992 \\ \lg\sin A=9{,}73224-10 \\ \hline \lg a=2{,}39216 \\ a=246{,}69 \end{array}\qquad\qquad +\begin{array}{r} \lg c=2{,}65992 \\ \lg\sin B=9{,}92520-10 \\ \hline \lg b=2{,}58512 \\ b=384{,}7 \end{array}$$

$$S=0{,}5\cdot ab \qquad +\begin{array}{r} \lg 0{,}5=0{,}69897-10 \\ \lg a=2{,}39216 \\ \lg b=2{,}58512 \\ \hline \lg S=4{,}67625 \\ S=47{,}451 \end{array}\ \text{(քառ. մետր).}$$

§ 95. 2-րդ դեպք. *Տված է մի էջ և մի սուր անկյուն* (a և A):

Թվական օրինակ. $a=9{,}82;\ A=63^\circ 21'45''$:

Հաշվումներ. $B=90^\circ-A=26^\circ 38'15''$:

$$c=\frac{a}{\sin A}\qquad\qquad b=\frac{a}{\operatorname{tg} A}$$

$$-\begin{array}{r} \lg a=0{,}99211 \\ \lg\sin A=9{,}95127-10 \\ \hline \lg c=1{,}04084 \\ c=10{,}986 \end{array}\qquad\qquad -\begin{array}{r} \lg a=0{,}99211 \\ \lg\operatorname{tg} A=0{,}29966 \\ \hline \lg b=0{,}69245 \\ b=4{,}9255 \end{array}$$

Մակերեսը կհաշվենք $\lg S=\lg 0{,}5+\lg a+\lg b$ *բանաձևով և կստանանք՝*

$S=24{,}184$ (*քառ. միություն*):

§ 96. 3-րդ դեպք. *Տված է ներքնաձիգն ու էջերից մեկը* (c և a):

Թվական օրինակ. $c=58{,}5;\ a=47{,}54$.

Հաշվում.

$$\sin A=\frac{a}{c}\qquad\qquad b=c\cdot\sin B$$

$$-\begin{array}{r} \lg a=1{,}67706 \\ \lg c=1{,}76716 \\ \hline \lg\sin A=9{,}90990-10 \\ A=54^\circ 21'20'' \\ B=90^\circ-A=35^\circ 38'40'' \end{array}\qquad\qquad +\begin{array}{r} \lg c=1{,}76716 \\ \lg\sin B=9{,}76548-10 \\ \hline \lg b=1{,}53264 \\ b=34{,}091 \end{array}$$

Մակերեսը՝ $S=810{,}34$ (*քառ. միություն*):

4-րդ դեպք. *Տված են յերկու էջերը* (a և b):

Թվական օրինակ. $a=23214;\ b=38947$:

Հաշվում:

$$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}\qquad\qquad c=\frac{a}{\sin A}$$

$$-\begin{array}{r} \lg a=4{,}36575 \\ \lg b=4{,}59048 \\ \hline \lg\operatorname{tg} A=9{,}77527-10 \\ A=30^\circ 47'47'' \\ B=59^\circ 12'13'' \end{array}\qquad\qquad -\begin{array}{r} \lg a=4{,}36575 \\ \lg\sin A=9{,}70926-10 \\ \hline \lg c=4{,}65649 \\ c=45341 \end{array}$$

Մակերեսի համար կստանանք՝

$S=b\cdot\frac{a}{2}=38947\cdot 11607=452057829$ (*քառ. միություն*):

Դիտողություն. *Յերբեմն* c-*ն հաշվելիս հարմար է նաև* $c=\sqrt{a^2+b^2}$ *բանաձևը: Դիցուք, օրինակ՝* $a=400$ *և* $b=503$: *Այդ դեպքում հեշտ կլինի անմիջապես գտնել՝* $a^2=160000,\ b^2=253009$, *և, հետևաբար՝* $c=\sqrt{413009}$: *Այժմ կիրառելով լոգարիթմները, կստանանք՝* $\lg c=2{,}80798;\ c=642{,}66$:

X. ՇԵՂԱՆԿՅՈՒՆ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

§ 97. **Շեղանկյուն եռանկյան տարրերի միջև գոյություն ունեցող առնչությունները.** *Սկսենք եռանկյան անկյունների միջև գոյություն ունեցող եռանկյունաչափական առնչությունից.*

$$A+B+C=180^\circ.$$

Նկատենք այդ առնչության մի քանի հետևանքները։

ա) Քանի որ $B+C$ *և* A*-ի արժեքների գումարը հավասար է* 180°, *ապա դրանց սինուսները հավասար են, իսկ կոսինուսները տարբերվում են իրենց նշաններով. այդ պատճառով՝*

$$\sin(B+C)=\sin A;$$

$$\cos(B+C)=-\cos A.$$

Ճիշտ նույնպես՝

$$\operatorname{tg}(B+C)=-\operatorname{tg} A.$$

բ) Քանի, որ $\frac{B+C}{2}$ *և* $\frac{A}{2}$*-ի արժեքների գումարը հավասար է* 90°, *ապա դրանց անունով նման ֆունկցիաները հավասար են* (§ 17)։

Օրինակ՝

$$\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2};\quad \sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2} \text{ և այլն.}$$

գ) Օգտակար է հիշել նաև եռանկյան անկյունների հետևյալ առնչությունները.

1) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$

2) $\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B\cdot\operatorname{tg} C;$

3) $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$

§ 98. *Լեմմա.* **Յուրաքանչյուր եռանկյան կողմը հավասար է արտագծած շրջանագծի տրամագծին՝ բազմապատկած դիմացի անկյան սինուսով։**

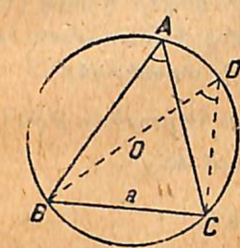
Արտագծած շրջանի շառավիղը նշանակենք R-ով, ապացուցենք, օրինակ, որ $a=2R\cdot\sin A$, *որտեղ A անկյունը սուր է կամ բութ։*

Ապացուցում. 1) *A անկյունը սուր է (գծ. 41)։ Արտագծած շրջանի մեջ, տված կողմի ծայրից անցկացնենք տրամագիծ և միացնենք այդ կողմի ու տրամագծի մյուս ծայրերը. կստանանք ուղղանկյուն եռանկյուն։ 41-րդ գծագրի վրա այդ եռանկյունը BDC-ն է։ Այդ եռանկյունուց, 21-րդ պարագրաֆի հիման վրա, գտնում ենք՝*

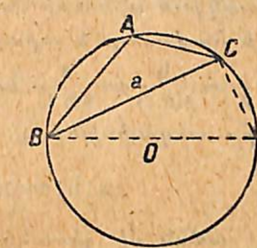
$$BC=BD\cdot\sin D, \text{ կամ } a=2R\cdot\sin D,$$

բայց $\angle D=\angle A$[1]), *հետևաբար,*

$$a=2R\cdot\sin A.$$



Գծ. 41.



Գծ. 42.

2) A *անկյունը բութ է։ Կատարենք նույն օժանդակ կառուցումները։* BCE *ուղղանկյուն եռանկյունուց (գծ. 42) կստանանք՝*

$$a=2R\cdot\sin E,$$

բայց $E+A=180^\circ$, *ուստի* $\sin E=\sin A$,

այդ պատճառով էլ՝

$$a=2R\cdot\sin A.$$

Այսպիսով, ընդհանրապես՝

$$a=2R\cdot\sin A;\quad b=2R\cdot\sin B;\quad e=2R\cdot\sin C.$$

§ 99. *Թեորեմ.* **Ամեն մի եռանկյան մեջ կողմերը համեմատական են հանդիպակաց անկյուններին։**

---

[1]) *Թե մեկը և թե մյուս անկյունը չափվում են BC աղեղի կեսով։*

Պահանջվում է ապացուցել, որ՝

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Ապացուցում. Համաձայն 98-րդ պարագրաֆի, թե սրանկյուն թե բութանկյուն յեռանկյան համար ունենք՝

$$a=2R\sin A;\ b=2R\cdot\sin B;\ c=2R\cdot\sin C.$$

Այստեղից գտնում ենք՝

$$2R=\frac{a}{\sin A};\quad 2R=\frac{b}{\sin B};\quad 2R=\frac{c}{\sin C}.$$

Հետևաբար՝

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

Այսպիսով ամեն մի յեռանկյան մեջ կողմի և այդ կողմի դիմացի անկյան սինուսի հարաբերությունը հաստատուն մեծություն է և հավասար է արտագծած շրջանի տրամագծին։

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ առնչությունից, հարաբերությունների անդամները տեղափոխելուց հետո, ստանում ենք՝

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C,$$

այսինքն ամեն մի յեռանկյան մեջ կողմերը հարաբերում են այնպես, ինչպես հանդիպակաց անկյունների սինուսները։

Օրինակ. Որոշենք՝ $a:b:c$, յեթե $A:B:C=3:4:5$։

Քանի որ $A+B+C=180^\circ$, ապա նախ 180°-ը բաժանում ենք $3:4:5$ հարաբերությամբ. ստանում ենք՝ $A=45^\circ$, $B=60^\circ$ և $C=75^\circ$։ Այժմ վերը ապացուցածի համաձայն կարող ենք գրել՝

$$a:b:c=\sin 45^\circ:\sin 60^\circ:\sin 75^\circ.$$

տեղադրելով այստեղ

$$\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2};\ \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \sin 75^\circ=\sin\frac{30^\circ}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

կստանանք՝

$$a:b:c=\sqrt{2}:\sqrt{3}:\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

§ 100. *Թեորեմ.* Յեռանկյան յերկու կողմերի գումարը հարաբերում է այդ կողմերի տարբերությանն այնպես, ինչպես հանդիպակաց անկյունների կիսագումարի տանգենսը՝ նույն անկյունների կիսատարբերության տանգենսին։

Ապացուցում. 98-րդ պարագրաֆի համաձայն գտնում ենք՝

$$a+b=2R(\sin A+\sin B)\ \text{և}\ a-b=2R(\sin A-\sin B);$$

այստեղից

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}.$$

Կիրառելով սրա յերկրորդ մասի նկատմամբ XVII բանաձևը (§ 65), կստանանք՝

$$(a+b):(a-b)=\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}:\operatorname{tg}\frac{A-B}{2},$$

որով և թեորեմը ապացուցված է։

§ 101. Մոլվեյդի բանաձևերը. *Այդպես են կոչվում հետևյալ յերկու համեմատությունները, որոնք պարունակում են յեռանկյան յերկու կողմերի գումարի և տարբերության հարաբերությունները յերրորդ կողմին.*

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}; \tag{1}$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}. \tag{2}$$

Ապացուցում. 1) § 98-ի համաձայն՝

$$a+b=2R(\sin A+\sin B)\ \text{և}\ c=2R\cdot\sin C;$$

այստեղից.

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}. \tag{a}$$

Յերկրորդ մասը ձևափոխենք այսպես՝

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}; \tag{b}$$

Բայց $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$, որովհետև $\frac{A+B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ$։ (b) կոտորակի կրճատումից հետո վերջնականապես կստանանք՝

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}.$$

2) *Նույն ձևով կստանանք՝*

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

§ 102. *Թեորեմ.* Յեռանկյան կողմի քառակուսին հավասար է մյուս յերկու կողմերի քառակուսիների գումարին հանած այդ յերկու կողմերի յեվ նրանցով կազմված անկյան կոսինուսի արտադրյալի կրկնապատիկը։

Պահանջվում է ապացուցել, որ՝

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$ (*միևնույնը սուր և բութ անկյունների դեպքում*)։

Ապացուցում. 1) *Յեթե* A *անկյունը սուր է, ապա յերկրաչափությունից գիտեցածի հիման վրա (գծ. 43)*

$$a^2=b^2+c^2-2b\cdot AD,$$

բայց ABD *ուղղանկյուն յեռանկյունուց կարելի յե* AD-*ն փոխարինել* $c\cdot\cos A$-*ով, այդ ժամանակ կստանանք՝*

$$a^2=b^2+c^2-bc\cdot\cos A.$$

2) *Յեթե* A *անկյունը բութ է, ապա յերկրաչափության հիման վրա (գծ. 44)*

$$a^2=b^2+c^2-2b\cdot AE.$$

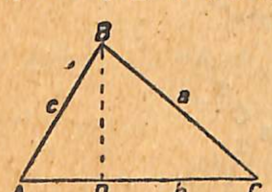
ABE *ուղղանկյուն յեռանկյունուց գտնում ենք՝* $AE=c\cdot\cos\alpha$, *բայց* $\cos\alpha=-\cos A$[1]

հետևաբար $AE=-c\cdot\cos A.$

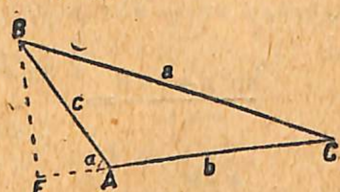
Տեղադրելով այս արտահայտությունը յերկրաչափությունից հայտնի բանաձևի մեջ, կստանանք՝

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A,$$

այսինքն նույնը, ինչ որ առաջին դեպքում։



Գծ. 43.



Գծ. 44.

[1] *Քանի որ* $\alpha+A=180^\circ$, *ապա* $\cos\alpha$ *և* $\cos A$-*ն բացարձակ արժեքներով հավասար են, բայց* $\cos\alpha$-*ն հավասար է դրական թվի, իսկ* $\cos A$-*ն՝ բացասական թվի. ուստի* $\cos\alpha$-*ն* $\cos A$-*ով փոխարինելիս, վերջինս բազմապատկում ենք —1-ով։*

§ 103. Յեռանկյան անկյունները յերեք կողմերի օգնությամբ վորոշելու բանաձևեր.

$$1)\ a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$

բանաձևից գտնում ենք՝

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

բայց բազմանիշ թվերի դեպքում այս բանաձևն անհարմար է։

2) *Նույն բանաձևի հետևյալ ձևափոխությունները տալիս են լոգարիթմելու համար արտահայտություններ.*

$$1-\text{coc}\,A=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}.$$

$$1+\cos A=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}.$$

Առաջին մասերը փոխարինենք համաձայն 60-րդ պարագրաֆի և նշանակենք՝ $a+b+c=2p$, *կստանանք՝*

$$2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2(p-c)\cdot 2(p-b)}{2bc}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\qquad\text{(XX)}$$

$$2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2p\cdot 2(p-a)}{2bc}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.\qquad\text{(XXI)}$$

Քանի որ յեռանկյան մեջ անկյան կեսը միշտ փոքր է 90°-*ից, ապա* $\sin\frac{A}{2}$ *և* $\cos\frac{A}{2}$-*ը դրական են, վորը և նկատի չե առնված արմատ հանելիս։*

Բաժանելով XX *հավասարությունը* XXI-*ի վրա կստանանք՝*

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\qquad\text{(XXII)}$$

B *և* C *անկյունները վորոշելու համապատասխան բանաձևերը կարելի յե գրել* A-*ի համար արտածած բանաձևերի նմանությամբ։*

Յեթե անհրաժեշտ է յերեք անկյուններն էլ հաշվել, ապա վերը արտածած բանաձևերից XXII-*ը այնքան էլ հարմար չէ. այդ բանաձևին կարելի յե հաշվման համար ավելի հարմար ձև* տալ։ Արմատատակ կոտորակի համարիչն էլ, հայտարարն էլ բազմապատկենք (p—a)-ով, կստանանք՝

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Այստեղ յենթարմատային արտահայտությունը կախում չունի այն բանից, թե վոր անկյունն ենք վորոշում, այդ պատճառով, նշանակելով արմատի մեծությունը k տառով կունենանք՝

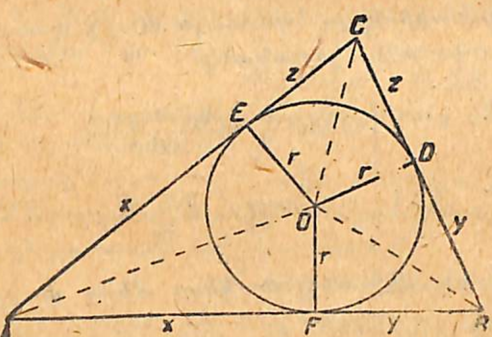
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{k}{p-a},\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{k}{p-b},\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{k}{p-c},$$

վերտեղ

$$k=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}. \qquad \text{(XXIII)}$$

§ 104. Կես անկյան տանգենսը կարելի յե վորոշել նաև ներգծած շրջանի շառավղի ոգնությամբ։

Դիցուք O-ն ներգծած շրջանի կենտրոնն ե, D, E և F-ը շոշափման կետերն են, r-ը շառավղի յերկարությունն ե (գծ. 45)։ Նկատենք, վոր OA, OB և OC գծերը կիսում են յեռանկյան անկյունները և ընդհանուր գագաթի կից կողմերի հատվածները հավասար են (որինակ՝ AE=AF)։



Գծ. 45.

Նախ վորոշենք այդ հատվածները։ Նշանակենք այդ հատվածները գագաթների հերթականությամբ՝ x, y և z տառերով, կստանանք՝ $x+y+z=p$, բայց $y+z=BC=a$, ուստի $x=p-a$։ Նման ձևով ստանում ենք՝ $y=p-b$, $z=p-c$։

Այժմ ուղղանկյուն յեռանկյուններից գտնում ենք՝

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a};\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b};\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}. \qquad \text{(XXIV)}$$

Վորպեսզի այս բանաձևերով հաշվումներ կատարենք, նախ

պետք ե վորոշենք r-ը (կամ միայն lg r-ը). Այդ նպատակին ծառայում են հետևյալ — յերկրաչափությունից հայտնի բանաձևերը․

$$S=r\cdot p^{1)}\ \text{և}\ S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

վորտեղից

$$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

(Բաղդատելով վերջին արտահայտությունները § 103-ի k-ի արտահայտության հետ, տեսնում ենք, վոր $k=r$)։

§ 105. **Շեղանկյուն յեռանկյան կողմերի յեվ անկյունների անկախ առնչությունների մասին.** Այդպիսի առնչություններ պետք ե լինեն յերեքը։ Այդպիսի առնչություններ են՝

$$A+B+C=180^\circ; \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\ ^{1)}, \qquad \text{(b)}$$

Մնացածները կարելի յե արտածել այստեղից։

100-րդ և 101-րդ պարագրաֆներում ստացված բանաձևերը (b)-ի ածանցյալ համեմատություններ են։

§ 102-ում մենք ոգտվեցինք յերկրաչափական թեորեմից։ Այժմ նույնը արտածենք (a) և (b) հավասարություններից։

Նշանակելով (b) հավասարության մեջ յուրաքանչյուր մասի մեծությունը m, կունենանք՝

$$a=m\cdot\sin A;\ b=m\cdot\sin B\ \text{և}\ c=m\cdot\sin C; \qquad \text{(c)}$$

վերցնենք $a=m\cdot\sin A$ հավասարությունը։ Քանի վոր (a) հավասարության համաձայն $A+(B+C)=180^\circ$, ապա $\sin A=\sin(B+C)$. այսպիսով՝ $a=m\cdot\sin(B+C)$ և հետևաբար,

$$a^2=m^2\cdot\sin^2(B+C). \qquad \text{(d)}$$

Կատարենք հետևյալ ձևափոխությունները․

$$\sin^2(B+C)=(\sin B\cdot\cos C+\cos B\cdot\sin C)^2=\sin^2 B\,(1-\sin^2 C)+$$
$$+(1-\sin^2 B)\sin^2 C+2\sin B\cdot\sin C\cdot\cos B\cos C=\sin^2 B+\sin^2 C+$$
$$+2\sin B\cdot\sin C\,(\cos B\cdot\cos C-\sin B\cdot\sin C)=\sin^2 B+\sin^2 C+$$
$$+2\sin B\sin C\cdot\cos(B+C);$$

բայց $\cos(B+C)=-\cos A$, ուստի

$$\sin^2(B+C)=\sin^2 B+\sin^2 C-2\cdot\sin B\cdot\sin C\cdot\cos A.$$

1) Այստեղ յերկու անկախ համեմատություններ ունենք․

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\ \text{և}\ \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

Տեղադրելով այս (d) հավասարության մեջ, կստանանք՝

$$a^2=m^2 \sin^2 B+m^2\cdot\sin^2 C-2\,(m\cdot\sin B)\,(m \sin C)\cdot\cos A,$$

կամ, համաձայն (c) հավասարության,

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A։$$

§ 106. Արտահայտություններ յեռանկյան մակերեսի համար. Երկրաչափությունից ունենք հետևյալ յերկու բանաձևերը.

$$S=\frac{1}{2}bh_b; \qquad (1)$$

$$S=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}\,; \qquad (2)$$

$$S=r\cdot p. \qquad (3)$$

Այժմ արտածենք անկյուն պարունակող արտահայտություններ։

§ 107. ա) վերցնենք $S=\frac{1}{2}bh_b$ արտահայտությունը։ h_b-ն փոխարինելու համար դիմենք 43-րդ և 44-րդ գծագրերին։ Յեթե A անկյունը սուր է, ապա $h_b=c\cdot\sin A$, իսկ յեթե A անկյունը բութ, է ապա $h_b=c\cdot\sin\alpha=c\cdot\sin(180^\circ-\alpha)=c\cdot\sin A$։ Յերկու դեպքում էլ ունենք՝ $h_b=c\cdot\sin A$, այսինքն՝ **ամեն մի յեռանկյան մեջ բարձրությունը հավասար է կողմնային կողմին՝ բազմապատկած այդ կողմով ու հիմքով կազմված անկյան սինուսով:**

Տեղադրելով $h_b=c\cdot\sin A$ արտահայտությունը $S=\frac{1}{2}b\cdot h_b$ բանաձևի մեջ, կստանանք՝

$$S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A \qquad (XXV)$$

այսինքն **յեռանկյան մակերեսը հավասար է յերկու կողմերի արտադրյալի կեսին՝ բազմապատկած այդ կողմերով կազմված անկյան սինուսով:**

բ)
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

առնչությունից գտնում ենք՝

$$b=\frac{a\cdot\sin B}{\sin A} \quad և \quad c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}.$$

տեղադրելով այս արտահայտությունները $S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$ բանաձևի մեջ կստանանք՝

$$S=\frac{a^2\cdot\sin B\cdot\sin C}{2\sin A},$$

Քանի վոր $\sin A=\sin(B+C)$, կարելի յե այս բանաձևի փոխարեն վերցնել՝

$$S=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin B\sin C}{\sin(B+C)},$$

§ 108. ա) Յերկրաչափությունից արդեն հայտնի յե յեռանկյան մակերեսի արտահայտությունը յերեք կողմերի ոգնությամբ։ Դժվար չի այդ բանաձևն ստանալ նաև յեռանկյունաչափության ոգնությամբ։

Մենք ունենք՝

$$S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A,$$

բայց $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$, իսկ $\sin\frac{A}{2}$-ը և $\cos\frac{A}{2}$-ը կփոխարինենք համաձայն 103-րդ պարագրաֆի. ստանում ենք՝

$$S=\frac{bc}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p\,(p-a)}{bc}}=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}։$$

բ) 103-րդ պարագրաֆից ունենք՝

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}}\,; \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{p\,(p-b)}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}}.$$

Բազմապատկելով այս հավասարությունների համապատասխան մասերը, արմատի տակ հնարավոր կրճատումներ կատարելուց հետո կստանանք՝

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p^4}}=$$

$$=\sqrt{\frac{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p^4}}=\frac{S}{p^2};$$

այստեղից

$$S=p^2\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}. \qquad (XXVI)$$

(Ի միջի այլոց այս բանաձևն ոգտակար է յեռանկյունների լուծման ժամանակ, վորպես ստուգման բանաձև (контрольная)։

§ 109. Արտահայտություններ արտագծած շրջանի շառավղի համար.

1) 98-րդ պարագրաֆից ունենք՝

$$a=2R\cdot\sin A.$$

-այստեղ՝

$$R=\frac{a}{2\sin A}.$$

2) Վերցնենք $R=\frac{a}{2\sin A}$ արտահայտությունը, $\sin A$-ն վորոշենք $S=\frac{1}{2}\,bc\cdot\sin A$ բանաձևից, կստանանք՝ $\sin A=\frac{2S}{bc}$, իսկ տեղադրումից հետո՝

$$R=\frac{abc}{4S}.$$

§ 110. Արտահայտություններ ներգծած շրջանի շառավղի համար. $S=r\cdot p$ բանաձևից հետևում է՝

$$r=\frac{S}{p}.$$

2) 45-րդ գծագրից ստանում ենք $r=x\cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2}$, բայց $x=p-a$, հետևաբար՝

$$r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

3) 45-րդ գծագրի BOD և COD յեռանկյուններից ունենք՝ $y=r\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$ և $z=r\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$. գումարելով և $(y+z)$-ը փոխարինելով a-ով, կստանանք՝

$$a=r\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)=r\cdot\frac{\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}=$$

$$=r\cdot\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}.$$

-այստեղից՝

$$r=\frac{a\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

Շեղանկյուն յեռանկյունների լուծումը բնական աղյուսակների օգնությամբ.

§ 111. 1-ին դեպք. Տված են կողմերից մեկն ու յերկու անկյունները (a, B, C)։ Պետք է գտնել A, b, c, S։

I. Լուծումն ընդհանուր տեսքով.

1) A անկյունը վորոշելու համար վերցնում ենք յեռանկյան անկյունների գումարի բանաձևը՝

$$A+B+C=180^\circ;\quad A=180^\circ-(B+C).$$

2) b և c կողմերը վորոշելու համար օգտվում ենք սինուսների թեորեմից.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B};\quad b=\frac{a\sin B}{\sin A};\quad b=\frac{a\cdot\sin B}{\sin(B+C)};$$

3) $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$; $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$; $c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin(B+C)}$.

4) Մակերեսը վորոշվում է հետևյալ բանաձևերով.

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C;\quad S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}.$$

II. Թվական որինակ. $a=37$; $B=86^\circ3'$; $C=50^\circ56'$.

1) $A=180^\circ-(86^\circ3'+50^\circ56')=43^\circ01'$;

2) $b=\frac{37\cdot\sin 86^\circ3'}{\sin 43^\circ01'}=\frac{37\cdot 0{,}9976}{0{,}6822}$; $b=54{,}1$;

3) $c=\frac{37\cdot\sin 50^\circ56'}{0{,}6822}=\frac{37\cdot 0{,}7764}{0{,}6822}$; $c=42{,}1$;

4) $S=\frac{1}{2}\cdot 37\cdot 55{,}1\cdot\sin 50^\circ56'$; $S=\frac{1}{2}\cdot 37\cdot 54{,}1\cdot 0{,}7764$;

$S=777$ (քառ. միավ.)

2-րդ դեպք. Տված են յերկու կողմերը և այդ կողմերով կազմված անկյունը (a, b, C)։ Պետք է գտնել A, B, c, S։

I. Լուծումն ընդհանուր ձևով.

1) c կողմը գտնում ենք կոսինուսների թեորեմի օգնությամբ.

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C.$$

2) Այժմ A անկյունը կարելի յե գտնել սինուսների թեորեմի օգնությամբ.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C};\quad \sin A=\frac{a\cdot\sin C}{c}.$$

3) Նման ձևով՝

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B};\quad \sin B=\frac{b\cdot\sin A}{a}.$$

4) *Մակերեսը վորոշվում ե հետևյալ բանաձևով՝*

$$S=\frac{1}{2}\cdot ab\cdot \sin C.$$

II. *Թվական որինակ. Տված ե՝* $a=110$; $b=100$; $c=50^{\circ}$. *պետք ե գտնել՝* c, A, B, S.

1) $c^2=110^2+100^2-2\cdot 110\cdot 100\cdot \cos 50^{\circ}$;

$c^2=12100+10000-22000\cdot 0,6428$;

$c=89,21$;

2) $\sin A=\frac{110\cdot \sin 50^{\circ}}{89,21}$;

$\sin A=0,9445$; $A=70^{\circ}49'$;

3) $\sin B=\frac{100\cdot 0,9445}{110}$; $\sin B=0,8586$; $B=59^{\circ}10'$.

Ստուգում. $A+B+C=70^{\circ}49'+59^{\circ}10'+50^{\circ}=179^{\circ}59'$.

4) $S=\frac{1}{2}\cdot 110\cdot 100\cdot \sin 50^{\circ}=5500\cdot 0,766=4213$ *քառ. միավ.*

Խնդիր. *Տված ե՝* $a=50$; $c=30$; $B=60^{\circ}$; *պետք ե գտնել* b, A, C.

Պատ. $b=43,6$; $A=83^{\circ}20'$; $C=36^{\circ}40'$.

Խնդիր. *Տված ե՝* $b=12$; $c=10$; $A=54^{\circ}$. *Պետք ե գտնել* S *մակերեսը։*

Պատ. 485,4.

Խնդիր. *Տված են յեռանկյան կողմերից մեկը՝* $a=10$ սմ *և դրան կից անկյունները՝* $B=50^{\circ}$, $C=70^{\circ}$. *Կառուցեցեք յեռանկյունը կարկինի և փոխադրիչի օգնությամբ. Կառուցեցեք ներգծած և արտագծած շրջանագծերը։ Հաշվեցեք* A, b, c, R, S, r; *պատասխանները ստուգեցեք գծագրի վրա համապատասխան չափումներ կատարելով։*

Շեղանկյուն յեռանկյունների լուծումը քառանիշ լոգարիթմական աղյուսակների օգնությամբ.

§ 112. 1-*ին դեպք. Տված են կողմերից մեկն ու յերկու անկյունները* (a, B, C)։ *Պետք ե գտնել* A, b, c, S.

Լուծումը կատարվում ե նույն հաջորդականությամբ, ինչ վոր բնական աղյուսակների դեպքում, բայց վերջնական հաշվումների ժամանակ բանաձևը լոգարիթմում ենք և հաշվում ենք լոգարիթմների աղյուսակով։

Թվական որինակ։ Տված ե՝ $a=1235$; $B=37^{\circ}32'$; $C=115^{\circ}18'$.

Լուծում. 1) $A=180^{\circ}-(B+C)$;

$A=180^{\circ}-(37^{\circ}32'+115^{\circ}18')=27^{\circ}10'$;

2) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$; $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$; $b=\frac{1235\ \sin 37^{\circ}32'}{\sin 27^{\circ}10'}$;

$\lg b=\lg 1235+\lg \sin 37^{\circ}32'-\lg \sin 27^{\circ}10'$;

$$\begin{array}{ll}
\lg 1235=3,0917 & \\
\lg \sin 37^{\circ}32'=\bar{1},7847 & \lg \sin 27^{\circ}10'=\bar{1},6594; \\
-\lg \sin 27^{\circ}10'=0,3406 & -\lg \sin 27^{\circ}10'=-\bar{1},6594=0,3406. \\
\hline
\lg b=3,2170 & \\
b=1648. &
\end{array}$$

3) $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$; $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$; $c=\frac{1235\ \sin 115^{\circ}18'}{\sin 27^{\circ}10'}$;

$\lg c=\lg 1235+\lg \sin 115^{\circ}18'-\lg \sin 27^{\circ}10'$;

$$\begin{array}{ll}
\lg 1235=3,0917 & \sin 115^{\circ}18'=\sin(180^{\circ}-64^{\circ}42')= \\
\lg \sin 115^{\circ}18'=\bar{1},9562 & =\sin 64^{\circ}42'; \\
-\lg \sin 27^{\circ}10'=0,3406 & \lg \sin 64^{\circ}42'=\bar{1},9562. \\
\hline
\lg c=3,3885 & \\
c=2446. &
\end{array}$$

4) $S=\frac{1}{2}ab\sin C$; $S=\frac{1}{2}\cdot 1235\cdot 1648\cdot \sin 115^{\circ}18'$;

$S=\frac{1}{2}\cdot 1235\cdot 1648\cdot \sin 64^{\circ}42'$;

$$\begin{array}{l}
\lg S=\lg 1235+\lg 824+\lg \sin 64^{\circ}42'; \\
\lg 1235=3,0917 \\
\lg 824=2,9159 \\
\lg \sin 64^{\circ}42'=\bar{1},9562 \\
\hline
\lg S=5,9638; \\
S=920000 \text{ (քառ. միավ.)}.
\end{array}$$

§ 113. 2-*րդ դեպք. Տված են յերկու կողմերն ու դրանցով կազմված անկյունը* (a, b, C)։ *Պետք ե գտնել* A, B, c, S.

Թվական որինակ. $a=42,53$; $b=29,81$; $C=47^{\circ}14'$.

1) *Նախ կվորոշենք* A *և* B *անկյունները։ Դրա համար կոգտվենք տանգենսների թեորեմից.*

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}};\quad \operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{(a-b)\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{a+b}$$

Գտնենք պահանջվող մեծությունները.

$$a+b=42{,}53+29{,}81=72{,}34;$$

$$a-b=42{,}53-29{,}81=12{,}72;$$

$$A+B=180^\circ-47^\circ14'=132^\circ46';$$

$$\frac{A+B}{2}=66^\circ23';$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{12{,}72\cdot\operatorname{tg}66^\circ23'}{72{,}34};$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\lg 12{,}72+\lg\operatorname{tg}66^\circ23'-\lg 72{,}34:$$

$$\begin{array}{ll}
\lg 12{,}72=1{,}1045 & \\
\lg\operatorname{tg}66^\circ23'=0{,}3593 & \lg 72{,}34=1{,}8593; \\
-\lg 72{,}34=\bar{2}{,}1407 & -\lg 72{,}34=-1{,}8593=\bar{2}{,}1407 \\
\hline
\lg\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\bar{1}{,}645; &
\end{array}$$

$\frac{A-B}{2}$ անկյունը գտնում ենք տանգենսների լոգարիթմների աղյուսակից.

$$\frac{A-B}{2}=21^\circ55'.$$

Այժմ մենք գիտենք A և B անկյունների կիսագումարն ու կիսատարբերությունը. Այսպիսով ունենք յերկանհայտ յերկու հավասարումների սիստեմ։ Այդ հավասարումների համապատասխան մասերը գումարելով և ապա հանելով ստանում ենք.

$$\frac{A+B}{2}=66^\circ23'$$

$$\frac{A-B}{2}=21^\circ55'$$

$$A=88^\circ18';$$

$$B=44^\circ28'.$$

2) Կողմերը վորոշելու համար օգտվում ենք սինուսների թեորեմից.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C};\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A};\quad c=\frac{42{,}53\cdot\sin 47^\circ14'}{\sin 88^\circ18'};$$

$$\lg c=\lg 42{,}53+\lg\sin 47^\circ14'-\lg\sin 88^\circ18;$$

$$\begin{array}{ll}
\lg 42{,}53=1{,}6287 & \\
\lg\sin 47^\circ14'=\bar{1}{,}8657 & \lg\sin 88^\circ18'=\bar{1}{,}9998; \\
-\lg\sin 88^\circ18'=0{,}0002 & -\lg\sin 88^\circ18'=0{,}0002, \\
\hline
\log c=1{,}4946; & \\
c=31{,}23. &
\end{array}$$

3) $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C;\quad S=\frac{1}{2}\cdot 42{,}53\cdot 29{,}81\cdot\sin 47^\circ14';$

$$\lg S=\lg 0{,}5+\lg 42{,}53+\lg 29{,}81+\lg\sin 47^\circ14';$$

$$\begin{array}{r}
\lg 0.5=\bar{1}{,}6990 \\
\lg 42{,}53=1{,}6287 \\
\lg 29{,}81=1{,}4743 \\
\lg\sin 47^\circ14'=\bar{1}{,}8657 \\
\hline
\lg S=2{,}6677; \\
S=165{,}2
\end{array}$$

§ 114. 3-րդ դեպք. Տված են յերեք կողմերը (a, b, c). Պետք է գտնել A, B, C, S։

Անկյունները վորոշվում են յեռանկյան կիսանկյան տանգենսի բանաձևի օգնությամբ։ Մակերեսը վորոշվում է Հերոնի բանաձևով.

Թվական օրինակ. $a=15{,}37;\ b=21{,}42;\ c=13{,}83.$

1) Գրենք A անկյանը վորոշելու բանաձևը.

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Վորոշում ենք p-ն և կատարում ենք բանաձևում նշված բոլոր գործողությունները.

$$\begin{array}{ll}
a=15{,}37 & p-a=9{,}94; \\
b=21{,}42 & p-b=3{,}89; \\
c=13{,}83 & p-c=11{,}48. \\
\hline
2p=50{,}62; & \\
p=25{,}31. &
\end{array}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{3{,}89\cdot 11{,}48}{25{,}31\cdot 9{,}94}};$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(\lg 3{,}89+\lg 11{,}48-\lg 25{,}31-\lg 9{,}94)$$

$\lg 3{,}89=0{,}5899$ $\qquad$ $\lg 25{,}31=1{,}4033$

$\lg 11{,}48=1{,}0599$ $\qquad$ $-\lg 25{,}31=\bar{2}{,}5967$

$-\lg 25{,}31=\bar{2}{,}5967$ $\qquad$ $\lg 9{,}94=0{,}9974$

$-\lg 9{,}94=\bar{1}{,}0026$ $\qquad$ $-\lg 9{,}94=\bar{1}{,}0026$

$$\lg \mathrm{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\cdot\bar{1}{,}2491;\quad \lg \mathrm{tg}\frac{A}{2}=\bar{1}{,}6246;$$

$$\frac{A}{2}=22^\circ51';\ A=45^\circ42'.$$

2) Վորոշենք B անկյունը.

$$\mathrm{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};\quad \mathrm{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{9{,}94\cdot 11{,}48}{25{,}31\cdot 3{,}89}};$$

$$\lg \mathrm{tg}\frac{B}{2}=\frac{1}{2}(\lg 9{,}94+\lg 11{,}48-\lg 25{,}31-\lg 3{,}89);$$

$\lg 9{,}94=0{,}9974$ $\qquad$ $\lg 3{,}89=0{,}5899$

$\lg 11{,}48=1{,}0599$ $\qquad$ $-\lg 3{,}89=\bar{1}{,}4101$

$-\lg 25{,}31=\bar{2}{,}5967$

$-\lg 3{,}89=\bar{1}{,}4101$

$$\lg \mathrm{tg}\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\cdot 0{,}0641;\quad \lg \mathrm{tg}\frac{B}{2}=0{,}0320;\quad \frac{B}{2}=47^\circ6';\ B=94^\circ12'.$$

3) Վորոշենք C անկյունը.

$$\mathrm{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}};$$

$$\mathrm{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{9{,}94\cdot 3{,}89}{25{,}31\cdot 11{,}48}};$$

$$\lg \mathrm{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{2}(\lg 9{,}94+\lg 3{,}89-\lg 25{,}31-\lg 11{,}48);$$

$\lg 9{,}94=0{,}9974$

$\lg 3{,}89=0{,}5899$ $\qquad$ $\lg 11{,}48=1{,}0599;$

$-\lg 25{,}31=\bar{2}{,}5967$ $\qquad$ $-\lg 11{,}48=1{,}0599=\bar{2}{,}9401;$

$-\lg 11{,}48=\bar{2}{,}9401$

$$\lg \mathrm{tg}\frac{C}{2}\cdot\bar{1}{,}1241;\quad \lg \mathrm{tg}\frac{C}{2}=\bar{1}{,}5621;\quad \frac{C}{2}=20^\circ3';\ C=40^\circ6'.$$

Ստուգում. $A+B+C=45^\circ42'+94^\circ12'+40^\circ6'=180^\circ$

(Սակայն յեռանկյան անկյունների գումարի մեջ փոքր սխալ հնարավոր է, վորովհետև գործ ունենք մոտավոր հաշվումների հետ)։

4) Մակերեսը վորոշում ենք Հերոնի բանաձևով։

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$\lg S=\frac{1}{2}[\lg p+\lg (p-a)+\lg (p-b)+\lg (p-c)]$$

Տեղադրելով արդեն ստացած բոլոր լոգարիթմները և հաշվելով կստանանք՝

$$\lg S=2{,}0252,$$

$$S=105{,}9\ (\text{քառ. միավ.})։$$

§ 115. 4-րդ դեպք. Տված են յերկու կողմերը և դրանցից մեկի դիմացի անկյունը (a, b, A)։

Լուծում. $\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{b}{a}$ համեմատությունից գտնում ենք՝

$$\sin B=\frac{b\cdot\sin A}{a},$$

վորի օգնությամբ վորոշում ենք B անկյունը։ Մյուս տարրերը գտնելու համար ունենք՝

$$C=180^\circ-(A+B);\ c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A};\ S=\frac{ab}{2}\cdot\sin C։$$

Ուշադրություն դարձնենք B անկյունը վորոշելու վրա (sin B-ով)։ Քանի վոր շեղանկյուն յեռանկյան մեջ ընդհանրապես անկյունը կարող է լինել և՛ սուր, և՛ բութ, ապա B-ի մեծությունը պետք է վորոնել 0-ի և 180°-ի միջև, իսկ այդ սահմաններում միևնույն սինուսին համապատասխանում է յերկու անկյուն—սուր, վորը ստացվում է աղյուսակից, և բութ, վորը այդ սուր անկյունը լրացնում է մինչև 180° (գծ. 20)։ Այդ պատճառով հարց է առաջ գալիս, թե յեռանկյան համար յերկու անկյուններն էլ հնարավոր են, թե դրանցից մեկն է հնարավոր, և այդ դեպքում վորն ենք վերցնելու։ Այս խնդիրը վճռվում է տված կողմերի բաղդատման միջոցով, վորովհետև յեռանկյան մեջ բութ անկյունը կարող է գտնվել միայն ամենամեծ կողմի դիմաց։

Նկատի ունենալով վերև ասածը, օգտակար կլինի սկզբից հետազոտել խնդիրը՝ տված կողմերի բաղդատական մեծություններով։ (Յենթադրվում է, վոր a և b կողմերը հավասար չեն. յերբ a=b, կունենանք B=A)։

Հետազոտում. I դեպք՝ $a>b$։ Այս դեպքում B անկյունը, վորպես տված կողմերից մեծի դիմաց գտնվող անկյուն, կարող է լինել և՛ սուր, և՛ բութ։

$\sin B=\frac{b\cdot\sin A}{a}$ հավասարության մեջ հետազոտենք յերկրորդ մասը։ Եթե $b<a$, ապա $b \cdot \sin A<a$, այդ պատճառով էլ $\sin B<1$ (կամ $\lg \sin B<0$), հետևաբար խնդիրն այս դեպքում հնարավոր է անկախ A անկյան մեծությունից։ Վորոնելի B անկյունն այս դեպքում կարող է միայն սուր լինել, վորովհետև գտնվում է փոքր կողմի դիմաց։

II դ ե պ ք՝ $a<b$։ Այս դեպքում A անկյունը պետք է սուր լինի, վորովհետև գտնվում է տված կողմերից փոքրի դիմաց։

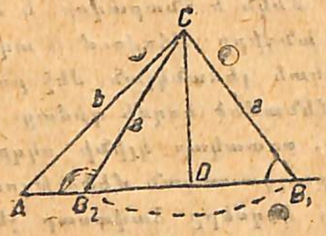
Դիմելով $\sin B=\frac{b \cdot \sin A}{a}$ հավասարությանը, նկատում ենք, վոր յեթե $b>a$, ապա $b \cdot \sin A$-ն կարող է կամ ավելի լինել a-ից, կամ հավասար լինել a-ին, կամ պակաս լինել a-ից, նայած թե A անկյունն ինչ մեծություն ունի։ Հետազոտենք յուրաքանչյուր դեպքն առանձին։

1) $b \cdot \sin A>a$, այս դեպքում $\sin B=1$ (կամ $\lg \sin B>0$), ուստի խնդիրը հնարավոր չէ։

2) $b \cdot \sin A=a$, այս դեպքում $\sin B=1$ (կամ $\lg \sin B=0$) և, հետևաբար, $B=90°$, այսինքն յեռանկյունն ուղղանկյուն է։

3) $b \cdot \sin A<a$, այդ ժամանակ $\sin B<1$ (կամ $\lg \sin B<0$) և այստեղ խոսք կարող է լինել այդպիսի սինուսին համապատասխանող յերկու անկյունների մասին։ Յեռանկյան համար այս դեպքում պետք է վերցնել վոչ միայն սուր անկյուն, այլ և բութ անկյուն, վորովհետև b կողմը մեծ է a-ից, իսկ c կողմը չի կարող ազդել B անկյան ընտրության վրա, վորովհետև c-ի մեծությունը կախում ունի այդ անկյան ընտրությունից։ B անկյան յերկու արժեքներին համապատասխան յերկուական արժեքներ ենք ստանում C, c և S-ի համար։

Այսպիսով, արած հետազոտությունից յեզրակացնում ենք ($\lg \sin B<0$ դեպքի վերաբերյալ)․ յեթե վորոնվող B անկյունը գտնում է տված կողմերից փոքրի դիմաց, ապա պետք է վերցնել միայն սուր անկյուն. յեթե այդ անկյունը գտնվում է տված կողմերից մեծի դիմաց, ապա խնդիրը թույլատրում է յերկու լուծում։



Գծ. 46.

Նախորդ հետազոտության արդյունքները համընկնում են նույն տվյալներով յեռանկյան կառուցումից ստացված արդյունքների հետ (այս բաղդատման մեջ $b \cdot \sin A$-ն կարտահայտի յեռանկյան c կողմի վրա իջեցրած բարձրությունը)։ 46-րդ գծագիրը համապատասխանում է այս պարագրաֆի II, 3) դեպքին։ Վորոնելի

յեռանկյուններն են՝ $\triangle ACB_1$ և $\triangle ACB_2$, ընդվորում $\angle AB_1C+\angle AB_2C=180°$։ Աշակերտներին ենք թողնում մնացած դեպքերի կառուցումները կատարել։

Թ վ ա կ ա ն օ ր ի ն ա կ. I. Տված է՝ $a=700$; $b=650$; $A=40°25'$։

1) Հաշվենք B անկյունը.

$$\sin B=\frac{b \sin A}{a};\ \sin B=\frac{650 \cdot \sin 40°25'}{700};$$

$$\lg \sin B=\lg 650+\lg \sin 40°25'-\lg 700.$$

$\lg 650=2,8129$ | $\lg 700=2,8451$;

$\lg \sin 40°25'=\bar{1},8118$ | $-\lg 700=\bar{3},1549$.

$-\lg 700=\bar{3},1549$

$\lg \sin B=\bar{1},7796$;

$B=37°$.

2) C անկյան հաշվումը.

$$C=180°-(40°25'+37°)=102°35'.$$

3) C կողմի հաշվումը.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C};\quad c=\frac{a \sin C}{\sin A};\quad c=\frac{700 \sin 102°35'}{\sin 40°25'};$$

$$\lg c=\lg 700+\lg \sin 102°35'-\lg \sin 40°25';$$

$\lg 700=2,8451$ | $\lg \sin 40°25'=\bar{1},8118$;

$\lg \sin 102°35'=\bar{1},9894$ | $-\lg \sin 40°25'=0,1883$;

$-\lg \sin 40°25'=0,1882$ | $\sin 102°35'=\sin 77°25'$;

$\lg c=3,0227$; | $\lg \sin 77°25'=\bar{1},9894$.

$c=1054$.

II. Տված. $a=4$; $b=7$; $A=30°$.

1) B անկյան հաշվումը.

$$\sin B=\frac{b \cdot \sin A}{a};\ \sin B=\frac{7 \sin 30°}{4};$$

$$\lg \sin B=\lg 7+\lg \sin 30°-\lg 4.$$

$\lg 7=0,8451$ | $\lg 4=0,6021$;

$\lg \sin 30°=\bar{1},6990$ | $-\lg 4=-0,6021=\bar{1},3979$.

$-\lg 4=\bar{1},3979$

$\lg \sin B=\bar{1},9420$

$$B_1=61°3';\ B_2=118°57'.$$

2) C անկյունը նույնպես կարող է յերկու արժեք ունենալ․

$$C_1=180^\circ-A-B_1;\quad C_2=180^\circ-A-B_2;$$

$$C_1=180^\circ-30^\circ-61^\circ3'=88^\circ57';\quad C_2=180^\circ-30^\circ-118^\circ57'=31^\circ3'.$$

3) Ճիշտ նույնպես c կողմը կունենա յերկու արժեք.

$$c_1=7{,}999;\quad c_2=4{,}126.$$

Շեղանկյուն յեռանկյունների լուծումը հնգանիշ աղյուսակների օգնությամբ.

§ **116**. 1-ին դեպք. Տված են կողմերից մեկն ու յերկու անկյունները (a, B, C)։

Թվական օրինակ $a=253$; $B=38^\circ50'48''$; $C=112^\circ34'$։

1) A-ի հաշվումը։

$$\begin{array}{l} B=38^\circ50'48'' \\ C=112^\circ34' \\ \hline B+C=151^\circ24'48'' \\ A=28^\circ35'12'' \end{array}$$

2) b-ի հաշվումը

$$\begin{array}{rl} & \lg a=2{,}40312 \\ - & \lg\sin A=9{,}67987-10 \\ \hline & \lg 2R=2{,}72325 \\ + & \lg\sin B=9{,}79743-10 \\ \hline & \lg b=2{,}52068 \\ & b=331{,}65 \end{array}$$

3) c-ի հաշվումը.

$$\begin{array}{rl} + & \lg 2R=2{,}72325 \\ & \lg\sin C=9{,}96541-10 \\ \hline & \lg c=2{,}68866 \\ & c=488{,}27 \end{array}$$

4) S-ի հաշվումը.

$$S=0{,}5\cdot bc\cdot\sin A$$

$$\begin{array}{rl} & \lg 0{,}5=9{,}69897-10 \\ + & \lg b=2{,}52068 \\ & \lg c=2{,}68866 \\ & \lg\sin A=9{,}67987-10 \\ \hline & \lg S=4{,}58818 \\ & S=38742 \text{ (քառ. միավ.)} \end{array}$$

Ստուգիչ հաշվում $\left[a=(b+c)\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{C-B}{2}}\right]$.

$$\begin{array}{r} c=488{,}27 \\ b=331{,}65 \\ \hline c+b=819{,}92 \\ C=112^\circ34' \\ B=38^\circ50'48'' \\ \hline C-B=73^\circ43'12'' \\ \frac{C-B}{2}=36^\circ51'36'' \\ \frac{A}{2}=14^\circ17'36'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \lg(c+b)=2{,}91377 \\ + & \lg\sin\frac{A}{2}=9{,}39250-10 \\ \hline & 2{,}30627 \\ - & \lg\cos\frac{C-B}{2}=9{,}90315-10 \\ \hline & \lg a=2{,}40312 \end{array}$$

որը համընկնում է սկզբնական lg a-ին (տես b-ի հաշվումը)։

§ **116ա**. 2-րդ դեպք. Տված են յերկու կողմերն ու նրանցով կազմված անկյունը (b, c, A)։

Թվական օրինակ. $b=1123$; $c=2034$; $A=72^\circ15'19''$.

B և C անկյունների հաշվումը.

$$\begin{array}{rl} & C+B+A=180^\circ \\ & A=72^\circ15'19'' \\ \hline & C+B=107^\circ44'41'' \\ \hline & \frac{C+B}{2}=53^\circ52'21'' \\ \pm & \frac{C-B}{2}=21^\circ34'13'' \\ \hline & C=75^\circ26'34'' \\ & B=32^\circ18'8'' \end{array}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C-B}{2}=\frac{c-b}{c+b}\cdot \lg\frac{C+B}{2}$$

$$\begin{array}{rl|l} & c=2034 & c-b=911 \\ & b=1123 & c+b=3157 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \lg(c-b)=2{,}95952 \\ - & \lg(c+b)=3{,}49927 \\ \hline & 9{,}46025-10 \\ + & \lg\operatorname{tg}\frac{C+B}{2}=0{,}13671 \\ \hline & \lg\operatorname{tg}\frac{C-B}{2}=9{,}59696-10 \end{array}$$

2) a-հաշվումը

$$\begin{array}{rl} + & \lg b=3{,}05038 \\ & \lg\sin A=9{,}97883-10 \\ \hline & =3{,}02921 \\ - & \lg\sin B=9{,}72789-10 \\ \hline & \lg a=3{,}30135 \\ & a=2001{,}5 \end{array}$$

3) S-ի հաշվումը

$$S=(b\cdot\sin A)\cdot\frac{c}{2}$$

$$\begin{array}{rl} & \lg(b\cdot\sin A)=3{,}02921\ ^{1)} \\ + & \lg\frac{c}{2}=3{,}00732 \\ \hline & \lg S=6{,}03653 \\ & S=1087750 \text{ (քառ.մ.)} \end{array}$$

§ **116բ**. 3-րդ դեպք. Տված են յերեք կողմերը (a, b, c)։ Պետք է գտնել անկյուններն ու մակերեսը (A, B, C, S)։

Թվական օրինակներ. $a=215$; $b=500$; $c=427$։

$$\begin{array}{r} a=215 \\ b=500 \\ c=427 \\ \hline 2p=1142 \\ p=571 \\ p-a=356 \\ p-b=71 \\ p-c=144. \end{array}$$

lg k-ի հաշվում.

$$\begin{array}{rl} & \lg(p-a)=2{,}55145 \\ + & \lg(p-b)=1{,}85126 \\ & \lg(p-c)=2{,}15836 \\ \hline & 6{,}56107 \\ - & \lg p=2{,}75664 \\ \hline & 3{,}80443 \\ & \lg k=1{,}90222 \end{array}$$

[1]) Վերցված է a-ի հաշվումից։

A-ի հաշվումը:

$$\lg k = 1{,}90222$$
$$-\ \lg(p-a) = 2{,}55145$$
$$\lg \operatorname{tg}\frac{A}{2} = 9{,}35077-10$$
$$\frac{A}{2} = 12^\circ 38' 26''$$
$$A = 25^\circ 16' 52''$$

B-ի հաշվումը:

$$\lg k = 1{,}90222$$
$$-\ \lg(p-b) = 1{,}85126$$
$$\lg \operatorname{tg}\frac{B}{2} = 0{,}05096$$
$$\frac{B}{2} = 48^\circ 21' 14''$$
$$B = 96^\circ 42' 28''.$$

C-ի հաշվումը:

$$\lg k = 1{,}90222$$
$$-\ \lg(p-c) = 2{,}15836$$
$$\lg \operatorname{tg}\frac{C}{2} = 9{,}74386-10$$
$$\frac{C}{2} = 29^\circ 0' 22''$$
$$C = 58^\circ 0' 44''$$

S-ի հաշվումը. $S = pr = pk$.

$\lg S = \lg p + \lg k = 4{,}65886$; $S = 45589$ (*քառ. մետր*):

Ստուգում.

$$A = 25^\circ 16' 52''$$
$$+\ B = 96^\circ 42' 28''$$
$$C = 58^\circ\ 0' 44''$$
$$180^\circ\ 0'\ 4'':$$

XI. ՉԱՓՈՒՄՆԵՐ ՏԵՂԱՆՔԻ ՎՐԱ

§ **117.** Ընդհանուր դիտողություններ. *Հողաչափական պլաններ կազմելիս, այդպես նաև մի քանի այլ դեպքերում անհրաժեշտ ե լինում տեղանքի վրա նշանակված գծերի և անկյունների մեծությունները վորոշել: Հիմնական տվյալները գտնում ենք* անմիջական *չափումներով, հատուկ գործիքների օգնությամբ, իսկ մնացած տվյալները՝ հաշվումների միջոցով: Վերջին դեպքում պահանջվում ե* յեռանկյունաչափության *կիրառություն:*

§ **118.** Գծերի չափումը. *Տեղանքի վրա ուղիղ գիծը ցույց են տալիս նրա ծայրերում դրված յերկու լավ նկատելի առարկաների միջոցով: Յեթե չափվող գծի յերկարությունը բավականին մեծ ե, ապա նախ պետք ե* ցցուղել *այդ գիծը, այսինքն այդ գծի ուղղությամբ պետք ե դնել մի շարք ցցեր:*

Տեղանքի վրա ուղիղ գծի անմիջական չափման համար ավելի գործածական են հողաչափական շղթան ու չափիչ ժապավենը:

Շղթան, վորն արդեն հանված ե գործածությունից, պատրաստում էին վոչ ճկուն յերկաթալարից: Դրա յերկարությունը 10 մ *ե և կազմված ե* 100 *հատ ուղիղ օղակներից, վորոնք միացված են միջանկյալ օղակներով:*

Այժմ գործածվող չափիչ ժապավենը պատրաստվում ե բարակ պողպատե շերտից: Դրա յերկարությունը լինում ե 10մ, 15մ, *ավելի հաճախ* 20մ: *Շղթան նիշնշված ե մետրի տասներորդ մասերով:*

§ **119.** Անկյունաչափական գործիքներ. *Անկյան* աստիճանային մեծությունը *վորոշելու համար ծառայող գործիքները* անկյունաչափական *են կոչվում:*

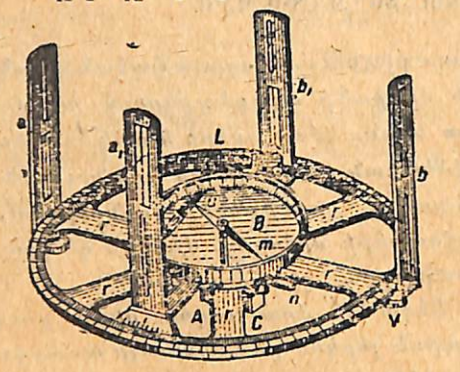
Կան անկյունաչափական գործիքներ, վորոնց միջոցով վորոշում են հորիզոնական հարթության մեջ գտնվող անկյունները, կան գործիքներ էլ, վորոնցով չափում են թե հորիզոնական և թե ուղաձիգ հարթությունների մեջ գտնվող անկյունները. (թեք հարթության մեջ գտնվող անկյունները սովորաբար վորոշվում են հաշվումների *օգնությամբ):*

Անկյունաչափական գործիքներից ամենից շատ օգտագործվում են աստրոլաբը և թեոդոլիտը։

§ 120. Աստրոլաբը (գծ. 47) կազմված է լիմբից, ալիդադից և յերկու զույգ դիոպտրներից։

Լիմբն աստիճանների բաժանված մի շրջան է։

Ալիդադը մի քանոն է, վորը պտտվում է լիմբի վրայով՝ նրա կենտրոնի շուրջը։ Վորևէ անկյուն չափելիս ալիդադն ուղղում են դեպի այդ անկյան կողմի վրա գտնվող վորևէ առարկա։



Գծ. 47.

Ալիդադի վրաբերման—տարադիտման—համար ծառայում են դիոպտրները։ Դիոպտր են կոչվում այն յերկու թիթեղները, վորոնք ամրացված են ալիդադի ծայրերում։ Դիոպտրների մեջ արված են յերկայնակի նեղ ու լայն ճեղքեր։ Մի դիոպտրի նեղ ճեղքի դիմաց ընկնում է մյուս դիոպտրի լայն ճեղքը, վորի յերկարությամբ ձգված է ձիու սև մազ։

Վորևէ կետի վրա տարադիտելիս, ալիդադը դնում են այնպես, վոր մի դիոպտրի նեղ ճեղքից նայող աչքի համար մյուս դիոպտրի մազով այդ կետը ծածկված լինի։

Աստրոլաբն ունի յերկու զույգ դիոպտր։ Դիոպտրներից յերկուսն ամրացված են լիմբի վրա և կոչվում են անշարժ դիոպտրներ, իսկ մյուս յերկուսը տեղավորված են ալիդադի ծայրերին և կոչվում են շարժական դիոպտրներ։

Գծերի դիրքն աշխարհի կողմերի նկատմամբ վորոշելու համար աստրոլաբին կցում են նաև մագնիսական սլաք։

Աստրոլաբը սովորաբար տեղավորում են յեռոտանու վրա, բայց յեռոտանու և գործիքի միջև մտցնում են նաև մի հարմարանք, վորը հնարավորություն է տալիս լիմբի հարթությանը տալ այս կամ այն թեքությունը։ Այդպիսի հարմարանքներից պարզագույնը կարդան է։ Այդ հատուկ ձևի գնդային աքցան է, վորն ընդգրկում է ներքևից լիմբի առանցքի ծայրին գտնվող գունդը։ Այսպիսով լիմբը կարող է պտտվել իր առանցքի շուրջը, իսկ ինքն առանցքը կարող է փոխել իր ուղղությունը։

Լիմբը հորիզոնական հարթության մեջ հաստատելու համար

ծառայում է հարթաչափը, իսկ ուղղաձիգ հարթության մեջ հաստատելու համար—ուղղալարը։

§ 121. Հորիզոնական անկյունը չափելու համար սկզբում լիմբը հաստատում են հորիզոնական դիրքում, այնպես, վոր լիմբի կենտրոնը գտնվի ուղիղ անկյան գագաթի վերևը։ Այդ նպատակին կարելի յե հասնել ուղղալարի օգնությամբ։ Այնուհետև պահպանելով լիմբի հորիզոնականությունը, պտտում են այդ իր կենտրոնի շուրջը այնքան ժամանակ, մինչև վոր անշարժ դիոպտրի ճեղքից յերևա անկյան կողմերից մեկի վրա գտնվող առարկան։ Այժմ անշարժ պահելով լիմբը, շարժական դիոպտրներն ուղղում են անկյան մյուս կողմի ուղղությամբ։ Վերջապես կատարում են համապատասխան հաշվում դիոպտրների միջև.

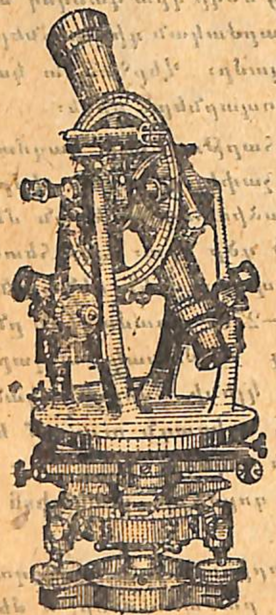
§ 122. AB ուղիղի և հորիզոնական հարթության կազմած անկյունը (AB ուղղի թեքման անկյունը) չափելու համար լիմբը հաստատում են տված գծով անցնող ուղղաձիգ հարթության մեջ այնպես, վոր նրա կենտրոնը գտնվի տված գծի վրա։ Այնուհետև, լիմբը պահելով նույն հարթության մեջ, պտտում են կենտրոնի շուրջն այնքան ժամանակ, մինչև վոր 90°—270° տրամագիծն ընդունում է ուղղալարի ուղղությունը։ Այդ ժամանակ անշարժ դիոպտերների մազիկների հարթությունը կլինի հորիզոնական։ Այժմ թողնելով անփոփոխ լիմբի դիրքը, ալիդադն ուղղում են AB գծով և հաշվում են դիոպտրների միջի աղեղը։

Ժամանակակից անկյունաչափական գործիքը թեոդոլիտն է (գծ. 48).

Թեոդոլիտի գլխավոր մասերն են՝ հորիզոնական և ուղղաձիգ շրջանները, վորոնք ունեն ճշգրիտ բաժանումներ, և մեծ խոշորացում ունեցող հեռադիտակ։

§ 123. Յեռանկյունաչափության կիրառումը. Մենք այստեղ կքննարկենք գործնական յեռանկյունաչափության ամենապարզ խնդիրը, այն է՝ 1) անմատչելի հեռավորություններ վորոշելը, 2) բարձրություններ վորոշելը 3) տրիանգուլացիա (յեռանկյունավորում) կազմելը։

Մենք խնդիրներն ընտրելիս սահմանափակվում ենք այնպիսի տեղանքով, վոր կարելի չե ընդունել հորիզոնական հարթություն կամ գոնե թույլատրում է վորևէ ուղղությամբ անցկացնել հորիզոնական գծեր։ Նշված խնդիրները լուծելու համար անհրաժեշտ է նախորոք չափել վորոշ անկյուններ և գծեր։ Գծերի անմիջական չափումը տեղանքի վրա՝ յերկու տեսակի դժվարությունների հետ է կապված. 1) Դժվար է հենց չափման պրոցեսը և 2) յեթե վերցրած գիծն ուղիղ և հորիզոնական չէ, ապա անհրաժեշտ է լինում զանազան ուղղիչ չափումներ ու հաշվումներ կատարել։ Իսկ անկյունները չափվում են թե հեշտ և թե համեմատաբար ավելի ճշգրիտ։ Այդ պատճառով աշխատում են, ինչքան հնարավոր է, գծերի չափումը փոխարինել անկյունների չափումով։ Գծերը գերազանցապես որոշվում են հաշվումների միջոցով։ Մեծ մասամբ սահմանափակվում են միայն մի գծի չափումով։ Այդ գիծն անվանում են բազիս (հիմք—խարիսխ)։



Գծ. 48.

§ 124. Անմատչելի հեռավորություններ չափելը. Այստեղ կարող է լինել յերեք դեպք. 1) յերկու ծայրակետերը մատչելի յեն, 2) ծայրակետից միայն մեկն է մատչելի և 3) յերկու ծայրակետերն էլ անմատչելի յեն։

Հետազոտենք յուրաքանչյուր դեպքն առանձին։

Այն կետերը, որոնց միջև յեղած հեռավորությունն է որոշվում, նշանակենք A և B։

1-ին դեպք. A և B կետերը մատչելի յեն (գծ. 49)։

Լուծում. ա) Յեթե A և B կետերը միմյանից չեն յերևում, ապա ընտրում ենք այնպիսի մի C կետ, որից այդ յերկու կետերն էլ յերևան։ Այնուհետև չափում ենք ACB անկյունը և CA ու CB գծերը։ Այս տվյալներով հաշվում ենք AB հեռավորությունը։

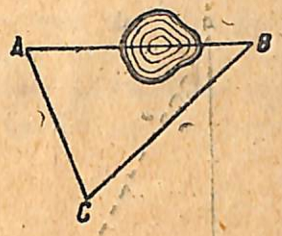
բ) Յեթե A և B կետերը մեկը մյուսից յերևում են, ապա չափում ենք AC գիծը և A ու C անկյունները։ Այս տվյալները բավական են AB հեռավորությունը չափելու համար։

2-րդ դեպք. A կետը մատչելի յե, իսկ B կետը՝ անմատչելի (այսինքն դիտողը կարող է մոտենալ A կետին, իսկ B կետից բաժանված է որևէ արգելքով)։

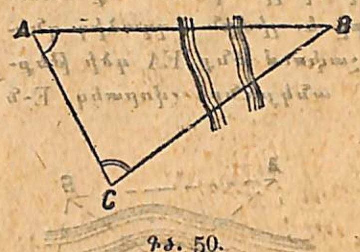
Լուծում. Վերցնելով C կետն այնպես, որ այդ կետից յերևան թե A և թե B կետերը, չափում ենք A, C անկյունները և AC բազիսը (գծ. 50)։ Այնուհետև դժվար չի լինի հաշվել AB հեռավորությունը, որովհետև ABC յեռանկյան մեջ հայտնի կլինեն մեկ կողմն ու յերկու անկյունները։

3-րդ դեպք. A յեվ B կետերն անմատչելի յեն (գծ. 51)։

Լուծում. Մատչելի տեղում ընտրում ենք C և D կետերն այնպես վայր, որ դրանցից յերևան թե A և թե B կետը և չափում ենք CD բազիսը, α, β, γ և δ անկյունները CD կողմը



Գծ. 49.



Գծ. 50.

պարունակող յերկու յեռանկյուններից հաշվում ենք CA և CB գծերը։ Այդ գծերով կազմված անկյունը հավասար է α—β։ Այսպիսով կարելի յե հաշվել AB հեռավորությունը ABC յեռանկյունից։

Կարելի յե և հաշվումն սկսել DA և DB գծերից, որոնցով կազմված է γ—δ անկյունը, և որոշել AB հատվածը ADB յեռանկյունից։ Այս յերկրորդ յեղանակն առաջինի համար կլինի ստուգում, որն այս դեպքում, հաշվումների բարդ լինելու պատճառով, առանձնապես օգտակար է։

§ 125. Բարձրությունը չափելը. Հետազոտենք այս խնդրի գլխավոր դեպքերը։

1-ին դեպք. Հիմքը մատչելի յե։ Յենթադրենք, որ չափվող բարձրությունը AB-ն է (գծ. 52). ընդ որում B կետը մատչելի յե։

Լուծում. B կետից անց ենք կացնում որևէ BC գիծ և չափում ենք դրա մեծությունը։ Դիցուք այդ յերկարությունը հավասար է a-ի։

Դրանից հետո C կետում դնում ենք ուղղաձիգ լիմբ ունեցող աստրոլաբը այնպես, որ լիմբի կենտրոնը լինի ուղիղ C կետի վերևը, և որոշում ենք DA գծի թեքման անկյունը (§ 122)։ Դիցուք այդ անկյունը հավասար է α-ի։

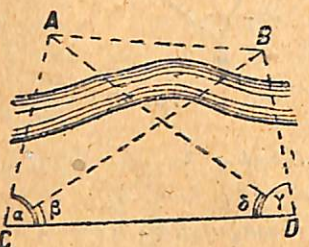
Ուղղալարով չափում ենք նաև DC հեռավորությունը։ Յենթադրենք, որ ստացվեց DC=b։

Գիտենալով a, α և b մեծությունները, բարձրությունը հաշվելու համար կունենանք՝

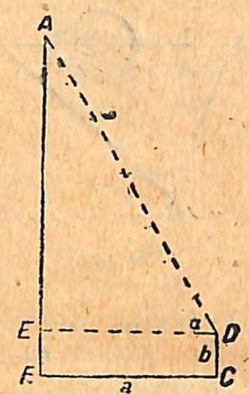
$$AB=AE+EB=a\cdot tg\,\alpha+b.$$

2-րդ դեպք. Հիմքն անմատչելի յե. Դիցուք 53-րդ գծագրի վրա AB բարձրությունը ներկայացնում ե այս դեպքի մի օրինակ։ Յենթադրենք նաև, վոր շրջապատը հորիզոնական ե։

Լուծում. Ընտրում ենք բավականին հեռու մի C կետ։ Այդ կետի վրա դնում ենք աստրոլաբը և, լիմբն ուղղաձիգ դնելով, չափում ենք EA գծի թեքման անկյունը (վորտեղ E-ն



Գծ. 51.



Գծ. 52.

լիմբի կենտրոնն ե)։ Այնուհետև չփոխելով լիմբի դրությունը, անշարժ դիոպտրների օգնությամբ տեղանքում նշանակում ենք մի CD ուղիղ՝ լիմբի հարթության ուղղությամբ, հետևաբար, AB-ի հետ միևնույն հարթության մեջ։ Այդ CD գիծը չափում ենք վորպես բազիս։

Վերջապես, աստրոլաբը տեղափոխում ենք D կետը և դնելով այդ այնպիսի բարձրության վրա, ինչպես C կետում, վորոշում ենք FA գծի թեքման անկյունը։

Կատարված չափումներից հետո դժվար չի լինի հաշվել AB բարձրությունը։ Դիցուք ստացվել ե՝

$$CD=a,\ FD=EC=b,\ \angle AEG=\alpha \text{ և } \angle AFG=\beta.$$

Այդ ժամանակ,

$$AB=AG+BG=AF\cdot\sin\beta+b.$$

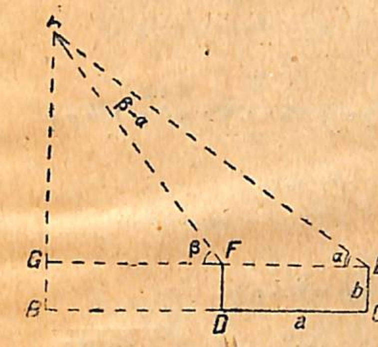
իսկ AFE յեռանկյունից գտնում ենք՝

$$AF=\frac{a\cdot\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

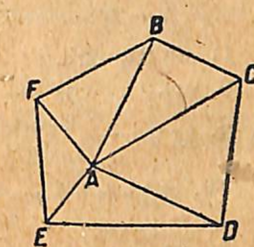
այսպիսով՝

$$AB=\frac{a\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}+b.$$

§ 126. Տրիանգուլացիա (յեռանկյունավորում). Յերկրագնդի մակերևույթի բավականին մեծ մասի պլանը վերցնելու համար սկզբում այդ մակերևույթի վրա ընտրում են միայն մի քանի կետ (համեմատաբար ավելի հարմար կետեր). մտավոր կերպով միացնելով այդ կետերն ուղիղ գծերով, ստանում են յեռանկյունների մի ցանց (գծ. 54), վոր կոչվում ե տրիանգուլացիա[1]։ Այդ յեռանկյունների մեջ, ինչքան հնարավոր ե, մեծ ճշտությամբ չափում են բոլոր անկյուններն ու կողմերից մեկը, օրինակ AC-ն։ Ցանցի մյուս կետերն արդեն վորոշում են յեռանկյունաչափության



Գծ. 53.



Գծ. 54.

օգնությամբ, լուծելով այդ յեռանկյունները, ընդ վորում սկսում են այն յեռանկյունուց, վորի մեջ գտնվում ե բազիսը (AC-ն)։ Այդ յեռանկյունից անցնում են հարևան յեռանկյանը, իսկ դրանից ել՝ նոր հարևանին և այլն։ (Միևնույն գծերի հաշվումը յերկու տարբեր ճանապարհներով՝ ծառայում ե վորպես հաշվումների ստուգում)։

Գլխավոր տրիանգուլացիայի յուրաքանչյուր գիծ կարող ե ծառայել, վորպես բազիս՝ նոր, ավելի մանր յեռանկյուններից կազմված տրիանգուլացիայի, և այլն, վորով և վորոշվում ե ամեն մի կետի դիրքը պլանի վրա, այսինքն հնարավոր ե նկարել ամբողջ հողամասը։

Յեռանկյունաչափական հիմնական բանաձևեր

I. *Յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների առնչությունները.*

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$ 2. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$

3. $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$ 4. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1.$

1) Տրիանգուլացիա բառը յերբեմն տրվում ե իրեն, հանույթի յեղանակին։

5. $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$. 6. $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\mathrm{cosec}^2\alpha$.

7. $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$. 8. $\mathrm{cosec}\,\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$.

II. *Անկյունների գումարի և տարբերության բանաձևերը.*

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$.
2. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$.
3. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$.
4. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$.
5. $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}$.
6. $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$.

III. *Կրկնապատիկ անկյան ֆունկցիաները.*

1. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.
2. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.
3. $\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$.

IV. *Կիսանկյան ֆունկցիաները.*

1. $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$. 2. $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

3. $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

V. *Լոգարիթմական տեսքի վերածելու բանաձևերը.*

1. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.
2. $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.
3. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.
4. $\cos\alpha-\mathrm{coc}\,\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

   $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$.
5. $\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$.
6. $\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$.
7. $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$.
8. $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

VI. *Առնչություններ ուղղանկյուն եռանկյան մեջ.*

1. $\frac{a}{c}=\sin A$; $\frac{b}{c}=\cos A$; $\frac{a}{b}=\mathrm{tg}\,A$.
2. $a=c\cdot\sin A$; $b=c\cdot\cos A$; $a=b\cdot\mathrm{tg}\,A$.

VII. *Առնչություններ շեղանկյուն եռանկյան մեջ.*

1. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. *Սինուսների թեորեմը.*
2. $a=2R\cdot\sin A$.
3. $a^2=b^2+c^2-2\,bc\cdot\cos A$. *Կոսինուսների թեորեմը.*
4. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\mathrm{tg}\frac{A+B}{2}}{\mathrm{tg}\frac{A-B}{2}}$. *Տանգենսների թեորեմը.*
5. $\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$. 6. $\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$. *Մոլվեյդի բանաձևերը.*
7. $\mathrm{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$; $\mathrm{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$;

   $\mathrm{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$.

VIII. *Եռանկյան մակերեսը.*

1. $S=\frac{1}{2}ab$. 2. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
3. $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C$. 4. $S=rp$.
5. $S=\frac{a^2\sin B\cdot\sin C}{2\sin(B+C)}$.

Հիմնական անկյունների եռանկյունաչափական ֆունկցիաները

	0	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	−1	0
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0	∞

Վերածման բանաձևերը

	α	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270°+\alpha$	$360°-\alpha$	$360°+\alpha$
sin	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
ctg	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
sec	$\sec\alpha$	$\mathrm{cosec}\,\alpha$	$-\mathrm{cosec}\,\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\mathrm{cosec}\,\alpha$	$\mathrm{cosec}\,\alpha$	$\sec\alpha$	$\sec\alpha$
cosec	$\mathrm{cosec}\,\alpha$	$\sec\alpha$	$\sec\alpha$	$\mathrm{cosec}\,\alpha$	$-\mathrm{cosec}\,\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\mathrm{cosec}\,\alpha$	$\mathrm{cosec}\,\alpha$

ՑԱՆԿ

ԳԻՆԸ 2 Ռ.
ԿԱԶՄԸ 30 Կ.

Н. Рыбкин
Прямолинейная
Тригонометрия
ГИЗ. ССР Армении, Эривань