Մ. Ձ. ԲԵՐԳ, Մ. Ա. ԶՆԱՄԵՆՍԿԻ, Գ. Ն. ՊՈՊՈՎ,
Ի. Ձ. ՍԼՈՒՑԿԻ, Ն. Պ. ԽՎՈՍՏՈՎ, Ն. Ի. ՇՉԵՑԻՆԻՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԳԻՐՔ

ԱՇԽԱՏԱՆՔԱՅԻՆ ԴՊՐՈՑՆԵՐԻ ՈՒԹԵՐՈՐԴ
ՏԱՐՎԱ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

1929 Թ. ՎԵՐԱՓՈԽՎԱԾ ԵՐԿՐՈՐԴ ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅՈՒՆԻՑ

Փոխադրեցին Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ
Ս. ՍԱԼԻԲԵԳՅԱՆ

ՊԵՏԱԿԱՆ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ—1930

[illegible]

Մ. Ֆ. ԲԵՐԳ, Մ. Ա. ԶՆԱՄԵՆՍԿԻ, Գ. Ն. ՊՈՊՈՎ, Ն. Ի. ՇՉԵՏԻՆԻՆ
Ի. Ֆ. ՍԼՈՒԴՍԿԻ, Ն. Պ. ԽՎԱՍՏՈՎ.

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ
ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԳԻՐՔ

ԱՇԽԱՏԱՆՔԱՅԻՆ ԴՊՐՈՑՆԵՐԻ ՈՒԹԵՐՈՐԴ ՏԱՐՎԱ
ԴԱՍԸՆԹԱՑ

1929 թ. բարեփոխված յերկրորդ հրատարակությունից

Փոխադրեցին { Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ
Մ. ՄԱԼԻՔԵԴՅԱՆ

ՊԵՏԱԿԱՆ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ՅԵՐԵՎԱՆ — 1929

Տպագրվում է
ՀՍԽՀ Պետգիտխորհի
թույլտվությամբ։

ՊԵՏՀՐԱՏԻ ՅԵՐԿՐՈՐԴ ՏՊԱՐԱՆ ՅԵՐԵՎԱՆՈՒՄ

Հր. № 1012 Պատվ. № 714

Գրատ. № 2228(բ)—Տիրաժ 5000

Գ Լ Ո Ւ Խ I

ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄԸ

§ 1. ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Թվաբանության և նրա անմիջական շարունակությունն կազմող հանրահաշվի մեջ զարգացվում և հետզհետե լայնացվում են հետևյալ գաղափարները.

1) **Թվի յեվ թվերի հետ կատարվող գործողությունների գաղափարը,** **2) հանրահաշվական արտահայտության յեվ ֆունկցիայի գաղափարը,** **3) հավասարման գաղափարը։**

Թվի գաղափարը բղխում է ամբողջ թվից, վորը առարկաները համարելու հետևանք է։

Մեծությունը չափելով *նրա հետ համասեռ միավորով՝ հանգում ենք* **կոտորակի յեվ իռացիոնալ թվի** *գաղափարներին. յեթե չափման միավորը պարունակվում է չափվող մեծության մեջ առանց մնացորդի, ապա չափման հետևանքը կամ, ուրիշ խոսքով, չափվող մեծության և չափման միավորի հարաբերությունը արտահայտվում է ամբողջ թվով, իսկ յեթե չափման միավորը չի պարունակվում չափվող մեծության մեջ առանց մնացորդի, ապա փորձում ենք միավորն այնպիսի հավասար մասերի բաժանել, վորոնք առանց մնացորդի պարունակվեն չափվող մեծության մեջ։ Յեթե միավորի* n*-րդ մասը պարունակվի չափվող մեծության մեջ առանց մնացորդի* m *անգամ, ապա չափվող մեծության և միավոր չափի հարաբերությունը կարտահայտվի* $\frac{m}{n}$ *թվաբանական կոտորակով, վորտեղ* m *և* n *ամբողջ թվեր են. չափման միավորի* n*-րդ մասը, վոր առանց մնացորդի պարունակվում է տվյալ յերկու մեծությունների մեջ, կոչվում է ընդհանուր չափ։ Ընդհանուր չափ ունեցող յերկու միասեռ մեծություններ կոչվում են համաչափելի։ Այսպես, ուրեմն,* **յերկու համաչափելի միասեռ մեծությունների հարաբերությունն արտահայտվում է ամբողջ թվով կամ թվաբանական կոտորակով։**

Բայց կարող է պատահել, վոր յերկու միասեռ մեծություններ, որինակ, յերկու հատվածներ չունենան ընդհանուր չափ, այսինքն մեծություններից մեկի վոչ մի մաս չպարունակվի մյուսի մեջ առանց մնացորդի։ Այսպես, որինակ, կարելի յե ապացուցել, վոր քառակուսու կողմը և անկյունագիծը չունեն ընդհանուր չափ, այսինքն քառակուսու կողմի վոչ մի մասն առանց մնացորդի չի պարունակվում անկյունագծի մեջ։ Ընդհանուր չափ չունեն նույնպես հավասարակողմ չեռանկյան կողմը և բարձրությունը։ Այն չերկու հատվածները, վորոնք ընդհանուր չափ չունեն, կոչվում են **անհամաչափելի**։ Ցերկու անհամաչափելի միասեռ մեծությունների հարաբերությունն ցույց տվող թիվը միավորի վոչ մի մասով ճշտությամբ չի կարելի արտահայտել, և կոչվում է **իռացիոնալ թիվ**։ Հակառակ իռացիոնալ թվերին՝ ամբողջ թվերը և թվաբանական կոտորակները կոչվում են **ռացիոնալ թվեր**։

Իռացիոնալ թիվը կարելի յե մոտավոր կերպով արտահայտել ռացիոնալ թվով վորևե մոտավոր ճշտությամբ։

Ցեթե քառակուսու կողմը բաժանենք 10 հավասար մասի և վերցնենք այդպիսի մասեր անկյունագծի վրա, ապա անկյունագծի մեջ կպարունակվեն 14-ից ավելի և 15-ից պակաս այդպիսի մասեր, այսինքն քառակուսու անկյունագծի և կողմի հարաբերությունն արտահայտող իռացիոնալ թիվը մեծ է 1,4-ից, բայց փոքր է 1,5-ից։ Այդ կոտորակներից յուրաքանչյուրը տարբերվում է վորոնվող հարաբերության իսկական մեծությունից 0,1-ից ավելի փոքր թվով։ Վորոնվող հարաբերությունն արտահայտվում է կամ 1,4 թվով, կամ 1,5 թվով 0,1-ի մոտավոր ճշտությամբ։

Ցեթե քառակուսու կողմը բաժանեյինք վորևե n թվով հավասար մասերի, ապա ստացված մասը կպարունակվեր անկյունագծի մեջ վորևե m թիվ անգամ, և կմնար մի մնացորդ, վորը փոքր է մեր վերցրած մասից, այնպես, վոր անկյունագիծը կպարունակեր m-ից ավելի, բայց $m+1$-ից պակաս մասեր, և անկյունագծի ու կողմի հարաբերությունը կգտնվեր $\frac{m}{n}$ և $\frac{m+1}{n}$ կոտորակների միջև։ Այդ կոտորակները կլինեյին իռացիոնալ թվի մոտավոր արժեքները $\frac{1}{n}$-ի մոտավոր ճշտությամբ։

Հանրահաշվի մեջ տրվում է նաև **հարաբերական թվերի** գաղափարը. դրան հանգում ենք հակադիր ուղղություն ունեցող մեծությունները դիտելով. չերկու հակադիր ուղղություն ունեցող մեծություններից մեկն արտահայտվում է **դրական**, իսկ մյուսը **բացասական** թվով։ Դրական և բացասական թվերը կոչվում են **հարաբերական թվեր**։

Հակադիր ուղղություն ունեցող մեծությունների որինակներ. 1) կետի տեղափոխումն աջ և ձախ, վերև ու ներքև. 2) ջերմության աստիճանի բարձրացումն ու իջքը, 3) ձգող և հրող ուժեր. 3) ոգուտ և վնաս և այլն։

Կոտորակ, իռացիոնալ և բացասական թվերի հետ կատարվող գործողությունները յենթարկվում են նույն որենքներին, ինչ որենքների յենթարկվում են ամբողջ թվերի գործողությունները։

Գումարումը յենթարկվում է **տեղափոխման** յեվ **զուգորդման** որենքներին։

Տեղափոխման որենք. գումարի մեծությունը չի կախված գումարելիների դասավորումից.

$$a+b=b+a։$$

Զուգորդման որենք. միքանի թվերի գումարը վորևե թվին ավելացնել, միևնույն է թե այդ թվին ավելացնել հաջորդաբար յուրաքանչյուր գումարելին.

$$a+(b+c)=(a+b)+c։$$

Բազմապատկումն ենթարկվում է **բաշխման, տեղափոխման** *և* **զուգորդման** *օրենքներին։*

Բաշխման օրենք. *մի քանի թվերի գումարը որևէ թվով բազմապատկելու համար կարելի է յուրաքանչյուր գումարելին առանձին բազմապատկել այդ թվով և ստացած արտադրյալները գումարել։*

$$(a+b)\cdot m = a\cdot m + b\cdot m։$$

Տեղափոխման օրենք։ *արտադրյալի մեծությունը կախված չէ արտադրիչների դասավորումից.*

$$a\cdot b = b\cdot a։$$

Զուգորդման օրենք. *որևէ թիվ բազմապատկել արտադրյալով, միևնույն է թե այդ թիվը հաջորդաբար բազմապատկել այդ արտադրյալի յուրաքանչյուր արտադրիչով։*

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c։$$

Գումարման օրենքներն ընդունվում են որպես աքսիոմներ, իսկ բազմապատկման օրենքները բղխում են գումարման օրենքներից որպես հետևանքներ։

Հանումը և բաժանումը գումարման և բազմապատկման հակադարձ գործողություններն են, և նրանց օրենքները, որպես հետևանքներ, բղխում են գումարման և բազմապատկման օրենքներից։

Աստիճան բարձրացնելը կրկնվող բազմապատկումն է, իսկ արմատ հանելն աստիճան բարձրացնելու հակադարձ գործողությունն է։

Տառերի կամ տառերի և թվերի միացումը գործողության նշանների միջոցով կոչվում է հանրահաշվական արտահայտություն։

Տառերը, վորոնցով օգտվում է հանրահաշիվը թվեր նշանակելու համար, կարող են ունենալ կամավոր թվային արժեքներ։

Դիտենք միայն մեկ տառ պարունակող վորևէ հանրահաշվական արտահայտություն, օրինակ՝ x^2-5x+4 *և այդ արտահայտությունն ամբողջությամբ վերցրած նշանակենք մի ուրիշ տառով. օրինակ՝* y*-ով, այնպես վոր*

$$y = x^2 - 5x + 4։$$

Եթե x*-ին տանք զանազան թվային արժեքներ, ապա ամբողջ արտահայտության թվային արժեքը նույնպես կփոփոխվի. * x*-ի յուրաքանչյուր թվային արժեքին համապատասխանում է տվյալ արտահայտության վորոշ թվային արժեքը.*

Եթե $x = -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 10$ . . . . .

ապա $y = 10,\ 4,\ 0,\ -2,\ 4,\ 54$ . . . . .

Երբ մի մեծության փոփոխումն առաջացնում է մի այլ մեծության փոփոխումն այնպես, վոր մեկի յուրաքանչյուր թվային արժեքին համապատասխանում է մյուս մեծության վորոշ թվային արժեքը, ապա յերկրորդը կոչվում է առաջին մեծության ֆունկցիան, իսկ առաջինը—այդ ֆունկցիայի արգումենտը։

Այսպես, **մեկ փոփոխական մեծություն պարունակող հանրահաշվական արտահայտությունը այդ մեծության ֆունկցիան է:**

Եթե հանրահաշվական արտահայտությունը պարունակում է յերկու մեծություն՝ x *և* y*, ապա նա ներկայանում է այդ յերկու մեծության ֆունկցիան. օրինակ՝*

$$z = xy + 2x - 3y։$$

z-ը փոփոխվում է թե x-ի փոփոխվելուց և թե y-ի փոփոխվելուց։

Բերենք ուրիշ որինակներ.

1) Ուղղանկյուն յեռանկյան էջերը նշանակենք x և y, իսկ ներքնաձիգը՝ z, այնպես վոր

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

x և y էջերի մեծության փոփոխումից կախված, փոփոխվում է z ներքնաձիգի մեծությունը, այսինքն ներքնաձիգը էջերի ֆունկցիան է։

Յեթե էջերից մեկը չի փոփոխվում, ապա ներքնաձիգը դառնում է միայն մի արգումենտի ֆունկցիան, հատկապես փոփոխվող էջի։

2) Ուղղանկյան S մակերեսը յերկու արգումենտների ֆունկցիան է, այն է՝ x հիմքի և h բարձրության, այսպես.

$$S = x \cdot h.$$

Յեթե h բարձրությունը չի փոխվում, ապա S-ը դառնում է միայն մի արգումենտի (x-ի) ֆունկցիան։

3) M մասսա և C տեսակարար ջերմություն ունեցող մարմնի բարեխառնությունը t^0 բարձրացնելու համար անհրաժեշտ Q ջերմության քանակն արտահայտվում է հետևյալ ֆորմուլով.

$$Q = MCt.$$

Տվյալ մարմնի տեսակարար ջերմությունն անփոփոխ է. M մասսայի և t բարեխառնության փոփոխվելու դեպքում փոփոխվում է և Q-ն, այնպես վոր Q-ն յերկու արգումենտների (M-ի և t-ի) ֆունկցիան է։

Առհասարակ, **ամեն մի հանրահաշվական արտահայտություն իր մեջ մտնող մեծությունների ֆունկցիան է։**

Յերկու արտահայտություններ, վորոնք արտաքինից զանազանվելով, մնում են միմյանց հավասար իրենց մեջ պարունակվող տառերի ամեն տեսակ թվային արժեքների դեպքում, կոչվում են նույնորեն հավասար. որինակ՝ (a+b)c և ac+bc արտահայտությունները հավասար են միմյանց a-ի, b-ի և c-ի ամեն տեսակ թվային արժեքների դեպքում և իրենցից ներկայացնում են նույնորեն հավասար արտահայտություններ։

Այլ որինակներ.

$$a-(b+c)=a-b-c$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2.$$

Հանրահաշվական արտահայտությունների հետ կատարվող գործողությունները ձևափոխում են տվյալ արտահայտությունները, բերելով նրանց նույնությունների յեվ հիմնվում են թվաբանական գործողությունների նույն օրենքների վրա, ինչ օրենքների վրա հիմնվում են թվերի հետ կատարվող թվաբանական գործողությունները։

Որինակ՝ բազմանդամի բազմապատկումը բազմանդամով հիմնվում է գումարը գումարով բազմապատկելու նույն կանոնի վրա, վորը գործադրում ենք բազմանիշ թվերի բազմապատկման ժամանակ։ Հանրահաշվի մեջ կրճատ բազմապատկման ֆորմուլներից ոգտվում ենք այնպես, ինչպես թվաբանության մեջ բազմապատկման աղյուսակից և այլն։

Առհասարակ, հանրահաշիվը թվաբանությունից զանազանվում է՝ մի կողմից՝ նշանակման յեղանակներով և ամենից առաջ թվերին փոխարինող *տառային նշանակումներով, մյուս կողմից—ավելի լայն գաղափար է տալիս թվի մասին, ներմուծելով իռացիոնալ և հարաբերական թվերը, վորոնք չեն մտնում զուտ թվաբանական խնդիրների մեջ։ Սակայն խիստ սահմաններ անցկացնել թվաբանության և հանրահաշվի մեջ չի կարելի. Թվաբանության մեջ լուծվում են, օրինակ, պարզ հավասարումներ, վորոնք կազմում են հանրահաշվի առարկան։ Մյուս կողմից, հանրահաշվի մեջ ուսումնասիրվում են միքանի զուտ թվաբանական գործողություններ, ինչպես, օրինակ՝ թվերի աստիճան բարձրացնելը և թվերից արմատ հանելը, վորոնք ավելի շուտ թվաբանական գործողություններ են։*

Վերադառնանք մեկ արգումենտի ֆունկցիային։ Դիտենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$y = 3x + 5$$

և տեսնենք, թե x *արգումենտի վոր թվային արժեքի դեպքում տվյալ ֆունկցիան ստանում է վորևե տվյալ թվային արժեք, օրինակ՝ 20։*

Գանելով x *արգումենտի վորոնվող թվային արժեքի համար նույն* x *նշանակումը, նրան վորոշելու համար ստանում ենք հետևյալ հավասարությունը.*

$$3x + 5 = 20։$$

x*-ի վորոնվող թվային արժեքը վորոշվում է 3, 5 և 20 տված թվերով։*

Այն հավասարությունը, վորը ցույց է տալիս վորոնվող մեծության յեվ մի շարք տվյալ մեծությունների կախումն իրարից, կոչվում է միանհայտ հավասարում:

Լուծելով այն, ստանում ենք հավասարման արմատը.

$$x = 5։$$

Այսպես, տվյալ $3x+5$*-ի ֆունկցիան ստանում է տվյալ թվային արժեք 20, յեթե* $x=5$*։*

Այժմ դիտենք միևնույն արգումենտի յերկու զանազան ֆունկցիաները. օրինակ՝

$$y = x^2 - 4x,$$
$$z = 6x - 21։$$

Այդ յերկու ֆունկցիաներն առհասարակ իրար հավասար չեն. օրինակ՝

$$\text{յեթե } x = 5 \quad y = 5; \quad z = 9$$
$$x = 10 \quad y = 60; \quad z = 39։$$

Հարց է տրվում, x *արգումենտի վոր թվային արժեքի դեպքում տվյալ ֆունկցիաների թվային արժեքները կհավասարվեն իրար։ Գանելով արգումենտի վորոնվող թվային արժեքի համար դարձյալ նույն* x *նշանակումը, կստանանք հետևյալ հավասարումը.*

$$x^2 - 4x = 6x - 21,$$

$$\text{կամ} \qquad x^2 - 10x + 21 = 0։$$

Լուծելով այս հավասարումը, ստանում ենք նրա յերկու արմատները՝ $x=3$ *և* $x=7$*, այսինքն դիտվող* y *և* z *յերկու ֆունկցիաներն ստանում են հավասար թվային արժեքներ այն դեպքում, յերբ արգումենտն ունի 3 և 7 յերկու վորոշ թվային արժեքներ, վորի մեջ հեշտությամբ կարելի յե համոզվել ստուգման միջոցով։*

Այսպես, միանհայտ հավասարումն արտահայտում է կամ այն, որ ֆունկցիան արգումենտի որևէ արժեքի դեպքում ստանում է որևէ տվյալ թվային արժեք, կամ որ միևնույն արգումենտի յերկու տարբեր ֆունկցիաներն այդ արգումենտի որևէ թվային արժեքի դեպքում թվականորեն իրար հավասարվում են։

Յերկանհայտ մի հավասարություն արտահայտում է մեկ պայման, վորին պետք է բավարարեն յերկու անհայտ թվեր, և ունի անսահման արմատներ։ Այդ հավասարումը սահմանում է անհայտներից մեկի կախումը մյուսից և մի շարք տված թվերից, վորոնք մտնում են հավասարման մեջ։ **Յերկանհայտ յերկու հավասարման սիստեմն արտահայտում է յերկու պայմանների միացումն, վորոնց պետք է բավարարեն անհայտները, յեվ վորոշում է անհայտները կախված տվյալներից։**

Առհասարակ, n-անհայտներ վորոշելու համար անհրաժեշտ է ունենալ n պայմաններ, վորոնք արտահայտվում են նույնքան հավասարումներից կազմված սիստեմով։

Յոթնամյակում ձեր կողմից ուսումնասիրված բազմանդամների ձևափոխություններին կհիշեցնենք մի քանիսը ևս և կտանք մի շարք վարժություններ մասամբ այդ նոր ձևափոխությունների, մասամբ էլ անցյալում ձեզ հայտնի չեղածի նկատմամբ։

§ 2· ԳՈՒՄԱՐԻ ՅԵՎ ՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅԱՆ ԽՈՐԱՆԱՐԴԸ

Ուսման VI տարվա ծրագրից ձեզ հայտնի յեն կրճատ բազմապատկման մի քանի ֆորմուլները, որինակ՝ յերկու թվերի գումարի և տարբերության քառակուսիների ֆորմուլները և յերկու թվերի գումարի և նույն թվերի տարբերության արտադրյալը՝

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Այդ արտահայտություններից յուրաքանչյուրը յերկու արտադրիչների արտադրյալ է, և արտադրյալի յուրաքանչյուր անդամը պարունակում է յերկուական արտադրիչ, վորոնք յերկրորդ չափման ֆորմուլներ են։

Բերենք յերրորդ չափման յերկու ֆորմուլ․ որինակ՝ գումարի և տարբերության խորանարդների արտահայտությունները․

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)^2.(a+b)=$$
$$=(a+2ab+b^2).(a+b)=a^3+\underline{a^2b}+\underline{2a^2b}+$$
$$+\underline{\underline{2ab^2}}+\underline{\underline{ab^2}}+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$

$$(a-b)^3=(a-b)^2.(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=$$
$$=a^3-\underline{a^2b}-\underline{2a^2b}+\underline{\underline{2ab^2}}+\underline{\underline{ab^2}}-b^3=$$
$$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Այդ ֆորմուլների կազմելը պարզ է․ օգտվելով գումարի և տարբերության քառակուսիների արդեն հայտնի ֆորմուլներից $(a^2 \pm 2ab+b^2)$, բազմապատկում ենք այդ արտահայտությունները համապատասխանաբար

$a+b$-ով և $a-b$-ով, վորից հետո միացնում ենք արտադրյալի նման անդամները։ Այսպես, ուրեմն,

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Այսպես, յերկանդամի խորանարդը հավասար է առաջին անդամի խորանարդի, առաջին անդամի քառակուսու յեվ յերկրորդ անդամի յեռապատիկ արտադրյալի, առաջին անդամի յեվ յերկրորդ անդամի քառակուսու յեռապատիկ արտադրյալի յեվ յերկրորդ անդամի խորանարդի հանրահաշվական գումարին։

Գումարի խորանարդի մեջ բոլոր անդամները դրական են, տարբերության խորանարդի մեջ հանելու կենտ աստիճաններ պարունակող անդամները բացասական են։

Արտադրյալի անդամներից յուրաքանչյուրը կազմված է յերեք տառային արտադրիչներից, այսինքն յերրորդ չափման ֆորմուլ է։

Յեթե a*-ն և* b*-ն հատվածների յերկարություններ են, ապա* $(a+b)^3$ *արտահայտում է այն խորանարդի ծավալը, վորի կողը հավասար է տվյալ հատվածների գումարին,* $(a-b)^3$ *արտահայտում է այն խորանարդի ծավալը, վորի կողը հավասար է նույն հատվածների տարբերությանը։*

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.—*Խորանարդ աստիճանի բարձրացրեք.*

1. $(a+1)^3$; $(1-k)^3$; $(3a+2)^3$.
2. $(a-5)^3$; $(2-7d)^3$; $(3a-4b)^3$.
3. $(a^2b+ab^2)^3$; $(a^2-10)^3$; $(ab+10c)^3$.
4. $(x^3-y^3)^3$; $(4xy^2+3x^2y)^3$; $(5n^2-9n^3)^3$.
5. $\left(\frac{a}{2}+\frac{\ }{3}\right)^3$; $\left(\frac{2x}{3}-3y\right)^3$; $\left(2a+\frac{1}{2}b^2\right)^3$.
6. $\left(3a^2+0{,}1\right)^3$; $\left(0{,}3a^4-b^5\right)^3$; $\left(1{,}2x^2-0{,}5\right)^3$.
7. $\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{a}\right)^3$; $\left(0{,}5a+0{,}2b\right)^3$; $\left(\frac{2}{3}m^2-\frac{3}{4}n^2\right)^3$.
8. $\left(\frac{3}{4}n^2+\frac{2}{3}m^2\right)^3$; $\left(0{,}4x-0{,}5y\right)^3$; $\left(\frac{1}{2}xy-0{,}2\right)^3$.
9. $\left(\frac{2}{5}a^2-0{,}4b^2\right)^3$; $\left(0{,}5+\frac{3}{4}ab\right)^3$; $\left(0{,}6x^2y-\frac{1}{4}xy^2\right)^3$.
10. $\left(a^{m+2}+a^{m-1}\right)^3$ $\left(a^{m+1}-a^{m-2}\right)^3$.

11. *Գործադրեք վերը բերված ֆորմուլները հետևյալ թվերի խորանարդները հաշվելու համար.* ***12; 104; 1,3; 0,99.***

12. *Յերկու խորանարդների կողերն են՝* $a+b$ *և* $a-b$. *վորոշեցեք այդ խորանարդների ծավալների տարբերությունը։*

13. *Յերկու խորանարդներից մեկի կողը 1-ով ավելի յե* a *հատվածից, իսկ մյուսինը նույնքանով պակաս է* a*-ից։ Վորոշեցեք այդ խորանարդների ծավալների տարբերությունը։*

Պարզ ձև տվեք հետևյալ արտահայտություններին.

14. $[(2a+b)^2-(a-b)^2]^3$,   15. $\dfrac{ax+by}{a^3x^3+3a^2bx^2y+3ab^2xy^2+b^3y^3}$։

16. $\dfrac{(x+y)^3-(x^3+y^3)}{3xy}$,   17. $\dfrac{a^2-b^2}{a^3-3a^2b+3ab^2\ \ b^3}$։

18. $\dfrac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{x^2+2xy+y^2}$,   19. $\dfrac{4a^2-12ab+9b^2}{8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3}$։

20. *Կազմեցեք* $(a+b+c)^3$ *յեռանդամի խորանարդի ֆորմուլը, վերածելով յեռանդամը յերկու գումարելիների։*

§ 3. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԻ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԻ ՎՐԱ

Յեթե բաժանելին և բաժանարարն արտադրիչների վերածելու դեպքում պարզվում է, վոր բաժանարարի բոլոր արտադրիչները պարունակվում են բաժանելիի մեջ, ապա մի բազմանդամի բաժանումը մյուսի վրա կատարվում է ամբողջությամբ։

Կամ միայն բաժանելին, կամ բաժանելին և բաժանարարն արտադրիչների վերածելով կատարեցեք հետևյալ բաժանումները.

21. $(a^2-b^2):(a+b)$։   22. $(a^2-1):(a-1)$։
23. $(a^2+6a+9):(a+3)$։   24. $(a^2-2a+1):(a-1)$։
25. $(a^4-2a^2b^2+b^4):(a^2-b^2)$։   26. $(a^3+2a^2b+ab^2):(a^2+ab)$։
27. $(x^3-x):(x^2+x)$։   28. $(y^5-y^3):(y^3-y^2)$։
29. $(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3):(a^2+2ab+b^2)$։
30. $(a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6):(a^4-2a^2b^2+b^4)$։

Յերբեմն բազմանդամը բազմանդամի վրա բաժանելու համար օգտվում են ուրիշ յեղանակով, վորը նման է բազմանիշ թվերի բաժանման յեղանակին. բազմանիշ թվերի բաժանման դեպքում քանորդի թվանշանները գտնում են հաջորդաբար. նույն ձևով բազմանդամների բաժանման ժամանակ քանորդի անդամները վորոշում են հաջորդաբար։

Որինակ՝ պահանջվում է a^3+5a^2+2a-8 *բազմանդամը բաժանել* $a+2$ *յերկանդամի վրա։*

Մենք գիտենք, վոր յերկու բազմանդամների արտադրյալը հավասար է մեկի և մյուսի բոլոր անդամների արտադրյալների հանրահաշվական գումարին, ապա a^3+5a^2+2a-8 *բաժանելին պետք է լինի* $a+2$ *բաժանարարի և վորոնվող քանորդի բոլոր անդամների արտադրյալների հանրահաշվական գումարը և բաժանելիի առաջին անդամը, այսինքն* a^3*-ը պետք է լինի բաժանարարի առաջին անդամի, այսինքն* a*-ի և քանորդի առաջին անդամի արտադրյալը։ Հետևապես քանորդի առաջին անդամը գտնելու համար պետք է բաժանելիի առաջին անդամը բաժանել բաժանարարի առաջին անդամի վրա։ Կստանանք.* $a^3:a=a^2$. *կազմելով բաժանարարի և քանորդի գտած առաջին անդամի արտադրյալը, կստանանք.*

$$(a+2)\cdot a^2=a^3+2a^2։$$

Յեթե բաժանելիից հանենք այդ արտադրյալը, ապա մնացորդը կպարունակի իր մեջ բաժանարարի և քանորդի, բացի առաջինից մնացած անդամների արտադրյալը։ Կստանանք՝

$$(a^3+5a^2+2a-8)-(a^3+2a^2)=3a^2+2a-8.$$

Այս մնացորդի առաջին անդամը պետք է լինի բաժանարարի առաջին անդամի, այսինքն a-ի և քանորդի յերկրորդ անդամի արտադրյալը։ Ուստի քանորդի յերկրորդ անդամը գտնելու համար պետք է մնացորդի առաջին անդամը, այսինքն $3a^2$, բաժանել a-ի վրա։

Գտնում ենք, վոր քանորդի յերկրորդ անդամը հավասար է $3a$-ի։ Բազմապատկելով բաժանարարը $3a$-ով, ստանում ենք՝ $3a^2+6a$ և այդ արտադրյալը հանելով մնացորդից, կստանանք՝

$$(3a^2+2a-8)-(3a^2+6a)=-4a-8.$$

Այդ յերկրորդ մնացորդը պետք է պարունակի իր մեջ բաժանարարի և քանորդի, բացի գտած առաջին յերկուսից, մնացած անդամների արտադրյալը. քանորդի հետևյալ անդամը գտնում ենք նույնպես բաժանելով մնացորդի առաջին անդամը բաժանարարի առաջին անդամի վրա և ստանում՝

$$(-4a):a=-4.$$

Բազմապատկելով բաժանարարը քանորդի գտած նոր անդամով, կստանանք՝

$$(a+2)\cdot(-4)=-4a-8.$$

Հանենք այդ արտադրյալը մնացորդից.

$$(-4a-8)-(-4a-8)=0.$$

Այսպիսով բաժանումը վերջանում է։

Բազմանդամի բաժանումը բազմանդամի վրա դասավորում են այսպես.

$$\begin{array}{rl|l}
- & a^3+5a^2+2a-8 & a+2 \\
 & \mp a^3\mp 2a^2 & \overline{a^2+3a-4} \\ \hline
- & 3a^2+2a-8 & \\
 & \mp 3a^2\mp 6a & \\ \hline
- & -4a-8 & \\
 & \pm 4a\pm 8 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

Յեթե բաժանելիի անդամների միջև պակասում են վորևէ միջանկյալ աստիճաններ այն տառի, վորի աստիճանների կարգով դասավորված է բազմանդամը, ապա միջանկյալ անդամների համար հարմար է բաց թողնել ազատ տեղեր. որինակ՝

$$(2a^4-5a^3+13a-24):(a^2-2a+3),$$

դասավորում ենք այսպես.

$$\begin{array}{rl|l}
- & 2a^4-5a^3\qquad+12a-24 & a^2-2a+3 \\
 & \mp 2a^4\pm 4a^3\mp 6a^2 & \overline{2a^2-a-8} \\ \hline
- & -a^3-6a^2+13a-24 & \\
 & \pm a^3\mp 2a^2\pm 3a & \\ \hline
- & -8a^2+16a-24 & \\
 & \pm 8a^2\mp 16a\pm 24 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

Բաժանելիի և բաժանարարի անդամները կարելի յե նաև դասավորել աստիճանացույցերի աճման կարգով և վորոշել քանորդի անդամները, սկսելով փոքրից. որինակ՝

$$(13a+2a^4-5a^3-24):(3-2a+a^2),$$

դասավորում ենք այսպես.

$$\begin{array}{r|l}
-24+13a\quad -5a^3+2a^4 & 3-2a+a^2 \\ \cline{2-2}
\pm 24\mp 16a\pm 8a^2 \qquad\qquad & -8-a+2a \\ \cline{1-1}
-3a+8a^2-5a^3+2a^4 & \\
\pm 3a\mp 2a^2\pm a^3 \qquad & \\ \cline{1-1}
6a^2-4a^3+2a^4 & \\
\mp 6a^2\pm 4a^3\mp 2a^4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Յեթե բաժանարարի և քանորդի հաջորդական անդամների արտադրյալների հանման դեպքում ստացվի մի մնացորդ, վորի առաջին անդամն ամբողջությամբ չբաժանվի բաժանարարի առաջին անդամի վրա, ապա քանորդը չի արտահայտվիլ ամբողջ բազմանդամով, և բաժանումը կդադարի. Որինակ՝

$$\begin{array}{r|l}
a^3+8a^2+3a+5 & a^2+a-1 \\ \cline{2-2}
\mp a^3\mp a^2\quad \pm a \qquad & a+7 \\ \cline{1-1}
7a^2+4a+5 & \\
\mp 7a^2\mp 7a\pm 7 & \\ \cline{1-1}
-3a+12 &
\end{array}$$

Մնացորդ ստացանք $-3a+12$. քանորդը կարելի յե ձևակերպել այսպես.

$$a+7+\frac{-3a+12}{a^2+a-1}.$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.—Կատարել հետևյալ բաժանումները.

31. $(a^2+9a+14):(a+2)$. 32. $(a^2-8a+15):(a-3)$.
33. $(a^3+5a+5a^2+4):(a+4)$. 34. $(6x^3-11x+x^2+6):(3x-2)$.
35. $(2x^3-2x+3x^2-3):(3+2x)$. 36. $(2x-2x^2+x^4-1):(x-1)$.
37. $(a^3-a^2-a-2):(a^2+a+1)$. 38. $(x^3-2x+2x^2+3):(x^2+1-x)$.
39. $(a^4+8a-3a^3-24):(4-2a+a^2)$.
40. $(4a^2+a^4-4a^3-9):(-2a+3+a^2)$.
41. $(2a^3+6ab^2-15b^3-5a^2b):(2a-5b)$.
42. $(6a^2b+9a^3-6ab^2-4b^3):(3a+2b)$.
43. $(a^3+a^3b+19ab^3-15b^4-8a^2b^2):(a^2+3ab-5b^2)$.
44. $(1+15x^2+15x^4+x^6-6x-20x^3-6x^5):(3x^2-x^3-3x+1)$.

Հետևյալ որինակներում բաժանումը կատարվում ե մնացորդով։ Նարունակեք բաժանումը մինչև քանորդում մնացորդ ստանալը և ստուգեցեք այդ մնացորդով բաժանումները.

45. $(a^2+5a+9):(a+3)+10x$, 46. $(a^3+a^2+a+2):(a+1)$,

47. $(a^3+3a^2+3a+4):(a^2+2a+1)$,

48. $(3x^4-8x^3-10x^2+10x-2):(3x^2-2x+1)$,

49. $(3x^4+8x^3+20x^2+15x+7):(3x^2+2x+1)$,

50. $(1-4x-4x^2+15x^3-6x^4+x^5):(1-5x+3x^2+3x^3)$,

§ 4. ԽՈՐԱՆԱՐԴՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐԸ ՅԵՎ ՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Բազմանդամը բազմանդամի վրա բաժանման ցույց տված յեղանակը գործադրենք յերկու թվերի խորանարդների գումարը նույն թվերի գումարի վրա բաժանելու և յերկու թվերի խորանարդների տարբերությունը նույն թվերի տարբերության վրա բաժանելու նկատմամբ։

Բաժանումը պատկերանում է հետևյալ ձևով.

$$
\begin{array}{r|l}
a^3 \qquad\qquad +b^3 & a+b \\ \hline
\mp a^3 \mp a^2b \qquad\quad & a^2-ab+b^2 \\ \hline
-a^2b+b^3 & \\
\pm a^2b \pm ab^2 & \\ \hline
ab^2+b^3 & \\
\mp ab^2 \mp b^3 & \\ \hline
0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
a^3 \qquad\qquad -b^3 & a-b \\ \hline
\mp a^3 \pm a^2b \qquad\quad & a^2+ab+b^2 \\ \hline
a^2b-b^3 & \\
\mp a^2b \pm ab^2 & \\ \hline
ab^2-b^3 & \\
\mp ab^2 \pm b^3 & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

Այսպես, **1) յերկու թվերի խորանարդների գումարն ամբողջությամբ բաժանվում է նույն թվերի գումարի վրա, բացի դրանից քանորդում ստացվում է թվերի քառակուսիների գումարը, հանած նրանց արտադրյալը.**

2) յերկու թվերի խորանարդների տարբերությունն ամբողջությամբ բաժանվում է նույն թվերի տարբերության վրա, բացի դրանից քանորդում ստացվում է թվերի քառակուսիների գումարը, ավելացրած նրանց արտադրյալը։

Թվային օրինակներով ստուգեցեք խորանարդների գումարի և տարբերության անմնացորդ բաժանումը, վերցնելով, օրինակ, $a=5$ *և* $b=2$ *կամ* $a=10$ *և* $b=3$։

Որովհետև բաժանելին հավասար է բաժանարարի և քանորդի արտադրյալին, ապա ստացված հետևանքները կարելի յե դասավորել վերլուծման հետևյալ ֆորմուլների ձևով.

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)։$$

Ստուգեցեք այդ ֆորմուլները բազմապատկման միջոցով։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.— Գտեք հետևյալ արտահայտությունների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը.

51. 1) a^3-1 և a^2-a․ 2) a^3+1 և a^3+a^2․

52. 1) a^3-8 և a^3+2a^2+4a․ 2) a^3+8 և $a^2b-2ab+4b$։

53. 1) x^3+y^3 և x^2-xy+y^2․ 2) x^3-1 և x^2+x+1․

Կրճատեք հետևյալ կոտորակները.

54. 1) $\frac{a^3-a^2}{a^3-1}$; 2) $\frac{x^3+1}{x^3+x^2}$, 55. 1) $\frac{a^3+1}{a^3+3a^2+3a+1}$; 2) $\frac{4a^2-9b^2}{8a^3-27b^3}$,

56. 1) $\frac{x^3-a^3}{x^3+ax^3+a^3x}$; 2) $\frac{x^2-3x+9}{x^3+27}$, 57. 1) $\frac{b^3-8}{b^3-6b^2+12b-8}$; 2) $\frac{25x^2-y^2}{125x^3+y^3}$,

Կատարեք ցույց տված գործողությունները հետևյալ կոտորակների հետ.

58. $\frac{a^2-2ab}{a^3-b^3}+\frac{b}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{a-b}$, 59. $\frac{a-b}{a^3+b^3}\cdot\frac{a+b}{a^3-b^3}$։

60. $\left(1-\frac{x^3}{x^3+y^3}\right):\left(1-\frac{x^3-xy}{x^2-xy+y^2}\right)$, 61. $\left(\frac{x}{x^3}+\frac{x}{y^3}\right):\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)$,

Վճռել հետևյալ հավասարումները.

62. $\frac{2}{x-1}-\frac{13}{x^2+x+1}=\frac{x-3}{x^3-1}$, 63. $a^2(a-bx)=b^2(ax-b)$,

64. $\frac{1-\frac{x}{a}}{1+\frac{x}{a}}=\frac{2-\frac{3x}{a}}{2-\frac{x}{a}}$։ 65. $\frac{4a}{x}-\frac{3a}{x-a}=\frac{x-5a}{x^2-a^2}$,

66. $\frac{1}{x-12}-\frac{1}{x-10}=\frac{1}{x-8}-\frac{1}{x+8}$, 67. $\frac{a\sqrt{c}}{x}=\frac{x}{b\sqrt{c}}$,

Վճռել հավասարումների հետևյալ սիստեմները.

68. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{5}{6}$; $\frac{a}{x}+\frac{c}{z}=\frac{3}{4}$; $\frac{d}{y}+\frac{c}{z}=\frac{7}{12}$,

69. $a(x+y)+b(x-y)=a^2+b^2$; $(a-b)x=(a+b)y$․

70. $\frac{x}{b}-\frac{2y}{a}=\frac{a^2+6b^2}{ab}$; $x-y=5b$․

71. $(a-b)x+(a+b)y=2a^2$; $x\ \ y=2ab$․

72. $a(x+y-3)=y-1$; $(a+1)x+ay=3a+1$։

73. $\frac{x}{a+b}-\frac{y}{a-b}=1$; $(a+b)x-2(a-b)y=8ab$․

74. Գտնել այն թիվը, վորը $3\frac{3}{4}$-ով մեծ է նույն թվի քառակուսի արմատից։

75. Գտնել այն թիվը, վորը $\frac{5}{6}$-ով մեծ է իր հակադարձ մեծությունից։

76. Յերկու թվերի միջին թվաբանականը հավասար է 34-ի, իսկ նրանց միջին համեմատականը հավասար է 30-ի։ Գտեք այդ թվերը։

77. Երկու թվերի տարբերությունը հավասար է 2-ի, իսկ նրանց խորանարդների տարբերությունը հավասար է 218-ի։ Գտեք այդ թվերը։

78. Որոշել այն կոտորակը, որը բազմապատկած լինելով իր լրացումով մինչև միավորը, արտադրյալում տալիս է $\frac{6}{25}$։

79. Որոշել յերկու թվերի հարաբերությունը, յեթե նրանց միջին թվաբանականի և միջին յերկրաչափականի հարաբերությունը հավասար է $1\frac{1}{4}$-ի։

80. Որոշել այն քառակուսու կողմը, որը հավասարամեծ է R շառավիղ ունեցող շրջանին ներգծած ուղղանկյանը, յեթե այդ ուղղանկյան կողմերից մեկը ձգում է 60^0-ի աղեղ։

81. a հիմք և h բարձրություն ունեցող յեռանկյան մեջ ներգծած է մի քառակուսի, որի յերկու գագաթները գտնվում են տված հիմքի վրա, իսկ մնացած յերկուսը — յեռանկյան մյուս կողմերի վրա։ Որոշեցեք այդ քառակուսու կողմը և մակերեսը։

82. a կողմ և 60^0 ի սուր անկյուն ունեցող ռոմբի մեջ ներգծած է քառակուսի։ Որոշել նրա կողմը և մակերեսը։

83. Վարձել են յերկու բանվոր զանազան աշխատավարձով։ Առաջինը ստացավ 45 ռուբ., իսկ յերկրորդը, 6 օր առաջինից ավելի աշխատելով, ստացավ 80 ռուբ.։ Յեթե առաջին բանվորն աշխատեր այնքան օր, որքան յերկրորդը, իսկ յերկրորդն այնքան օր, որքան առաջինը, ապա նրանք կստանային հավասար աշխատավարձ։ Քանի՞ օր բանեց յուրաքանչյուր բանվորը։

84. 36 m տարածության վրա կառքի առջևի անիվը 6 անգամ ավելի յե պտտվում, քան յետևինը։ Յեթե յուրաքանչյուր անիվի շրջապատը մեծացնենք 1 m-ով, ապա նույն տարածության վրա առջևի անիվը միայն 3 անգամ ավելի կպտտվի, քան յետևինը։ Ի՞նչ մեծության է յուրաքանչյուր անիվի շրջապատը։

85. AB հատվածը, որի յերկարությունը հավասար է l-ի, կազմում է ընդհանուր բարձրություն յերկու հավասարասրուն յեռանկյունների, որոնց հիմքերը հավասար են a և b և անցնում են համապատասխանաբար A և B կետերով։ Որոշեցեք այդ յեռանկյունների սրունքների հատման կետերի հեռավորությունը միմյանցից։

ԳԼՈՒԽ II

ԻՌՌԱՑԻՈՆԱԼ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§ 5. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒՄՆԵՐ

Հանրահաշվական այն արտահայտությունները, վորոնք իրենց մեջ չեն պարունակում արմատատակ տառեր, կոչվում են ռացիոնալ։

Հանրահաշվական այն արտահայտությունները, վորոնք իրենց մեջ պարունակում են արմատատակ տառեր, կոչվում են իռռացիոնալ *այդ նույն տառերի վերաբերմամբ։*

Օրինակ՝ $a + x$ *ռացիոնալ արտահայտություն է։*

$\sqrt{a} + x$ *ռացիոնալ է* x-*ի և իռռացիոնալ է* a-*ի վերաբերմամբ։*

$\sqrt{a} + \sqrt{x}$; $x\sqrt[n]{x^p}$ *իռռացիոնալ արտահայտություններ են։*

Արմատների հետ գործողություններ կատարելիս նկատի կունենանք միայն նրանց թվաբանական *նշանակությունները։*

Իռռացիոնալ արտահայտությունների ձևափոխումներ

1. Արտադրիչը դուրս բերել արմատի տակից յեվ ներս տանել արմատի տակ։

Յերբ արմատատակ քանակությունը մի այնպիսի արտադրյալ է, վորի արտադրիչների մի մասից հնարավոր է արմատ հանել, ապա այդպիսի իռռացիոնալ արտահայտություններին տալիս են պարզ ձև, օգտագործելով արտադրյալից (կոտորակի և աստիճանի) արմատ հանելու կանոնը. օրինակ՝

$$1)\ \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$2)\ \sqrt[3]{a^5} = \sqrt[3]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a} = a \cdot \sqrt[3]{a^2}$$

$$3)\ \sqrt[m]{x^{2m+3}} = \sqrt[m]{x^{2m} \cdot x^3} = \sqrt[m]{x^{2m}} \cdot \sqrt[m]{x^3} = x \cdot \sqrt[m]{x^3}.$$

Այսպես, ուրեմն, վորեվե արտադրիչ արմատի տակից դուրս բերելու համար պետք է այդ արտադրիչի ցուցիչը բաժանել արմատացուցչի վրա։

Հակառակը, արմատի առաջ գրած ամեն մի արտադրիչ կարելի յե արմատի տակ տանել, վորը կատարելու համար բավական է միայն նույն արտադրիչն արմատի ցուցչով գրել արմատի տակ *(հիմնվելով* $a = \sqrt[n]{a^n}$ *նույնության վրա)։*

Օրինակ.

1) $3\sqrt{5}=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{45}$

2) $a\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^3\cdot a}=\sqrt[3]{a^4}$

3) $x\sqrt[n]{x^p}=\sqrt[n]{x^n}\cdot\sqrt[n]{x^p}=\sqrt[n]{x^n\cdot x^p}=\sqrt[n]{x^{n+p}}$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Դուրս բերեք արտադրիչն արմատի տակից.

86. $\sqrt{12}$ $\quad\sqrt{18}$ $\quad\sqrt{50}$ $\quad\sqrt{72}$ $\quad\sqrt{98}$

87. $\sqrt{200}$ $\quad\sqrt[3]{24}$ $\quad\sqrt[4]{243}$ $\quad\sqrt{288}$ $\quad\sqrt[3]{-40}$

88. $\sqrt{1000}$ $\quad\sqrt[4]{32}$ $\quad\sqrt[3]{-81}$ $\quad\sqrt[3]{-625}$ $\quad\sqrt[5]{64}$

89. $2\sqrt{405}$ $\quad\frac{3}{4}\sqrt[3]{192}$ $\quad\frac{2}{3}\sqrt[4]{405}$ $\quad\frac{3}{2}\sqrt[5]{352}$ $\quad1\frac{3}{4}\sqrt{1536}$

90. $\sqrt{a^3}$ $\quad\sqrt{x^5y}$ $\quad\sqrt{3mn^4}$ $\quad\sqrt[3]{a^6b^4}$ $\quad\sqrt[4]{a^7c^4}$

91. $\sqrt{8ab^6}$ $\quad\sqrt{45xy^3}$ $\quad\sqrt{63m^3n^6}$ $\quad\sqrt[3]{-x^5y^2}$ $\quad\sqrt[3]{-16m^2n^6}$

92. $\sqrt[4]{a^5}$ $\quad\sqrt[5]{-x^7y^{10}}$ $\quad5\sqrt{\frac{a^4}{50}}$ $\quad a\sqrt{\frac{0{,}45c}{a^2b^3}}$ $\quad a^3\sqrt[3]{\frac{-0{,}54z}{a^9c^6}}$

93. $\sqrt[3]{\frac{-0{,}729m}{n^4}}$ $\quad\sqrt[m]{x^{m+2}y^{m+1}}$ $\quad\sqrt[3]{40(a+b)^3}$ $\quad\sqrt{\frac{a}{b^2}-\frac{1}{b}}$ $\quad\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^3}-\frac{1}{x}}$

94. $\sqrt{\frac{(a^2-2ab+b^2)c}{25x^2}}$ $\quad\sqrt{\frac{20z}{x^2+2xy+y^2}}$ $\quad x\sqrt[3]{\frac{y^3}{x^3}-\frac{y^5}{x^3}}$ $\quad\frac{3}{2a}\sqrt{4a^2-\frac{8a^3b^2}{9}}$

$\sqrt[p+q]{x^{2p+q}y^{2q+p}z^{p^2-q^2}}$

Արտադրիչը տարեք արմատի տակ.

95. $2\sqrt{3}$ $\quad5\sqrt{2}$ $\quad6\sqrt{7}$ $\quad7\sqrt{10}$ $\quad5\sqrt{5}$

96. $3\sqrt[4]{2}$ $\quad2\sqrt[3]{11}$ $\quad5\sqrt{a}$ $\quad a\sqrt{5}$ $\quad m\sqrt[3]{7}$

97. $\sqrt[3]{x}$ $\quad3x\sqrt{a}$ $\quad2a\sqrt{x}$ $\quad m\sqrt[n]{a}$ $\quad-n\sqrt{a}$

98. $x\sqrt[4]{x^3}$ $\quad(x-1)\sqrt[3]{(x+1)}$ $\quad\frac{2a}{3b}\sqrt[3]{\frac{9b^2}{4a^2}}$ $\quad\frac{1}{x-y}\sqrt{x^2-y^2}$ $\quad\frac{x}{y}\sqrt[7]{\frac{y^5}{x^5}}$

99. $2ab^m\sqrt[n]{3a^m b^3}$ $\quad 2a^n b^{-3}\sqrt[3]{5a^{-n}b^3}$ $\quad (m+n)\sqrt{\frac{1}{m^2-n^2}}$

$$\frac{1}{m-n}\sqrt{m^2-n^2} \qquad \frac{a+b}{a-b}\sqrt[n]{\frac{(a-b)^{k-1}}{(a+b)^{k+1}}}$$

2. Արմատացույցերի կրճատումը յեվ արմատները մի ցուցչի բերելը

Այս ձևափոխումները բխում են արմատի հետևյալ հատկությունից.

Արմատի մեծությունը չի փոխվի, յերբ արմատացույցը յեվ արմատատակ քանակության ցուցիչը մեծացնենք նույնքան անգամ:

Յեվ հիրավի. յենթադրենք տրված է հետևյալ իռացիոնալ արտահայտությունը.

$$\sqrt[n]{a^m}$$

և փորձե p *քանակություն. պահանջվում է ապացուցել, որ*

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Վորպեսզի համոզվենք, թե ճիշտ է այս (1) հավասարությունը, բարձրացնենք նրա աջ մասը np *աստիճանի.*

$$\left(\sqrt[np]{a^{mp}}\right)^{np}=a^{mp} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)\ (\text{ինչու})$$

Այժմ բարձրացնենք նույն հավասարության ձախ մասը դարձյալ np *աստիճանի.*

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{np}$$

Աստիճանների հետ գործողություններ կատարելու կանոնների համաձայն այդ համարը և հաջորդաբար նախ n *և ապա* p *աստիճանի բարձրացնելուն, այսինքն*

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{np}=\left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n}\right]^{p}$$

Բայց միջակ փակագծի միջի արտահայտությունից ստացվում է a^m *(ինչու), ուստի*

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{np}=\left(a^m\right)^{p}=a^{mp} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Բաղդատելով (2) և (3) հետևանքները, համոզվում ենք, վոր (1) հավասարությունը ճիշտ է։

Այդ պատճառով, օրինակ՝

1) $\sqrt{a}=\sqrt[4]{a^2}=\sqrt[6]{a^3}$

2) $\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[9]{x^6}=\sqrt[12]{x^8}=\sqrt[15]{x^{10}}$ *և այլն։*

(1) հավասարության հակառակ դասավորումից ստացվում է

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$$

այսինքն, յերբ արմատացուցիչը յեվ արմատատակ արտահայտության ցուցիչն ունեն ընդհանուր արտադրիչ, կարելի յե այդ արտադրիչով կրճատել արմատի յեվ արմատատակ քանակության ցուցիչները. օրինակ՝

$$1)\ \sqrt[4]{a^2}=\sqrt{a};\ \sqrt[6]{x^9}=\sqrt{x^3}=x\sqrt{x}$$

$$2)\ \sqrt[8]{a^2}=\sqrt[4]{a};\ \sqrt[3n]{x^{6m}}=\sqrt[n]{x^{2m}};\ \sqrt[5n]{a^{3n}}=\sqrt[5]{a^3}$$

$$3)\ \sqrt[4]{a^2b^6c^8}=\sqrt{ab^3c^4}=bc^2\sqrt{ab}$$

Տարբեր ցուցիչներ ունեցող արմատները կարելի յե բերել մի ցուցչի, վորի համար հարկավոր է.

1) Գտնել նրանց ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը, վորը յեվ կլինի ընդհանուր ցուցիչ, յեվ 2) արմատատակ արտահայտություններից յուրաքանչյուրը բարձրացնել աստիճան այն թվով, վորն ստացվում է ընդհանուր ցուցիչը համապատասխան արմատի ցուցչի վրա բաժանելուց *(այսինքն համապատասխան լրացուցիչ արտադրիչի վրա), օրինակ՝*

$$\sqrt[3]{a^2}\ \text{և}\ \sqrt[4]{a}$$

Բերելով ընդհանուր ցուցչի, կստանանք

$$\sqrt[3\cdot4]{(a^2)^4}\ \text{և}\ \sqrt[4\cdot3]{(a)^3}$$

այսինքն

$$\sqrt[12]{a^8}\ \text{և}\ \sqrt[12]{a^3}$$

Նույն ձևով յեթե վերցնենք

$$\sqrt{x},\ \sqrt[3]{x^2}\ \text{և}\ \sqrt[5]{x^3}$$

կստանանք

$$\sqrt[2\cdot15]{(x)^{15}},\ \sqrt[3\cdot10]{(x^2)^{10}}\ \text{և}\ \sqrt[5\cdot6]{(x^3)^6}$$

այսինքն

$$\sqrt[30]{x^{15}},\ \sqrt[30]{x^{20}}\ \text{և}\ \sqrt[30]{x^{18}}$$

Կրճատեցեք ցուցիչները.

100 $\sqrt[8]{a^{10}b^{6}}$, $\sqrt[10]{a^{15}b^{25}}$, $\sqrt[8]{a^{12}b^{16}}$, $\sqrt[9]{x^{12}y^{15}z^{33}}$, $\sqrt[5]{x^{5}y^{10}z^{15}}$

101. $\sqrt[4n]{a^{3n}b^{2n}}$ $\sqrt[8n]{a^{8n}b^{16n}}$ $\sqrt[mn]{a^{m}b^{2m}}$ $\sqrt[9]{27a^{3n}b^{6}}$ $\sqrt[12]{64a^{9}b^{3m}}$

102. $\sqrt[-]{a^{-8}b^{10}c^{-2}}$ $\sqrt[-6]{9a^{4}b^{-8}c^{4}}$ $\sqrt[6p]{\frac{27a^{9}b^{18}}{c^{24}}}$ $\sqrt[m]{\frac{a^{2m}b^{3m}}{c^{4m}}}$ $\sqrt[n+1]{\frac{x^{n^2-1}}{y^{n^3+1}}}$

Բերեք ընդհանուր ցուցիչների հետևյալ արմատները

103. $\sqrt{3a}$ և $\sqrt[4]{2b^{3}}$ 104. $\sqrt[5]{3a^{3}b^{2}}$ և $\sqrt[3]{2ab}$

105. $\sqrt[5]{3x^{3}y^{2}}$ և $\sqrt[3]{2xy}$ 106. $\sqrt[8]{\frac{5a}{b^{2}}}$ և $\sqrt[3]{\frac{3a^{2}}{b}}$

107. $\sqrt[12]{a^{2}b^{3}}$, $\sqrt[4]{a}$ և $\sqrt[8]{a^{3}}$ 108. $\sqrt[8]{a^{4}b^{5}}$, $\sqrt[12]{a^{7}b^{3}}$ և $\sqrt[15]{a^{10}b^{4}}$

109. $\sqrt{\frac{m}{n}}$, $\sqrt[5]{\frac{m^{3}}{n^{2}}}$ և $\sqrt[3]{\frac{m}{n^{2}}}$ 110. $\sqrt{\frac{a^{3}}{b^{2}}}$, $\sqrt[5]{\frac{x}{y^{4}}}$ և $\sqrt[3]{\frac{y}{z^{2}}}$

111. $\sqrt{a+b}$ և $\sqrt[3]{(a-b)^{2}}$ 112. $\sqrt[2n]{\frac{a+b}{x}}$, $\sqrt[6]{\frac{a}{x+y}}$ և $\sqrt[3n]{\frac{a}{bc}}$

3. Արմատատակ արտահայտության ազատելը կոտորակից կամ արմատների նորմալ ձևի վերածելը

Երբ արմատատակ քանակությունը կոտորակ է, կարելի է այն վերածել ամբողջի. դրա համար նրա հայտարարը դարձնում են աստիճան այնպիսի ցուցչով, որ հավասար լինի արմատի ցուցչին, միաժամանակ համարիչը ևս բազմապատկում են համապատասխան լրացուցիչ արտադրիչով:

Այս բոլորը կատարելուց հետո հայտարարը դուրս են բերում արմատի տակից. օրինակ՝

$$1.\quad \sqrt{\frac{5}{24}}=\sqrt{\frac{5\cdot 6}{4\cdot 6\cdot 6}}=\sqrt{\frac{30}{144}}=\sqrt{\frac{30}{12^{2}}}=\frac{1}{12}\sqrt{30}$$

$$2.\quad \sqrt[3]{\frac{x}{y^{2}}}=\sqrt[3]{\frac{x\cdot y}{y^{2}\cdot y}}=\sqrt[3]{\frac{xy}{y^{3}}}=\frac{\sqrt[3]{xy}}{y}$$

3. $\sqrt[m]{\frac{a}{b^{n}}}$ *ընդունելով* $n<m$. *ենթադրենք* $m=n+p$

այդ դեպքում

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b^n}}=\sqrt[m]{\frac{a\cdot b^p}{b^n\cdot b^p}}=\sqrt[m]{\frac{ab^p}{b^{n+p}}}=\sqrt[m]{\frac{ab^p}{b^m}}=\frac{1}{b}\sqrt{ab^p}$$

Վերածեք նորմալ ձևի.

113. *1)* $\sqrt[3]{\frac{8}{xy}}$ *2)* $a\sqrt{\frac{2ab^3}{3cd^2}}$ *3)* $\frac{2b}{c}\sqrt{\frac{7a}{4b^3c}}$ *4)* $\frac{2}{c}\sqrt[3]{c^8-c^6d^2}$

114. *1)* $x^2\sqrt{\frac{1}{x^3}-\frac{y}{x^4}}$ *2)* $ab\sqrt{\frac{a}{b^3}-\frac{1}{b^3}}$ *3)* $\sqrt{\frac{16a^{3n-1}}{9b^{3-m}}}$ *4)* $\frac{x+y}{x}\sqrt[3]{\frac{x^{13}-x^{12}y}{(x-y)^2}}$

Նման իռռացիոնալ միանդամների միացումը

Երկու կամ ավելի արմատներ կոչվում են նման, յեթե նրանց արմատների ցուցիչները յեվ արմատատակ քանակությունները նույնն են. *օրինակ՝*

$$+5m\sqrt[4]{xy^2} \text{ և } -7n\sqrt[4]{xy^2}$$

Պարզելու համար՝ արդյոք նման են տված արմատները, հարկավոր է այդ արմատները պարզ և նորմալ ձևի վերածել վերը ցույց տված (1, 2, 3) եղանակներով:

Օրինակ՝ ուզում ենք իմանալ՝ նման են արդյոք

$\sqrt{18}$, $\sqrt{128}$ և $\sqrt{32}$ *արմատները.*

Նորմալ ձևի վերածելով ստանում ենք.

$$\sqrt{18}=\sqrt{9.2}=3\sqrt{2}$$
$$\sqrt{128}=\sqrt{64.2}=8\sqrt{2}$$
$$\sqrt{32}=\sqrt{16.2}=4\sqrt{2}$$

$3\sqrt{2}$, $8\sqrt{2}$ և $4\sqrt{2}$ *պարզվեց, վոր այդ արմատները նման են:*

Նորից մի օրինակ.

$$\sqrt[5]{243\,(a+b)},\ \sqrt[5]{32(a+b)^6} \text{ և } -m\sqrt[5]{m^5\,(a+b)}$$

այս արմատները նման են, վորովհետև պարզ ձև տալուց հետո ստանում ենք.

$$3\sqrt[5]{a+b},\ 2\,(a+b)\sqrt[5]{a+b} \text{ և } -m\sqrt[5]{a+b}$$

Պարզեցեք արմատների նմանությունը.

115. $\sqrt{27}$, $\sqrt{48}$ և $\sqrt{108}$ 116. $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[3]{16}$ և $\sqrt[3]{432}$

117. $\sqrt[3]{128}$, $\sqrt[3]{686}$ և $\sqrt[3]{16}$ 118. $\sqrt{\frac{2}{5}}$, $\sqrt{\frac{2}{45}}$ և $\sqrt{\frac{5}{18}}$

119. $\sqrt{\frac{4}{3}}$, $\sqrt{12}$ և $\sqrt{\frac{1}{12}}$ 120. $\sqrt[3]{0.01}$ և $\sqrt[3]{80}$

121. $\sqrt{\frac{50}{147}}$ և $\sqrt{\frac{2}{363}}$ 122. $\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$ և $\sqrt[3]{\frac{9}{8}}$

123. $\sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{a+b}\right)^3}$, $\sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2}{a-b}}$ և $\sqrt{a^3-a^2b}$

124. $\sqrt[3]{8a^5-16a^3b^2}$, $ab\sqrt[3]{\frac{1}{a}-\frac{2b^2}{a^3}}$ և $\sqrt[3]{\frac{2}{a^2b}-\frac{1}{ab^3}}$

§ 6. ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԻՌԱՑԻՈՆԱԼ ՄԻԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՀԵՏ

1. Գումարում յեվ հանում

Նման արմատները տարբերվում են միմյանցից կամ նշաններով *կամ* գործակիցներով, *կամ, միաժամանակ, թե* նշաններով *և թե* գործակիցներով, *ուստի իռացիոնալ միանդամները գումարելու կամ հանելու համար կատարում են նման արմատների միացում, գտնելով այդպիսի միանդամների հանրահաշվական գումարը։*

Որինակ.

1) $\sqrt{75}-\sqrt{147}+\sqrt{48}-\frac{1}{5}\sqrt{300}=$

$=\sqrt{3\cdot25}-\sqrt{49\cdot3}+\sqrt{16\cdot3}-\frac{1}{5}\sqrt{100\cdot3}=$

$=5\sqrt{3}-7\sqrt{3}+4\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$

Մի որինակ էլ.

2) $\sqrt{\frac{45}{4}}-\sqrt{20}-5\sqrt{\frac{1}{18}}-\frac{1}{6}\sqrt{245}-\sqrt{\frac{49}{2}}=$

$=\frac{3}{2}\sqrt{5}-2\sqrt{5}-\frac{5}{6}\sqrt{2}-\frac{7}{6}\sqrt{5}-\frac{7}{2}\sqrt{2}=$

$=-\frac{5}{3}\sqrt{5}-\frac{13}{3}\sqrt{2}$

Կատարեցեք հետևյալ վարժությունները.

125. $2\sqrt[3]{11}-8\sqrt[5]{7}+7\sqrt[5]{7}-\sqrt[3]{11}$

126. $6\sqrt[3]{4}-2\sqrt{5}-(4\sqrt[3]{4}-5\sqrt{5})$

127. $\sqrt{275}-10\sqrt{11}-2\sqrt{99}+\sqrt{396}$

128. $2\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{60}-\sqrt{15}+\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{4}{15}}$

129. $3\sqrt[4]{a^3} - 2\sqrt[3]{a^2b} + \left(-2\sqrt[4]{a^3} + 7\sqrt[3]{a^2b}\right)$

130. $5a\sqrt[5]{b^4} - 2c\sqrt[4]{d} - \left(-5c\sqrt[4]{d} + 3a\sqrt[5]{b^4}\right)$

131. $2\sqrt[3]{x^6y} - 8x^2\sqrt[3]{64y} + 2x^2\sqrt[3]{125y}$

132. $\sqrt{x^3 - x^2y} - \sqrt{(x+y)(x^2-y^2)} - \sqrt{xy^2 - y^3}$

2. Միևնույն ցուցիչներ ունեցող արմատների բազմապատկումն ու բաժանումը

Մենք գիտենք արդեն, որ

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

(Բառերով ձևակերպեցեք այս հավասարությունը)։

Այս հավասարության հակառակ դասավորումից ստանում ենք.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a \cdot b \cdot c}$$

այսինքն, որպեսզի միևնույն ցուցիչներ ունեցող արմատները միմյանց հետ բազմապատկենք, հարկավոր է արմատատակ քանակությունները բազմապատկել յեվ ապա ստացած արտադրյալից արմատ հանել. *օրինակ՝*

1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2.8} = \sqrt{16} = 4$

2) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4.16} = \sqrt[3]{64} = 4$

3) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{5.6} = \sqrt{30}$

4) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b^2} \cdot \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{ab^2c}$

Արմատների առաջ դրած գործակիցները բազմապատկում են *միմյանց հետ (նկատի առնելով նշանների կանոնը). յեթե արմատների ցուցիչները* տարբեր են, *բերում են նրանց մի ցուցչի։*

Օրինակ.

1) $3\sqrt{\frac{5a}{b^2}} \cdot -6\sqrt{\frac{b}{25a}} = -18\sqrt{\frac{5a \cdot b}{b^2 \cdot 25a}} = -18\sqrt{\frac{1}{5b}} = \frac{18}{5b}\sqrt{5b}$

2) $\sqrt{ab} \cdot \sqrt[3]{a^2b^2} = \sqrt[6]{a^3b^3} \cdot \sqrt[6]{a^4b^4} = \sqrt[6]{a^7b^7} = ab\sqrt[6]{ab}$

3) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{x^6} \cdot \sqrt[12]{x^8} \cdot \sqrt[12]{x^9} = \sqrt[12]{x^6 . x^8 . x^9} =$

$= \sqrt[12]{x^{23}} = x\sqrt[12]{x^{11}}$

Մենք գիտենք, որ

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$ *(ինչպես արտահայտել բառերով).*

Արմատների հակառակ դասավորումից ստացվում է.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

այսինքն, **վորպեսզի միյեվնույն ցուցիչներ ունեցող արմատներից մեկը բաժանենք մյուսի վրա, հարկավոր է արմատատակ քանակություններից մեկը բաժանել մյուսի վրա յեվ այդ արմատ հանել.** *օրինակ՝*

$$1)\ \sqrt{45}:\sqrt{5}=\sqrt{\frac{45}{5}}=\sqrt{9}=3$$

$$2)\ \frac{\sqrt[3]{256}}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\frac{256}{4}}=\sqrt[3]{64}=4$$

$$3)\ \sqrt[4]{a^3b^2}:\sqrt[4]{a^2b}=\sqrt[4]{\frac{a^3b^2}{a^2b}}=\sqrt[4]{ab}$$

Արմատների առաջ գտնվող գործակիցները բաժանում են մեկը մյուսի վրա (նկատի առնելով նշանների կանոնը). յեթե արմատները ունեն **տար-բեր** *ցուցիչներ, բերում են նրանց մի ցուցչի. օրինակ՝*

$$1)\ \frac{5\sqrt[3]{a^2b}}{10\sqrt[3]{ab^2}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a^2b}{ab^2}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

$$2)\ \frac{-8\sqrt[4]{x^3y}}{4\sqrt[4]{xy^3}}=-2\sqrt[4]{\frac{x^3y}{xy^3}}=-2\sqrt[4]{\frac{x^2}{y^2}}=-2\sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$3)\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{6}}=\frac{\sqrt[6]{125}}{\sqrt[6]{36}}=\sqrt[6]{\frac{125}{36}}$$

$$4)\ \frac{\sqrt[5]{m^3n^3}}{\sqrt[3]{m^2n^2}}=\frac{\sqrt[15]{m^9n^9}}{\sqrt[15]{m^{10}n^{10}}}=\sqrt[15]{\frac{m^9n^9}{m^{10}n^{10}}}=\sqrt[15]{\frac{1}{mn}}=\frac{1}{mn}\sqrt[15]{m^{14}n^{14}}$$

Կատարեցեք հետևյալ արմատների բազմապատկումը և բաժանումը.

133. 1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$

2) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{16}$

3) $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{18}$

4) $\sqrt[5]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^2}$

5) $a^2\sqrt[3]{2x}\cdot\frac{1}{a}\sqrt[3]{4x}$

134. 1) $\frac{1}{a}\sqrt[4]{4x^2}\cdot a^3\sqrt[4]{8x}$

2) $3\sqrt{\frac{5a}{b^2}}\cdot 2\sqrt{\frac{4b^2}{5a^3}}$

3) $5\sqrt[3]{\frac{2a^4}{25x^5}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4a^5}{5x^2}}$

4) $\frac{1}{2}\sqrt[6]{32}\cdot\frac{1}{4}\sqrt[6]{128}$

5) $\frac{x^2}{a^3}\sqrt[3]{\frac{3a}{x^2}}\cdot\frac{1}{a^2x^5}\sqrt[3]{\frac{x^3}{a^4}}$

135. $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})$

136. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\overline{4})$

137. $\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[4]{a^3}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt[12]{a^5}\right)$

138. 1) $\sqrt{45}:\sqrt{5}$

2) $\sqrt[3]{625}:\sqrt[3]{5}$

3) $\dfrac{\sqrt[3]{256}}{\sqrt[3]{4}}$

4) $\sqrt{\frac{12}{35}}:\sqrt{\frac{7}{5}}$

5) $\sqrt{\frac{10}{3}}:\sqrt{\frac{3}{5}}$

139. 1) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{96}:3\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

2) $2\sqrt[3]{\frac{4}{25}}:\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{125}}$

3) $\sqrt[3]{3a^2}:\sqrt[3]{a}$

4) $\sqrt[4]{27a^3}:\sqrt[4]{\frac{a^2}{3}}$

5) $\sqrt[4]{\frac{3a^2}{2}}:\sqrt[4]{\frac{8}{27a^3}}$

140. $\left(2ab\sqrt[3]{x^2}-x\sqrt[3]{b}\right):\sqrt[3]{ba}$

141. $\left(\sqrt[4]{ax^2}-x^2\sqrt[4]{a^5x}+a\sqrt[4]{x^6}\right):\sqrt[4]{a^3x}$

142. $\left(\sqrt[3]{a^2b}-2\sqrt[3]{2ab^2}+b\sqrt[3]{4}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2b}\right)$

143. *1)* $\sqrt[5]{8}:\sqrt[3]{2}$ *2)* $\sqrt[5]{\frac{4}{5}}:2\sqrt{\frac{1}{400}}$ *3)* $\sqrt{\frac{3}{5}}:\frac{1}{3}\sqrt[6]{3\frac{3}{8}}$

144. $\left(\sqrt[4]{6}-2\sqrt{3}+\sqrt[3]{6}\right):\frac{1}{2}\sqrt{6}$

145. $\left(9\sqrt[4]{3}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{18}-5\frac{1}{2}\sqrt{3}\right):\frac{3}{4}\sqrt[6]{6}$

$\left(x+y\right):\frac{1}{3}\sqrt{x^2-y^2}$

146. $\left(\sqrt[5]{8y^3}-3\sqrt{3}\right):\left(\sqrt[5]{2y}-\sqrt{3}\right)$

147. $\left(2m\sqrt[3]{mx^2}-m\sqrt[6]{mx^3}-mx\right):\left(\sqrt[3]{m^2x}-\sqrt{mx}\right)$

3. Արմատն աստիճան բարձրացնելը

Պահանջվում է $\sqrt[n]{a}$ *բարձրացնել* m *աստիճան, յերբ* m*-ը դրական ու ամբողջ թիվ է։*

Վորովհետև $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\ldots\sqrt[n]{a}$ (m *անգամ), իսկ մենք գիտենք, վոր* $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\ldots\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{a\cdot a\ldots a}$, *վորտեղ արմատատակ* a*-ն վերցված է վորպես արտադրիչ* m *անգամ, ուստի*

$$\sqrt[n]{a\cdot a\ldots a}=\sqrt[n]{a^m},$$

այս հավասարությունը կարող ենք գրել

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m},$$

այսինքն, վորպեսզի արմատն աստիճան բարձրացնենք, հարկավոր է նույն աստիճանի բարձրացնել միայն արմատատակ քանակությունը. *օրինակ՝*

$$1)\ \left(\sqrt[3]{2}\right)^5=\sqrt[3]{2^5}=\sqrt[3]{2^3\cdot 2^2}=2\sqrt[3]{4}$$

$$2)\ \left(\sqrt[5]{4ax^2}\right)^3=\sqrt[5]{(2^2ax^2)^3}=\sqrt[5]{2^6a^3x^6}=2x\sqrt[5]{2a^3x}$$

4. Արմատից արմատ հանելը

Պահանջվում է m *աստիճանի արմատ հանել* $\sqrt[n]{a}$ *-ից։*

Ապացուցենք, վոր

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1),$$

այսինքն, վորպեսզի արմատից արմատ հանենք, հարկավոր է նրանց ցուցիչները բազմապատկել միմյանց հետ։

Բարձրացնենք յենթադրյալ հավասարության աջ մասը mn *աստիճանի, կստանանք.*

$$\left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn}=a\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)\ (\text{ինչու})։$$

Նույն հավասարության ձախ մասն էլ բարձրացնենք mn *աստիճանի, վորը համազոր է հաջորդաբար նախ* m *և ապա* n *աստիճան բարձրացնելուն.*

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}=\left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right]^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

Համեմատելով (2) և (3) հավասարությունները, համոզվում ենք, վոր (1) հավասարությունը ճիշտ է։

Օրինակ.

$$1)\ \sqrt[5]{\sqrt[3]{ax^2}}=\sqrt[15]{ax^2}$$

$$2)\ \sqrt[p]{\sqrt[q]{a^3b^2}}=\sqrt[pq]{a^3b^2}$$

$$3)\ \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2\ \ \sqrt[6]{64} = 2$$

և հիրավի, այդ կարող ենք ստուգել այսպես.

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

բերենք մի օրինակ ևս.

$$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt{\sqrt[3]{9^3}} = \sqrt{9} = 3$$

իսկ մեր դուրս բերած կանոնով

$$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3$$

Հիմնվելով իռացիոնալ միանդամների գործողությունների վերը բերած հատկությունների վրա, իռացիոնալ բազմանդամների հետ գործողությունները կատարում են ճիշտ այնպես, ինչպես այդ անում են ռացիոնալ բազմանդամների հետ. օրինակ՝

Կիրառելով բազմանդամը բազմանդամով բազմապատկելու կանոնը, գտնենք հետևյալ երկու իռացիոնալ բազմանդամների արտադրյալը.

$$\left(3\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{12} - \sqrt{6}\right) \cdot \left(2\sqrt{\frac{2}{3}} - 8\sqrt{\frac{3}{8}} + 3\sqrt{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= 3\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 3\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 8\sqrt{\frac{3}{8}} + 3\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 3\sqrt{\frac{3}{2}} -$$

$$- \sqrt{12} \cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{12} \cdot 8\sqrt{\frac{3}{8}} - \sqrt{12} \cdot 3\sqrt{\frac{3}{2}} -$$

$$- \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{6} \cdot 8\sqrt{\frac{3}{8}} - \sqrt{6} \cdot 3\sqrt{\frac{3}{2}} = 6 \cdot \frac{2}{3} -$$

$$- 24\sqrt{\frac{1}{4}} + 9 - 2\sqrt{8} + 8\sqrt{\frac{18}{4}} - 3\sqrt{18} - 2\sqrt{4} + 8\sqrt{\frac{9}{4}} -$$

$$- 3\sqrt{9} = 4 - 12 + 9 - 4\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 9\sqrt{2} - 4 + 12 - 9 = \sqrt{2}$$

Մի օրինակ ևս.

$$\frac{\sqrt[5]{8x^3} - 3\sqrt{3}}{\sqrt[5]{2x} - \sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt[5]{2x}\right)^3 - \left(\sqrt{3}\right)^3}{\sqrt[5]{2x} - \sqrt{3}}$$

Համարիչը յերկանդամի խորանարդների տարբերությունն է, իսկ հայտարարը՝ նույն յերկանդամի հիմքերի տարբերությունը. հետևապես, քանորդում կստանանք.

$$\left(\sqrt[5]{2x}\right)^2+\sqrt[5]{2x}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=\sqrt[5]{4x^2}+$$

$$+\sqrt[10]{(2x)^2}\cdot\sqrt[10]{3^5}+3=\sqrt[5]{4x^2}+\sqrt[10]{972x^2}+3$$

Կատարեցեք հետևյալ ձևափոխումները.

148. *1)* $\left(\sqrt[5]{a^2}\right)^5$

2) $\left(\sqrt[4]{b^3}\right)^2$

3) $\left(-m\sqrt[5]{m^2n}\right)^4$

4) $\left(-\frac{a^2}{3}\sqrt[6]{\frac{2}{a^2}}\right)^3$

5) $\left(\sqrt[m]{a^2x}\right)^n$

149. *1)* $\left[\sqrt[5]{(x+y)^2}\right]^4$

2) $\left[\sqrt[3]{(x-y)^2}\right]^5$

3) $\left(\sqrt[4]{\frac{a^3b^3}{a^2b^2}}\right)^3$

4) $\left[\sqrt[n]{(a^2+b^2)^m}\right]^{np}$

5) $\left[\sqrt[m]{(x^2-y^2)^n}\right]^{mp}$

150. *1)* $\left(\sqrt{5}-1\right)^3$

2) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

3) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$

4) $\left(a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\right)^2$

5) $\left(x\sqrt{y}\quad y\sqrt{x}\right)^3$

151. *1)* $\sqrt{\sqrt{256}}$

2) $\sqrt{\sqrt[3]{15625}}$

3) $\sqrt[3]{\sqrt{512}}$

4) $\sqrt[4]{20736}$

5) $\sqrt[12]{4096}$

152. *1)* $(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ *2)* $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+5\sqrt{6})^2$

153. *1)* $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$

$$2)\left(\sqrt{11+4\sqrt{7}}-\sqrt{11-4\sqrt{7}}\right)^2$$

154. $1)\ \sqrt{\frac{m}{n}\sqrt{\frac{n}{m}}}$ $\qquad 2)\ \sqrt{a\sqrt{\frac{a^2}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}}}$

§ 7 ՀԱՅՏԱՐԱՐՆ ԻՌԱՑԻՈՆԱԼՈՒԹՅՈՒՆԻՑ ԱԶԱՏԵԼՈՒ ՊԱՐԶ ԴԵՊՔԵՐ

Երբ կոտորակային արտահայտության մեջ հայտարարն իռացիոնալ է, հաշվումները պարզ դարձնելու նպատակով հայտարարը դարձնում են ռացիոնալ։

Հարկավոր է երկու դեպք տարբերել միմյանցից։

1) Հայտարարն ունի իռացիոնալ միանդամ, օրինակ՝ $\frac{a}{\sqrt{b}}$։ *Բազմապատկելով հայտարարն ու համարիչը հայտարարով, կստանանք.*

$$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b^2}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$$

այսպիսով իռացիոնալությունը հայտարարից փոխադրվում է համարիչ, որը գործնական տեսակետից ավելի հարմար է հաշվումներ անելու ժամանակ։

Օրինակ՝

$$1)\ \frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$2)\ \frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

2) Հայտարարն ունի իռացիոնալ երկանդամ. օրինակ՝

$$\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$$

Բազմապատկենք համարիչն ու հայտարարը լծորդ հայտարարով, այսինքն, երբ հայտարարը $\sqrt{b}+\sqrt{c}$ *գումարն է, բազմապատկում ենք* $\sqrt{b}-\sqrt{c}$ *տարբերությամբ և հակառակը։ Երկու դեպքում էլ հայտարարը դառնում է ռացիոնալ.*

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$$

և

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$$

Օրինակ՝

$$1)\ \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$$2)\ \frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{5(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}=\frac{5(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{7-3}=\frac{5}{4}(\sqrt{7}-\sqrt{3})$$

Ազատեցեք հետևյալ կոտորակներն իռացիոնալ հայտարարներից.

155. 1) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ 2) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ 3) $\frac{a}{\sqrt{a}}$ 4) $\frac{a}{2\sqrt{x}}$ 5) $\frac{y}{\sqrt{2y}}$

156. 1) $\frac{5}{\sqrt{3}-1}$ 2) $\frac{6}{1+\sqrt{7}}$ 3) $\frac{a}{1-\sqrt{a}}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ 5) $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$

157. 1) $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 2) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 3) $\frac{1-a}{1+\sqrt{a}}$ 4) $\frac{a+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ 5) $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

158. 1) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$ 2) $\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}$ 3) $\frac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

159. 1) $\frac{1-a}{\sqrt{1}-\sqrt{a}}$ 2) $\frac{1-b}{\sqrt{1}+\sqrt{b}}$ 3) $\frac{a}{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}}$ 4) $\frac{n}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$

§ 8. ԱԶԱՏԵԼ ԵՌԱՆԴԱՄ ՀԱՅՏԱՐԱՐԸ ԻՌԱՑԻՈՆԱԼՈՒԹՅՈՒՆԻՑ

Մի օրինակով բացատրենք այդ դեպքը.

$$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

Հայտարարը կարելի յե ընդունել որպես $\sqrt{5}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ երկանդամի գումար. ուստի տված կոտորակային արտահայտության համարիչն ու *հայտարարը բազմապատկելով նույն յերկանդամի՝ $\sqrt{5}-(\sqrt{3}\quad\sqrt{2})$ տարբերությամբ, հայտարարում կստանանք միայն մի արմատ.*

$$\frac{2[\sqrt{5}\quad(\sqrt{3}-\sqrt{2})]}{[\sqrt{5}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})]\ [\sqrt{5}-(\sqrt{3}\quad\sqrt{2})]}=$$

$$=\frac{2[\sqrt{5}-(\sqrt{3}\quad\sqrt{2})]}{5-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$$

բայց

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=3-2\sqrt{6}+2=5-2\sqrt{6}$$

հետևապես

$$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{5-\left(5-2\sqrt{6}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

Այժմ էլ համարիչն ու հայտարարը բազմապատկելով $\sqrt{6}$-ով՝ հայտարարը միանգամայն կազատվի իռացիոնալությունից.

$$\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{30}-\sqrt{18}+\sqrt{12}}{6}=$$

$$=\frac{\sqrt{30}-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$$

Ազատեցեք հայտարարն իռացիոնալությունից

160. *1)* $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ *2)* $\dfrac{1}{2-\sqrt{10}-\sqrt{2}}$

161. 1) $\dfrac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

162. 1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{6}-\sqrt{7}}$ 2) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

163. 1) $\dfrac{2+\sqrt{30}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}}$ 2) $\dfrac{60\sqrt{2}+12\sqrt{3}}{5\sqrt{6}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

164. 1) $\dfrac{15\sqrt{6}-27\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{2}-4\sqrt{3}}$ 2) $\dfrac{15\sqrt{5}+27\sqrt{2}-\sqrt{10}}{\sqrt{5}+6\sqrt{2}+2\sqrt{10}}$.

ԳԼՈՒԽ III

ԼՈԳԱՐԻԹՄՆԵՐ

§ 9. ՑՈՒՑՉԻ ԳԱՂԱՓԱՐԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄԸ

Մենք արդեն գիտենք գործողություններ կատարել այնպիսի աստիճանների հետ, վորոնք ունեն ամբողջ և դրական ցուցիչներ։ Այդ նույն կանոններին յենթարկվում են նաև բացասական, կոտորակ և զերո ցուցիչներ ունեցող աստիճանների գործողությունները։

Զերո ցուցիչով աստիճան

Մեզ հայտնի յե, վոր նույն հիմքեր ունեցող աստիճանների բաժանման ժամանակ բաժանելիի ցուցչից հանում են բաժանարարի ցուցիչն, այսինքն՝

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad \text{այն դեպքում, յերբ } m > n$$

Յեթե m-*ը հավասար լինի* n-*ին, այդ ուրեմն* a^m-*ը հավասար կլինի* a^n-*ին, իսկ յերբ բաժանելին հավասար ե լինում բաժանարարին, քանորդում ստացվում ե մեկ միավոր, այսինքն՝*

$$\frac{a^m}{a^m} = 1 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Այս նույնն աստիճանների բաժանման ձևով կստանա

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

այսինքն, կստացվի a *զերո աստիճանի։*

Բաղդատելով (1)-ը և (2)-ը, կարելի յե գրել.

$$a^0 = 1,$$

ուրեմն, ամեն մի քանակություն զերո ցուցիչով հավասար ե մեկի։

Հետևապես

$$5^0 = 1 \qquad 13^0 = 1 \qquad (0,25)^0 = 1$$

$$x^0 = 1 \qquad (a-b)^0 = 1 \qquad \left(\frac{p}{q}\right)^0 = 1 \text{ և այլն։}$$

§ 10. ԲԱՑԱՍԱԿԱՆ ՑՈՒՑԻՉՆԵՐՈՎ ԱՍՏԻՃԱՆՆԵՐ

Յենթադրենք այժմ, վոր $\frac{a^m}{a^n}$ *արտահայտության բաժանելիի ցուցիչը* *փոքր է բաժանարարի ցուցչից,* այսինքն $m < n$, *և ընդունենք, որ* $n = m + p$, *այդ դեպքում* $m - n = p$:

Դրական ցուցիչների կանոնի համաձայն

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

m-ի և n-ի վերը բերած նշանակությունները տեղը դնելով, կստանանք.

$$a^{m-n} = a^{m-(m+p)} = a^{m-m-p} = a^{-p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Մյուս կողմից էլ

$$a^n = a^{m+p} = a^m \cdot a^p \text{ (ինչու).}$$

Հետևապես

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^p}$$

Կրճատումը կատարելով՝ կստանանք.

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

բաղդատելով (1) և (2)-ը, կգտնենք, որ

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

այսինքն, ամեն մի աստիճան բացասական ցուցչով հավասար է մի կոտորակի, որի համարիչն է մեկ, իսկ հայտարարը նույն հիմքի աստիճանը՝ դրական ցուցչով:

Օրինակ՝

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$$

Մյուս կողմից

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{a^3}{a^3 . a^2} = \frac{1}{a^2}$$

Հետևապես

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

Հավասարությունն (3)-ը հակառակ դասավորելով, կստանանք.

$$\frac{1}{a^p} = a^{-p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

այսինքն, ամեն մի կոտորակ, որի համարիչն է մեկ, իսկ հայտարարը՝ դրական ցուցչով աստիճան, կարելի յե արտահայտել նույն հիմք ունեցող աստիճանով, միայն թե ցուցիչը բացասական դարձնելով, օրինակ՝

$$1.\ \frac{1}{343} = \frac{1}{7^3} = 7^{-3}$$

$$2)\ \frac{1}{x^p y^n} = x^{-p} y^{-n} \text{ և այլն:}$$

Աստիճանների բազմապատկումը

ԱՌԱՋԻՆ ԴԵՊՔ.—Մեկի աստիճանի ցուցիչը դրական է, իսկ մյուսինը—բացասական, այսինքն՝

$$a^{p} \cdot a^{-q}$$

Ըստ սահմանման.

$$a^{-q} = \frac{1}{a^{q}};$$

Հետևապես.

$$a^{p} \cdot a^{-q} = a^{p} \cdot \frac{1}{a^{q}} = \frac{a^{p}}{a^{q}} = a^{p-q} = a^{p+(-q)}\ :$$

ՅԵՐԿՐՈՐԴ ԴԵՊՔ.—Յերկու ցուցիչներն էլ բացասական են, այսինքն՝

$$a^{-p} \cdot a^{-q}$$

Ըստ սահմանման.

$$a^{-p} = \frac{1}{a^{p}} \text{ և } a^{-q} = \frac{1}{a^{q}}$$

Հետևապես

$$a^{-p} \cdot a^{-q} = \frac{1}{a^{p}} \cdot \frac{1}{a^{q}} = \frac{1}{a^{p+q}}$$

բայց

$$\frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} \text{ (ինչու)};$$

Հետևապես

$$a^{-p} \cdot a^{-q} = a^{-(p+q)} = a^{-p-q} = a^{-p+(-q)};$$

Այսպես, ուրեմն, միևնույն հիմքեր ունեցող բացասական ցուցիչներով աստիճանները բազմապատկելիս նրանց ցուցիչները գումարում են. *որինակ՝*

$$a^{5} \cdot a^{-7} = a^{5+(-7)} = a^{5-7} = a^{-2}$$

$$a^{-3} \cdot a^{4} = a^{-3+4} = a\ ;$$

$$a^{-4} \cdot a^{-3} = a^{-4+(-3)} = a^{-4-3} = a^{-7}:$$

Աստիճանների բաժանումը

ԱՌԱՋԻՆ ԴԵՊՔ. Բաժանելիի ցուցիչը դրական է, իսկ բաժանարարի ցուցիչը՝ բացասական, այսինքն՝ $\frac{a^{p}}{a^{-q}}$

Վորովհետև

$$a^{-q} = \frac{1}{a^{q}}, \text{ ապա } \frac{a^{p}}{a^{-q}} = a^{p} : \frac{1}{a^{q}} = a^{p} \cdot a^{q} = a^{p+q} = a^{p-(-q)}:$$

ՅԵՐԿՐՈՐԴ ԴԵՊՔ. Բաժանելիի ցուցիչը բացասական է, բաժանարարի ցուցիչը՝ դրական, այսինքն՝ $\frac{a^{-p}}{a^{q}}$:

Վորովհետև

$$a^{-p}=\frac{1}{a^p},\ \text{ապա}\ \frac{a^{-p}}{a^q}=\frac{1}{a^p}:a^q=\frac{1}{a^p\,a^q}=\frac{1}{a^{p+q}}=a^{-(p+q)}=a^{-p-q}:$$

ԵՐՐՈՐԴ ԴԵՊՔ. Երկու ցուցիչներն էլ բացասական են, այսինքն.

$$\frac{a^{-p}}{a^{-q}},$$

այդ դեպքում $\frac{a^{-p}}{a^{-q}}=\frac{1}{a^p}:\frac{1}{a^q}=\frac{a^q}{a^p}=a^{q-p}=a^{-p-(-q)}$;

Հետևապես, բոլոր դեպքերում, միևնույն նիշեր ունեցող բացասական ցուցիչներով աստիճանները բաժանելիս, պետք է բաժանելիի ցուցչից հանել բաժանարարի ցուցիչը։

Օրինակ՝

$$\frac{a^5}{a^{-3}}=a^{5-(-3)}=a^{5+3}=a^8;$$

$$\frac{a^{-6}}{a^8}=a^{-6-8}=a^{-14}$$

$$\frac{a^{-7}}{a^{-4}}=a^{-7-(-4)}=a^{-7+4}=a^{-3},$$

Աստիճանն աստիճանի բարձրացնելը

Եթե աստիճանի ցուցիչներն ունեն զանազան նշաններ, ապա կարող է տեղի ունենալ երեք դեպք.

ԱՌԱՋԻՆ ԴԵՊՔ. $(a^{-p})^q$; *երկրորդ դեպք.* $(a^p)^{-q}$:

Առաջին դեպքում կունենանք.

$$(a^{-p})^q=\left(\frac{1}{a^p}\right)^q=\frac{1}{(a^p)^q}=\frac{1}{a^{pq}}=a^{-pq}=a^{(-p)\cdot q},$$

Երկրորդ դեպքում՝

$$(a^p)^{-q}=\frac{1}{(a^p)^q}=\frac{1}{a^{pq}}=a^{-pq}=a^{p\cdot(-q)}$$

ԵՐՐՈՐԴ ԴԵՊՔ. Երբ յերկու ցուցիչներն էլ բացասական են, այսինքն՝ $(a^{-p})^{-q}$:

Գտնում ենք.

$$(a^{-p})^{-q}=\frac{1}{(a^{-p})^q}=\frac{1}{a^{-pq}}=a^{+pq}=a^{(-p)\cdot(-q)}:$$

Հետևապես, բոլոր դեպքերում, աստիճանն աստիճանի բարձրացնելու համար, պետք է բազմապատկել նրանց ցուցիչներ. օրինակ՝

$$(a^{-3})^5=a^{-15};\ (a^4)^{-2}=a^{-8};\ (a^{-6})^{-3}=a^{+18},$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.—

165. *Ինչի՞ յե հավասար հետևյալ արտահայտությունը.*

$8^0 \cdot (x+y)^0 \cdot (-7)^0 \cdot (x-y)^0$,

Հաշվեցեք.

166. 1) $5^2 \cdot 5^{-2}$; 2) $16 \cdot 4^{-5}$; 3) $8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$; 4) $\frac{1}{3^{-4}}$; 5) $\frac{7^{-3}}{7^{-5}}$

167. 1) $(-1)^{-4}$; 2) $(-1)^{-5}$; 3) $a^{1-k} \cdot a^{1+k}$,

168. 1) $(a^{1-p} : a^{1+p})$; 2) $(1,4)^{-2} \cdot (0,1)^{-3}$,

169. $(2,5a^0 \cdot b^{-1}c^3) \cdot (1,5^{-2} \cdot a^{-1}b^0c^{-7})$,

170. 1) $\frac{x^{-4}y^{-3}z^{-2}}{x^{-6}y^0z^{-2}}$; 2) $\frac{a^{3-k}}{a^{k-3}}$; 3) $\frac{x^{-3}+y^{-3}}{x^{-3}-y^{-3}}$

171. 1) $(m^{-2})^{-6}$; 2) $(-a^{-3})^{-4}$ 3) $(x^{-17})^0$,

172. $\frac{3^{-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{2-\left(\frac{3}{4}\right)^2} \cdot \left(5^0-\frac{2}{7}\right)$, 173. $\frac{2\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}-2^{-1}}{3-\left(\frac{4}{3}\right)^2} \cdot \left(\frac{3}{5}-7^0\right)$,

174. $\left(1-\frac{a^{-n}-b^{-n}}{a^{-n}+b^{-n}}\right)^{-2}$, 175. $\left(1+\frac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-n}-b^{-n}}\right)^{-2}$,

176. $\left[\left(1-3^{-2}\right)^{-2}-2\right]^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0$, 177. $\left[\left(1+2^{-3}\right)^{-2}-2\right]^{-1} : \left(\frac{3}{5}\right)^{1}$,

178. $\left[\frac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-2n}-b^{-2n}} \cdot \left(\frac{1}{b^{-n}}-\frac{1}{a^{-n}}\right)\right]^{-1}$

179. $\left[\frac{a^{-2n}-b^{-2n}}{a^{-n}-b^{-n}} \cdot \left(\frac{1}{a^{-n}}+\frac{1}{b^{-n}}\right)\right]^{-1}$,

§ 11. ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ՑՈՒՑԻՉՆԵՐ

Մենք գիտենք, վոր, որինակ, $\sqrt[3]{a^6}=a^{\frac{6}{3}}=a^2$ *և առհասարակ*

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}},$$

յեթե արմատատակ աստիճանի m *ցուցիչը* բազմապատիկ է *արմատի ցուցչին։ Բայց ինչպես վարվել, յեթե տված է* $\sqrt[3]{a^2}$ *արտահայտությունը,* և, առհասարակ, $\sqrt[n]{a^m}$, յերբ m չի բաժանվում n վրա։ Յեթե հետևենք կանոնին, կարելի յե, որինակ, գրել.

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}},$$

այսինքն, կստանանք կոտորակ ցուցչով աստիճան։

Պայմանավորվենք, վոր $a^{\frac{m}{n}}$ կոտորակ ցուցչով աստիճանն արմատ է a հիմք ունեցող մի այնպիսի աստիճանից, վորի ցուցիչն է կոտորակի m համարիչը, իսկ արմատի ցուցիչն է այդ կոտորակի n հայտարարը։

Համաձայն այդ վորոշման և արմատների գործողությունների հետ կապված կանոնների, կարելի յե կոտորակ ցուցիչներով աստիճանների գործողությունների նկատմամբ ևս գործադրել ամբողջ ցուցիչներով աստիճանների գործողությունների կանոնները։

1) Արտադրյալն աստիճան բարձրացնելու համար, այդ աստիճանի բարձրացնում են արտադրիչներից յուրաքանչյուրը.

$$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}.$$

2) Կոտորակն աստիճան բարձրացնելու համար, այդ աստիճանի բարձրացնում են առանձին-առանձին համարիչը և հայտարարը.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$$

3) Միևնույն հիմքեր ունեցող աստիճանները բազմապատկելիս, ցուցիչները գումարում են.

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{np}}$$

կամ $$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

4) Միևնույն հիմքեր ունեցող աստիճանները բաժանելու դեպքում, բաժանելիի ցուցչից հանում են բաժանարարի ցուցիչը.

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}};$$

այդ պարզ յերևում է նրանից, վոր քանորդի և բաժանարարի արտադրյալը (3-րդ կետի հիման վրա) հավասար է բաժանելիին.

$$a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}}$$

5) Աստիճանն աստիճանի բարձրացնելու դեպքում, ցուցիչները բազմապատկում են.

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{p}}=\sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^{m}}\right)^{p}}=\sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}}=$$

$$=\sqrt[qn]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{qn}},$$

$$\text{կամ}\quad\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$$

6) Արմատից արմատ հանելու դեպքում, պետք է արմատատակ աստիճանի ցուցիչը բաժանել արմատի ցուցչի վրա.

$$\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}}=a^{\frac{m}{np}},$$

վորը հետևում է 5-րդ կետից, վորովհետև

$$\left(a^{\frac{m}{np}}\right)^{p}=a^{\frac{mp}{np}}=a^{\frac{m}{n}},$$

7) Յեթե արմատի աստիճանացույցը կոտորակ թիվ է, այսինքն $\sqrt[\frac{p}{q}]{a}$, ապա նրա արժեքը կարելի յե գտնել հետևյալ նկատառումներով. յենթադրենք $\sqrt[\frac{p}{q}]{a}=x$; այդ հավասարության յերկու մասերն էլ բարձրացնելով $\frac{p}{q}$ աստիճանի, կստանանք. $a=x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^{p}}$; հետևապես $a^{q}=x^{p}$ (ինչու).

Հանելով p աստիճանի արմատ, կստանանք.

$$\sqrt[p]{a^{q}}=x\quad\text{բայց}\quad\sqrt[p]{a^{q}}=a^{\frac{q}{p}};$$

$$\text{հետևապես}\ \sqrt[\frac{p}{q}]{a}=a^{\frac{q}{p}},$$

այսինքն կոտորակ ցուցիչներով արմատը մի աստիճան է, վորի կոտորակ ցուցիչն արմատի ցուցչի հակադարձ թիվն է. որինակ՝

$$\sqrt[\frac{3}{5}]{a}=a^{\frac{5}{3}},$$

Օրինակներ. 1) $(a\ b)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{4}}\ .\ b^{\frac{3}{4}}$; 2) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}$; 3) $a^{\frac{3}{4}}\ .\ a^{\frac{5}{6}} =$

$$= a^{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}} = a^{\frac{9}{12}+\frac{10}{12}} = a^{\frac{19}{12}} = \sqrt[12]{a^{19}} = a\sqrt[12]{a^7};$$

4) $a^{\frac{7}{8}} : a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{7}{8}-\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{a}$;

5) $\left(a^{\frac{5}{8}}\right)^{\frac{3}{10}} = a^{\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{10}} = a^{\frac{3}{16}} = \sqrt[16]{a^3}$;

6) $\sqrt[4]{a^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{3}{5\cdot4}} = a^{\frac{3}{20}} = \sqrt[20]{a^3}$;

7) $\sqrt[\frac{5}{7}]{a} = a^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{a^7} = a\sqrt[5]{a^2}$:

Ծանոթություն. *Բացասական աստիճաններից օգտվելը հնարավորություն է տալիս հանրահաշվական կոտորակ արտահայտությունները ձևակերպել ամբողջ արտահայտություններով, օրինակ՝*

1) $\frac{a^2}{b^2} = a^2b^{-2}$; 2) $\frac{3x^2y}{5z^3} = 3\ .\ 5^{-1}x^2yz^{-3}$:

Կոտորակ աստիճաններից օգտվելը հնարավորություն է տալիս իռռացիոնալ արտահայտությունները ձևակերպել ռացիոնալ արտահայտություններով, այսինքն առանց արմատանիշների. օրինակ՝

1) $\sqrt[5]{a^2b} = a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{1}{5}}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[4]{z^3}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{z^{\frac{3}{4}}}$:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

Հետևյալ կոտորակ արտահայտությունները ձևակերպեք ամբողջ արտահայտություններով.

180. 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{2}{5}$ 4) $\frac{3}{4}$ 5) $\frac{1}{2^3}$ 6) $\frac{1}{3^2}$ 7) $\frac{5}{7^3}$

181. 1) $\frac{1}{a^n}$ 2) $\frac{1}{x^m}$ 3) $\frac{a^m}{b^n}$ 4) $\frac{3}{x^n}$ 5) $\frac{2a}{b^m}$ 6) $\frac{3b}{4a^n}$

182. *1)* $\frac{a^5}{2b^2}$ *2)* $\frac{1}{3^2x^3}$ *3)* $\frac{1}{2^3}+\frac{1}{a^2}$ *4)* $\frac{x^m}{x^5}-\frac{y^3}{y^n}$

5) $\frac{a^2}{a^m}+\frac{b^n}{b^4}$

Հետևյալ արմատանիշները փոխարինեցեք կոտորակ ցուցիչներով։

183. *1)* $\sqrt{a}$ *2)* $\sqrt[3]{a^2}$ *3)* $\sqrt{a^3}$ *4)* $\sqrt[4]{x^5}$ *5)* $\sqrt[5]{x^4}$

184. *1)* $\sqrt[5]{a^{-3}}$ *2)* $\sqrt[4]{2^{-1}}$ *3)* $\sqrt[-3]{a^2}$ *4)* $\sqrt[-3]{x^{-3}}$

185. *1)* $\sqrt{x+1}$ *2)* $\sqrt{a^2+b^2}$ *3)* $\sqrt[k-1]{(x+y)^{k+1}}$

Կոտորակ ցուցիչները փոխարինեցեք արմատանիշներով.

186. *1)* $a^{\frac{1}{2}}$ *2)* $a^{-\frac{1}{2}}$ *3)* $x^{\frac{3}{7}}$ *4)* $x^{-\frac{2}{3}}$ *5)* $y^{-\frac{m}{n}}$

187. *1)* $2^{\frac{1}{3}}$ *2)* $3^{-\frac{1}{2}}$ *3)* $10^{\frac{3}{4}}$ *4)* $7^{-\frac{3}{5}}$ *5)* $5^{-\frac{3}{4}}$

188. *1)* $(a+b)^{\frac{2}{3}}$ *2)* $(x^2+y^2)^{-\frac{a}{b}}$ *3)* $z^{\frac{k-1}{k+1}}$

Հաշվեցեք.

189. *1)* $9^{\frac{1}{2}}$ *2)* $64^{\frac{1}{3}}$ *3)* $64^{\frac{1}{6}}$ *4)* $81^{\frac{3}{4}}$ *5)* $125^{\frac{2}{3}}$

190. *1)* $16^{-\frac{1}{2}}$ *2)* $27^{-\frac{1}{3}}$ *3)* $8^{-\frac{2}{3}}$ *4)* $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$ *5)* $\left(\frac{1}{36}\right)^{-\frac{1}{2}}$

191. *1)* $\left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{1}{2}}$ *2)* $(2{,}25)^{-\frac{1}{2}}$ *3)* $\left(-0{,}125\right)^{-\frac{1}{3}}$

192. *1)* $\left(\frac{1331}{343}\right)^{-\frac{1}{3}}$ *2)* $\left(-\frac{1}{32}\right)^{-\frac{1}{5}}$ *3)* $\left(0{,}0081\right)^{\frac{1}{4}}$

193. *1)* $\left(6\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$ *2)* $\left(-3\frac{3}{8}\right)$ *3)* $\left(7\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Կատարել ցույց տված գործողությունները.

194. *1)* $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{-\frac{3}{8}}$ *2)* $x^{-\frac{2}{9}} : x^{\frac{5}{6}}$ *3)* $y^{\frac{1}{2}}\ y^{\frac{1}{3}}\ y^{\frac{1}{6}}$

195 *1)* $a^{\frac{3}{5}}\ b^{\frac{3}{2}}\ a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}$ *2)* $x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{5}{8}} : x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{4}}$

196. $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)$ 197. $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2$

198. $\left(2x^{-\frac{1}{4}}+y^{-\frac{1}{3}}\right)^2$ 199 $\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}\right):\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$

200. $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)^3$ 201. $\left(m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{2}{3}}-2m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{4}}\right)^3$

202. $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}\quad b^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{a^{\frac{3}{2}}\quad b^{\frac{3}{2}}}{a\quad b}$

203. $\left(\sqrt[\frac{3}{2}]{\sqrt{\frac{a}{b^2}}}+\sqrt[\frac{2}{3}]{b\sqrt[3]{a}}\right)^2$

204. **)* $\sqrt[3]{a^{\frac{4}{3}}+a \quad 2a^{\frac{7}{6}}}$ 205. $\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

§ 12. ԳԱՂԱՓԱՐ ԻՌՌԱՑԻՈՆԱԼ ՑՈՒՑԻՉՆԵՐՈՎ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՄԱՍԻՆ

Եթե քառակուսի արմատի $\sqrt{N}$ արմատատակ N թիվը ամբողջ կամ կոտորակ թվի լրիվ քառակուսի չէ, ապա արմատը ճշտիվ չի կարելի արտահայտել ոչ ամբողջ, ոչ էլ կոտորակ թվով։ Օրինակ՝ $\sqrt{3}$։ Որովհետև $1^2=1$, իսկ $2^2=4$, ապա պարզ է, որ

$$\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$$

կամ $1 < \sqrt{3} < 2$

հետևապես, $\sqrt{3}$ արժեքը, գտնվելով միավորի և յերկուսի միջև, չի կարող ամբողջ թիվ լինել։ Այժմ յենթադրենք, վոր նա կոտորակ թիվ է, այսինքն՝

$$\sqrt{3}=\frac{p}{q},$$

[1] *Ցուցմունք. այս արմատատակ քանակությունը տպերբերության քառակուսի չէ*

վորտեղ $\frac{p}{q}$ անկրճատելի կոտորակ է: Այդ դեպքում

$$3=\frac{p^2}{q^2},$$

վորը անհնարին է, վորովհետև $\frac{p^2}{q^2}$ կոտորակը նույնպես անկրճատելի յե, հետևապես չի կարող հավասար լինել ամբողջ թվի։ Ընդունելով, վոր $\sqrt{3}=x$, մենք x թվի տակ պետք է յենթադրենք մի թիվ, վորի քառակուսին հավասար լինի յերեքի, այսինքն $x^2=3$։

x թիվը, ինչպես տեսանք, չի կարող լինել վոչ ամբողջ, վոչ էլ կոտորակ թիվ, վորովհետև նա անհամաչափելի յե թե միավորի և թե նրա վորևէ մասերի հետ։

IX խմբակում դուք կծանոթանաք այդպիսի թվերի հատկությունների հետ։ Այդ թվերը կոչվում են **իռռացիոնալ**, զանազանելու համար ամբողջ և կոտորակ թվերից, վորոնք միասին կոչվում են **ռացիոնալ**։ **Իռռացիոնալ թվերն անվերջ տասնորդական** (բայց վոչ պարբերական) **կոտորակներ են**։

Յեթե նրանք պարբերական լինեյին, ապա կարելի կլիներ նրանց դարձնել հասարակ կոտորակ։

Լայնացնելով ցուցչի մասին ունեցած գաղափարը, կարելի յե պատկերացնել մի աստիճան, վորի ցուցիչն իռռացիոնալ թիվ է, որինակ՝ $a^{\sqrt{2}}$։ Վորովհետև $\sqrt{2}$ իսկական արժեքի հաշվելն անհնարին է, ապա և $a^{\sqrt{2}}$ աստիճանը չի յենթարկվում ճշտիվ վորոշման, իր հերթին իռռացիոնալ թիվ ներկայանալով։ Բայց մենք գիտենք, վոր, որինակ, $\sqrt{2}$ կարելի յե հաշվել մոտավորապես, որինակ՝ 0,1 կամ 0,01 մոտավոր ճշտությամբ, այսինքն $\sqrt{2}$ փոխարեն կարելի յե վերցնել նրա 1,4 կամ 1,41 մոտավոր արժեքը։ Վորովհետև այդ արժեքները կոտորակային են, ապա դրանց նկատմամբ ևս կարելի յե գործադրել կոտորակ ցուցիչների հետ կապված գործողությունների կանոնները, այնպես, վոր այդ հիման վրա կարելի յե, որինակ, գրել.

$$1)\ a^{\sqrt{3}}\cdot a^{\sqrt{2}}=a^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$2)\ \frac{a^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{2}}}=a^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$3)\ \left(a^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}}=a^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=a^{\sqrt{6}}$$ և այլն։

Ծանոթություն։ Սահմանափակվում ենք այս ցուցմունքով, վորովհետև ըստ ГУС-ի ծրագրի իռռացիոնալ թվերի հատկությունների ուսումնասիրությունը վերապահվում է 9-րդ տարվա ուսմանը։

§ 13. ՑՈՒՑՉԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ

Գումարի և արտադրյալի տեղափոխման օրենքի հետևանքով կարող ենք գրել հետևյալ հավասարությունները.

$$x+c=c+x$$
$$kx=xk$$

Այժմ, եթե x-ն ընդունենք փոփոխական մեծություն, ապա $y=x+c$ և $y=c+x$ կլինի այդ փոփոխականի միևնույն ֆունկցիան, որը կոչվում է **գումարի ֆունկցիա**։ Նույնն են նաև $y=kx$ և $y=xk$ — **արտադրյալի ֆունկցիաները**։

Այդ նույնը տեղի չի ունենա աստիճան բարձրացնելու դեպքում.

$$x^a \neq a^x$$

Դրա համար էլ $y=x^a$ և $y=a^x$ — **զանազան ֆունկցիաներ են**։ Առաջինը կոչվում է **աստիճան**, իսկ երկրորդը — **ցուցչային ֆունկցիա**։

Այս գլուխը հատկացվում է ցուցչային ֆունկցիային և, գլխավորապես, նրան հակադարձ՝ **լոգարիթմային ֆունկցիայի** հատկությունների մեկնությանը։

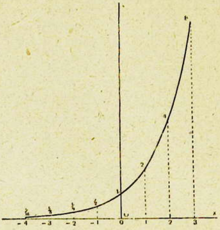
Բացի այն մեծ նշանակությունը, որ ունեն այդ երկու ֆունկցիաները մաթեմատիկայի մեջ, դրանցից երկրորդը չափազանց օգտավետ է ամենագործնական հարցերից մեկի լուծման նկատմամբ, այն է՝ բարդ հաշվումներն ավելի պարզ ու հասարակ դարձնելու համար։ Նրա օգնությամբ, ինչպես ցույց կտրվի, թվերի բազմապատկումն ու բաժանումը փոխարինվում են գումարումով և հանումով, իսկ աստիճանի բարձրացնելն ու արմատ հանելը — բազմապատկումով և բաժանումով։

Ցուցչային ֆունկցիայի $\left(y=a^x\right)$ հետ ավելի լավ ծանոթանալու համար դիմենք նրա գրաֆիկին։ Անփոփոխ a մեծության սկզբում տանք 2 արժեքը, այսինքն վերցնենք

$$y=2^x\,:$$

Գրաֆիկը կառուցելու համար հաշվենք y-ի արժեքները, համապատասխան x արգումենտի այն մի շարք ամբողջ արժեքների, որոնք գտնվում են զերոյի երկու կողմերում.

x . . .	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y . . .	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32



Գծ. 1.

Համապատասխան կետերը նշանակում ենք հարթության վրա (գծ. 1)։ Ցեթե x-ին տանք միջանկյալ կոտորակային արժեքները, օրինակ՝

$$\frac{1}{2},\ 1\frac{1}{2},\ \ldots$$

կստանանք y-ի միջանկյալ արժեքները, այսինքն՝

$$2^{\frac{1}{2}}=1{,}41;\ 2^{\frac{3}{2}}=2{,}83$$ և այլն[1])։

Այն բոլոր կետերի միացումն, վորոնց կոորդինատներն ստացվում են այդ ձևով, կազմում է 1-ին գծանկարի վրա պատկերացրած գիծը։

Գծանկար 2-րդի վրա պատկերացրած են հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

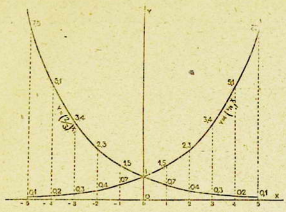
$$y=\left(\frac{3}{2}\right)^x \text{ և } y=\left(\frac{2}{3}\right)^x,$$

վորոնք գծագրած են կետերի հետևյալ կոորդինատներով.

x		−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5.
$y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$	Հասարակ կոտորակ	$\frac{32}{243}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{243}{32}$
	Տասնորդական կոտոր.	0,13	0,20	0.30	0.41	0,67	1,00	1,50	2,25	3.37	5,06	7.59
$y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$	Հասարակ կոտորակ	$\frac{243}{32}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{243}$
	Տասնորդական կոտոր.	7,59	5,06	3,37	2,25	1,50	1,00	0.67	0,44	0.30	0,20	0.13

[1]) Արգումենտի կոտորակային արժեքների դեպքում ցուցչային ֆունկցիայի արժեքների հաշվելը բավականին դժվարին է, վորովհետև բերում է բարձր աստիճանի արմատներ հանելու։ Ավելի լավ է x-ին տալ միայն 2, 4, 8, 16 . . . հայտարարներով կոտորակային արժեքները, վորովհետև, այդ դեպքում, հիմքը կոտորակային աստիճանի բարձրացնելը բերում է հաջորդաբար քառակուսի արմատ հանելուն. օրինակ՝

$$2^{\frac{5}{8}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{32}}}$$



Գծ. 2.

Նորից գծագրեցեք այդ գրաֆիկները միլիմետրային թղթի վրա։ Գծագրեցեք նաև հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

$$y=\left(\frac{7}{4}\right)^x \text{ և } y=\left(\frac{4}{7}\right)^x$$

Նկատի առեք, վոր ցուցչային ֆունկցիայի հիմքը միշտ վերցնում են դրական։

Ֆունկցիայի և նրա գրաֆիկի դիտողությունից բըղխում են ցուցչային ֆունկցիայի հետևյալ հատկությունները.

1. Յուրաքանչյուր գրաֆիկի բոլոր կետերը դասավորված են OX առանցքի վերևը։
2. Յերբ հիմքը մեծ է 1-ից, գրաֆիկը շարունակ բարձրանում է. յերբ հիմքը փոքր է 1-ից, գրաֆիկը շարունակ իջնում է։
3. Բոլոր գրաֆիկները հատում են y առանցքը միևնույն կետում կոորդինատների սկզբից 1 ի տարածության վրա։
4. Կոորդինատների սկզբնակետից հեռանալով, գրաֆիկը մի կողմում մոտենում է OX առանցքին ցանկացած չափ փոքր տարածությամբ, մյուս կողմում—անսահման հեռանում է։

1. Ցուցչային ֆունկցիան x-ի ամեն տեսակ արժեքի դեպքում միշտ դրական է։
2. Յերբ հիմքը մեծ է 1-ից, ֆունկցիան շարունակ աճում է. յերբ հիմքը փոքր է 1-ից, ֆունկցիան շարունակ նվազում է։
3. Յերբ $X=0$, ամեն տեսակ հիմքի դեպքում ֆունկցիան հավասար է 1-ի։
4. Արգումենտի $+\infty$ յեվ $-\infty$ մոտենալու ժամանակ ֆունկցիան մեկ դեպքում մոտենում է զերոյին ցանկացած չափ մոտիկ, մյուս դեպքում մոտենում է $+\infty$։

Համեմատեցեք այդ հատկությունները 2-րդ աստիճանի ֆունկցիայի հատկությունների հետ։

§ 14. ԼՈԳԱՐԻԹՄԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ

Վերցնենք հետևյալ ֆունկցիաները.

$y=x+c$ — *գումար;*
$y=kx$ — *արտադրյալ;*
$y=x^m$ — *աստիճան։*

Արտահայտելով x-ը y-ի *միջոցով, կստանանք հետևյալ հակառակ ֆունկցիաները.*

$x=y-c$ — *տարբերություն;*
$x=y:k$ — *քանորդ;*
$x=\sqrt[m]{y}$ — *արմատ։*

Երկրորդ սերիայի ֆորմուլներն արտահայտում են x-ի յեվ y-ի միջեվ նույն կախումն, ինչ յեվ առաջին սերիայի ֆորմուլները, միայն պատկերացած են ուրիշ նշաններով, *վորովհետև, որինակ,* $y=x+c$ *հավասարությունից հետևում է* $x=y-c$ *հավասարությունը և հակառակը։*

Այժմ վերցնենք հետևյալ ցուցչային ֆունկցիան.

$$y=a^x$$

Դա էլ ունի իր հակադարձ ֆունկցիան, վորը կոչվում է **լոգարիթմային։** *Այդ նշանակելու համար առանձին նշանի տեղ գործ են ածում* lg *տառերը, վորոնք* **լոգարիթմ** *բառի սկզբնատառերն են։ Այդ տառերի մոտ աջի ներքևում տեղավորում են* a *հիմքը հետևյալ ձևով.*

$$x=\lg_a y,$$

վորը կարդացվում է. x-*ը* **հավասար է** y-*ի* **լոգարիթմին հիմք ունենալով** a *և արտահայտում է* x-*ի և* y-*ի միջև նույն կախումն, ինչ և* $y=a^x$ *հավասարությունը։ Յեթե* x-*ին և* y-*ին տանք մասնավոր արժեքներ, ապա, որինակ,* $2^3=8$ *հավասարությունից, կստանանք.*

$$3=\lg_2 8:$$

Ուղիղ գործողությունից հակադարձին անցնելու դեպքում գործողության անդամները (կոմպոնենտները) սովորաբար նոր անուններ են ընդունում. որինակ՝ բազմապատկումից բաժանման անցնելու դեպքում արտադրյալը դառնում է բաժանելի, արտադրիչներից մեկը—բաժանարար, իսկ մյուսը—քանորդ։ Նույնպես ցուցչային ֆունկցիայից լոգարիթմականին անցնելու դեպքում առաջանում են նոր անուններ. **աստիճանը** *վերանվանվում է* **թիվ, հիմքը** *պահում է իր անունը, ցուցիչը դառնում է* **լոգարիթմ,** *հետևապես, վերջին որինակում, 8-ը—թիվն է, 2-ը—հիմքը, 3-ը—լոգարիթմը։*

Լոգարիթմի վորոշումը։ **Լոգարիթմ կոչվում է այն աստիճանի ցուցիչը, վորով պետք է բարձրացնել հիմքը, տված թիվն ստանալու համար։**

Որինակ՝

$x=\lg_3 81$, x *գտնելու համար պետք է պատասխանենք հետևյալ հարցին. ինչ աստիճանի պետք է բարձրացնել 3-ը, 81 ստանալու համար, կամ գրենք հետևյալ հավասարումը.* $3^x = 81$։ *Պատասխանն է.*

$$x=4 \text{ կամ } \lg_3 81,=4։$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

206. *Հետևյալ որինակներում լոգարիթմների միջոցով արտահայտեցեք թվերի կախումն իրարից.*

1) $3^2=9$ *2)* $2^5=32$ *3)* $2^{-3}=\frac{1}{8}$ *4)* $25^{\frac{1}{2}}=5$ *5)* $6^{-1}=\frac{1}{6}$

6) $125^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{5}$

207. *Արտահայտեցեք առանց լոգարիթմների թվերի կախումն իրարից հետևյալ օրինակներում.*

1) $\lg_{10}1000=3$ *2)* $\lg_6 36=2$ *3)* $\lg_2 \frac{1}{16}=-4$

4) $\lg_{49} 7=\frac{1}{2}$ *5)* $\lg_8 1=0$ *6)* $\lg_8 \frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$.

208. *Հիմք ընդունելով 2-ը, գտեք հետևյալ թվերի լոգարիթմները.*

1) 4 *2)* 16 *3)* 8 *4)* 2 *5)* 32 *6)* 128 *7)* 1

8) $\frac{1}{2}$ *9)* $\frac{1}{8}$ *10)* $\frac{1}{64}$ *11)* $\sqrt{2}$ *12)* $2\sqrt{2}$

13) $\sqrt[3]{2}$ *14)* $\sqrt[5]{4}$ *15)* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *16)* $\sqrt[3]{2}^{\,2}$

209. *Գտեք այն թվերը, վորոնց լոգարիթմները, հիմք ընդունելով 3, հավասար են.*

1) 2 *2)* 0 *3)* 5 *4)* -3 *5)* -1 *6)* $\frac{1}{2}$ *7)* $-\frac{1}{3}$ *8)* $-\frac{2}{5}$

210. *Ի՞նչպիսի հիմքերի դեպքում 1.000.000 թվի լոգարիթմները հավասար են.*

1) 2 *2)* 3 *3)* 6 *4)* -3 *5)* $\frac{2}{5}$ *6)* $\frac{1}{4}$ *7)* $-\frac{1}{3}$ *8)* $-1\frac{1}{2}$

Վճռել հետևյալ հավասարումները.

211. *1)* $\lg_2 x=5$ *2)* $x=\lg_5 0{,}04$ *3)* $\lg_x 9=3$

212. *1)* $\lg_{16} 64=x$ *2)* $\frac{1}{2}=\lg_x 4$ *3)* $x=\lg_9 27$

213. *1)* $\lg_x \frac{1}{64}=-3$ *2)* $\lg_{\frac{1}{4}} 256=x$ *3)* $\lg_{25} x=-1{,}5$

214. *1)* $x=\lg_{2\frac{1}{2}} 6\frac{1}{4}$ *2)* $\lg_x 2=-\frac{1}{2}$ *3)* $\lg_{0{,}2} 125=x$

§ 15. ԼՈԳԱՐԻԹՄԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԳՐԱՖԻԿԸ ՅԵՎ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ.

Ինչպես տեսանք,

$$x=\lg_a y \quad \text{և} \quad y=a^x$$

հավասարությունները նույնն են, ապա այդ յերկու ֆունկցիաների գրաֆիկները ևս միևնույն գիծն են առաջացնում, վորն ուսումնասիրեցինք § 13-ում։ Բայց լոգարիթմային ֆունկցիայում

$$x=\lg_a y$$

արգումենտը նշանակված է y տառով, իսկ ֆունկցիան՝ x տառով, վորը չի ընդունված, ուստի x-ով նշանակենք արգումենտը և y-ով՝ ֆունկցիան, վորից հետո լոգարիթմային ֆունկցիան կընդունի հետևյալ ձևը

$$y=\lg_a x,$$

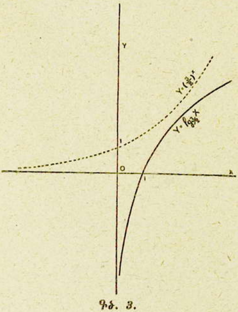
իսկ ցուցչային ֆունկցիայի օգնությամբ կստանանք նույն կախումն արտահայտող հետևյալ հավասարությունը.

$$x=a^y$$

Ինչով է տարբերվում այս նոր ֆունկցիայի գրաֆիկը նախորդի գրաֆիկից։ Վորովհետև x-ը փոխարինված է y-ով, և y-ը փոխարինված է x-ով, ապա գրաֆիկի վրա ևս յուրաքանչյուր կետի աբսցիսը կդառնա այժմ օրդինատ, իսկ օրդինատը՝ աբսցիս։ Վերցնենք, օրինակ, $a=\frac{3}{2}$ *և կառուցենք հետևյալ ֆունկցիայի գրաֆիկը.*

$$x=\left(\frac{3}{2}\right)^y$$

Տալով y-ին —5, —4, —3 . . . արժեքները, կգտնենք x-ի համապատասխան արժեքները։ Ակներև է, վոր նորից հաշվումներ անելու կարիք չկա, վորովհետև կարելի յե օգտվել § 13-րդի պատրաստի թվերով, միայն փոխելով այդ աղյուսակի տողերի վերնագրերը. x-ը y-ով և y-ը x-ով։ Սակայն կարելի յե և առանց աղյուսակի վարվել. չափել գրաֆիկի զանազան կետերի աբսցիսները և օրդինատները և նրանց միջոցով նշանակել նոր կետեր, վորոնց աբսցիսները հավասար լինեն նախկինների օրդինատներին, իսկ օրդինատները—աբսցիսներին։ Այդ կատարված է 3-րդ գծանկարի վրա, վորտեղ կետային գիծը նախկին $y = a^x$ *ֆունկցիայի գրաֆիկն է, իսկ անընդհատ գիծը՝* $x=a^y$ *կամ* $\lg_a x$ *ֆունկցիայի գրաֆիկը։*



Գծ. 3.

Կառուցեք նույն յեղանակով հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

$$y=\lg_2 x \quad և \quad y=\lg_3 x$$ (տես § 13).

14

Նկատի առեք, որ լոգարիթմային ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա կետերի աբսցիսները ներկայանում են՝ թվեր, իսկ օրդինատները, այսինքն լոգարիթմային ֆունկցիայի արժեքները՝ լոգարիթմներ։

Ամեն մի թվի համապատասխանում է վորոշ լոգարիթմ, բայց դրանից լոգարիթմները հաճախ արտահայտվում են վոչ միայն կոտորակ թվերով, այլ և անվերջ տասնորդական կոտորակներով, վորոնք, ինչպես և իռացիոնալ թվերը, հավասար չեն վոչ մի հասարակ կոտորակի։

Սահմանեցեք վերը բերած լոգարիթմային ֆունկցիաների օրինակների և նրանց գրաֆիկների վրա լոգարիթմների հետևյալ հատկությունները.

1. Թվի մեծանալուց լոգարիթմն աճում է։

2. Միավորի լոգարիթմը հավասար է զերոյի, միավորից բարձր թվերի լոգարիթմները դրական են (զերոյից մեծ են), միավորից փոքր թվերի լոգարիթմները բացասական են (փոքր են զերոյից)։

3. Թվի անսահման աճումից անսահման աճում է նաև լոգարիթմը. թվի նվազելուց մինչև զերոն՝ լոգարիթմը մոտենում է $-\infty$ ։

4. Բացասական թվերը լոգարիթմներ չունեն։

5. Հիմքի լոգարիթմը հավասար է միավորին։

§ 16. ԼՈԳԱՐԻԹՄՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՈՐԵՆՔՆԵՐԸ

a. Արտադրյալի լոգարիթմը

Ցեթե

$$x=a^m, \quad y=a^n$$

ապա

$$x \cdot y = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

այստեղից հետևում է

$$\lg_a (x \cdot y) = m+n = \lg_a x + \lg_a y$$

$$\text{I.} \quad \lg_a (x \cdot y) = \lg_a x + \lg_a y$$

բերենք մի յերկրորդ օրինակ. պահանջվում է ապացուցել

$$\lg_a MNP = \lg_a M + \lg_a N + \lg_a P$$

Ապացուցումն։
Նշանակենք

$$\lg_a M = x \quad \lg_a N = y \quad \lg_a P = z$$

Այժմ անցնելով ցուցչային արտահայտություններին, կստանանք.

$$M=a^x \quad N=a^y \quad P=a^z$$

$$MMP=a^{x+y+z}$$

վերջին հավասարությունից կրկին անցնելով լոգարիթմներին, կստանանք.

$$\lg_a MNP=x+y+z=\lg_a M+\lg_a N+\lg_a P$$

Յեզրակացություն. **արտադրյալի լոգարիթմը հավասար է արտադրիչների լոգարիթմների գումարին:**

b. **Քանորդի լոգարիթմը**

$$\frac{x}{y}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

$$\lg_a \frac{x}{y}=m-n=\lg_a x-\lg_a y$$

II. $$\lg_a \frac{x}{y}=\lg_a x-\lg_a y$$

Յեզրակացություն. **քանորդի լոգարիթմը հավասար է բաժանելիի յեվ բաժանարարի լոգարիթմների տարբերության:**

Հիմնվելով առաջին թեորեմի վրա, ապացուցեք, վոր

$$\lg_a \frac{M}{N}=\lg_a M-\lg_a N$$

c. **Աստիճանի լոգարիթմը**

Յեթե

$$x=a^m$$

ապա $$x^n=(a^m)^n \qquad \lg_a x^n=m \cdot n=n\lg_a x$$

III. $$\lg_a x^n=n\lg_a x$$

Մի յերկրորդ օրինակ.

Պահանջվում է ապացուցել.

$$\lg_a N^m=m\lg_a N$$

Ապացուցում.

$$\lg_a N = x;\ N = a^x;\ N^m = a^{mx}.$$

$$\lg_a N^m = mx = m\lg_a N.$$

$$\lg_a N^m = m\lg_a N.$$

Եզրակացություն. **աստիճանի լոգարիթմը հավասար է ցուցչի յեվ հիմքի լոգարիթմի արտադրյալին։**

դ. **Արմատի լոգարիթմը**

Յեթե

$$x = a^m,$$

ապա

$$\sqrt[p]{x} = \sqrt[p]{a^m} = a^{\frac{m}{p}}$$

$$\lg_a\left(\sqrt[p]{x}\right) = \frac{m}{p} = \frac{\lg_a x}{p}$$

$$\text{IV}\quad \lg_a\left(\sqrt[p]{x}\right) = \frac{\lg_a x}{p}$$

Եզրակացություն. **արմատի լոգարիթմը հավասար է արմատատակ թվի լոգարիթմին, բաժանած արմատացույցի վրա։**

Ծանոթություն։ *Այն ֆորմուլները, վորոնց մեջ լոգարիթմները նույն հիմքն ունեն, գրելու ժամանակ ընդհանրապես հիմքը բաց են թողնում։ Որինակ՝*

$$x = a^m \qquad y = a^n$$

կարելի յե գրել

$$\lg x \cdot y = \lg x + \lg y$$

§ 17. ԼՈԳԱՐԻԹՄԱՑՈՒՄՆ ՅԵՎ ՊՈՏԵՆՑԻԱՑՈՒՄՆ

Լոգարիթմացնել վորեվե ֆորմուլ՝ նշանակում է վերցնել նրա յերկու մասերի լոգարիթմները։

Նախորդ պարագրաֆում լոգարիթմացրած են արդեն արտադրյալը, քանորդը, աստիճանը և արմատը։ Իսկ յերբ ֆորմուլի մեջ պարունակվող քանակությունների հետ կատարվում են միքանի տարբեր գործո-

ղությունները, այդ դեպքում նախկին պարագրաֆների թեորեմները հաջորդաբար գործադրվում են միքանի անգամ։

Այսպես

$$\lg \frac{2ab}{3c} = \lg 2ab - \lg 3c = \lg 2 + \lg a + \lg b - (\lg 3 + \lg c) = \lg 2 +$$
$$+ \lg a + \lg b - \lg 3 - \lg c$$

Այստեղ նախ օգտագործեցինք քանորդի թեորեմը, իսկ այնուհետև ձևափոխեցինք արտադրյալի լոգարիթմը։

$\sqrt[3]{\frac{am^2}{2n}}$ արտահայտության լոգարիթմը ձևափոխվում է այսպես՝

$$\lg \sqrt[3]{\frac{am^2}{2n}} = \frac{1}{3} \lg \frac{am^2}{2n} = \frac{1}{3}\left(\lg am^2 - \lg 2n\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left[\lg a + \lg m^2 - \left(\lg 2 + \lg n\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\lg a + 2\lg m - \lg 2 - \lg n\right).$$

Նման ձևափոխումների մեջ վորոշ ունակություն ձեռք բերելուց հետո կարելի յէ ավելի կարճ ձեվ գրի առնել, զանց առնելով միջին ձևափոխումները։ Պետք է միայն զգուշանալ հետևյալ ձևի հավասարություններով արտահայտվող սխալներից.

$$\lg (a \pm b) = \lg a \pm \lg b$$

Այս հավասարությունը սխալ է, վորովհետև գումարի կամ տարբերության լոգարիթմը հավասար չէ լոգարիթմների գումարին կամ նրանց տարբերության։ Բայց յեթե գումարը կամ տարբերությունը վերածվի արտադրյալի, այդ դեպքում, իհարկե, կարելի յէ արտադրյալի լոգարիթմը փոխարինել արտադրիչների լոգարիթմների գումարով. որինակ՝

$$\lg (a^2 - b^2) = \lg [(a+b)(a-b)] = \lg (a+b) + \lg (a-b)$$

Յեթե գիտենք տված արտահայտությունները լոգարիթմացնել, ապա և դրա հակառակը՝ կարող ենք գտնել այն արտահայտությունը, վորից ստացվել է տվյալ լոգարիթմային ֆորմուլը։

Լոգարիթմներ կապակցող ֆորմուլից թվեր կապակցող ֆորմուլին անցնելը կոչվում է պոտենցիացում։ Պոտենցիացնենք, որինակ, հետևյալ լոգարիթմային հավասարությունը.

$$\lg x = \lg a + \lg b$$

գիտենք, վոր

$$\lg a + \lg b = \lg ab,$$

ուստի կարող ենք յեզրակացնել, վոր

$$x = ab$$

Ցենք

$$\lg y = 2 \lg m + 3 \lg n - \frac{1}{2} \lg c,$$

ապա

$$\lg y = \lg m^2 + \lg n^3 - \lg\sqrt{c} = \lg m^2n^3 = \lg\sqrt{c} = \lg\frac{m^2n^3}{\sqrt{c}},$$

$$y = \frac{m^2n^3}{\sqrt{c}}$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

Լոգարիթմացրեք հետևյալ արտահայտությունները.

215. 1) $4ax$
2) πr^2
3) $(ab)^3$
4) $\sqrt{abc}$
5) $\frac{ab^3}{c}$

216. 1) $(m+n)d$
2) $5a^2\sqrt{p}$
3) $\sqrt{ak^2}$
4) $\sqrt{a\sqrt{a}}$
5) $7x\sqrt{2x-y}$

217. 1) a^2-1
2) x^4-y^4
3) $(a-b)^2$
4) $4\sqrt[5]{2ab^3}$
5) $5a^3b\sqrt{c}$

218. 1) $\frac{a^3b}{c\sqrt{d}}$
2) $\frac{a^2\sqrt{m}}{\sqrt[3]{n}}$
3) $a\sqrt{\frac{2b}{3}}$
4) $\frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{1}{2c^3}}$
5) $\sqrt[5]{\frac{a^3\sqrt{b}}{c}}$

219. 1) $\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt[3]{3b^2}}$
2) $\sqrt[3]{\frac{5bc^2}{4a^3}}$
3) $\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^5$
4) $\frac{a^2\sqrt{2b}}{8x^3y^2}$
5) $\left(\sqrt{\frac{\sqrt[15]{\sqrt[3]{5}}}{\sqrt[3]{25\sqrt{3}}}}\right)$

220. 1) $2m\sqrt{3m^2-27m^2}$ 2) $\frac{1}{a\sqrt[4]{b-c}}$ 3) $\frac{a(bx-c)^{\frac{1}{2}}}{(mx-n)^{-3}}$

4) $\left(\frac{ax-b}{x\sqrt{a-b}}\right)^{-\frac{2}{3}}$ 5) $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{ab^{-2}}}{b}\sqrt{\frac{b}{a^3}}}$

Պոտենցիացրեք հետեւյալ ֆորմուլները

221. $\lg x = \lg a - \lg b + \lg c$

222. $\lg x = 2 \lg a + 3 \lg b = 4 \lg c$

223. $\lg x = 4(\lg b + 2 \lg k)$

224. $\lg x = \frac{1}{3}(\lg m - \lg n)$

225. $\lg x = \lg 3 - 2 \lg y + \lg (3 - 2y)$

226. $\lg x = \frac{1}{2} \lg a = \frac{1}{2} \lg b - \frac{1}{3} \lg c - \frac{1}{3} \lg d$

227. $\lg x = \frac{2 \lg 3 - 3 \lg 2}{6}$

228. $\lg x = 2 \lg (1 - a) - 2 \lg (1 + a)$

229. $\lg x = 5 \lg a - \frac{1}{2} \lg m + \lg b$

230. $\lg x = 3 \lg c + \lg d - \frac{\lg c - 2 \lg d}{3}$

231. $\lg x = -3 \lg a + \frac{1}{3}\left[\lg (a+b) + \frac{2}{5} \lg (a-b) - \lg b - \frac{1}{2} \lg c\right]$

232. $\lg x = -\frac{2}{3} \lg b + \frac{3}{4}\left[\lg a - 2 \lg c - \lg (a-b) + \frac{3}{5} \lg (a+b)\right]$

§ 18. ԼՈԳԱՐԻԹՄՆԵՐԻ ԳՈՐԾԱԴՐՈՒՄԸ ՀԱՇՎՈՒՄՆԵՐ ԱՆԵԼԻՍ

Կազմենք 2-ի աստիճանների աղյուսակը: Վերցնենք միայն ամբողջ և դրական ցուցիչներ և դասավորենք յերկրորդ սյունյակում, իսկ առաջինում՝ համապատասխան աստիճանները: Այդ դեպքում յերկրորդ թվերը կլինեն առաջին սյունյակի 2-ը հիմք ունեցող թվերի լոգարիթմները: Այսպես, օրինակ

Թիվ	Լոգարիթմ
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10
2048	11
4096	12
8192	13
16384	14
32768	15
65536	16
131072	17

$$\lg 64 = 6$$

$$\lg 1024 = 10$$

Արտադրյալի լոգարիթմի հատկության համաձայն

$$\lg (64 \cdot 1024) = 6 + 10 = 16$$

Բայց վորովհետև լոգարիթմ 16-ին համապատասխանում է (տես աղյուսակը) 65536 թիվը, ուստի

$$\lg (64 \cdot 1024) = \lg 65536$$

$$64 \cdot 1024 = 65536$$

Այսպիսով, ուրեմն, լոգարիթմների աղյուսակի օգնությամբ գտանք յերկու թվերի արտադրյալը, չկատարելով բազմապատկումն, այլ միայն գումարելով նրանց լոգարիթմները:

Դուք ինքներդ, աղյուսակի օգնությամբ, գտեք էլի միքանի արտադրյալներ, և յեթե կարող եք, գտեք աղյուսակում պարունակվող թվերի քանորդներ. դրա համար կարիք յեղած դեպքում շարունակեցեք աղյուսակը:

Նույն աղյուսակի օգնությամբ գտնենք 32768 թվի խորանարդ աստիճանի արմատը: Դրա համար օգտվենք մեզ ծանոթ ֆորմուլից.

$$\lg\sqrt[3]{32768}=\frac{1}{3}\lg 32768=\frac{15}{3}=5,$$

Բայց քանի վոր 5-ը 32-ի լոգարիթմն ե, ուստի

$$\sqrt[3]{32768}=32$$

Բերած որինակները ցույց են տալիս, վոր ունենալով վորևե հիմք ունեցող մի շարք թվերի լոգարիթմների աղյուսակը, կարող ենք այդ թվերի արտադրյալը, քանորդը, աստիճանը գտնելու կամ արմատ հանելու հաշվումները կատարել նրանց լոգարիթմների հետ անհամեմատ ավելի հեշտ գործողությունների միջոցով:

Նման դեպքերում աշխատանքն այսպես ե տարվում.

1) աղյուսակում գտնում են տված թվերի լոգարիթմները.

2) լոգարիթմների հետ կատարում են գործողություններ ըստ § 16-ի.

3) ստացած լոգարիթմի միջոցով աղյուսակում գտնում են այն թիվը, վորը կստացվեր տված թվերի հետ պահանջված գործողությունները կատարելու դեպքում:

Բայց լոգարիթմներից լայն չափով օգտվելու համար վերը բերած 2-ը հիմք ունեցող լոգարիթմների աղյուսակը չափազանց անհարմար ե գործածության համար, նույն իսկ այն դեպքում, յեթե աղյուսակը շարունակելով հասցնենք շատ մեծ թվերի:

Այդ տեսակետից անհամեմատ ավելի շատ հարմարություններ ե տալիս 10-ը հիմք ունեցող՝ **տասնորդական** լոգարիթմների աղյուսակը. այդ աղյուսակի մեջ իրար հաջորդող թվերի բոլոր միջտարածությունները շարունակ նույնն են մնում: Այդպիսի աղյուսակի լոգարիթմների մեծ մասն արտահայտում են տասնորդական անվերջ կոտորակներով, տասնորդական նշանների թիվը վերցնելով կամավոր՝ 3,4, 5 և այլն:

Խարակտերիստիկ յեվ մանտիս: Ամեն մի յերկանիշ թիվ գտնվում ե 10-ի և 100-ի միջև. նրա լոգարիթմն ել կգտնվի 1-ի և 2-ի միջև: Ամեն մի քառանիշ թիվ գտնվում ե 1000-ի և 10000-ի միջև. նրա լոգարիթմն ել պետք ե գտնվի

3-ի և 4-ի միջև․ քանի որ թիվը աճելու հետ աճում է նաև նրա լոգարիթմը, 0,08 կոտորակը մեծ է 0,01-ից և փոքր է 0,1-ից, ուստի նրա լոգարիթմն էլ մեծ է —2-ից և փոքր է —1-ից։

1-ի և 10-ի միջև գտնված ամեն մի թվի լոգարիթմ մի կանոնավոր կոտորակ է, որ սովորաբար տասնորդական կոտորակի ձևով է արտահայտվում։ Լոգարիթմի ամբողջ մասը կոչվում է խարակտերիստիկ, իսկ կոտորակային մասը՝ մանտիս։ Բերում ենք այստեղ յեռանիշ տասնորդական լոգարիթմների աղյուսակը։

Թիվ	Լոգ.	Թիվ	Լոգ.	Թիվ	Լոգ.	Թիվ	Լոգ.	Թիվ	Լոգ.
1	0,000	21	1,322	41	1,613	61	1,785	81	1,908
2	0,301	22	1,342	42	1,623	62	1,792	82	1,914
3	0,477	23	1,362	43	1,633	63	1,799	83	1,919
4	0,602	24	1,380	44	1,643	64	1,806	84	1,924
5	0,699	25	1,398	45	1,653	65	1,813	85	1,929
6	0,778	26	1,415	46	1,663	66	1,820	86	1,934
7	0,845	27	1,431	47	1,672	67	1,826	87	1,940
8	0,903	28	1,447	48	1,681	68	1,833	88	1,944
9	0,954	29	1,462	49	1,690	69	1,839	89	1,949
10	1,000	30	1,477	50	1,699	70	6,845	90	1,954
11	1,041	31	1,491	51	1,708	71	1,851	91	1,959
12	1,079	32	1,505	52	1,716	72	1,857	92	1,964
13	1,114	33	1,519	53	1,724	73	1,863	93	1,968
14	1,146	34	1,231	54	1,732	74	1,869	94	1,973
15	1,176	35	1,544	55	1,740	75	1,875	95	1,978
16	1,204	36	1,556	56	1,748	76	1,881	96	1,982
17	1,230	37	1,568	57	1,756	77	1,886	97	1,987
18	1,255	38	1,580	58	1,763	78	1,892	98	1,991
19	1,279	39	1,591	59	1,771	79	1,898	99	1,996
20	1,301	40	1,602	60	1,778	80	1,903	100	2,000

Զննեցեք աղյուսակը և տեսեք, թե ինչպես են աճում լոգարիթմները սկզբում և վերջում, համեմատեցեք նաև լոգարիթմական ֆունկցիայի գրաֆիկի հետ (§ 13)։

§ 19. ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԼՈԳԱՐԻԹՄՆԵՐԻ ԱՌԱՆՁՆԱՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Յուրաքանչյուր աղյուսակ կարող է միայն սահմանափակ քանակությամբ թվեր պարունակել իր մեջ և դրա համար էլ, ըստ էության, վոչ մի աղյուսակ հնարավորություն չի կարող տալ ուզածին չափ մեծ թվերով հաշվումներ անել։ Սակայն բանից դուրս է գալիս, վոր տասնորդական լոգարիթմներն ոժտված են ստորև մատնանշված այն առանձնահատկությամբ, վորը հնարավորություն է տալիս աղյուսակում պարունակվող լոգարիթմների միջոցով չափազանց մեծ դյուրությամբ գտնել անհամար քանակությամբ և ուզածին չափ մեծ թվերի լոգարիթմներ. և այդ բոլորը շնորհիվ այն հանգամանքի, վոր թե լոգարիթմների և թե թվային համակարգության հիմքերը տասնորդական են (համեմատեցեք բազմապատկման աղյուսակի հետ, վորը թեև սահմանափակ քանակությամբ թվեր է պարունակում իր մեջ, բայց, շնորհիվ թվային սիստեմի հաշվումների հատկության, հնարավորություն է տալիս ցանկացած մեծության թվերի արտադրյալը գտնել)։

ԹԵՈՐԵՄ։ Երբ վորևէ թիվ բազմապատկում կամ բաժանում ենք միավորը զերոներով թվի վրա, փոխվում է միայն նրա տասնորդական լոգարիթմի խարակտերիստիկը, իսկ մանտիսը մնում է նույնը։

Ապացուցում։ Յենթադրենք՝ տված թիվը N *և. Այն թիվը, վորն ստանալու յենք* N*-ը բազմապատկելով կամ բաժանելով մեկին աջից կցված զերոներով թվի վրա, կլինի* $N \cdot 10^m$, *վորտեղ* m*-ը դրական կամ բացասական վորևէ ամբողջ թիվ է. Այստեղից*

$$\lg_{10} N \cdot 10^m = \lg_{10} N + m \lg_{10} 10$$

բայց վորովհետև

$$\lg_{10} 10 = 1$$

ապա

$$\lg_{10} N \cdot 10^m = \lg_{10} N + m$$

Մենք տեսնում ենք, վոր $\lg_{10} N \cdot 10^m$*-ի և* $\lg N$*-ի տարբերությունը հավասար է* m *ամբողջ թվին, հետևապես այդ լոգարիթմների կոտորակային մասերը նույնն են։*

Ոգտվելով ապացուցած թեորեմից և գտնելով § 18-ի աղյուսակում.

$$\lg 58 = 1{,}763,$$

մենք կարող ենք գրել

$$\begin{aligned} \lg 580 &= 2{,}763 \\ \lg 5800 &= 3{,}763 \\ \lg 5800000 &= 6{,}763 \\ \lg 5{,}8 &= 0{,}763 \end{aligned}$$

Լոգարիթմների յեռանիշ աղյուսակում գտեք ապացուցած թեորեմը հաստատող փաստեր։

Սովորաբար լոգարիթմների խարակտերիստիկը չի տպագրվում աղյուսակներում, վորովհետև մտքում հեշտությամբ գտնում են այն։ Յեվ հիրավի, 10-ը հիմք ունենալու դեպքում.

Ցուցչային ձևը	Թվերի սյունյակ	Թվերի սյունյակ	Լոգարիթմների սյունյակ
. . . .		. . . .	
10^{-12}	$= 0{,}000000000001$	lg 0,000000000001	$= -12$
. . . .		. . . .	
10^{-5}	$= 0{,}00001$	lg 0,00001	$= -5$
10^{-4}	$= 0{,}0001$	lg 0,0001	$= -4$
10^{-3}	$= 0{,}001$	lg 0,001	$= -3$
10^{-2}	$= 0{,}01$	lg 0,01	$= -2$
10^{-1}	$= 0{,}1$	lg 0,1	$= -1$
10^{0}	$= 1$	lg 1	$= 0$
10^{1}	$= 10$	lg 10	$= 1$
10^{2}	$= 100$	lg 100	$= 2$
10^{3}	$= 1000$	lg 1000	$= 3$
10^{4}	$= 10000$	lg 10000	$= 4$
10^{5}	$= 100000$	lg 100000	$= 5$
. . . .		. . . .	
10^{12}	$= 1000000000000$	lg 1000000000000	$= 12$
. . . .		. . . .	

Այստեղ դրական թվերը, վորոնք գտնվում են միջին սյունյակներում, հաջորդում են միմյանց վերից վար մեծության կարգով. ցուցիչները (ձախից) կամ լոգարիթմները (աջից) նույնպես վերից վար հաջորդում են միմյանց, աճելով —12-ից (կամ —∞-ից, վորը ցույց են տալիս վերևում նշանակած կետերը) մինչև —5, —4, —3 . . . 0, +1 . . . + 12 . . . . մինչև + ∞։ Թվի աճման հետ աճում է նաև նրա լոգարիթմը։

Ընդհանրապես, միավորն աջից կցված զերոներով թվի լոգարիթմը հավասար է այնքան միավորների, վորքան զերոներ ունի տվյալ թիվը։

Այժմ վերցնենք վորևէ յեռանիշ թիվ։ Այդ թիվը կարող է գտնվել 100-ի և 1000-ի միջև։ Ուստի նրա լոգարիթմն էլ պետք է գտնվի 100-ի և 1000-ի լոգարիթմների միջև, այսինքն 2-ի և 3-ի միջև. նշանակում է, նա հավասար է 2-ին՝ ավելացրած վորևէ կոտորակ։ Նույն ձևով քառանիշ թվի, այսինքն 1000-ի և 10000-ի միջև պարունակվող թվի լոգարիթմը հավասար է 3՝ պլյուս մի կոտորակ և այլն։

Այսպես, ուրեմն, ամեն մի թվի լոգարիթմի ամբողջ մասը՝ այսինքն խարակտերիստիկը հեշտ է գտնել։ Խարակտերիստիկը չի փոխվում, յեթե ամբողջ թվին կցենք վորևէ կոտորակ. յեթե, որինակ, 2756 թվի լոգարիթմը գտնվում է 3-ի և 4-ի միջև, ապա 2756,75-ի լոգարիթմն էլ է գտնվում 3-ի և 4-ի միջև, վորովհետև թե 2756-ը և թե 2756,75-ը գտնվում են 1000-ի և 10000-ի միջև։ Ակներև է, վոր խարակտերիստիկը կապված է տվյալ թվի ամբողջ կարգերի հետ. **խարակտերիստիկը մեկ միավորով պակաս է թվի ամբողջ մասի թվանշանների** քանակից։

Օրինակներ։ 624836, 73,214 և 15106,8 թվերի լոգարիթմները համապատասխանաբար հավասար են 5-ի, 1-ի և 4-ի։

Յեվ այսպես, վորևէ թվի տասնորդական լոգարիթմը գտնելու համար նախ և առաջ մտքում գտնում ենք նրա խարակտերիստիկը, ղեկավարվելով վերը բերած կանոններով, իսկ աղյուսակում փնտրում ենք նրա մանտիսը. յեթե աղյուսակը չի պարունակում իր մեջ այդ թիվը, բազմապատկում կամ բաժանում ենք տվյալ թիվը 10^m-ի վրա, վորպեսզի ստանանք աղյուսակում պարունակվող թվերից մեկնումեկը։ Այսպես, 290000 թվի լոգարիթմի խարակտերիստիկը 5-ն է, իսկ մանտիսը գտնում ենք 29 թվի միջոցով և ստանում ենք. $\lg 290000 = 5{,}462$-ի։ 8,3 թվի լոգարիթմի խարակտերիստիկը հավասար է 0-ի, իսկ մանտիսը փնտրում ենք 83-ի միջոցով և ստանում՝ $\lg 8{,}3 = 0{,}919$։

Բայց յեռանիշ լոգարիթմների աղյուսակում մենք ունենք միայն յերկանիշ թվեր։

Ել ավելի բազմաթիվ թվերի լոգարիթմները փնտրելու համար յերեք ճանապարհ կա. 1) օգտվել ավելի ընդարձակ աղյուսակից, վորի մեջ պարունակվում են այդպիսի թվեր. 2) թվերի կլորացումը. 3) ինտերպոլյացիան։ Յերկրորդ և յերրորդ յեղանակների մասին կխոսենք հետագայում, իսկ ել ավելի ընդարձակ աղյուսակի հետ կծանոթանանք հետևյալ պարագրաֆում։

§ 20· ՔԱՌԱՆԻՇ ԼՈԳԱՐԻԹՄՆԵՐԻ ԱՂՅՈՒՍԱԿԸ

Աղյուսակը զետեղված է գրքի վերջում։

Այս աղյուսակը § 18 աղյուսակից տարբերվում է նրանով, վոր սրա մեջ պարունակվող թվերը յեռանիշ են, իսկ լոգարիթմները՝ քառանիշ. բացի այդ, տպագրած են միայն մանտիսները։ Տարբերություն կա նաև ձևի մեջ. հաջորդող լոգարիթմները վոչ թե դասավորված են սյունյակներով, ինչպես այդ § 18-ումն է, այլ տողերով։ Առաջին տողը, սկսած յերկրորդ սյունյակից, պարունակում է 100, 101, 102, 103 . . . . 109 թվերի լոգարիթմների մանտիսները. յերկրորդ տողը՝ 110, 111, 112 . . . . 119 թվերինը, յերրորդ տողը՝ 120, 121։ 122 . . . . 129 թվերինը և այլն։ Յուրաքանչյուր տողում զետեղված է 10-ական մանտիս, մի տասնյակ թվերի համար, ինչպես այդ ցույց է տրված առաջին սյունյակում։ Մնացած սյունյակների վերևում գտնվող թվանշանները թվի միավորներն են, վորոնցից յուրաքանչյուրը նույն տողում ունեն համապատասխան մանտիս։ Ուստի վորպեսզի գտնենք, օրինակի համար, 763 թվի լոգարիթմի մանտիսը, նախ գտնում ենք առաջին (N-ի) սյունյակում միայն տասնյակների 76 թիվը, ապա այնուհետև համապատասխան տողի 3-րդ սյունյակում գտնում 763 թվի համար 8825 մանտիսը. հետևապես $\lg 763 = 2{,}8825$ (կարդացեք (2 88—25)։

235. Գտեք հետևյալ թվերի լոգարիթմները. 147; 351; 984; 672; 208; 740; 513; 880; 719։

Հիմնվելով § 19 թեորեմի վրա, մենք նույն աղյուսակի միջոցով կարող ենք գտնել չորս բովանդակալից թվանշաններից բաղկացած ամեն մի թվի լոգարիթմ։ Օրինակ, 61500 թվի լոգարիթմի խարակտերիստիկը պետք է լինի 4, մանտիսը՝ նույնը, ինչ որ 615-ինն է, այսպիսով՝ lg 61500=4,7889։ Նմանապես lg 408=1,6107։

234. Ինքներդ գտեք հետևյալ թվերի լոգարիթմները. 5,13; 51,3; 513; 51300; 2420; 24,2; 2,42; 1790; 21,1; 37700; 37,7; 3,77; 1050; 62,9; 2,03։

Այժմ էլ վճռենք հակառակը.— տված լոգարիթմի միջոցով գտնենք թիվը։ Տված է՝ lg x=2,5378։ Փնտրենք ու գտնենք աղյուսակում 5378 մանտիսը, որից հետո N-ի սյունյակում վերցնենք տասնյակների 34 թիվը. վերևի տողից էլ, այն սյունյակի գլխին, ուր գտնվում է մանտիսը, վերցնենք միավորների 5 թիվը. այդպիսով կգտնենք, որ x=345։

235. Գտեք հետևյալ լոգարիթմներից համապատասխանող թվերը.— 2,9036; 2,2742; 0,2742; 1,2742; 2,9504; 0,0828; 2,0828; 1,7482; 2,7482; 0,6893; 2,6893; 2,7101։

Եթե խարակտերիստիկը լինի 3 կամ ավելի մեծ, այդ դեպքում աղյուսակային թիվը պետք է մեծացնել 10, 100 և այլն անգամ։ Օրինակ՝ lg x=3,7505։ Մանտիսի միջոցով կգտնենք 563 թիվը, իսկ x=563.10 կամ եթե lg x=4,7505, ապա x=563.100=56300։

236. Գտեք հետևյալ լոգարիթմներին համապատասխանող թվերը.— 4,2945; 6,2945; 1,9576; 5,9576; 5,4166; 0,1492; 3,8420; 5,8420; 1,9903; 6,6903; 0,8573։

§ 21. ԹՎԵՐԻ ԿԼՈՐԱՑՈՒՄԸ

Եթե թիվը իր մեջ բովանդակալից թվանշաններից ավելի թվանշաններ պարունակի, առայժմ այդպիսի թվի լոգարիթմը գտնելու համար կըկլորացնենք այն, թողնելով նրա մեջ բովանդակալից 3 թվանշան։ Այսպես, փոխանակ 2,743 թվի լոգարիթմը գտնելու, կգտնենք 2,74-ի լոգարիթմը, փոխանակ 6518 թվինը, կգտնենք lg 6520, և այլն։ Այդպես վարվելով, իհարկե, որոշ չափի սխալ ենք գործում. բայց չպետք է մոռանալ (§ 18), որ լոգարիթմների մեծ մասը մոտավոր թվերով են արտահայտվում. ասել է թե, վրիպակը միշտ էլ գոյություն ունի, ուստի այդպիսի դեպքում պետք է խոսել միայն վրիպակի չափի մասին։ Այն էլ աչքի առաջ պետք է ունենալ, որ չափումներից ստացված թվերը միշտ էլ մոտավոր ճշտությամբ են բերվում։ Հնարավոր վրիպակի մեծությունը կախումն ունի թվի դեն գցված մասից. երբ քառանիշ թվից դեն է գցվում 4-րդ թվանշանը, ապա ամենաանհաջող դեպքում վրիպակը կարող է հասնել մինչև 0,005-ի, այսինքն ամբողջ թվի $^1/_2\%$-ին, մնացած դեպքերում այդ վրիպակն ավելի փոքր է լինում։ Համենայն դեպս, թվերի կլորացումը մինչև 3 թվանշան կշարունակենք այնքան, մինչև որ կծանոթանանք ինտերպոլացումի հետ (§ 24), որը հնարավորություն կտա թվերն ավելի մեծ ճշտությամբ վերցնելու։

237. Գտեք հետևյալ թվերի լոգարիթմները.— 5,174; 5,177; 263,8; 263,4; 30,362; 30,326; 145178; 2,8984; 9652,7; 9658,7։

Այժմ ենթադրենք՝ հարկավոր է լոգարիթմների միջոցով գտնել մի թիվ, որի մանտիսը չկա աղյուսակում. օրինակ՝ lg x=2,5518։ Աղյուսակում կա 5514 մանտիսը, որին համապատասխանում է 356 թիվը և 5527 մանտիսը համապատասխան 357 թվով։ Փնտրելիք x թիվը պետք է գտնվի 356 և 357 թվերի միջև, այսինքն հավասար պետք է լինի 356-ին մի կոտորակի հետ և արտահայտվի 3-ից ավելի բովանդակալից թվանշաններ ունեցող թվով։ Բայց առայժմ մենք աղյուսակային 356 և 357 թվերից կընտրենք այն, որի մանտիսն ավելի մոտիկ է տված 5518 մանտիսին։ Այդ թիվը կլինի 356-ը, հետևապես $x = 356$։

Նորից մի օրինակ. $\lg x = 5{,}9061$։ Աղյուսակում կան 9058 և 9063 մանտիսները։ Սրանցից մոտիկը երկրորդն է. հետևապես $x = 806000$։

238. Գտեք հետևյալ լոգարիթմների համապատասխան թվերը. 2,3847; 4,7625; 0,4950; 3,1718; 1,8244; 0,7207։

§ 22. ՄԵԿ ՄԻԱՎՈՐԻՑ ՓՈՔՐ ԹՎԵՐԻ ԼՈԳԱՐԻԹՄԸ

Մենք արդեն գիտենք, որ $\lg 1 = 0$, և որ մեկից փոքր թվերի լոգարիթմները բացասական են։

Կոտորակային կարգերի միավորների համար կստանանք՝

$$\lg, 01 = -1$$
$$\lg 0{,}01 = -2$$
$$\lg 0{,}001 = -3$$
$$\lg 0{,}0001 = -4$$

և այլն։

Մնացած կոտորակային թվերի լոգարիթմներն արտահայտվում են խառը բացասական թվերով։ Օրինակ, $\lg 0{,}027$ պետք է գտնվի -2-ի և -1-ի միջև [որովհետև $0{,}01 < 0{,}027 < 0{,}1$]։ Մենք կարող ենք գտնել այդ լոգարիթմը, աչքի առաջ ունենալով, որ $0{,}027 = \frac{27}{1000}$։

$$\lg 0{,}027 = \lg 27 - \lg 1000 = 1{,}4314 - 3 = -1{,}5686։$$

Դուք նկատեցիք, անշուշտ, որ 27-ը 1000-ի վրա բաժանելիս, փոխվեց վոչ միայն նրա լոգարիթմի խարակտերիստիկը, այսինքն $c+1$-ը դարձավ -1, այլև 4314 մանտիսը դարձավ 5686։ Դրական լոգարիթմը բացասականի և հակառակը վերածելու դեպքում միշտ այդպես կլինի։

Ենթադրենք, օրինակ,

$$\lg a = -2{,}4961$$

Այն ժամանակ

$$\lg 1000a = \lg a + 3 = 0{,}5039$$

§ 19-ի թեորեմից մի այդպիսի բացառություն այնքան անհարմարություն է առաջացնում, որ մտածել են մի կողմ թողնել այդ յեղանակը. խառը բացասական թիվ կազմում են՝ ամբողջ մասին (խարակտերիստիկին) ավելացնելով բացասական միավոր, իսկ կոտորակային մասին (մանտիսին)—դրական միավոր, որից լոգարիթմի մեծությունը չի փոխվի։ Այդպիսի ձևափոխում կատարելով վերջին $-2{,}4961$ լոգարիթմի հետ կստանանք.

$$-2{,}4961 = -3 + 0{,}5039$$

Հետևանքը գրվում է մեկ թվով, որի ամբողջի մասի վրա դրվում մինուս այս ձևով. $\bar{3}$,5039։ Այժմ մանտիսը դրական է և չի փոխվի վոչ մի ամբողջ թիվ ավելացնելիս կամ հանելիս։

239 Այս յեղանակով ձևափոխեցեք հետևյալ բացասական լոգարիթմները.—

$$-1,7043; -5,2962; -3,4567; -0,6678; -2,9341; -0,5008։$$

Վերադառնանք 0,027 թվի լոգարիթմին։ Մենք գտանք արդեն, վոր

$$\lg 0,027 = 1,4314 - 3$$

Վորպեսզի այս լոգարիթմը դրական մանտիսով ստանանք, հարկավոր է միայն նրա խարակտերիստիկից հանել 3, առանց ձեռք տալու մանտիսին, այդպես վարվելով կստանանք

$$\lg 0,027 = \bar{2},4314$$

Այսպես, ուրեմն, միավորից փոքր թվերի լոգարիթմների մանտիսի հարցը լուծվում է հասարակ ձևով. մենք գտնում ենք նրանց մանտիսը ամբողջ թվի բովանդակային թվանշանների միջոցով։

Նայելով, թե կոտորակի բովանդակային առաջին թվանշանը ստորակետից աջ վորերորդ տեղումն է գտնվում, ըստ այնմ էլ խարակտերիստիկը փնտրելու որենք են դուրս բերում։ Վերը տեսանք, վոր 0,01-ի և 0,1-ի միջև գտնվող թվերի լոգարիթմը պետք է գտնվի —2-ի և —1-ի միջև, բայց վորովհետև մանտիսը վերցնում ենք դրական, ուստի խարակտերիստիկը պետք է լինի դրանցից փոքրագույնը, այսինքն՝ —2-ը։ Այն կոտորակը, վորի բովանդակային թվանշանն սկսվում է ստորակետից աջ չորրորդ տեղից, օրինակ, 0,000819-ը գտնվում է 0,0001-ի և 0,001-ի միջև, իսկ նրա լոգարիթմը՝ —4-ի և —3-ի միջև, հետևապես խարակտերիստիկը կլինի —4-ը։ Ընդհանրապես յերևում է, վոր բացասական խարակտերիստիկն այնքան միավորներ ունի, վորքան զերոներ ունի թիվը ձախ կողմում մինչև բովանդակային առաջին թվանշանը, հաշված և զերո ամբողջը։

Օրինակ։ Վերցնենք lg 0,00764. այստեղ թվի ձախ կողմում մինչև բովանդակային առաջին թվանշանը գտնվում է 3 զերո, ուստի խարակտերիստիկը հավասար է —3-ի։ Մանտիսն աղյուսակում վերցնում ենք 764 թվինը և ստանում ենք.

$$\lg 0,00764 = \bar{3},8831$$

240. Գտեք հետևյալ թվերի լոգարիթմները. 0,559; 0,000213; 0,01943; 0,81351; 0,0081351; 0,0036254; 0,36254; 0,004148; 0,04148; 0,4148։

Հակառակը լուծելիս, այսինքն, բացասական լոգարիթմի միջոցով թիվը գտնելու համար, կարելի յե առաջուց նշանակել անհրաժեշտ քանակությամբ զերոները, իսկ այնուհետև լոգարիթմի մանտիսի միջոցով գտնել թվի բովանդակային թվանշանները։ Տրված է, օրինակ, lg x=$\bar{2}$,6705։ Վորովհետև խարակտերիստիկը հավասար է $\bar{2}$-ի, ուստի բովանդակային առաջին թվանշանը պետք է գտնվի ստորակետից աջ յերկրորդ տեղում։ Դրա համար էլ գրում ենք 0,0։ Մանտիսի 6705-ի միջոցով գտնում ենք 468 թիվը։ Հետևապես կստանանք՝ x=0,0468։

241. *Հետևյալ լոգարիթմների միջոցով գտեք համապատասխան թվերը․* $\overline{3},2012$; $\overline{1},7568$; $\overline{4},0829$; $\overline{2},9364$; $\overline{1},1507$; $\overline{3},6362$; $\overline{2},4908$։

Տեսնենք՝ բացասական լոգարիթմների հետ ինչպես են գործողությունները կատարում։

Քննեցեք և ստուգեցեք հետևյալ գումարումներն ու հանումները։

$$+\begin{array}{r}\overline{2},8106\\ 1,5341\\ \hline 0,3447\end{array}\qquad +\begin{array}{r}\overline{3},5362\\ 1,6272\\ \hline \overline{1},1634\end{array}\qquad -\begin{array}{r}\overline{2},0898\\ 0,1374\\ \hline \overline{3},9524\end{array}\qquad -\begin{array}{r}\overline{4},6497\\ \overline{5},7638\\ \hline 0,8859\end{array}\qquad -\begin{array}{r}1,3918\\ \overline{3},4506\\ \hline 3,9412\end{array}$$

Ստուգեցեք նմանապես հետևյալ բազմապատկումները․

$$\overline{3},6465 \cdot 2 = \overline{5},2930$$

$$\overline{1},4178 \cdot 4 = \overline{3},6712$$

$$\overline{2},8523 \cdot 6 = \overline{7},1138$$

Ինչ վերաբերում է բացասական լոգարիթմների բաժանման, ապա պետք է իմանալ հետևյալը․ բաժանելիի խարակտերիստիկը լրացվում է այնքան բացասական միավորներով, վոր առանց մնացորդի բաժանվի բաժանարարի վրա։ *Մանտիսին ավելացնում են նույնքան դրական միավորներ, վորոնցից և սկսվում է մանտիսի բաժանումը։*

Օրինակ՝ *$\overline{1},6276$-ը բաժանել 3-ի։ Խարակտերիստիկին ավելացնում ենք $\overline{2}$, քանորդում ստացվում է խարակտերիստիկ $\overline{1}$։ Մանտիսի վրա ավելացնենք 2 ամբողջ միավոր․ կդառնա 2,6276. այդ դեպքում քանորդի մանտիսը կլինի 8759-ը, այսպիսով ամբողջ քանորդի համար կստանանք $\overline{1},8759$ լոգարիթմը։*

Վորպեսզի $\overline{5},1081$-ը բաժանենք 4-ով, խարակտերիստիկին ավելացնում ենք $\overline{3}$, քանորդում կստանանք $\overline{2},7770$։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ. *Կատարեք հետևյալ գործողությունները։*

242. $\overline{5},9084+4,2093$; $\quad 2,5271+\overline{1},8263+\overline{3},6792$

243. $0,8534+\overline{1},3695$; $\quad \overline{1},5096+\overline{1},4837+1,3587$

244. $3,4308+\overline{6},8230+2,0871$; $\quad \overline{1},3695+2,5271+\overline{3},4308$

245. $\overline{3},6343-1,4031$; $\quad \overline{2},8651-\overline{1},9277$

246. $\overline{1},0296-2,7138$; $\quad \overline{1},2402-\overline{1},3845$

247. $\overline{1},3001-2,7749$; $\quad 0,1084-1,6972$

248. $\overline{1},3469 \cdot 5$; $\quad \overline{2},8973 \cdot 4$; $\quad \overline{3},7189 \cdot 3$

249. $\overline{3},9417 \cdot 5$; $\quad \overline{1},6582 \cdot 2$; $\quad \overline{4},1383 \cdot 6$

250. $\overline{1},7895 \cdot 3$; $\quad \overline{2},9964 \cdot 4$; $\quad \overline{1},9638 \cdot 3$

251. $\overline{3},9254 \cdot 5$; $\quad \overline{4},8745 \cdot 6$; $\quad \overline{5},8871 \cdot 4$

252. $\overline{1},2069 : 5$; $\quad \overline{4},1383 : 6$; $\quad \overline{7},3695 : 3$

253. $\overline{5},8871 : 2$; $\quad \overline{2},5476 : 4$; $\quad \overline{3},7189 : 2$

254. $\overline{3},0982 : 7$; $\quad \overline{1},3946 : 9$; $\quad \overline{1},2069 : 3$

255. $\overline{4},2642 : 5$; $\quad \overline{2},5486 : 7$; $\quad \overline{5},2788 : 9$

§ 23. ՀԱՇՎՈՒՄՆԵՐ ԼՈԳԱՐԻԹՄՆԵՐԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ.

Հաշվումների մեջ լոգարիթմների կիրառման գաղափարը բավականին պարզ է: Կատարենք միքանի հաշվումներ քառանիշ լոգարիթմների ողնությամբ և պայմանավորվենք միքանի տեխնիկական մանրամասնությունների վերաբերմամբ:

Ամենից առաջ նկատենք, վոր աշխատանքի հաջողության համար **անհրաժեշտ է լոգարիթմական հաշվումներն անպայման վորոշ կարգով դասավորել:** *Թվերը գրել պարզ ու խնամքով, թվանշան թվանշանի տակ և յուրաքանչյուրն իր տեղում:*

Տված թվերը միշտ կենտրոնացնել սյուներով. *այդ հանգամանքը կկրճատի հաշվումները գրի առնելը և դրա հետ միասին հնարավորություն կտա հեշտությամբ վերլուծումներ կատարել:*

Ենթադրենք, որինակ, հարկավոր է հաշվել $5{,}76^2\ 3{,}48$. *տված թվերը նշանակում ենք* a *և* b *տառերով ու գրում.*

$$a=5{,}76$$
$$b=3{,}48$$

այնուհետև, անհայտ հետևանքը նշանակում ենք x *տառով, և գրում հետևյալ ֆորմուլը.*

$$x=a^2b,$$

վորը, լոգարիթմացնելով ստանում ենք.

$$\lg x=2\lg a+\lg b$$

դրանից հետո կազմում ենք հաշվումը մինչև վերջը կատարելու սխեմը, դասավորում նրա մեջ պարունակվող բոլոր տառերը, գծերը, գործողությունների և հավասարությունների նշանները, մինչև x*-ի արժեքն ստանալը:*

$$\begin{array}{rr}
 & \lg a= \\
\hline
 & 2\lg a= \\
+ & \lg b= \\
\hline
 & \lg x= \\
 & x=
\end{array}$$

Սխեմի վերևի տողը գծով բաժանված է հաջորդ տողերից, վորպեսզի սխալմամբ նա ևս չգումարենք մնացածների հետ:

Երբ արդեն պատրաստ է սխեմը, դրում ենք լոգարիթմները և կատարում նշած գործողությունները: **Տված թվերը յերբեք յեվ վոչ մի տեղ յերկրորդ անգամ չեն գրվում:**

Սխեմը պետք է կազմել այնպես, վոր հնարավոր չեղածին չափ միևնույն թվերը չկրկնվեն: Այսպես, a^2b^3*-ը հաշվելու համար սկսում ենք* $\lg a$ *և* $\lg b$*-ից, հետո գրում* $2\lg a$ *և* $3\lg b$ *և այլն:*

Վորովհետև լոգարիթմների գումարումն ավելի պարզ գործողություն է, քան հանումը, ուստի 2, 4, 5 և որանց նման այլ բաժանարարներն ավելի լավ է ֆորմուլներում փոխարինել հետևյալ արտադրիչներով. $\frac{1}{2}=0{,}5$; $\frac{1}{4}=0{,}25$; $\frac{1}{5}=0{,}2$; . . . *Բացի այդ,* **կարելի յե նայել ամեն** մի հանումն փոխարինել հակառակ նշան ունեցող թվով: *Այդպիսի փոխարինումների ժամանակ հարկավոր է միայն բացասական դարձած մանտիսը փոխարինել դրականով: Օրինակ.*

$$-3,6471 = \bar{4},3529$$
$$-2,8062 = \bar{1},1938$$

ՑՈՒՑՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ.—Լոգարիթմի նշանը փոխելիս խարակտերիստիկը փոխվում է իր նշանը և փոփոխվում է իր աբսոլյուտ մեծությունը մեկ միավորով (բացասական խարակտերիստիկի աբսոլյուտ մեծությունն ավելի մեծ է, քան դրականինը): Մանտիսի թվանշանները գրում են ձախից աջ, լրացնելով մյուս մանտիսի համապատասխան թվանշանները մինչև 9, իսկ վերջինը՝ մինչև 10:

Հաշվումների օրինակներ.

$$1)\ x = \frac{m^2 - n^2}{mn}$$

$$\lg x = \lg(m+n) + \lg(m-n) - \lg m - \lg n$$

$\lg(m+n) = 0,7551$	$m = 5,43$
$\lg(m-n) = 0,7135$	$n = 0,26$
$-\lg m = \bar{1},2652$	$m+n = 5,69$
$-\lg n = 0,3850$	$m-n = 5,17$
$\lg x = 1,3188$	$\lg m = 0,7348$
$x = 20,8$	$\lg n = \bar{1},4150$

$$2)\ x = \frac{a^3 \sqrt[5]{b^2 c}}{\sqrt[3]{d \cdot e}}$$

$$\lg x = 3\lg a + \frac{1}{5}\left(2\lg b + \lg c\right) - \left(\frac{1}{3}\lg d + \lg e\right)$$

$$\left.\begin{aligned} 2\lg b &= \bar{1},7266 \\ \lg c &= 0,6838 \end{aligned}\right\} +$$
$$0,4104 : 5 = 0,0821$$

$$\left.\begin{aligned} 3\lg a &= \bar{4},7975 \\ &\ 0,0821 \end{aligned}\right\} +$$
$$\bar{4},8796$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{3}\lg d &= \bar{1},8997 \\ \lg e &= 0,4265 \end{aligned}\right\} +$$
$$0,3262$$

$$\left.\begin{aligned} &\bar{4},8796 \\ &0,3262 \end{aligned}\right\} -$$

$$\lg x = \bar{4},5534$$
$$x = 0,0003576$$

$a = 0,0856$	$\lg a = \bar{2},9325$
$b = 0,73$	$\lg b = \bar{1},8633$
$c = 4,828$	$\lg c = 0,6838$
$d = 0,5$	$\lg d = \bar{1},6990$
$e = 2,67$	$\lg e = 0,4265$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ. Կատարեք լոգարիթմների օգնությամբ հետևյալ հաշվումները, նշանակելով տված թվերից յուրաքանչյուրը վորևէ տառով:

256. $0{,}726 \cdot \sqrt{251}$

257. $(0{,}0812)^3 \sqrt[3]{0{,}6314}$

258. $\dfrac{0{,}5874^2}{2{,}13 \cdot 0{,}1361}$

259. $\dfrac{3{,}14 \cdot 25^2}{17}$

260. $\dfrac{3{,}14 \cdot 1{,}4 \cdot 18^2}{35}$

261. $\sqrt{\dfrac{62{,}14 \cdot 5{,}137}{128}}$

262. $\dfrac{3{,}07 \cdot 0{,}00624}{\sqrt{0{,}856}}$

263. $\dfrac{0.47^3 \cdot \sqrt[4]{0{,}003} \cdot 1{,}2}{0{,}893 \cdot (0{,}6725^2)}$

264. $\sqrt[3]{\dfrac{7}{3}\sqrt[4]{6}}$

265. $\sqrt[3]{\dfrac{716{,}5}{\sqrt{2}}}$

§ 24. ԻՆՏԵՐՊՈԼՅԱՑԻՈՒՄ

Լոգարիթմական հաշվումների ճշտությունը կարելի յե իսկության մոտեցնել, մտցնելով աղյուսակային մանտիսների մեջ այնպիսի ուղղումներ, որոնք համապատասխան լինեն կլորացրած թվերի դեն գցած թվանշաններին։

Յենթադրենք՝ տված է գտնել lg *743,5։ Այդ լոգարիթմը պետք է գտնվի* lg *743=2,8710-ի և* lg *744=2,8716-ի միջև։ 743,5 թիվը 743-ի 744-ի միջինն է։ Դրա համար էլ կվերցնենք 2,8710-ի և 2,8716-ի միջին լոգարիթմը, այսինքն 2,8713-ը, ուրեմն՝*

lg 743,5=2,8713

Մենք, իհարկե, պնդել չենք կարող, որ մեր ստացած լոգարիթմի վերջին թվանշանը ճիշտ է։ Բայց կարող ենք ասել, որ այդ լոգարիթմը ավելի մոտ է իսկականին, քան, օրինակ, 2,8716-ը։

Վերը բերած օրինակում աղյուսակային մանտիսը շտկեցինք թվի կես միավորի չափով։ Բայց շտկումը կարելի յե կատարել միավորի տասնորդական մասի չափով ևս։ Յենթադրենք՝ տված է գտնել lg *208,6։ Աղյուսակում տեսնում ենք, որ* lg *208=3,181։ Նրան հաջորդող 209 թվի լոգարիթմը (տես աղյուսակում) 20 տասհազարերորդականով ավելի յե նախորդից։ Լոգարիթմի այդ հավելումը առաջացել է թվի մեկ միավորով աճելու պատճառով։ Միավորի 0,1-ին համապատասխան չափով, լոգարիթմը շտկելու համար, 20-ը բաժանում ենք 10-ի և ստանում 2 տասհազարերորդական։ Միավորի 0,6-ին կընկնի 6·2=12 տասհազարերորդական։ Լոգարիթմը շտկելու համար այդ հավելումը գումարում ենք մանտիս 3181-ին և ստանում.*

lg 208,6=2,3193

Բերենք մի օրինակ ևս։ Պահանջվում է գտնել lg *662,3։ Աղյուսակը ցույց է տալիս, որ* lg *662=2,8209։ 662 և 663 թվերի մանտիսների տարբերությունը հավասար է 6 տասհազարերորդականի։ Միավորի 0,1-ին ընկնում է 0,6, իսկ 3 տասնորդական մասին կընկնի 0,6·3=1,8∾2 տասհազարերորդական։ Նորից շտկելով լոգարիթմը, կստանանք.*

lg 662,3=2,8211

Հասկանալի է, որ յեթե ստորակետը բովանդակալից 4 թվանշանից բաղկացած թվի մեջ իր տեղը փոխի, դրանով մանտիսը գտնելու կարգը բոլորովին չի խանգարվի։

Օրինակ, 0,3629 թվի լոգարիթմը գտնելու համար նախ նրա յերեք թվանշանի՝ 363-ի միջոցով գտնում ենք մանտիսը, այնուհետև **աղյուսակային տարբերություն** 12-ը. այս բոլորից հետո ստանում ենք.

1,2 · 9=10,8∽11 շտկումը և lg 0,3629=1,5588

266. Գտեք հետևյալ թվերի լոգարիթմները. 127,2; 12,72; 6.518; 651,8; 3207; 0,3207; 0,5454; 54,94; 91350; 0,09135; 82,73; 8,273։

Վորովհետև միևնույն տողի աղյուսակային տարբերությունները համարյա թե նույնն են, ուստի և տասնյակների միևնույն թվով կատարած շտկումները քիչ են տարբերվում միմյանցից։ Աշխատանքները թեթևացնելու համար բոլոր այդ շտկումները հաշված ու զետեղված են յուրաքանչյուրն իր համապատասխան տողի դիմաց։ Այսպես, 29-ով սկսվող տողի դիմաց, թվերին համապատասխան՝ զետեղված են.—1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13։ Ըստ այս աղյուսակի 294,8 թվի մանտիս 4683-ին պետք է ավելացնել (8 տասնորդին համապատասխան) 12, 297,4 թվի մանտիս 4728-ին պետք է ավելացնել 6 և այլն։

267. Օգտվելով շտկումների պատրաստի աղյուսակից, գտեք հետևյալ թվերի լոգարիթմները. 51,62; 5,162; 0,07538; 7,538; 1,496; 1496; 168300; 0,2998; 299,8; 29,98։

Մոտավոր շտկումներով հաշվումների յեղանակը կոչվում է ինտերպոլացում։ Ինտերպոլացումների գործադրման ժամանակ, լոգարիթմներից օգտվելիս՝ ուշադրություն են անում թվի բովանդակալից 4 թվանշանի։ Յեթե թվի մեջ լինեն 4-ից ավելի բովանդակալից թվանշաններ, պետք է կլորացնել այն, դեն գցելով ավելորդ թվանշանները։

Ի՞նչպիսի ճշտությամբ է մոտենում ինտերպոլացումը։ Յերբ աղյուսակային թվի վերջին կարգի միավորը տասնորդական մասով (կարելի յե և հարյուրերորդական մասով) ինտերպոլացնում ենք, համարյա միշտ էլ մանտիսի թվանշանը միանգամայն իսկականն է ստացվում. սակավ դեպքերում իսկականից տարբերվում է 1-ով, ավելի հազվադեպ դեպքերում (աղյուսակի միայն առաջին տողերի համար), 2-ով։ Այդ բանում համոզվելու համար կատարեցեք հետևյալ աշխատանքները. աղյուսակից դուրս գրեցեք 730-ի և 740-ի լոգարիթմների մանտիսները, իսկ 731-ի, 732-ի, 733-ի . . . , 739-ի մանտիսներն ինտերպոլացումներով ինքներդ հաշվեցեք։ Ստացված մանտիսները համեմատեցեք աղյուսակների հետ։ Նույնը կատարեցեք 131, 132, . . . , 139 թվերի լոգարիթմների վերաբերմամբ։ Յերկու օրինակներից վորի՞ մեջ ինտերպոլացման հետևանքներն ավելի ճիշտ դուրս յեկան։

Մեզ մնում է ծանոթանալ, թե ինչպես են գործադրում ինտերպոլացումները հակադարձ խնդրի լուծման դեպքում, այսինքն, ինչպես են գտնում թվերը լոգարիթմների միջոցով։

Տված է. lg x=2,5651։ Աղյուսակում գտնում ենք մանտիս 5647-ը և նրան համապատասխանող 367 թիվը։ Տված մանտիսը 4-ով (տասհազարերորդական մասով) ավելի յե մեր վերցրած աղյուսակային մանտիսից։

Հետևապես փնտրվելիք թիվն էլ 367-ից մեծ է միքանի տասներորդ մասերով։ Վորպեսզի իմանանք՝ ընդամենը քանի մասով է ավելի, հարկավոր է գտնել տասներորդական մասերի մի այնպիսի թիվ, վորին համապատասխան լինի 4-ով (տասհազարերորդական) շտկված մանտիսը։ Այդ շտկումը գըտնում ենք շտկումների բաժնում մանտիս 5647-ի դիմաց և տեսնում ենք, վոր նա համապատասխանում է 3 տասներորդին։ Հետևապես $x=367,3$։

Յեթե տված մանտիսի շտկումը չի գտնվում տպագրած շտկումների բաժնում, այդ դեպքում վերցնում ենք նրան մոտիկ գտնվողը։ Որինակ՝ $\lg x=\bar{1},4178$։ Աղյուսակում գտնում ենք մանտիս 4166-ը, վորը 12-ով փոքր է տվածից։ Այդ տողի շտկումների բաժնում կան միայն 11 և 13։ Վերցնում ենք դրանցից 13-ը. վորովհետև, միօրինակության համար ընդունված է, յերկու միաչափ մոտավորներից միշտ վերցնել մեծը։ Այդպես վարվելով, կստանանք.

$$\lg x=0,2618$$

268. Լոգարիթմների միջոցով գտեք համապատասխան թվերը. 2,9167; 3,3371; 0,6540; $\bar{1}$,1571; 1,5028; 2,6641։

Յերբ հաշվումներն այնքան էլ ճշգրիտ չեն, քառանիշ լոգարիթմները տալիս են թվի յերեք թվանշանները միանգամայն ճիշտ, իսկ չորրորդը համարյա ճիշտ (կասկածելի)։ Շատ դեպքերում այդքանն էլ միանգամայն բավական է, իսկ յերբ հարկավոր է լինում ավելի մեծ ճշտությամբ հաշվումներ անել, գործ են ածում հնգանիշ, յոթանիշ կամ ավելի նշաններով լոգարիթմների աղյուսակ։ Իսկ յերբ, ընդհակառակը, հնարավոր է բավարարվել ավելի պակաս ճշտության հաշվումներով, ոգտվում են յեռանիշ լոգարիթմներով։ Գործնական կյանքում ավելի հաճախ այս աղյուսակների փոխարեն գործ են ածում լոգարիթմական քանոն, վորի հետ կծանոթանանք հետևյալ պարագրաֆում։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

Գտեք հետևյալ լոգարիթմների համապատասխան թվերը, կատարելով ինտերպոլացիա այնտեղ, վորտեղ անհրաժեշտ է, և ժամացույցին նայելով հետևեցեք, թե վորքան ժամանակ եք վատնում թվերը գտնելու համար։ Նախ տված լոգարիթմները գրեցեք սյունակի ձևով, հաշվի չառնելով դրա վրա կորցրած ժամանակը։ Ամբողջ 20 որինակը 15 րոպեից ավելի ժամանակ չպետք է խլի ձեզնից. յեթե 10 րոպեյում գտնեք պատասխանները, նշանակում է՝ ձեր աշխատանքը միջակից ավելի բարձր է։

269. $\lg = 3,5861$	270. $\lg = 6,4893 - 10$
$\lg = \bar{5},6427$	$\lg = 5,8662$
$\lg = 1,4436$	$\lg = 1,5729$
$\lg = 4,7320$	$\lg = 2,9990$
$\lg = 6,9428$	$\lg = 8,5418 - 10$
$\lg = \bar{2},4415$	$\lg = \bar{2},0923$
$\lg = 2,9844$	$\lg = 0,4630$
$\lg = 3,3080$	$\lg = \bar{1},7848$
$\lg = 1,2818$	$\lg = 0,9618$
$\lg = 7,8419 - 10$	$\lg = 1,7276$

Գտեք հետևյալ լոգարիթմների համապատասխան թվերը։ Հաշվեցեք դրա վրա գործադրած ժամանակը.

271.	2,1120	272.	$\bar{1},2480$	273.	3,3808	274.	1,3660
	1.6150		5,4151		7,8973 — 10		4,3925
	8.9312 — 10		3,5674		$\bar{2},7455$		$\bar{6},4105$
	4,8990		1,1174		0,0420		2,9213
	$\bar{1},9462$		0,5132		1,2222		$\bar{2},0621$

Կատարեցեք մատնանշված հաշվումները.

275. $\dfrac{\sqrt{2,607}}{3,512\cdot 0,6851}$ 276. $(0,32941)^2\cdot(5,4718)^3$

277. $\sqrt[3]{25,807\cdot 0,6243\cdot 1,7228}$ 278. $7,782\sqrt{0,81643\,\pi}$

279. $\frac{4}{3}\pi\,(0,6849)^3$ 280. $\dfrac{4,7073}{\sqrt[3]{0,8945}}$

281. $\dfrac{3}{15,616}\sqrt[3]{\dfrac{0,1838}{0,07659}}$ 282. $\dfrac{0,47133\cdot 2,9115}{0,08443\cdot 17,652}$

283. $4\sqrt{(5,1208)^2\cdot 0,07993}$ 284. $\sqrt[3]{0,8626}\cdot\sqrt{0,36425}$

285. $\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5,805\cdot 2,167^3}{0,03714\cdot 6,219}}$ 286. $\frac{3}{4}\sqrt{\dfrac{7,1442}{2,606\cdot 53,24\cdot 0,9514}}$

287. $\dfrac{\sqrt[4]{0,006217}}{4}-\sqrt[3]{5,071^2\cdot 2,386}$ 288. $\dfrac{87,26^3}{15,07}+\dfrac{17}{\sqrt{0,08512}}$

289. $\sqrt[3]{0,7133^4+3,185^3}$ 290. $54,04\cdot 376,2$

291. $\sqrt[3]{0,054\sqrt[3]{0,0003617}}$ 292. $\sqrt[5]{0,0007\sqrt{0,09342}}$

293. $\sqrt[16]{\dfrac{43+5\sqrt[3]{268}}{\sqrt{17}}}$ 294. $\sqrt[11]{\dfrac{12+7\sqrt[5]{277}}{\sqrt[3]{11}}}$

295. *Ընդունելով յերկրի ուղեգիծը (որբիտը) 148.10^6 km շառավիղ ունեցող շրջանագիծ և տարվա տևողությունը 365,25 օր, հաշվեցեք յերկրի՝ արևի շուրջը պտտելու միջին արագությունը մի վայրկյանում։*

296. *Գտեք 13,6 kg-անոց 278 չուգունե ձուլած իրերի արժեքը, յեթե չուգունը, վորի կիլոգրամն արժե 12 կոպ., թանգացավ 16%-ով։*

297. *Գտեք 150 HP (ձիու ուժ) կարողության մեքենայի շոգեկաթ-*

սալի տաքացման մակարդակը, յեթե հայտնի յե, վոր 1 HP-ն պահանջում է 11,8 kg շոգի, և յեթե տաքացման մակարդակի $1m^2$-ը տալիս է 23,5 kg շոգի։

298. Գլանաձև ամանի տրամագիծն է D մետր, իսկ նրա անցքի տրամագիծը հավասար է d մետրի. յեթե նրա միջի ջուրը կանգնած է անցքից h մետր բարձրության վրա, ապա T ժամանակը վայրկյաններով, վորի ընթացքում դատարկվում է ամանը, արտահայտվում է հետևյալ փորմուլով.

$$T=\frac{D\sqrt{h}}{0,62\sqrt{4,9d}}$$

Գտեք T-ն, յեթե D=*0,76* m-ի, d=*0,018* m-ի, h=*0,43* m-ի։

299. Շարժիչ մեծ գլանի d տրամագիծը սանտիմետրով գտնում են հետևյալ փորմուլով.

$$d=14,42\sqrt[3]{\frac{N}{n}},$$

վորտեղ N-ը գլանի հաղորդած կարողությունն է ձիու ուժով, իսկ n-ը գլանի մի րոպեյում կատարած պտույտների թիվը։

Գտեք d-ն, յեթե N=*1216* HP-ի, n=*108*։

300. Գրեցեք շոգեմեքենայի կարողությունը ձիու ուժով արտահայտող փորմուլը, նշանակելով ինդիկատորային միջին ճնշումը մթնոլորտով (շոգու ճնշումը մխոցի մեկ ընթացքի համար) p, մխոցի մակերեսը քառակուսի սանտիմետրերով a, մխոցի ընթացքը մետրերով՝ l, գլանի պտույտների թիվը մեկ վայրկյանում՝ n։

301. Շոգեմեքենայի ապահովիչ քանակի D տրամագիծը սանտիմետրով գտնում են հետևյալ փորմուլով.

$$D=0,6\sqrt{\frac{F}{n-0,412}},$$

վորտեղ F-ը՝ կաթսայի տաքացման մակարդակն է քառակուսի մետրերով, n-ը՝ ճնշումը մթնոլորտով։ Գտեք D-ն, յեթե F-ը=*53* m-ի և n=*5* մթնոլորտի։

302. Շոգեկառքի T քաշող ուժը կիլոգրամներով հետևյալ փորմուլով է արտահայտվում.

$$T=\frac{0,65pd^2l}{D},$$

վորտեղ p-ն՝ շոգու աշխատող ճնշումն է մթնոլորտով, d-ն՝ մխոցի ընթացքի յերկարությունը սանտիմետրերով, D-ն՝ շարժող անիվի տրամագիծը սանտիմետրերով։

Գտեք շոգեկառքի քաշող ուժը, յեթե p=*12,5* մթնոլորտի, d=*45,2* cm, l=*60* cm, D=*135* cm։

303. Ջրային n տուրբինի պտույտների թիվը մի րոպեյում հետևյալ փորմուլով է արտահայտվում.

$$n=1,57\cdot H^{\frac{5}{4}}\cdot N^{\frac{1}{2}},$$

վորտեղ H-ը ջրի ճնշումն է մետրերով, N-ը կարողությունն է ձիու ուժով։ Կատարեցեք հաշվումները, յեթե H=*1,8* m-ի և N=*101* HP։

304. Շոգեմուրճի հարվածող մասի (баба) վերելքի h բարձրությունը մետրերով վորոշում են հետևյալ ֆորմուլով.

$$h=0,1\sqrt[3]{G}$$

վորտեղ G-ն հարվածող մասի քաշն է կիլոգրամներով։ Կատարեցեք հաշվումներն, ընդունելով G=527,3 kg-ի։

305. Գտեք յեռանկյան մակերեսը (տես § 40), վորի կողմերը հավասար են 357,4 m-ի, 265,2 m-ի և 187,6 m-ի։

306. Գտեք շրջանի մակերեսը, յեթե նրա շրջանագծի յերկարությունն է 2,48 m։

307. Գտեք հավասարակողմ յեռանկյան կողմը, վորը հավասարամեծ է 17,46 m կողմ ունեցող քառակուսուն։

308. Խորանարդաձև ակվարիումը տանում է 24,15 լիտր ջուր։ Վորոշեցեք ակվարիումի չափերը։

309. Վորոշեցեք կոնաձև հողակույտի ծավալը, վորի հիմքի տրամագիծն է 3,74 m, իսկ բարձրությունը 1,24 m։

310. Գտեք գնդի մակերևույթը, յեթե նրա ծավալը հավասար է 4278 cm³-ի։

311. Գտեք սառույցի խորանարդաձև կտորի քաշը, յեթե այդ խորանարդի կողը հավասար է 0,63 m-ի, իսկ սառույցի տեսակարար կշիռն է 0,9167։

312. Վորքան է կշռում 2,13 m × 9,14 m մեծության արճիճի թերթը, վորի հաստությունն է 3,4 mm, և յեթե արճիճի տեսակարար կշիռն է 11,3։

313. Գտեք 8,275 m յերկարության չուգունե խողովակի քաշը, վորի ներքին տրամագիծն է 41,4 cm, արտաքինը՝ 44,2 cm, իսկ չուգունի տեսակարար կշիռը հավասար է 7,25-ի։

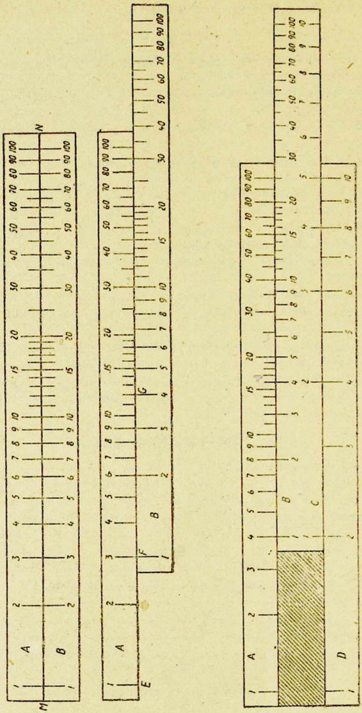
§ 25. ԼՈԳԱՐԻԹՄԱՅԻՆ ՔԱՆՈՆ

Կտրեք միլիմետրային թղթից 21—22 cm յերկարության մի շերտ, տարեք նրա մեջտեղով մի գիծ (գծ. 4-ի վրա MN) և վերցրեք նրա վրա 1-ից մինչև 100-ն ամբողջ թվերի լոգարիթմները, մասշտաբ ընդունելով մեկ սանտիմետրը հավասար 0,1-ի այնպես, վոր գծային հատող բաժանումները շարունակվեն MN ուղիղի յերկու կողմում էլ։ Ամեն մի գծիկի յերկու կողմից վերևում և ներքևում դրեք այն թիվը, վորի լոգարիթմին համապատասխանում է տվյալ նշանը։ Այդ կատարելուց հետո կտրեք շերտը MN-ի ուղղությամբ այնպես, վոր ստացվեն յերկու միատեսակ A և B սանդղակներ (շկալ)։

B սանդղակը դեպի աջ առաջ մղեք այնքան, վոր նրա վրայի բաժանում 1-ն ընկնի A սանդղակի բաժանում 3-ի դիմաց։ Այդ դեպքում A սանդղակի EF հեռավորությունը հավասար է lg 3-ի, B սանդղակի FG հեռավորությունը հավասար է lg 4-ի, ուստի

$$EG=\lg 3+\lg 4=\lg 12$$

Հետևապես B սանդղակի բաժանում 4-ը պետք է ընկնի A սանդղակի այն բաժանման դիմաց, վորը համապատասխանում է 4 . 3=12 արտադրյալին, այն, ինչ վոր մենք իրոք տեսնում ենք։ Նույնը վերաբերում է



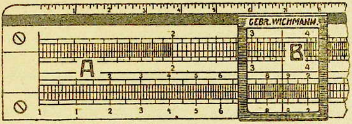
Գծ. 4, 5, 6.

B սանդղակի նաև մյուս բաժանումներին. նրանցից յուրաքանչյուրը կընկնի A սանդղակի այն բաժանման դիմաց, որը տալիս է A սանդղակի համապատասխան թվի և 3-ի արտադրյալը. այսպես, 2-ի դիմաց ընկնում է 6-ը, 5-ի դիմաց՝ 15 և այլն: Հետևապես, մենք ստանում ենք 3-ի յեվ ներքեվի սանդղակի բոլոր թվերի պատրաստի արտադրյալները։

Հասկանալի է, որ եթե մենք ուզում ենք ստանալ 4-ի, 5-ի և այլ թվերի արտադրյալները, այդ դեպքում B սանդղակի բաժանում 1-ը կանգնեցնում ենք A սանդղակի բաժանում 4-ի, 5-ի դիմաց և վերջինի վրա կարդում B սանդղակի վրա գտնվող բազմապատկելիների դիմացի համապատասխան արտադրյալները։

Այդպիսի բազմապատկումը, թերևս, կթվա մեզ որպես լոկ հետաքրքքիր մի փոկուս: Սակայն բանն այն է, որ լոգարիթմային իսկական քանոնի վրա (այդ քանոնը պատկերացված է գծ. 7-ի վրա) ամբողջ թվերի միջտարածությունները բաժանված են ավելի մանր մասնիկների, որի շնորհիվ քանոնի օգնությամբ բազմապատկվում են նաև կոտորակ թվեր. իսկ մեր պարզեցրած ինքնաշինած մոդելը հարկավոր է միայն քանոնի սկզբունքային ծանոթության և գործածության համար։

Եթե քանոնի օգնությամբ կարելի է կատարել բազմապատկում, կարելի է կատարել նաև բաժանում. գծանկար 6-ի վրա պատկերացրած դիրքը օգտագործվում է թվերը 3-ի վրա բաժանելու համար. A սանդղակի թվերը բաժանելիներն են, իսկ նրանց դիմացի B սանդղակը թվերը՝ քանորդներ: Որպեսզի 5-ի վրա բաժանենք, B սանդղակը շարժում ենք այնպես, որ նրա բաժանում 1-ը կանգնի A սանդղակը 5 թվանշանի դիմաց. այդ դեպքում վերևի սանդղակի յուրաքանչյուր թվի դիմաց ներքևինի վրա կընկնի 5-ի վրա բաժանումից ստացվող քանորդը։



Գծ. 7.

6-րդ և 7-րդ գծանկարները պատկերացնում են լոգարիթմային քանոնի ամենագործածական տեսակը: Նրա շիտակ յերեսի կողմում բերված են 4 սանդղակներ, յերկուսը քանոնի անշարժ ծայրում և յերկուսը՝ A շարժական միջին մասի վրա: Յուրաքանչյուր անշարժ սանդղակը միանգամայն նման է իր հետ շփվող շարժական սանդղակին, ինչպես և մեր պարզեցված մոդելի վրա: Վերևի և ներքևի սանդղակները տարբերվում են միմյանցից միայն նրանով, որ ներքևի սանդղակի համար վերցրած է յերկու անգամ ավելի մեծ մասշտաբ: Ուստի ներքևի սանդղակը վերջանում է 10 թվով, որը կանգնած է վերևի սանդղակի ճիշտ մեջտեղում (10-ի լոգարիթմը 1-ի և 100-ի լոգարիթմների միջին թվաբանականն է)։

Բազմապատկման և բաժանման համար կարելի է ոգտվել թե վերևի և թե ներքևի սանդղակներից։

Թե մեկ և թե մյուս գործողությունը կատարվում է քանոնի միջին մասը շարժելով դեպի աջ այնքան, որքան հարկավոր է։ Նախնական վարժությունների համար ավելի լավ է վերցնել միանիշ թվեր, ապա անցնել երկանիշ և եռանիշ թվերի։ Արդյունքում ստորակետը դնելիս չսխալվելու համար հարկավոր է գործողությունն սկսելուց առաջ կշռադատել, թե ինչպիսին է լինելու նրա մեջի բարձր կարգը։

Լոգարիթմական քանոնի ոգնությամբ չափազանց պարզ ձևով են կատարվում քառակուսի աստիճանի բարձրացնելու և արմատ հանելու գործողությունները։ Դժվար չէ հասկանալ, որ վերևի սանդղակի թվերը հավասար են իրենց դիմաց գտնվող ներքևի սանդղակի թվերի քառակուսիներին։ Հիրավի, ներքևի սանդղակի վորեւ n թիվը կանգնում է նրա սկզբից n-ի լոգարիթմին հավասար տարածության վրա։ Բայց քանի որ վերևի սանդղակի մասշտաբը երկու անգամ փոքր է, ապա այդ սանդղակի համապատասխան տեղում ընկնում է այնպիսի N թիվ, որ $\lg N=2 \lg n$, որտեղից հետևում է, որ $N=n^2$ և $n=\sqrt{N}$։ Ուստի քառակուսի աստիճան բարձրացնելու և քառակուսի արմատ հանելու համար բավական է միայն որոշել, թե սանդղակի վոր թիվն է գտնվում մյուս սանդղակի տվյալ բաժանման դիմաց։

Այդ նպատակին ծառայում է երկու սանդղակներին շարժական ուղղահայացը, վորը, ինչպես գծանկար 7-րդում ցույց է տրված, բարակ գծի ձևով նշան է արված շարժական B շրջանակի ապակու վրա։

Յեթե մենք ցանկանում ենք, օրինակ, բարձրացնել 9-ը քառակուսի աստիճանի, ապա շրջանակը շարժում ենք այնպես, որ ապակու վրայի գիծն անցնի ստորին սանդղակի 9 բաժանմունքով։ Այն ժամանակ նույն գծի տակ վերևի սանդղակի վրա կտեսնենք 9-ի քառակուսին։ Ընդհակառակը, թվից քառակուսի արմատ հանելու համար, օրինակ 49-ից, մենք այդ թիվը փնտրում ենք վերևի սանդղակի վրա, իսկ նրա դիմաց՝ ստորին սանդղակի վրա գտնում ենք վորոնելի արմատը։

Վորպեսզի թիվը, օրինակ 2-ը, բարձրացնենք խորանարդ աստիճանի, շարժական փոքրիկ քանոնն այնքան ենք դուրս մղում, որ նրա սկիզբը (1 թվանշանը) կանգնի ստորին սանդղակի 2-ի դիմաց (գծ. 6)։

Այն ժամանակ 2-ի խորանարդը կգտնվի վերևի անշարժ սանդղակի շարժականի 2-ի դիմաց (բացատրությունն ինքներդ տվեք)։

ԳԼՈՒԽ IV

ՅԵՐԿՐՈՐԴ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ ՅԵՎ ՆՐԱ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

§ 26· $y=x^2$ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ ՅԵՎ ՆՐԱ ԳՐԱՖԻԿԸ·

Հետազոտենք, ինչպես ե փոփոխվում y *մեծությունը, վորի կախումն մի այլ* x *մեծությունից արտահայտում ե հետևյալ հավասարումով.*

$$y=x^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Հավասարում (1) ցույց ե տալիս, վոր փոփոխական y*-ը մի այլ փոփոխական* x*-ի քառակուսին ե: Տալով* x*-ին զանազան արժեքներ, կստանանք* y*-ի համապատասխան արժեքները:*

y *ֆունկցիայի և* x *արգումենտի արժեքների կախումն իրարից կարող ենք պատկերացնել աղյուսակի միջոցով, վորտեղ* x*-ի արժեքների տակ կգրենք* y*-ի համապատասխան արժեքները, հաշվելով (1) հավասարումից. որինակ՝*

յեթե $x=0$, *ապա* $y=0^2=0$

» $x=1$, *ապա* $y=1^2=1$

» $x=2$, *ապա* $y=2^2=4$

և այլն:

x *արգումենտի աճող դրական արժեքների համար կազմենք աղյուսակ, սկսելով* $x=0$ *արժեքից.*

x	0	+0,5	+1	+2	+3	. . . .	+∞
y	0	+0,25	+1	+4	+9	. . . . .	+∞

Աղյուսակից յերևում ե.

1) յեթե y *ֆունկցիայի* x *արգումենտը ստանում ե դրական արժեքներ, ապա և* y *ֆունկցիան ստանում ե դրական արժեքներ;*

2) x *արգումենտի անսահման աճելու դեպքում* y *ֆունկցիան ևս անսահման աճում ե;*

3) y *ֆունկցիան համեմատական ե արգումենտի քառակուսուն, վորովհետև մեծանում ե այնքան անգամ, վորքան անգամ մեծանում ե* x^2. *որինակ, յերբ* x *մեծանում ե 1-ից մինչև 3, այսինքն 3 անգամ, ապա* y *մեծանում ե 1-ից մինչև 9, այսինքն 9 անգամ; յերբ* x *մեծանում ե 4 անգամ (1-ից մինչև 4), ապա* y*-ը մեծանում 16 անգամ և այլն:*

Այժմ հետազոտենք y ֆունկցիան արգումենտի բացասական արժեքների նկատմամբ։ Կազմենք դարձյալ x-ի և y-ի համար համապատասխան արժեքների աղյուսակը.

x	0	—0,5	—1	—2	—3	. . . .	—∞
y	0	+0,25	+1	+4	+9	. . . .	+∞

Աղյուսակից յերևում է.

1) յերբ x-ը նվազում է սկսած 0-ից, ապա y-ն աճում է; ինչքան փոքրանում է x-ը, այնքան մեծանում է y-ը. զերոյից սկսած x-ի անսահման նվազելու դեպքում y ֆունկցիան անսահման աճում է;

2) արգումենտի բացասական արժեքների դեպքում y ֆունկցիան ունի դրական արժեքներ;

3) ֆունկցիայի բացարձակ մեծությունը փոփոխվում է համեմատական արգումենտի բացարձակ մեծության քառակուսուն։

Այս յերկու աղյուսակների դիտողությունից գալիս ենք հետևյալ յեզրակացություններին.

1) արգումենտի ամեն տեսակ արժեքների դեպքում y ֆունկցիան միշտ դրական է;

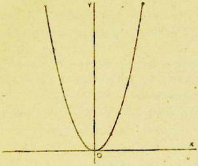
2) արգումենտի անվերջ բացասական արժեքների դեպքում y ֆունկցիան նվազում է մինչև զերոն;

3) արգումենտի աճող դրական արժեքների դեպքում y ֆունկցիան անսահման աճում է;

4) y ֆունկցիայի ամենափոքր արժեքը կամ, ինչպես ասում են, y ֆունկցիայի մինիմումը հավասար է 0-ի։

y ֆունկցիայի փոփոխումը՝ կախված x-ից, հեշտությամբ կարելի է դիտել գրաֆիկի օգնությամբ (գծ. 8)։ Օգտվելով կոորդինատային թղթից, գծենք նրա վրա կոորդինատների առանցքները; x արգումենտի արժեքները ընդունենք վորպես կետերի աբսցիսներ, իսկ y ֆունկցիայի համապատասխան արժեքները վորպես նույն կետերի օրդինատներ։ Նախ և առաջ գծանկարի վրա նշանակենք այն կետերը, վորոնց աբսցիսները և օրդինատները գտնվում են մեր աղյուսակներում, այսինքն հետևյալ կետերը. (—3 ; 9), (—2 ; 4), (—1 ; 1), (—0,5 ; 0,25) ; (0 ; 0) ; (0,5 ; 0,25), (1 ; 1) և այլն։ Վորովհետև, մենք անկախ փոփոխականի արժեքները փոփոխում ենք թռիչքներով, ապա ֆունկցիան էլ փոփոխվում է թռիչքներով; այդ թռիչքները կփոքրանային, յեթե մենք արգումենտի արժեքները փոփոխեինք ավելի աստիճանաբար, օրինակ, մեծացնելով նրա արժեքները միավորի փոխարեն՝ 0,5-ով։ Այդ դեպքում կստանայինք էլ հետևյալ կոորդինատներ ունեցող կետերը. (—1,5 ; 2,25), (—2,5 ; 6,25), (1,5 ; 2,25), (2,5 ; 6,25) և այլն։ Կարելի է յերևակայել, վոր արգումենտին տալիս ենք ավելի էլ փոքր աճեցումներ, օրինակ, 0,1 կամ մինչև անգամ 0,01։ Այն ժամանակ նշանակված սկզբնական կետերի միջև յեղած հեռավորությունները շարունակ կփոքրանան և կետերի շարքը շարունակ կխտանա։ Վերջապես, կարող ենք յերևակայել, վոր արգումենտի արժեքը փոփոխվում է անընդհատ, այսինքն արգումենտը փոփոխվում է վոչ թե թռիչքներով, այլ սահուն, անցնելով մեկ թվային արժեքից մյուսին նրանց միջև գտնվող ամեն տեսակ թվային արժեքների միջոցով. այդ դեպքում ֆունկցիան էլ անընդհատ կփոփոխվի, իսկ ֆունկցիայի և արգումենտի համապատասխան արժեքները պատկերացնող կետերի շարքը կձուլվի, կդառնա մի անընդհատ գիծ։

Գծած կորից երևում է, որ այդ գիծը օրդինատների առանցքի նկատմամբ **համաչափ** դասավորված մի կոր է և նրա գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, իսկ ճյուղերը, այսինքն գագաթից բաժանվող կորերը, արգումենտի անսահման աճելու դեպքում, գնում են դեպի **անսահմանություն**։



Գծ. 8.

Գրաֆիկը գնահատորեն պատկերացնում է y ֆունկցիայի այն հատկությունները, որոնց մասին հիշված է վերևում.

1) y ֆունկցիան միշտ դրական է, որովհետև գրաֆիկն ամեն տեղ գտնվում է **աբսցիսների առանցքի վերևը**;

2) ֆունկցիայի ամենափոքր արժեքը հավասար է զերոյի, որովհետև գրաֆիկն **անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով** և նրանից ներքև չի իջնում, այսինքն y-ը չի կարող ընդունել զերոյից փոքր արժեքներ;

3) y ֆունկցիան անսահման աճում է արգումենտի բացարձակ մեծության անսահման աճելու դեպքում, որովհետև գրաֆիկի ճյուղերն, արգումենտի յուրաքանչյուր անգամ մեծանալու դեպքում, շարունակ հեռանում են կոորդինատների ցերկու առանցքներից։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

315. Համրահաշվական ֆորմուլով արտահայտեցեք քառակուսու կողմի և նրա մակերեսի կախումն իրարից։

316. Քառակուսու կողմին տալով զանազան արժեքներ, հետազոտեք՝ համեմատակա՞ն են արդյոք նրա մակերեսն ու կողմը։

317. Հետազոտեք՝ ինչպես կփոփոխվի քառակուսու մակերեսը, յեթե նրա կողմը թվականորեն աճի կրկնակի, յեռակի և այլն։ Չի՞ կարելի արդյոք ասել, որ քառակուսու մակերեսն ուղիղ համեմատական է նրա կողմն արտահայտող թվի քառակուսուն։

318. Հաշվեցեք այն քառակուսիների կողմերը, որոնց մակերեսներն աճել են կրկնակի, յեռակի և այլն։ Համեմատակա՞ն են արդյոք քառակուսու կողմն ու մակերեսը։

§ 27. $y=kx^2$ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ ՅԵՎ ՆՐԱ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Խնդիր 1. Ջոուլի օրենքով էլեկտրական հոսանքով արտադրվող Q ջերմության քանակը շղթայում ուղիղ համեմատական է y հոսանքի ուժի քառակուսուն, R հաղորդիչի դիմադրության և t ժամանակին։

1 ամպեր ուժի հոսանքը, անցնելով 1 օմ դիմադրությամբ, արտադրում է 1 վայրկ. 0,24 փոքր կալորի ջերմություն։

Արտահայտեցեք Ջոուլի օրենքը ֆորմուլով: Հետազոտեք, ինչպես է փոփոխվում արտադրած ջերմության քանակը, յեթե R=220 օմի, t=60 վայրկ. 1-ից մինչև 10 ամպեր հոսանքի զանազան ուժերի դեպքում: Ինչի՞ յե հավասար այդ դեպքում համեմատականության գործակիցը, յեթե տված է՝ y^2:

Խնդիր 2. Գրեք արգումենտի քառակուսուն համեմատական ֆունկցիայի ընդհանուր ձևը: Բացատրեք համեմատականության գործակցի միտքը:

Խնդիր 3 Կառուցեք $y=0,5x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Ի՞նչպես է փոփոխվում ֆունկցիան արգումենտի դրական և բացասական արժեքների դեպքում: y ֆունկցիան ունի՞ արդյոք մաքսիմում և մինիմում:

Խնդիր 4. Մեկ գծանկարի վրա (միլիմետրային թղթի վրա) կառուցեք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

$$y=0,1x^2; \qquad y=0,5x^2; \qquad y=x^2;$$
$$y=0,2^2; \qquad y=0,8x^2; \qquad y=2x^2;$$
$$y=0,3x^2; \qquad y=0,9x^2; \qquad y=3x^2;$$

Նկատեցեք գործակցի ազդեցությունը կորի ձևի վրա:

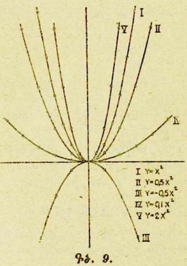
Խնդիր 5. Միևնույն գծանկարի վրա կառուցեք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

1) $y=\frac{3}{5}x^2$ և $y=-\frac{3}{5}x^2$

2) $y=1,5x^2$ և $y=-1,5x^2$:

Ի՞նչպես է դասավորվում գրաֆիկը դրական և բացասական k գործակցի դեպքում: Բացասական գործակցով ֆունկցիան ունի՞ արդյոք մինիմում: Նույն ֆունկցիան ունի՞ արդյոք մաքսիմում (այսինքն ամենամեծ արժեքը):

$y=kx^2$ ձևի ֆունկցիաների գրաֆիկները կազմող կորերը կոչվում են պարաբոլներ: Ինչպես յերևում է 9-րդ գծանկարից, պարաբոլը—համաչափ մի կոր գիծ է, վորի գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, յեվ համաչափության առանցքն ուղղված է օրդինատների առանցքով: Այստեղ մենք պարաբոլը կդիտենք վորպես գրաֆիկ այն ֆունկցիայի, վորը համեմատական է իր արգումենտի քառակուսուն: Պարաբոլը կարևոր դեր է կատարում մեքենագիտության մեջ:



Գծ. 9.

Խնդիր 6. Դիտեցեք ձեր կառուցած $y=x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը և այն օգտագործեք թվերից քառակուսի արմատ հանելու համար:

Ցուցմունք: $\sqrt{y}=x$: Հետևապես քառակուսի արմատ կետի օրդինատից, հավասար է նրա աբսցիսին:

Միլիմետրային թղթի վրա խնամքով գծագրեք $y=x^2$ պարաբոլը և այն օգտագործեք թվերից մոտավոր ճշտությամբ քառակուսի արմատ հանելու համար։ Քառակուսի արմատ հանելու համար հարկավոր է արդյոք պարաբոլի այն ճյուղը, վորը տեղավորված է կոորդինատների II անկյունում։

Կոորդինատային թղթի բաժանումներին կարելի է տալ զանազան արժեքներ. տասնորդական մասերի, միավորների, տասնյակների, հարյուրյակների և այլն, կախված այն թվերի մեծություններից, վորոնցից հանվում է քառակուսի արմատ։

319. Գրաֆիկի օգնությամբ գտեք քառակուսի արմատներ հետևյալ թվերից, 250; 1480; 16800; 625; 157000։ Գտեք, ինչի՞ են հավասար. 25^2; 41^2; 18^2; $7{,}8^2$; $9{,}9^2$; $14{,}8^2$։ Համեմատեք՝ գրաֆիկային վորոշումների հետևանքները հաշված հետևանքների հետ և վորոշեք ձեր գրաֆիկի հարաբերական վրիպակը թվերի տարբեր մեծության դեպքում։

Խնդիր 7. Կառուցեք նույն առանցքների վրա հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

1) $y=2x^1$, 1 միավորը$=0{,}5$ cm մասշտաբով։
2) $y=x^2$, 1 » $=1{,}0$ cm »

Տարբերվո՞ւմ են արդյոք այդ գրաֆիկները միմյանցից։ Արդյոք չի՞ կարելի ասել, վոր $y=x^2$ ֆունկցիաների գրաֆիկները տարբերվում են միմյանցից միայն մասշտաբով։

Ի՞նչպիսի մասշտաբներ պետք է վերցնել, վորպեսզի հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

1) $y=3x^2$ և $y=x^2$
2) $y=5x^2$ և $y=2{,}5x^2$

զույգ-զույգ լինեն միատեսակ։

Եզրակացություններ. 1. $y=kx^2$ ֆունկցիան համեմատական է x արգումենտի քառակուսուն։

2. $y=kx^2$ ֆունկցիան դրական է արգումենտի ամեն տեսակ արժեքների դեպքում, յեթե $k>0$, և բացասական է, յեթե $k<0$։

3. $y=kx^2$ ֆունկցիայի համար գրաֆիկ է հանդիսանում որդինատների առանցքի նկատմամբ համաչափ դասավորված պարաբոլը։ Պարաբոլի համաչափության առանցքը կոչվում է պարաբոլի առանցք։

4. $y=kx^2$ ֆունկցիան պատկերացնող պարաբոլի գագաթը գտնվում է կոորդինատների առանցքների սկզբնակետում։

5. $y=kx^2$ ֆունկցիան, $x=0$-ի դեպքում

ունի մինիմում, յեթե $k>0$;
ունի մաքսիմում, յեթե $k<0$։

Գրաֆիկի մինիմումին և մաքսիմումին համապատասխանող կետը յերկու դեպքերում էլ ներկայանում է կոորդինատների սկզբնակետը։ Այդ կետում պարաբոլը շոշափում է աբսցիսների առանցքը և հատում է որդինատների առանցքը։

6. Գործակից k-ն ազդում է պարաբոլի ձևի վրա, յեթե մասշտաբը մնում է անփոփոխ. մեծ գործակիցների դեպքում պարաբոլը ձգտում է ուղղաձիգ դիրքի, իսկ փոքրերի դեպքում — ավելի թեք դիրքի։ Բայց բոլոր պարաբոլները կարելի է ստանալ $y=x^2$ պարաբոլից, միայն մասշտաբը փոփոխման յենթարկելով։

§ 28․ $y=ax^2+c$ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ ՅԵՎ ՆՐԱ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Խնդիր *1. Հետազոտեք՝ ինչպես ե փոփոխվում*

$$y=x^2+1$$

ֆունկցիան x *արգումենտի փոփոխման դեպքում և համեմատեք նրա փոփոխումը*

$$y'=x^2$$

ֆունկցիայի փոփոխման հետ։

y *և* y' *ֆունկցիաների բաղդատման հետևանքները ներկայացրեք հետևյալ աղյուսակի ձևով.*

x	0	1	2	....
y	1	2	....	....
y'	0	1	....	....
$y-y'$	1	1	....	....

Ի՞նչ կարելի յե ասել միևնույն արժեքներ ունեցող արգումենտի ֆունկցիաների արժեքների մասին։ Ինչքանո՞վ են նրանք զանազանվում։ Ինչի՞ չե հավասար այդ ֆունկցիաների թվային արժեքների տարբերությունը արգումենտի միևնույն արժեքի դեպքում։

Խնդիր *2. Կառուցեք* y *և* y' *ֆունկցիաների գրաֆիկները ըստ կետերի միևնույն առանցքների վրա և միևնույն մասշտաբով։*

Ինչո՞վ են զանազանվում հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

$$y=x^2+1 \text{ և } y=x^2։$$

Ի՞նչ մեծություն ե այդ յերկու ֆունկցիաների ամենափոքր արժեքը։ Ունե՞ն արդյոք նրանք ամենամեծ արժեք։ Արգումենտի ի՞նչպիսի արժեքների դեպքում ֆունկցիաներն ունեն ամենափոքր արժեք։

Խնդիր *3. Հետազոտեք հետևյալ ֆունկցիան.*

$$y=0,5x^2+5։$$

Վորոշեք նրա ամենափոքր արժեքը։ Արգումենտի վո՞ր արժեքին ե նա համապատասխանում։ Կարո՞ղ ե արդյոք y*-ն ընդունել բացասական արժեքներ։*

Համեմատեք տվյալ ֆունկցիան հետևյալ ֆունկցիայի հետ.

$$y'=0,5x^2-5։$$

x-ի ինչպիսի արժեքների դեպքում y' ֆունկցիան բացասական է և ինչպիսի արժեքների դեպքում—դրական։ Արգումենտի ինչպիսի արժեքների դեպքում նա ունի մինիմում։ x-ին ինչպիսի արժեքների դեպքում y և y' ֆունկցիաները դառնում են 0։ Ինչպես են դասավորված նրանց գրաֆիկները կոորդինատների առանցքների նկատմամբ։

Ակներև է, որ հետազոտված ֆունկցիաներն ընդհանուր ձևով կարելի յե գրել այսպես.

$$y=ax^2+c,$$

որտեղ a և c անփոփոխ թվեր են, դրական կամ բացասական: Պարզ է նաև, որ այդ ֆունկցիաների գրաֆիկներն իրենցից ներկայացնում են նույնպիսի կորեր, ինչպիսին են $y=ax^2$ ֆունկցիաների գրաֆիկները։ Զանազանությունը կայանում է նրանում, որ

$$y=ax^2$$

-ի ֆունկցիաների համար գրաֆիկի ներքևի կետը գտնվում է x առանցքի վրա (ինչու), իսկ

$$y=ax^2+c$$

-ի ֆունկցիաների գրաֆիկներում գրաֆիկի ներքևի կետն ունի c-ին հավասար օրդինատ (c կարող է լինել դրական և բացասական)։

Խնդիր 4. Հետազոտեք հետևյալ ֆունկցիան.

$$y=ax^2+c,$$

յեթե a ունի որևէ բացասական արժեք (օրինակ, $-\frac{1}{4}$; $-0{,}5$ և այլն)։ Տվեք c-ին որևէ անփոփոխ արժեք։ Ինչի՞ է հավասար ֆունկցիայի մաքսիմումը։ Ունի՞ նա արդյոք մինիմում։

Գծանկարեք ձեր հետազոտած հետևյալ ձևի

$$y=ax^2+c$$

ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Դիտեցեք նրա դասավորությունը կոորդինատների առանցքների նկատմամբ։ Անցնում է արդյոք ֆունկցիայի գրաֆիկը (0,0) կետով։

Խնդիր 5. Վորոշեք՝ x-ի ինչպիսի արժեքների դեպքում y ֆունկցիան դառնում է 0, յեթե

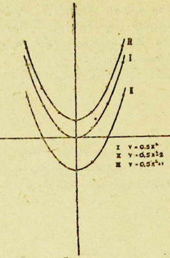
$$y=3x^2+2;$$

$$y=0.2x^2-3;$$

$$y=-x^2+2;$$

$$y=-x^2-2;$$

Տվյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները ո՞ր կետերում են հատում աբսցիսների առանցքը: Գրաֆիկը արդյոք միշտ հատում է աբսցիսների առանցքը:



Գծ. 10

Եզրակացություններ. 1. $y=ax^2+c$ ֆունկցիան համեմատական չէ ոչ x արգումենտին, ոչ էլ նրա քառակուսուն:

2. $y=ax^2+c$ ֆունկցիայի, ինչպես և $y=ax^2$ համար գրաֆիկ հանդիսանում է այն պարաբոլը, որի առանցքը ներկայանում է օրդինատների առանցքը, բայց այն պարաբոլը, որն աբսցիսների առանցքի նկատմամբ c ազատ անդամին հավասար օրդինատով է հեռացված (գծ. 10.):

3. Եթե $a>0$ և $c>0$, ապա պարաբոլը տեղավորվում է աբսցիսների առանցքի վերևը և ֆունկցիան արգումենտի ամեն տեսակ արժեքների դեպքում դրական է:

4. Եթե $a<0$ և $c<0$, ապա պարաբոլը տեղավորվում է աբսցիսների առանցքի ներքևում:

5. Եթե a և c զանազան նշաններ ունեն, ապա պարաբոլը հատում է աբսցիսների առանցքը հետևյալ երկու կետերում $\left(+\sqrt{\frac{c}{a}};0\right)$ և $\left(-\sqrt{\frac{c}{a}};0\right)$:

6. Դրական a-ի դեպքում y ֆունկցիան ունի մինիմում, իսկ բացասական a-ի դեպքում—մաքսիմում:

7. $y=ax^2+c$ ֆունկցիայի գրաֆիկը չի անցնում կոորդինատների սկզբնակետով (գծ. 10):

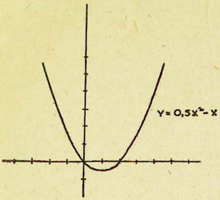
§ 29. $y=ax^2+bx$ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ ԵՎ ՆՐԱ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ.

Խնդիր 1. Հետազոտեք՝ ինչպես է փոփոխվում հետևյալ ֆունկցիան.

$$y=0,5x^2-2x:$$

x-ի ինչպիսի արժեքների դեպքում y ֆունկցիան դառնում է 0: Արգումենտի զանազան արժեքների դեպքում ֆունկցիայի հետազոտման հետևանքները դասավորեք աղյուսակում:

Խնդիր 2. Գծանկարեք $y=0,5x^2-2x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Ինչի՞ն է կայանում այդ գրաֆիկի առանձնահատկությունը։ Նա ինչով է տարբերվում $y'=x^2+c$ ձևի ֆունկցիաների գրաֆիկներից։ Անցնում է արդյոք y ֆունկցիայի գրաֆիկը կոորդինատների սկզբնակետով։ y ֆունկցիայի գրաֆիկը վո՞ր կետերում է հատում աբսցիսների առանցքը։



Գծ. 11.

Եզրակացություններ. 1. $y=ax^2+bx$ ձևի ֆունկցիան դառնում է 0, յերբ $x_1=0$ և $x_2=-\frac{b}{a}$։

2. $y=ax^2+bx$ ձևի ֆունկցիայի գրաֆիկն է այն **պարաբոլը**, վորը հատում է աբսցիսների առանցքը հետևյալ կետերում. $(0; 0)$ և $\left(-\frac{b}{a};0\right)$, այսինքն y ֆունկցիայի գրաֆիկն անցնում է կոորդինատների **սկզբնակետով** (գծ. 11)։

§ 30. $y=(x+b)^2$ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ ՅԵՎ ՆՐԱ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Նախորդ պարագրաֆներում հետազոտված յերկրորդ աստիճանի ֆունկցիաներն արտահայտվում եյին արգումենտի միջոցով կամ միանդամի ձևով, ինչպես, որինակ, հետևյալ ֆունկցիաները.

$$y=x^2 \ldots (1) \text{ և } y=kx^2 \ldots (2)$$

կամ յերկանդամի ձևով, ինչպես հետևյալ ֆունկցիաները.

$$y=ax^2+c \ldots (3) \text{ և } y=ax^2+bx \ldots (4)։$$

(1) և (2) ֆունկցիաների հանրահաշվական արտահայտությունը բաղկացած է յերկրորդ աստիճանի անկախ փոփոխականը պարունակող միայն մի անդամից։ (3) ֆունկցիայի հանրահաշվական արտահայտության մեջ մտնում է յերկրորդ աստիճանի անկախ փոփոխականը և փոփոխական չպարունակող ելի մի անդամ, վորը կոչվում է ազատ անդամ, սակայն նրա մեջ չի պարունակվում նաև առաջին աստիճանի անկախ փոփոխականը։

(4) ֆունկցիայի հանրահաշվական արտահայտությունը պարունակում է փոփոխականի յերկրորդ և առաջին աստիճանի անդամները, բայց չի պարունակում ազատ անդամ։

Այս պարագրաֆում կդիտենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$y=(x\pm b)^2։$$

Այդ ֆունկցիայի հանրահաշվական արտահայտությունը ներկայացնում է իրենից առաջին աստիճանի **յերկանդամի լրիվ քառակուսին**, այսինքն մի **յեռանդամ**։ Բանալով փակագծերը՝ կստանանք.

$$y=x^2\pm 2bx+b^2։$$

Հետազոտենք՝ ինչպես են փոփոխվում այդ ձևի ֆունկցիաները x-ի փոփոխման դեպքում։

Խնդիր *1. Հետազոտենք՝ ինչպես է փոփոխվում հետևյալ ֆունկցիան.*

$$y=(x+1)^2$$

x *արգումենտի զանազան դրական և բացասական արժեքների դեպքում։ Համեմատեք* y-*ը հետևյալ ֆունկցիաների հետ.*

$$y'=(x-2)^2 \text{ և}$$

$$y''=x^2$$

Հետազոտման հետևանքները դասավորեք հետևյալ աղյուսակի ձևով.

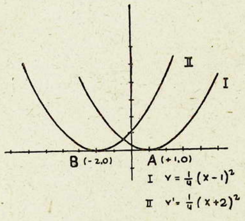
x	—3	—2	—1	. . .
y	4	1	. . .	. . .
y'	25	16	. . .	. . .
y''	9	4	. . .	. . .

x-*ի ինչպիսի արժեքների դեպքում* y, y' *և* y'' *ֆունկցիաները դառնում են 0։ Ցե՞րբ են նրանք աճում և յե՞րբ են նվազում։*

Խնդիր *2. Գրաֆիկորեն արտահայտեք* y, y' *և* y'' *ֆունկցիաների հետազոտման հետևանքները, կառուցելով կոորդինատների միևնույն առանցքների վրա բոլոր յերեք ֆունկցիաների գրաֆիկները ըստ համապատասխան կետերի։ Ի՞նչպիսի կորեր եք ստանում* y *և* y' *ֆունկցիաների համար։ Ինչո՞վ են տարբերվում դրանք* y'' *ֆունկցիայի գրաֆիկից։ Օրդինատների առանցքից վո՞ր կողմը և վո՞րքանով են հեռացված* y *և* y' *ֆունկցիաների գրաֆիկները։ Կարելի՞ չե արդյոք վերադրման միջոցով համատեղել հետազոտվող ֆունկցիաների գրաֆիկները (համատեղել, որինակ, գագաթները և ստացված կորերի առանցքները)։* x-*ի ինչպիսի արժեքների դեպքում գրաֆիկը հատում կամ շոշափում է աբսցիսների առանցքը։*

Խնդիր *3. Գծանկարեք հետևյալ ֆունկցիայի գրաֆիկը.*

$$y=\frac{1}{4}\left(x-2\right)^2$$



Գծ. 12.

Ինչո՞վ է տարբերվում այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը հետևյալ ֆունկցիայի գրաֆիկից. $y'=(x-2)^2$

Եզրակացություններ։ *1.* $y=(x+b)^2$ *ձևի ֆունկցիան կարող է ընդունել միայն դրական արժեքներ։*

2. y *ֆունկցիան դառնում է 0, յեթե* $x=-b$։

3. y *ֆունկցիայի գրաֆիկը կոորդինատների սկզբնակետից* **աբսցիսների առանցքով** —b-**ին հավասար տարածության վրա հեռացված պարաբոլն է** *(գծ. 12)։*

4. Անփոփոխ m արտադրիչը $y=m(x+b)^2$ ձևի ֆունկցիայում ազդում է ֆունկցիայի աճման արագընթացության վրա, այսինքն գրաֆիկի վերելքի ուղղաձգության կամ թեքության վրա:

§ 31. $y=ax^2+bx+c$ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ ՅԵՎ ՆՐԱ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Նախորդ պարագրաֆներում հետազոտեցինք հետևյալ ֆունկցիաները.

$$y=ax^2;$$

$$y=ax^2+c;$$

$$y=ax^2+bx$$

$$\text{և } y=a(x+b)^2$$

Այդ բոլոր ֆունկցիաները կախումն ունեյին արգումենտի քառակուսուց, վորի համար էլ կոչվում են յերկրորդ կարգի ֆունկցիաներ:

Քառակուսի հավասարումներն ուսումնասիրելով տեսանք, վոր մի անհայտից կախված յերկրորդ կարգի ավելի ընդհանուր հանրահաշվական արտահայտություն է ներկայացնում իրենից հետևյալ յեռանդամը.

$$ax^2+bx+c:$$

Ակներև է, վոր յերկրորդ կարգի ֆունկցիայի ավելի ընդհանուր արտահայտություն մեկ փոփոխականից ներկայացնում է նաև

$$y=ax^2+bx+c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Հետազոտման հարմարության համար մենք յերկրորդ աստիճանի յեռանդամը, վորով հանրահաշվականորեն արգումենտի միջոցով արտահայտվում է ֆունկցիան, կարող ենք ձևափոխել այսպես.

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right),$$

վորտեղ a, b և c անփոփոխ թվեր են, հետևապես $\frac{b}{a}$ և $\frac{c}{a}$ նույնպես անփոփոխ թվեր են: Համառոտ նշանակենք այսպես.

$$\frac{b}{a}=p; \quad \frac{c}{a}=q:$$

Այդ դեպքում մեր ֆունկցիան կընդունի հետևյալ ձևը.

$$y=a(x^2+px+q).$$

Այժմ հարց է տրվում. ինչ ձևով կարելի յե հաշվել y-ի արժեքները:

Ակներև է, վոր նախ պետք է հաշվել փակագծերի մեջ գտնվող յեռանդամի արժեքները և ապա բազմապատկել նրանց a գործակցով:

Այստեղից հետևում է, վոր $y=ax^2+bx+c$ ձևի ֆունկցիայի հետազոտումը միշտ կարելի յե փոխարինել $y'=x^2+px+q$ ֆունկցիայի հետազոտմամբ, վորտեղ

$$p=\frac{b}{a} \text{ և } q=\frac{c}{a},$$

բաժանելով այնուհետև այդ ֆունկցիայի արժեքները a-ով։

Օրինակ.

$$y=3x^2-6x+4,5=3(x^2-2x+1,5)։$$

Նախ հետազոտում ենք $y=x^2-2x+1,5$ ֆունկցիայի արժեքները և ապա այդ արժեքները մեծացնում 3 անգամ, գրելով կատարվող փոփոխումները։

Ֆունկցիաների հետազոտման ժամանակ առանձնապես կարևոր է պարզել, թե արգումենտի ինչպիսի արժեքների դեպքում ֆունկցիան դառնում է 0, արգումենտի ինչպիսի արժեքների դեպքում նա աճում է և ինչպիսիների դեպքում—նվազում, արգումենտի ինչպիսի արժեքների դեպքում նա դրական է և ինչպիսիների դեպքում—բացասական, և, վերջապես, արգումենտի ինչպիսի արժեքների դեպքում նա ունի մաքսիմում և մինիմում։ Վերցնենք y ֆունկցիան, վորի կախումը x-ից արտահայտվում է հետևյալ հավասարման միջոցով.

$$y=x^2+px+q,$$

վորտեղ p և q անփոփոխ թվեր են։ Այժմ հարց է տրվում, x-ի ինչպիսի արժեքների դեպքում y ֆունկցիան դառնում է 0։ Յեթե $y=0$, ապա, արգումենտի նույն արժեքների դեպքում, կստանանք.

$$x^2+px+q=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

իսկ այս դեպքում անկախ փոփոխականը կարելի յե արտահայտել p և q անփոփոխների միջոցով, վճռելով (2) հավասարումը.

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

Քառակուսի հավասարումների տեսությունից հայտնի յե, վոր՝

1. Յեթե արմատական արտահայտությունը, վորը կոչվում է հավասարման դիսկրիմինանտ, հավասար է զերոյի, այսինքն յեթե

$$\frac{p^2}{4}-q=0,$$

ապա (2) հավասարումն ունի մի արմատ։

Այս դեպքում այդ արմատը հավասար է $-\frac{p}{2}$, այսինքն y ֆունկցիան դառնում է 0, արգումենտի հետևյալ արժեքի դեպքում.

$$x=-\frac{p}{2};$$

2. Յեթե $\frac{p^2}{4}-q>0$, ապա (2) հավասարումն ունի յերկու արմատ; հետևապես y ֆունկցիան դառնում է 0, x արգումենտի այն յերկու արժեքների դեպքում, վորոնք վորոշվում են (2) հավասարումից;

3. Յեթե $\frac{p^2}{4}-q<0$, ապա հավասարում (2) արմատներ չունի, և y

ֆունկցիան, արգումենտի վոչ մի արժեքների դեպքում, չի դառնում 0։

Նկատենք, վոր **ֆունկցիայի այն արժեքները, վորոնք դարձնում են նրան զերո, կոչվում են ֆունկցիայի արմատներ:**

Այսպես, ուրեմն, ֆունկցիայի արմատները գտնելու համար պետք է ֆունկցիայի հանրահաշվական արտահայտությունն արգումենտի միջոցով հավասարեցնել զերոյի և վճռել ստացված հավասարումն արգումենտի նկատմամբ։ **Հավասարման արմատները ֆունկցիան դարձնում են զերո:**

y ֆունկցիայի հանրահաշվական հետազոտմամբ մենք վճռեցինք նրա արմատների վերաբերյալ հարցը, այսինքն արգումենտի այն արժեքնե րի, վորոնք դարձնում են նրան զերո։

Իսկ արգումենտի փոփոխման դեպքում ֆունկցիայի փոփոխման հարցը հեշտությամբ վճռվում է, կառուցելով ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Ցույց տանք օրինակով, թե ինչպես է կատարվում ընդհանուր ձևի լրիվ քառակուսի ֆունկցիայի հետազոտումը գրաֆիկի օգնությամբ։

Օրինակ *1. Հետազոտենք հետևյալ ֆունկցիան.*

$$y = x^2 - 3x + 2.$$

Կառուցում ենք ֆունկցիայի գրաֆիկը առանձին կետերով (գծ. 13)։ Ցեթե

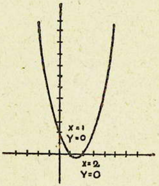
$$x = -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

այդ դեպքում

$$y = 20,\ 12,\ 6,\ 2,\ 0,\ 0,\ 2,\ 6,\ 12\ \ldots$$

ֆունկցիայի գրաֆիկը հատում է xx-*երի առանցքը այն կետերում, վորոնց աբսցիսները հավասար են 1-ի և 2-ի, հետևապես,* y-*ը դառնում է զերո, յեթե*

$$x_1 = 1 \text{ և } x_2 = 2.$$



Գծ. 13.

Ցեթե ստուգենք հետևանքները, հաշվելով $x^2 - 3x + 2 = 0$ *հավասարման դիսկրիմինատը, տպա կտեսնենք, վոր*

$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{(-3)^2}{4} - 2 = \frac{9}{4} - 2 = 2\frac{1}{4} - 2 = \frac{1}{4} > 0;$$

հետևապես, ֆունկցիան ունի յերկու արմատ։

Գրաֆիկը տալիս է այն բոլոր հարցերի պատասխանը, վորոնք առաջանում են արգումենտից ֆունկցիայի կախումն ունենալու պատճառով։ Ինչպես վոր, գրաֆիկից յերևում է.

1. Ֆունկցիան նվազում է $+\infty$*-ից մինչև* $-\frac{1}{4}$, *յերբ* x*-ն աճում է* $-\infty$*-ից մինչև* $1\frac{1}{2}$ *և աճում է* $-\frac{1}{4}$*-ից մինչև* $+\infty$, *յերբ* x*-ն աճում է* $1\frac{1}{2}$*-ից մինչև;* $+\infty$

2) Ֆունկցիան ունի մինիմում, յերբ $x=1\frac{1}{2}$;

3) Արգումենտի +1-ի և + 2-ի միջև յեղած արժեքների համար ֆունկցիան բացասական է; արգումենտի $x=+1$ *և* $x=+2$ *արժեքների համար ֆունկցիան հավասար է զերոյի, իսկ մնացած բոլոր արժեքների համար ֆունկցիան դրական է:*

Իսկ ինչ վերաբերում է գրաֆիկին, **վերջինս իրենից ներկայացնում է նույն այնպիսի մի պարաբոլ, ինչպիսին է** $y=x^2$ **ֆունկցիայի գրաֆիկը, միայն իր տեղից հրված՝ կոորդինատների առանցքների նկատմամբ:**

Այդ ապացուցելու համար մեր յեռանդամը ձևափոխում ենք այսպես.

$$y=x^2-3x+2=x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{9}{4}-2\right)=$$

$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4},$$

Այսպես, ուրեմն,

$$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\ \ldots\ldots\ (3)$$

Նախորդ պարագրաֆում ապացուցված էր, վոր

$$y''=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\ \ldots\ldots\ldots\ (4)$$

ֆունկցիայի գրաֆիկն իրենից պատկերացնում է $y'=x^2$ *ֆունկցիայի գրաֆիկը, միայն օրդինատների առանցքից* $\frac{3}{2}$*-ով իր տեղից հրված դեպի աջ: (3) հավասարությունից մենք տեսանք, վոր արգումենտի նույն արժեքների համար* y *ֆունկցիայի օրդինատները* $\frac{1}{4}$*-ով փոքր են, քան* y'' *ֆունկցիայի օրդինատները, հետևապես* y *ֆունկցիայի գրաֆիկը՝* y'' *ֆունկցիայի գրաֆիկն է, միայն* $\frac{1}{4}$*-ով իր տեղից* **հրված դեպի ներքև:** *Ուրիշ խոսքերով՝* y **ֆունկցիայի գրաֆիկը կարելի է ստանալ տեղափոխելով** y'' **ֆունկցիայի գրաֆիկը դեպի աջ** $\frac{3}{2}$ **միավորով և դեպի ներքև** $\frac{1}{4}$ **միավորով:** *14-րդ գծանկարի վրա ցույց է տրված* y' *ֆունկցիայի գրաֆիկի ձևափոխումը նախ* y''*-ի գրաֆիկի և ապա* y*-ի գրաֆիկի՝ յերկու զուգահեռ տեղափոխումների միջոցով:*

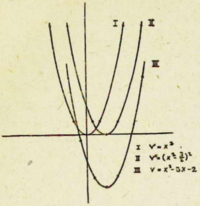
Օրինակ 2. *Հետազոտենք հետևյալ ֆունկցիան.*

$$y=2x^2+5x+5$$

Դարձյալ կառուցում ենք $y=2x^2+5x+5$ *ֆունկցիայի գրաֆիկը առանձին կետերով.*

$$x=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots$$

$$y=\ 8,\ 3,\ 2,\ 5,\ 12,\ 23\ \ldots\ldots$$



Գծ. 14.

Կառուցելով գրաֆիկը, համոզվում ենք, վոր հավասարումն իսկական արմատներ՝ չունի, վորովհետև գրաֆիկը վոչ մի տեղ չի հատում աբսցիսների առանցքը։ Իսկ այդ նշանակում է, վոր արգումենտի վոչ մի արժեքների դեպքում ֆունկցիան 0 չի դառնում։

Վորպեսզի վորոշենք x-ի այն արժեքները, վորոնց դեպքում y-ը դառնում է 0, լուծում ենք հետևյալ հավասարումը․

$$2x^2+5x+5=0;$$

դժվար չէ համոզվել, վոր հավասարման դիսկրիմինանտը

$$b^2-4ac=5^2-4\,.\,2\,.\,5=25-40=-15<0,$$

իսկ այդ դեպքում, ինչպես գիտենք, հավասարումն իսկական արմատներ չունի։

Կարելի յեր կառուցել նաև հետևյալ ֆունկցիայի գրաֆիկը․

$$y=x^2+\frac{5}{2}x+\frac{5}{2},$$

վորն ստացվում է տվյալ հավասարումից, փակագծերից դուրս հանելով արտադրիչ 2-ը, այսինքն քառակուսի անհայտի գործակիցը։

Կառուցենք միևնույն առանցքների վրա հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները․

$$y=2x^2+5x+5$$

$$\text{և } y'=x^2+\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}:$$

Համեմատեք այդ գրաֆիկների կետերի օրդինատները նույն աբսցիսների դեպքում։ Ի՞նչ ձևով յերկրորդ գրաֆիկից կարելի յե ստանալ առաջինը։ Ակներև է, վոր կորերը տարբերվում են միմյանցից միայն մասշտաբով։

Համոզվեցեք դրանում, կառուցելով y ֆունկցիայի գրաֆիկը կրկնապատկած մասշտաբով։

Այսպես, ուրեմն, ֆունկցիայի արմատները կարելի յե գտնել կամ անալիտիկ՝ կամ գրաֆիկ մեթոդով։

Օգտվելով անալիտիկ մեթոդից՝ պետք է ֆունկցիան հավասարեցնել զերոյի և լուծել ստացված հավասարումը։ Օգտվելով գրաֆիկ մեթոդից՝ պետք է կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը և վորոշել գրաֆիկի և աբսցիսների առանցքի հատման կետերի աբսցիսները; հենց այդ աբսցիսներն էլ կլինեն ֆունկցիայի արմատները։

§ 32. $y=x^2$ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԳՐԱՖԻԿԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒՄԸ $y=x^2+px+q$ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԳՐԱՖԻԿԻ

Նախորդ պարագրաֆում մի առանձին օրինակով բացատրվեց, վոր

$$y = x^2 + px + q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

ֆունկցիայի գրաֆիկը կարելի յե ստանալ

$$y' = x^2$$

ֆունկցիայի գրաֆիկի ցերկու զուգահեռ տեղափոխությամբ։

Հետազոտենք ընդհանուր ձևով այդպիսի տեղափոխման պայմանները։

Այդ նպատակով ձևափոխենք y ֆունկցիայի հանրահաշվական արտահայտությունը, ավելացնելով և հանելով նրանից այնպիսի մեծություն, վոր $x^2 + px$ առաջին յերկու անդամին ավելացրած անդամի հետ միասին կազմեն յերկանդամի լրիվ քառակուսին։ Ակներև ե, վոր հետևյալ ֆունկցիան արտահայտող յեռանդամին պետք ե ավելացնել և հանել նրանից $\left(\frac{p}{2}\right)^2$.

$$y = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q =$$

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Արտահայտություն (2) y ֆունկցիայի համար բաղկացած ե յերկու անդամից.

1) x-ից կախումն ունեցող անդամից.

$$y'' = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2;$$

2) x-ից կախումն չունեցող անփոփոխ անդամից.

$$\left(\frac{p^2}{4} - q\right):$$

y''-ով նշանակված առաջին անդամը x-ի ֆունկցիան ե, վորի գրաֆիկը, նախորդ պարագրաֆի համաձայն, աբսցիսների առանցքի վրա $\frac{p}{2}$-ով տեղափոխված պարաբոլն ե

Յերկրորդը անփոփոխ անդամն ե, վորը x-ի միևնույն արժեքների դեպքում նախորդ պարաբոլի որդինատները փոքրացնում ե $\left(\frac{p^2}{4} - q\right)$ մեծությունով։

Այդ դեպքում $x = -\frac{p}{2}$ արժեքի համար կստանանք.

$$y'' = \left(-\frac{p}{2} + \frac{p}{2}\right)^2 = 0;$$

$$y = 0 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = -\left(\frac{p^2}{4} - q\right):$$

Վորովհետև $x=-\frac{p}{2}$ դեպքում y''-ի ֆունկցիան ունի զերոյի հավասար մինիմում, ապա $x=-\frac{p}{2}$ արժեքի դեպքում $y=x^2+px+q$ ֆունկցիան ունի $\left(\frac{p}{4}-q\right)$-ին հավասար մինիմում

Այժմ դառնանք հետևյալ ֆունկցիային.

$$y=ax^2+bx+c.$$

Վերը ապացուցել էյինք, վոր այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը միայն մասշտաբով է տարբերվում հետևյալ ֆունկցիայի գրաֆիկից.

$$y'=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}:$$

Հետևապես ֆունկցիայի գրաֆիկը կարելի յե ստանալ $y''=x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կրկնակի զուգահեռ տեղափոխումով և մասշտաբի a անգամ հետևողությամբ մեծացումով։

Ինքնուրույն ապացուցեք, վոր y ֆունկցիան ունի մինիմում

$$\frac{4ac-b^2}{4a}, \text{ յեթե } x=-\frac{b}{2a}$$

և գրաֆիկ կազմող պարաբոլի գագաթը վորոշվում է հետևյալ կոորդինատներով.

$$\left(\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^3}{4a}\right):$$

$y=ax^2+bx+c$ Ֆունկցիայի գրաֆիկը, յերբ $a<0$։

Նախորդ բացատրության մեջ մենք ամեն տեղ ընդունել ենք, վոր $a>0$։ Այժմ յենթադրենք, վոր ունենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$y=a'x^2+b'x+c',$$

վորտեղ $a'<0$, այսինքն x^3 գործակիցը զերոյից փոքր է։

Այդ դեպքում, դուրս հանելով փակագծերից -1 արտադրիչը, y ֆունկցիայի արտահայտությունը կարող ենք ձևակերպել այսպես.

$$y=-(a'x^2-b'x-c'):$$

Ակներև է, վոր y ֆունկցիայի գրաֆիկը կտարբերվի

$$y'=a'x^2-b'x-c'$$

ֆունկցիայի գրաֆիկից, վորի x^2 գործակիցը դրական է միայն պարաբոլի ճյուղերի ուղղությամբ, վորոնք դարձած կլինեն դեպի ներքև։

Եզրակացություններ։ *1. Երկրորդ կարգի մեկ փոփոխականի բոլոր ֆունկցիաների գրաֆիկը*

$$y=x^2$$

ֆունկցիայի գրաֆիկը կազմող **պարաբոլն** է։

2. Իր արտահայտության մեջ առաջին աստիճանի արգումենտ չունեցող յերկրորդ կարգի ֆունկցիաների գրաֆիկն որդինատների առանցքի նկատմամբ համաչափ դասավորված պարաբոլն է։

3. Յերկանդամի լրիվ քառակուսին արտահայտող հետևյալ ձևի

$$y=(x+a)^2$$

յերկրորդ կարգի ֆունկցիաների գրաֆիկն այն պարաբոլն է, վորի գագաթը գտնվում է աբսցիսների առանցքի վրա a տարածությամբ հեռացած որդինատների առանցքից։

4. $y=x^2+px+q$ ձևի ֆունկցիաների գրաֆիկը նույն պարաբոլն է, բայց առանցքների նկատմամբ հեռացած այնպես, վոր պարաբոլի առանցքը մնում է զուգահեռ որդինատների առանցքին, իսկ պարաբոլի գագաթն ընդունում է հետևյալ դիրքը.

$$\left[-\frac{p}{2};\ -\left(\frac{p^2}{4}-q\right)\right]:$$

5. $y=ax^2+bx+c$ ֆունկցիայի հետազոտումը կարելի յե վերածել $y=x^2+px+q$ ֆունկցիայի հետազոտմանը։

Ֆունկցիայի գրաֆիկը կազմում է այն պարաբոլը, վորի գագաթը գտնվում է հետևյալ կետում.

$$\left[-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right]:$$

6. $y=ax^2+bx+c$ ֆունկցիայի արմատները կոչվում են արգումենտի այն արժեքները, վորոնք ֆունկցիան դարձնում են 0։

7. Ֆունկցիայի արմատները թվականորեն հավասար են գրաֆիկի և աբսցիսների առանցքի հատման կետերի աբսցիսներին։

Վարժություններ։ Չդիմելով գրաֆիկի կառուցման, վորոշեք մինիմումը կամ մաքսիմումը և x-ի համապատասխան արժեքները յերկրորդ կարգի հետևյալ ֆունկցիաների համար.

320. $y=2x^2$ 321. $y=2x^2+\frac{4}{3}x$ 322. $y=-2x^2-5x$

323. $y=-x^2+3$. 324. $y=x^2-3$. 325. $y=2x^2-4x+5$

326. $y=x^2-3x+6$ 327. $y=(x-3)(x-2)-(x+3)(2x-1)$

328. $y=\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x-2}$ 329. $y=\frac{x^3-a^3}{x-a}$ 330. $y=\frac{8x^3-27}{2x-3}$

331. Ատվուդյան մեքենայի շարժաքարի համար կառուցեք արագության գրաֆիկը կախված ժամանակից, յեթե շարժաքարն ընկնում է $2\frac{\text{cm}}{\text{վայրկ}^2}$ արագությամբ*)։

332. Կառուցեք այն տարածությունների գրաֆիկը, վորն անցնում է նույն շարժաքարը զանազան ժամանակամիջոցներում։

333. Կառուցեք տարածությունների գրաֆիկը $a=1\frac{\text{m}}{\text{վայրկ}^2}$ անփոփոխ արագությամբ շարժվող մարմնի համար, յեթե մարմնի սկզբնական արագությունը հավասար է զերոյի։

334. Լուծեք նույն խնդիրը, յեթե սկզբնական արագությունը հավասար է $10\frac{\text{m}}{\text{վայրկ}}$։

335. Կառուցեք տարածությունների գրաֆիկը $V_0=10\frac{\text{m}}{\text{վայրկ}}$. սկզբնական արագությամբ դեպի վեր ուղղաձիգ նետված մարմնի համար։

---

*) $\frac{\text{cm}}{\text{վայրկ}^2}$ կամ $\frac{\text{m}}{\text{վայրկ}^2}$ նշանակումը պայմանորեն արտահայտում է արագության այն միավորը, վորը համապատասխանում է արագության փոփոխմանը 1cm-ով կամ 1m-ով 1 վայրկյանի ընթացքում։

ԳԼՈՒԽ V
ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ

§ 33. ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Յուրաքանչյուր քառակուսի հավասարում պարզ դարձնելուց և բոլոր անդամները ձախ կողմը տանելուց հետո ստանում է $x^2+px+q=0$ *ձևը, կամ* $ax^2+bx+c=0$ *ձևը։*

Այս հավասարումներից առաջինի արմատներն արտահայտող ֆորմուլն է.

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

իսկ յերկրորդինը՝

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Այս յերկու ֆորմուլները զննելուց պարզվում է, վոր յուրաքանչյուր հավասարման արմատները նրա գործակիցների ֆունկցիաներն են, այսինքն կախումն ունեն գործակիցների մեծությունից։

Վերը բերած ֆորմուլներից հեշտությամբ կարելի յե ստանալ այն յերկու կարևոր կախումները, վորոնք գոյություն ունեն քառակուսի հավասարման արմատների և գործակիցների միջև։ Նախ կանգ առնենք $x^2+px+q=0$ *հավասարման վրա։ Վերցնենք նրա յուրաքանչյուր արմատ առանձին-առանձին։*

$$\left.\begin{aligned} x_1&=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \\ x_2&=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Այժմ գումարենք ստացած հավասարումների համապատասխան անդամները. այդ դեպքում աջ մասի արմատները միմյանց կչեզոքացնեն, և կստացվի.

$$x_1+x_2=-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}, \quad \textit{այսինքն՝} \quad x_1+x_2=-p\text{։}$$

Հետևապես, քառակուսի հավասարման մեջ, յերբ x^2-ու գործակիցը 1 է, այդ արմատների գումարը հավասար է առաջին աստիճանի անհայտի գործակցի կեսին՝ հակառակ նշանով։

Այժմ էլ բազմապատկենք (1) հավասարման համապատասխան անդամները միմյանց հետ։

Կստանանք.

$$x_1 \cdot x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\cdot\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)$$

Փակագծերի բազմապատկումը հեշտությամբ կարող ենք կատարել, ոգտվելով $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ֆորմուլից և ընդունելով, վոր

$$a=\frac{p}{2},\ b=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

կստանանք.

$$x_1 \cdot x_2=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q.$$

այս բոլորից հետո կստանանք։

$$x_1 \cdot x_2=q,$$

այսինքն. Քառակուսի հավասարման մեջ, յերբ x^2 ու գործակիցը 1 է, ապա նրա արմատների արտադրյալը հավասար է ազատ անդամին։

Գալով $ax^2+bx+c=0$ հավասարման՝ հիշենք, վոր կարող ենք այն վերածել $x^2+px+c=0$ ձևի՝ բաժանելով նրա յերկու մասերն a-ի վրա.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Հետևապես, այդ դեպքում p և q գործակիցները կլինեն.

$$p=\frac{b}{a},\ q=\frac{c}{a},$$

ուստի՝ քառակուսի հավասարման վերը բերած յեզրակացությունների համաձայն, կարող ենք ասել՝ $ax^2+bx+c=0$ քառակուսի հավասարման արմատների գումարը հավասար է գործակիցների $\frac{b}{a}$ հարաբերությանը՝ հակառակ նշանով, իսկ արմատների արտադրյալը՝ $\frac{c}{a}$ հարաբերությանը։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

Ստուգեցեք հետևյալ հավասարումների արմատների հատկությունները.

336. 1) $x^2-17x+72=0$; 2) $11x^2-3x-8=0$

337. 1) $x^2-6x+5=0$; 2) $5x^2-8x+3=0$

338. 1) $x^2+7x-18=0$; 2) $3x^2-2x-8=0$

339. 1) $x^2-4ax+3a^2=0$; 2) $2x^2-3ax-2a^2=0$

340. 1) $x^2+6a^2x-27a^4=0$ 2) $4x^2-20ax+9a^2=0$

Արմատների վերը բերած հատկություններից օգտվելով՝ կարելի յե կազմել քառակուսի հավասարումներ, յեթե տրված լինեն նրա յերկու արմատները։ Յեվ հիրավի, քառակուսի հավասարումներ կազմելու համար պետք ե ունենալ միայն նրա գործակիցները, իսկ գործակիցները հեշտությամբ կարելի յե գտնել նրա արմատների միջոցով, հիմնվելով վերը բերած յեզրակացությունների վրա։ Որինակ. տրված -4 և 6 արմատների միջոցով կազմենք քառակուսի հավասարում։ Յենթադրելով, վոր $x_1=-4$ և $x_2=6$, հիշելով նաև, վոր $-p=x_1+x_2$, կարող ենք գրել $x_1+x_2=-4+6=2$, ապա $-p=2$, իսկ $p=-2$։ Նմանապես $q=x_1\cdot x_2=-4\cdot 6=-24$։ Այսպես, ուրեմն, մեր փնտրած հավասարումը կլինի. $x^2-2x-24=0$։ Վճռելով այս հավասարումը, կհամոզվենք, վոր նրա արմատներն են — 4-ը և 6-ը։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

341. $ax^2+bx+c=0$ հավասարման արմատները գտեք անմիջապես նրա վճռման ֆորմուլի միջոցով։

Կազմեցեք քառակուսի հավասարումներ հետևյալ արմատների միջոցով.

342.
1) 8 և 3
2) 5 և -11
3) -2 և -5
4) $+7$ և 0
5) -13 և 0

343.
1) -3 և $+3$
2) -8 և -8
3) 3 և $\frac{1}{3}$
4) 5 և $\frac{1}{5}$
5) $\frac{1}{4}$ և $\frac{1}{4}$

344.
1) $\frac{7}{3}$ և $\frac{3}{7}$
2) $\frac{4}{3}$ և $-\frac{3}{4}$
3) $1\frac{1}{2}$ և $\frac{3}{5}$
4) $\frac{1}{2}$ և $-\frac{1}{4}$
5) $\frac{2}{3}$ և $\frac{1}{3}$

345.
1) $0,2$ և $0,5$
2) $1,5$ և $0,4$
3) $2+\sqrt{3}$ և $2-\sqrt{3}$
4) $-4+\sqrt{7}$ և $-4-\sqrt{7}$
5) $4\pm\sqrt{3}$

346.
1) m և n
2) $3a$ և $-2b$
3) a և $-3b$
4) $2a\pm b$
5) $\frac{a}{b}$ և $-\frac{b}{a}$

347. Կազմեցեք հավասարում, վորի արմատները լինեն $x^2+px+q=0$ հավասարման արմատների գումարը և արտադրյալը։

348. Առանց վճռելու $x^2+px+q=0$ հավասարումը, գտեք նրա արմատների տարբերությունը։

349. Առանց վճռելու $x^2+px+q=0$ հավասարումը, գտեք նրա արմատների քառակուսիների գումարը։

350. Տված ե $ax^2+bx+c=0$ հավասարումը։ Կազմեցեք քառակուսի հավասարում, վորի արմատները՝ 1) տված արմատներից զանազանվեն միայն նշաններով, 2) մեծությամբ՝ տված արմատների հակադարձը լինեն։

351. Կազմեցեք քառակուսի հավասարում, յեթե նրա արմատների միջին թվաբանականն ե m, իսկ միջին յերկրաչափականը՝ n։

352. Գտեք յերկու թիվ, յեթե տված ե, վոր նրանց գումարն ե s, իսկ արտադրյալը՝ p ($s=19$, $p=84$)։

352. Գտեք յերկու թիվ, յեթե նրանց միջին թվաբանականը և միջին յերկրաչափականն են. 1) 17 և 8, 2) 12,5 և 10։

354. Լրացրեք $x^2-2x\ldots=0$ քառակուսի հավասարումը, գտնելով նրա բացակայող անդամը, յեթե նրա արմատներից մեկը հավասար ե 8-ի։

§ 34. ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Հասկացողություն յերեվակայական (կեղծ) թվի մասին.

Տված ե հետևյալ հավասարումը. $x^2+2x+10=0$ վճռելով այն, գտնում ենք.

$$x=-1\pm\sqrt{1-10}=-1\pm\sqrt{-9}$$

և վորովհետև

$$\sqrt{-9}=\sqrt{9\cdot(-1)}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}=3\cdot\sqrt{-1},$$

ապա կստանանք

$$x=-1\pm3\sqrt{-1}.$$

Բացասական միավորից հնարավոր չե քառակուսի արմատ հանել, վորովհետև գոյություն չունի դրական կամ բացասական մի այնպիսի թիվ, վորի քառակուսին հավասար լինի —1-ի։

Հետևապես, կամ պետք ե խոստովանենք, վոր տվյալ քառակուսի հավասարումը չունի արմատներ, կամ պետք ե ընդլայնենք թվի մասին ունեցած մեր հասկացողությունը, մտցնելով հանրահաշվի մեջ այն նոր տեսակի թվերի հետազննումը, վորոնց ընդունված ե անվանել «յերեվակայական» (կեղծ) թվեր։ Դրա համար պայմանավորվել ենք ընդունել, վոր $\sqrt{-1}$ մի այնպիսի թիվ ե, վորի քառակուսին հավասար ե —1-ի։ Այս թիվը նշանակում են i տառով (ֆրանսերեն imaginaire—յերևակայական, կեղծ բառից) և գրում.

$$i=\sqrt{-1}$$

հետևապես,

$$i^2=(\sqrt{-1})^2=-1.$$

i նշանն ընդունված ե անվանել յերեվակայական միավոր։ ai ձև ունեցող ամեն մի թիվ, վորի մեջ a-ն իրական թիվ ե (այսինքն կամ բացասական, կամ դրական ե), կոչվում ե յերեվակայական թիվ. որինակ, $3i$, $-2i$, $i\sqrt{5}$, $i\sqrt{x}$ և այլն—յերևակայական թվեր են։

Այսպես, ուրեմն, կիրառելով նաև յերևակայական թվերը, կարող ենք պնդել, վոր քառակուսի հավասարումը միշտ կունենա յերկու արմատ (յերկու իրական կամ յերկու յերևակայական)։

Ջննենք լրիվ քառակուսի հավասարումը լուծող հետևյալ ֆորմուլը.

$$x_{1,2}=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Այս ֆորմուլի արմատատակ քանակությունը, կախումն ունենալով p և q գործակիցների մասնակի արժեքներից, կարող է լինել 1) դրական, 2) հավասար զերոյի և 3) բացասական։ Հետազննենք, թե հավասարումն ինչպիսի արմատներ կունենա այս դեպքերից յուրաքանչյուրի մեջ։

1. Արմատական քանակությունը դրական է.

$$\frac{p^2}{4}-q>0$$

Այս դեպքում ֆորմուլի քառակուսի արմատը կունենա յերկու արժեք. մեկը՝ դրական, մյուսը՝ բացասական։ Ուստի x_1 և x_2-ը տարբեր կլինեն. **հավասարումն ունի յերկու տարբեր արմատներ։**

Համոզվելու համար լուծեցեք հետևյալ օրինակները.

$$1)\ 2x^2+5x+2=0$$
$$2)\ 9x^2+3x+1=0$$

2. Արմատական քանակությունը հավասար է 0-ի։

$$\frac{p^2}{4}-q=0$$

Այս դեպքում ֆորմուլի քառակուսի արմատը վոչնչանում է և $x_{1,2}=-\frac{p}{2}$։ Ասել է թե x_1 և x_2-ը նույնանում են։ Այսպիսի դեպքում ընդունված է ասել, վոր հավասարումն ունի յերկու իրար հավասար արմատներ։ Գրաֆիկական լուծումների ժամանակ արմատների այդ հատկությունը պարզորեն յերևան է գալիս։

Համոզվելու համար լուծեցեք հետևյալ օրինակները.

$$1)\ 9x^2-12x+4=0$$
$$2)\ 9x^2-42x+49=0$$

3. Արմատական քանակությունը բացասական է.

$$\frac{p^2}{4}-q<0$$

Ֆորմուլում ստացվում է քառակուսի արմատ բացասական թվից։ Այդպիսի արմատները կոչվում են **յերևակայական կամ կեղծ։** *Հետևապես քառակուսի հավասարումն այդպիսի դեպքում ունենում է* **յերկու տարբեր յերևակայական արմատներ։**

Լուծեցեք և ստուգեցեք.

$$1)\ 2x^2-18x+65=0$$
$$2)\ 36x^2+48x+61=0$$

Արմատների վերաբերյալ մեր հանած յեզրակացությունները կարելի է ամփոփել հետևյալ աղյուսակում.

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ արժեքը	Հավասարման արմատները կլինեն
>0	յերկու իրական տարբեր արմատներ
$=0$	յերկու իրական հավասար արմատներ
<0	յերկու յերևակայական արմատներ

Յեթե ընենք $ax^2+bx+c=0$ հավասարումը, վորի արմատները վորոշվում են $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ֆորմուլով, ապա արմատատակ b^2-4ac արտահայտության նշանները հետազոտելուց հետո՝ վերը բերած յեզրակացություններին կհանգենք։ Այդ յեզրակացությունները ևս ամփոփված են նման աղյուսակում.

b^2-4ac-ի արժեքը	Հավասարման արմատները կլինեն
>0	յերկու իրական տարբեր արմատներ
$=0$	յերկու իրական հավասար արմատներ
<0	յերկու յերևակայական արմատներ

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

Առանց լուծելու հավասարումները, վորոշեցեք, թե ինչպիսի արմատներ ունի հետևյալ հավասարումներից յուրաքանչյուրը։

355. 1) $x^2 - 4x - 14 = 0$
2) $x^2 - 10x + 25 = 0$
3) $x^2 + 4x + 5 = 0$
4) $x^2 - 9x + 20 = 0$
5) $x^2 + 30x + 225 = 0$
6) $x + 11x + 130 = 0$

356. 1) $5x^2 - 11x - 35 = 0$
2) $x^2 + 8x + 19 = 0$
3) $x^2 + 24x + 144 = 0$
4) $2x^2 - 3x + 5 = 0$
5) $12x^2 + 7x - 12 = 0$
6) $25x^2 + 30x + 9 = 0$

357. a-ի վոր արժեքների դեպքում $x^2+ax+49=0$ հավասարումը կունենա յերկու իրար հավասար արմատներ։ Նույն հարցին պատասխանեցեք $ax^2+12x+4=0$ հավասարման նկատմամբ ևս։

§ 35. ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՄԱՆ ՀԵՏԵՎԱՆՔՆԵՐԻ ԳՐԱՖԻԿԱԿԱՆ ԼՈՒՍԱԲԱՆՈՒՄԸ

Նախորդ պարագրաֆի հետևանքները գրաֆիկորեն լուսաբանելու համար վերցնենք $ax^2+bx+c=0$ հավասարումը և նրա ձախ կողմը նշանակենք y տառով, կստանանք.

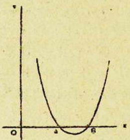
$$y=ax^2+bx+c$$

Ինչպես գիտենք, այս հավասարությունը պատկերացվում է պարաբոլի ձևով։ $ax^2+bx+c=0$ հավասարման լուծումը համապատասխանում է $y=ax^2+bx+c$ հավասարության, յեթե վերջինի y-ը հավասարեցնենք զերոյի։ Բայց, ինչպես գիտենք, այն կետերը, վորոնց համար $y=0$-ի, գտնըվում են OX առանցքի վրա. հետևապես, յենթադրելով, վոր պարաբոլի հավասարման մեջ $y=0$-ի, մենք գտնում ենք այն կետերը, վորոնցով պարաբոլը հատվում է OX առանցքի հետ։ X-ի յերկու արժեքները, այսինքն x_1 և x_2-ը ցույց են տալիս հենց այդ հատվող կետերի աբսցիսները։

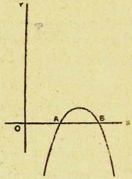
Բայց պարաբոլը կարող է. 1) հատել OX առանցքը յերկու կետում. 2) շոշափել նրան մի կետում և 3) վոչ մի ընդհանուր կետ չունենա OX առանցքի հետ։ Ինչպես վերը տեսանք, $y=ax^2+bx+c$ պարաբոլի համար առաջին դեպքը տեղի կունենա, յեթե $b^2-4ac>0$, յերկրորդ դեպքը՝ յեթե $b^2-4ac=0$, և յերրորդ դեպքը, յեթե $b^2-4ac<0$։

Առաջին դեպքում, յերբ $b^2-4ac>0$, $ax^2+bx+c=0$ հավասարումն ունենում է յերկու իրական տարբեր արմատներ։ Գրաֆիկորեն այդ արտահայտվում է նրանով, վոր պարաբոլը OX առանցքը հատում է յերկու տարբեր կետերում (գծ. 15 և 16)։

Յերկրորդ դեպքում, ինչպես տեսում են, հավասարումն ունենում է յերկու հավասար արմատներ։



Գծ 15.

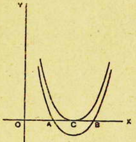


Գծ 16.

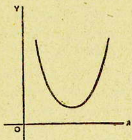
Գրաֆիկական այդ դեպքը, առաջինի նկատմամբ, կարելի յե դիտել վորպես սահմանային, վորովհետև պարաբոլի հետ հատվող OX առանցքի յերկու կետը հետզհետե ավելի ու ավելի յեն մոտենում միմյանց և, վերջիվերջո, իրար ձուլվում։ Այդ դեպքը կարող է տեղի ունենալ, յեթե պարաբոլը OX առանցքից շարժենք դեպի վեր կամ դեպի ներքև։ Այդպիսով, պարաբոլի հետ յերկու ընդհանուր կետեր ունեցող OX առանցքը սահմանային դիրքում ուղիղ հատողից վեր է ածվում մի ուղիղի, վորը պարաբոլի հետ ունի իրար ձուլված յերկու կետ։ Սահմանային այդպիսի դիրքում հատողը կոչվում է պարաբոլի շոշափող։

Յեվ այսպես, շոշափողը կարելի յե ընդունել վորպես մի հատող, վորի յերկու կետերը, կորի հետ հատվելու ժամանակ, համատեղվում են։ Հենց այստեղից էլ պարզվում է, թե $b^2-4ac=0$ հավասարման յերկրորդ դեպքի ժամանակ ինչու յեն ասում, որ քառակուսի հավասարումն ունի յերկու հավասար արմատներ. $AO=OB$ $(=OC)$ (գծ. 17)։

Յերրորդ դեպքում, այսինքն յերբ $b^2-4ac<0$, քառակուսի հավասարումն ունենում է յերկու յերևակայական արմատ։ Գրաֆիկորեն այս նրանով է բացատրվում, որ այդ դեպքում $y=ax^2+bx+c$ պարաբոլը OX առանցքի հետ միանգամայն հատման կետեր չի ունենում, որոնց աբսցիսները համապատասխան քառակուսի հավասարման համար դառնային արմատներ (գծ. 18)։



Գծ. 17.



Գծ. 18.

§ 36. ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ՅԵՌԱՆԴԱՄԻ ՎԵՐԱԾՈՒՄՆ ԱՐՏԱԴՐԻՉՆԵՐԻ

Քառակուսի յեռանդամներից ավելի ընդհանուր ձև ունեցողն ax^2+bx+c արտահայտությունն է, որի մեջ a, b և c տված թվեր են, իսկ x-ը փոփոխական մեծություն է, որը կարող է ընդունել իր ուզած կամավոր թվային արժեքները։ x-ի այն արժեքները, որոնք յեռանդամը դարձնում են 0, կոչվում են յեռանդամի արմատներ։ Այդ արմատները կարելի յե ստանալ, յեթե ax^2+bx+c հավասարեցնենք զերոյի և ապա լուծենք այդպիսով ստացված քառակուսի հավասարումը։ Այստեղից հետևում է, որ քառակուսի յեռանդամն ունի յերկու իրարից տարբեր կամ իրար հավասար արմատներ։

Քառակուսի հավասարման գործակիցների և արմատների միջև գոյություն ունեցող փոխադարձ կախումից օգտվելով, կարելի յե ամեն մի քառակուսի յեռանդամ հասարակ ձևով վեր ածել գծային արտադրիչների (գծային կոչվում են այն արտադրիչները, որոնց մեջ x-ն արտահայտված է առաջին աստիճանով)։ Հենց այստեղ էլ կարելի յե ցույց տալ, որ քառակուսի յեռանդամն է յերկու գծային արտադրիչների և a գործակցի մի արտադրյալ, որի մեջ գծային արտադրիչներից յուրաքանչյուրն իրենից ներկայացնում է x-ի և յեռանդամի արմատներից մեկն ու մեկի տարբերությունը։

Յենթադրենք՝ տված է ax^2+bx+c յեռանդամը։ Նախ հավասարեցնելով այդ յեռանդամը 0-ի, գտնում ենք x_1 և x_2 արմատները։ Այնուհետև փակագծից դուրս ենք բերում a գործակիցը և ստանում.

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

Մենք գիտենք, որ $\frac{b}{a}$ արտահայտությունը հավասար է x_1 և x_2-ի գումարին՝ հակառակ նշանով. $\frac{b}{a}=-(x_1+x_2)$, իսկ $\frac{c}{a}$ հավասար է արմատների արտադրյալին. $\frac{c}{a}=x_1 \cdot x_2$։ Հետևապես, նախկին արտահայտությունը կարող ենք գրել այսպես.

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\,[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]$$

Բաց անենք ներսի փակագիծը և խմբավորենք առաջին գումարելին երկրորդի, երրորդը չորրորդի հետ։ Դուրս բերելով առաջին փակագծից x-ը, երկրորդից x_2-ը, կստանանք.

$$a\,(x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2)=a[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)]$$

Վերջին արտահայտության մեջ փակագծից դուրս հանելով $(x-x_1)$ ընդհանուր արտադրիչը, վերջնականապես կստանանք.

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)\,(x-x_2),$$

այսինքն այն, ինչ որ պետք է ապացուցեինք։

Եթե եռանդամի x^2-ու գործակիցը հավասար է 1-ի, ապա վերը բերած ձևով արտադրիչների վերածելիս a-ի փոխարեն կստանանք 1։ Այդ բանում ես կհամոզվենք, եթե x^2+px+q եռանդամի նկատմամբ կրկնելու լինենք նախորդ դատողությունները։

Օրինակ։ Արտադրիչների վերածենք հետևյալ եռանդամը. $-5x^3+3x+2$։ Եռանդամը հավասարեցնում ենք 0-ի և ապա գտնում նրա արմատները.

$$5x^2-3x-2=0;\quad x=\frac{3\pm\sqrt{9+4\cdot5\cdot2}}{10}=\frac{3\pm7}{10}$$

$$x_1=1$$

$$x_2=\frac{-4}{10}=-0{,}4$$

Հետևապես.

$$5x^2-3x-2=0=5\,[x-(-0{,}4)]\,(x-1)=5\,(x+0{,}4)\,(x-1)$$

Ստացված արտադրիչներն իրար վրա բազմապատկելով, հեշտությամբ կարող ենք ստուգել, որ տված արտահայտությունը ճիշտ է վերածած արտադրիչների։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

Արտադրիչների վերածեք հետևյալ եռանդամները.

358. 1) $x^2+8x+12$; 2) $x^2-11x+12$

359. 1) x^2-x-20; 2) $x^2+28x-60$

360. 1) $x^2-24x+144$; 2) $x-\frac{1}{2}x-\frac{15}{16}$

361. 1) $x^2+1{,}8x+0{,}81$; 2) $x^2+5ax+6a^2$

362. 1) $x^2-cx-2c^2$; 2) $x^2+\frac{2}{3}kx+\frac{k^2}{9}$

363. 1) $2x^2-x-6$; 2) $4x^2+3x-10$

364. 1) $11x^2+12x+1$; 2) $\frac{1}{2}x^2+5x-19\frac{1}{2}$

365. 1) $-\frac{2}{3}x^2-8x+72$; 2) $-5x^2+\frac{1}{4}x+79$

366. 1) $0{,}2x^2+0{,}6x-8$; 2) $9x^2-12x+4$

367. 1) $1-14x+49x^2$; 2) $2x^2-5ax+12a^2$

Կրճատեցեք հետևյալ կոտորակները.

368. 1) $\frac{x-5x+6}{x^2-4}$ 2) $\frac{x^2+8x-9}{x^2-2x+1}$

369. 1) $\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x-4}$, 2) $\frac{x^2-7x+12}{x^2+7x+12}$

370. 1) $\frac{2x^2-x-1}{x^3-x^2}$ 2) $\frac{5x^2-7x-24}{x^3-3x^2+3x-9}$

371. 1) $\frac{x^3-8}{\frac{1}{2}x^3+5x^2-12x}$, 2) $\frac{1+x^3}{3x^2-2x-5}$

Լուծեցեք հետևյալ հավասարումները.

372. $\frac{7}{x-6}-\frac{3(x-1)}{x^2-8x+12}=\frac{4x-1}{x^2-3x+2}$

373. $\frac{x+10x}{x^4-1}+\frac{4}{x+1}=\frac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1}+\frac{1}{x^3-x^2+x-1}$

374. $\frac{2}{x+1}+\frac{x^2+1}{x^2-x+1}=\frac{x^2-1}{x^2-x+1}-\frac{2x(x-5)}{x^3+1}$

375. $\frac{11}{x^2+8x+15}-\frac{1}{x^2-8x+15}=\frac{22}{x^2+2x-15}-\frac{8}{x^2-2x-15}$

376. $\frac{x+a}{a-x}+\frac{b-x}{x+b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

377. $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}=0$

378. $\frac{x-a}{x+a}+\frac{x-b}{x+b}+\frac{x-c}{x+c}=3$

§ 37. ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԶԱՆԱԶԱՆ ՀԱՐՑԵՐ ԼՈՒԾԵԼԻՍ

Երկրաչափության և այլ առարկաների վերաբերող շատ հարցեր լուծելիս կարելի է լինում կազմել և վճռել քառակուսի հավասարումներ։ Այդպիսի դեպքերում, հավասարման արմատները գտնելուց հետո, պետք է ստուգել՝ արդյոք ստացած արմատները բավարարում են խնդրի դրած հարցերի լուծման թե ոչ, որովհետև պատահում են դեպքեր, երբ նույնիսկ դրական ամբողջ արմատները չեն բավարարում խնդրի պահանջներին։ Պետք է նշել նաև, որ երևակայական արմատներ ստանալը ցույց է տալիս, որ հնարավոր չէ վճռել տվյալ խնդիրը (բայց ոչ հավասարումը)։

ԽՆԴԻՐՆԵՐ.

379. *Երկու թվերի քառակուսիների գումարը հավասար է 22,25-ի. Նրանցից մեկը մեծ է մյուսից 1,5-ով։ Գտեք այդ թվերը։*

380. *Գտեք իրար հաջորդող երեք զույգ թվեր, որոնց քառակուսիների գումարը հավասար է 200-ի։*

381. Գտեք իրար հաջորդող երեք կենտ թվեր, որոնց քառակուսիների գումարը հավասար է 115-ի։

382. Անհայտ թվի և նրա հակադարձի գումարը հավասար է 2,9-ի։ Գտեք այդ թիվը։

383. Մեր սովորական գրելու ձևով 456-ը նշանակում է $400+50+6$ միավոր կամ $4.10^2+5.10+6$ միավոր։ Եթե մենք 456-ը չգրենք տասնորդական սիստեմի հաշվումների ձևով, այլ 8-ը հիմք ունեցող սիստեմով, ապա այդ դեպքում «456»-ը կնշանակեր ոչ թե 456 միավոր, այլ $4.8^2+5.8+6$ միավոր, կամ 302 միավոր։ Ի՞նչ հիմք ունեցող հաշվումների սիստեմով 184 միավորը կարտահայտվեր «352»-ի ձևով։

Ի՞նչ հիմք ունեցող հաշվումների սիստեմով 124 միավորը կարտահայտվեր «147»-ի ձևով։

384. Հին հնդկական խնդիր։ Լոտոսի ծաղիկն ավազանի ջրի մակերեսից բարձրացել էր 4 գծային միավորի չափ. քամու հոսանքը թեքեց ծաղիկը և նրա գլուխը ծածկեց ջրի տակ նախկին դուրս ցցված տեղից 16 գծային միավոր հեռավորության վրա։ Որքա՞ն էր ավազանի խորությունը (արտահայտեցեք նույն գծային միավորներով)։

385. Շրջանին ներգծած քառակուսու մակերեսը 5cm²-ով ավելի է նույն շրջանին ներգծած կանոնավոր յեռանկյան մակերեսից։ Գտեք շրջանի շառավիղը։

386. Պահանջվում է գծանկարել մի այնպիսի ուղղանկյուն յեռանկյուն, որի ներքնաձիգը մեծ լինի մի էջից 9m-ով, իսկ մյուսից՝ 18m-ով։ Որոշեցեք այդ յեռանկյան կողմերը։

387. Խորանարդի լրիվ մակերևույթը հավասար է 387cm². յեթե այդ խորանարդի կողը մեծացնենք 1cm-ով, ապա նրա լրիվ մակերևույթը կմեծանա 102cm²-ով։ Որոշեցեք խորանարդի կողը։

388. Որոշել կոնի հիմքի շառավիղը, յեթե նրա ծնիչը հավասար է 25cm-ի, իսկ լրիվ մակերևույթը՝ 1099 cm²-ի ($\pi=3,14$)։

389. Յերկու ճանապարհորդ միաժամանակ դուրս յեկան, առաջինը Քանաքեռից դեպի Յերևան, յերկրորդը Յերևանից Քանաքեռ և 1 ժամ 12 րոպեյից հետո իրար հանդիպեցին։ Շարունակելով իրենց ճանապարհը՝ առաջինը Յերևան հասավ ցերեկվա ժամը 2-ին, յերկրորդը Քանաքեռ հասավ ժամը 3-ին։ Ժամը քանիսի՞ն նրանք ճանապարհ ընկան։

390. Շինության համար հատկացրած քառակուսի հողամասը պետք է 2300m²-ով ընդլայնել, ուստի նրա յերկարությունը մեծացրին 10m-ով, իսկ լայնությունը 6m-ով։ Որոշեցեք հողամասի սկզբնական չափերը։

391. Որոշեցեք գլանի հիմքի շառավիղը, յեթե բարձրությունն է 6,5 cm, իսկ լրիվ մակերևույթը՝ 47,92 cm²։

392. Որոշեցեք կոնի հիմքի շառավիղը, յեթե ծնիչն է 18,3cm, իսկ լրիվ մակերևույթը՝ 872,4cm²։

393. Որոշեցեք հատած կոնի մեծ հիմքի շառավիղը, որի ծավալն է 2786,7 cm³, բարձրությունը՝ 37,4 cm և փոքր հիմքի շառավիղը՝ 14,5cm։

394. Որքա՞ն է շեղ դույլի բացվածքի տրամագիծը, յեթե նրա տարողությունն է 12,5 լիտր, բարձրությունը՝ 45 cm, իսկ հատակի տրամագիծը՝ 16cm։

395. Կեպլերը (ծնվել է 1571 թ. և մեռել՝ 1630 թ.) գտավ արևի շուր-

ջը պտտվող մոլորակների շարժման օրենքը։ Կեպլերի յերրորդ օրենքն ասում է. «Մոլորակների արևի շուրջը պտտվելու ժամանակամիջոցների քառակուսիները հարաբերում են միմյանց այնպես, ինչպես արևից ունեցած նրանց միջին հեռավորությունների խորանարդները։ Յերկրի արևից ունեցած միջին հեռավորությունն ընդունելով 1 միավոր, մնացած մոլորակների հեռավորությունն արևից համապատասխանաբար կարտահայտվեն այսպես.

Մերկուրիի	0,387	Յուպիտերի	5,203
Վեներայի	0,723	Սատուրնի	9,539
Յերկրի	1,000	Ուրանի	19,183
Մարսի	1,524	Նեպտունի	30,055

Հաշվեցեք, թե մոլորակներից յուրաքանչյուրը վորքան ժամանակամիջոցում է պտտվում արևի շուրջը։

396. Ամենաշատ բարձրությունը (h m), վորին հասնում է ուղղաձիգ ուղղությամբ գցած, սկզբնական v արագություն ունեցող մարմինը, արտահայտվում է հետևյալ ֆորմուլով*).

$$h=\frac{v^2}{2g}$$

Հաշվեցեք այն ամենաշատ բարձրությունը, վորին հասնում է հրացանից ուղղաձիգ դեպի վեր արձակած գնդակը, վորն ունի սկզբնական $400\frac{m}{վայրկ.}$ արագություն։ Սկզբնական ինչպիսի արագություն պիտի տալ գնդակին, վոր կարողանա 10km բարձրության հասնել։ g-ն ծանրության ուժի արագացումն է, վորը հավասար է 9,8-ի։

397. Յեթե ազատ ընկնող մարմինը t վայրկյանում անցնում է s տարածություն, ապա

$$s=\frac{gt^2}{2}$$

Ընդունելով $g=9,8$-ի, հաշվեցեք մարմնի 300m բարձրությունից ընկնելու ժամանակամիջոցը։

398. Առանց սկզբնական արագության քարն ընկնում է 100m խորության հորի հատակը։ Վորքան ժամանակից հետո կլսվի հատակին հասնող քարի ձայնը։ Ձայնի արագությունն է $333\frac{m}{վայրկ.}$։

399. Գնացքը ճանապարհին ուշացավ 48 րոպե և, վորպեսզի ժամկետին տեղ հասնի, պետք է մնացած 96 km հեռավորությունն անցնելիս արագությունն ավելացնի $6\frac{km}{ժամում}$։ Ի՞նչ արագությամբ էր ընթանում գնացքը մինչև հապաղումը։

400. Գործարանում աշխատում էյին 200 տղամարդ և կին. տղամարդկանց օրական աշխատավարձը 1 ռուբլով ավելի յեր կանանց աշխատա-

*) Արագացում g-ն արտահայտվում է մետրերի թվով, վորը ցույց է տալիս ընկնող մարմնի արագության փոփոխվելը 1 վայրկյանում։

վերջից։ Բոլոր տղամարդիկ առանձին և բոլոր կանայք առանձին որական ստանում էյին 240 ռ. աշխատավարձ։ Քանի՞ տղամարդ և քանի՞ կին էյին աշխատում գործարանում։

401. Յերկու բանվոր տարբեր պայմաններով էյին աշխատում։ Առաջինն ստացավ 48 ռ., իսկ յերկրորդը, վոր 6 որ պակաս էր աշխատել, քան առաջինը, ստացավ 27 ռուբլի։ Յեթե առաջինն աշխատեր այնքան որ, վորքան յերկրորդը, իսկ յերկրորդը՝ այնքան որ, վորքան առաջինը, այդ դեպքում նրանք հավասար գումար կստանային։ Յուրաքանչյուրը քանի՞ որ աշխատեց։

402. Յերկու բանվոր պետք է աշխատեյին նույնքան ժամանակ, բայց տարբեր աշխատավարձով։ Առաջինը ժամկետից 2 որով շուտ վերջացրեց աշխատանքը և ստացավ 27 ռ., իսկ յերկրորդը 3 որով շուտ վերջացրեց և ստացավ 30 ռ.։ Յեթե առաջինն աշխատեր այնքան որ, վորքան յերկրորդը, և յերկրորդն այնքան որ, վորքան առաջինը, ապա յերկրորդը 3 ռուբլով պակաս կստանար, քան առաջինը։ Վորքան ժամանակով էյին վարձված բանվորները։

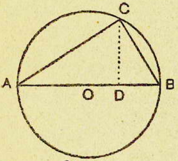
ԳԼՈՒԽ VI

ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԸ ՇՐՋԱՆԻ ՄԵՋ. ԹՎԱՅԻՆ ԿԱԽՈՒՄՆԵՐԸ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ՄԻՋԵՎ. ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ

§ 38. ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԸ ՇՐՋԱՆԻ ՄԵՋ

Սահմանում: *Յեթե տված յերեք համամասնների համար ճիշտ ե այն համեմատությունը, վորի մեջ համամասններից մեկը բռնում ե կամ յերկու արտաքին կամ յերկու ներքին անդամների տեղերը, ապա այդ համամասնը կոչվում ե մնացած յերկուսի միջին համեմատական:*

Այսպես, ուրեմն, յեթե a, b *և* c *նշանակում են վորևե հատվածներ, և յեթե* $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, *ապա* b *հատվածը կոչվում ե* a *և* c *հատվածների միջին համեմատականը: Վորովհետև այդ համեմատությունը պարունակում ե միայն մեծություններ, ուստի հնարավոր են նրա անդամների այն տեղափոխումները, վորոնք ճիշտ են հանրահաշվական տեսակետից. որինակ՝* $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$:



Գծ. 19.

ԹԵՈՐԵՄ. **Շրջանագծի վորևե կետից տրամագծին իջեցրած ուղղահայացը մի հատված ե, վորը միջին համեմատական ե տրամագծի վրա առաջացած հատվածների նկատմամբ, իսկ յուրաքանչյուր լարը մի հատված ե, վորը միջին համեմատական ե ամբողջ տրամագծի և նրա վրա գտնվող իր պրոեկցիայի նկատմամբ:**

Տրվում ե AB *տրամագիծը,* AC *և* CB *կամավոր լարերը և* CD ⊥ AB *(գծ. 19):*

Պետք ե ապացուցել.

$$1.\ \frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB};\quad 2.\ \frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD};\quad 3.\ \frac{AB}{BC}=\frac{BC}{DB}:$$

Ապացուցում. *Անկյուն* ACB *ուղիղ անկյուն ե, վորպես տրամագծին հենված ներգծած անկյուն, իսկ* ∠CAD=∠DCB, *վորովհետև նրանց կողմերը փոխադարձ ուղղահայաց են: Հետևապես. 1)* △ACD *և* △DCB, *2)* △ACB *և* △ACD *և 3)* △ACB *և* △DCB, *ունենալով յերկուական հավասար անկյուններ, զույգ-զույգ նման են, վորոնց համապատասխան կողմերը համեմատական են:*

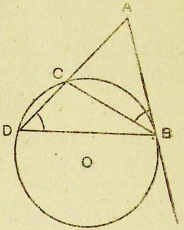
Այստեղից 1. $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB}$; 2. $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}$ և 3. $\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{DB}$.

ԹԵՈՐԵՄ 2։ **Յերբ շրջանից դուրս վերցրած կետից շրջանին տարված են վորևէ շոշափող յեվ հատող, ապա շոշափողը մի հատված է, վորը միջին համեմատական է ամբողջ հատողի յեվ նրա արտաքին մասի նկատմամբ** *(յենթադրվում է, վոր շոշափողը սահմանափակված է շոշափման կետով, իսկ հատողը՝ հատման յերկրորդ կետով)։*

Տրվում է AB *շոշափողը և* AD *հատողը (գծ. 20)։*

Պետք է ապացուցել.

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC};$$

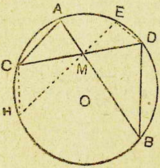


Գծ. 20.

Ապացուցում։ *Միացնելով* D *և* C *կետերը* B *կետի հետ, կստանանք* $\triangle ABD$ *և* $\triangle ABC$, *վորոնց* $\angle A$ *ընդհանուր է, իսկ* $\angle BDC=\angle ABC$, *վորովհետև նրանցից յուրաքանչյուրը չափվում է միևնույն* BC *աղեղի կեսով (ինչու)։ Հետևապես* ABD *և* ABC *յեռանկյունները նման են, վորոնց համապատասխան կողմերը համեմատական են։*

Այստեղից $\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC}$

ԹԵՈՐԵՄ 3։ **Յերբ շրջանի ներսը վերցրած կետով տարված են ցանկացածին չափ լարեր, ապա յուրաքանչյուր լարի հատվածների արտադրյալն անփոփոխ է բոլոր լարերի համար։**



Գծ. 21.

Տրվում են AB, CD, EH. . . . *լարերը, վորոնք հատվում են* M *կետում (գծ. 21)։*

Պետք է ապացուցել.

$$AM \cdot MB=CM \cdot MD=EM \cdot MH=. . . .$$

Ապացուցում։ *Տանելով* AC *և* BD *օժանդակ լարերը, կստանանք* $\triangle AMC$ *և* $\triangle BMD$, *վորոնք նման են, վորովհետև նրանց մեջ* $\angle A=\angle D$, *վորպես միևնույն* BC *աղեղի վրա հենվող ներգծած անկյուններ, իսկ* $\angle C=\angle B$, *վորպես միևնույն* AD *աղեղի վրա հենվող ներգծած անկյուններ։ Այդ յեռանկյունների նմանությունից հետևում է.* $\frac{AM}{MD}=\frac{CM}{MB}$, *այստեղից* $AM \cdot MB=CM \cdot MD$.

Այժմ վերցնելով մի ուրիշ զույգ CD և EH լարերը, նույն ձևով $\triangle CMH$ և $\triangle EMD$ նմանությունից կստանանք հետևյալ համեմատությունը․ $\frac{CM}{EM}=\frac{MH}{MD}$, որտեղից $CM \cdot MD = EM \cdot MH$։ Շարունակելով նույն դատողությունը և բաղդատելով ստացված արտադրյալները, կստանանք․ $AM \cdot MB = CM \cdot MD = EM \cdot MH$ . . . .

Եթե գիտենք մի կետում իրար հատող յերկու լարեր, ապա ապացուցված թեորեմը կարելի յե ձևակերպել այսպես․ յերկու իրար հատող լարերը բաժանվում են հակադարձ համեմատական մասերի։ Բացատրեք այդ։

§ 39․ ԹՎԱՅԻՆ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ՅԵՎ ԱՅԼ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

ԹԵՈՐԵՄ 4.— **Ուղղանկյուն յեռանկյան մեջ՝ ուղիղ անկյան գագաթից ներքնաձիգին իջեցրած ուղղահայացը մի հատված է, որը միջին համեմատական է ներքնաձիգի վրա առաջացած հատվածների նկատմամբ, իսկ յուրաքանչյուր էջը մի հատված է, որը միջին համեմատական է ամբողջ ներքնաձիգի յեվ նրա վրա ընկնող իր պրոեկցիայի նկատմամբ։**

Ակներև է, որ այս թեորեմն իրենից ներկայացնում է նախորդ պարագրաֆում բերված թեորեմ 1, միայն տարբեր ձևակերպությամբ։

ՀԵՏԵՎԱՆՔ․ Էջերի քառակուսիները համեմատական են ներքնաձիգի վրայի իրենց պրոեկցիաներին։

Բացատրեք թեորեմը և նրա հետևանքը, կառուցելով գծանկարը և գրելով այն բոլորը, ինչ որ անհրաժեշտ է։

ԹԵՈՐԵՄ 5։ Ուղղանկյուն յեռանկյան մեջ՝ ներքնաձիգի քառակուսին հավասար է էջերի քառակուսիների գումարին։

Այս թեորեմը, որը հայտնի յե Պյութագորի թեորեմ անունով, ձեզ ծանոթ է մաթեմատիկայի նախորդ տարիների ծրագրից և հեշտությամբ ապացուցվում է նախորդ թեորեմի օգնությամբ։ Օրինակ, վերցնենք ուղղանկյուն յեռանկյուն ABC, որի մեջ A նշանակում է ուղիղ անկյան գագաթը․ իջեցնենք ներքնաձիգի վրա AD ուղղահայացը։ Այդ դեպքում 4-րդ թեորեմի հիման վրա․ $AB^2=BC \cdot BD$ և $AC^2=BC \cdot CD$։ Գումարելով այս յերկու հավասարությունների համապատասխան մասերը, կստանանք․

$$AB^2+AC^2=BC \cdot BD+BC \cdot CD=BC(BD+CD)=BC \cdot BC=BC^2.$$

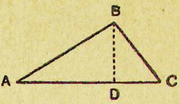
Նկատենք, որ Պյութագորի թեորեմն այստեղ պայմանորեն ձևակերպված է կրճատված։ Պետք է ավելի ճիշտ արտահայտել այսպես․ յեթե ուղղանկյուն յեռանկյան կողմերը չափված են միևնույն միավորով, ապա ներքնաձիգն արտահայտող թվի քառակուսին հավասար է էջերն արտահայտող թվերի քառակուսիների գումարին։ Հետագայում ևս մենք, համառոտ արտահայտվելու համար, կասենք՝ «հատվածի քառակուսին», փոխանակ ասելու՝ «հատվածը չափող թվի քառակուսին»։

ԹԵՈՐԵՄ 6։ Յեռանկյան մեջ սուր անկյան դիմացը գտնվող կողմի քառակուսին հավասար է մյուս յերկու կողմերի քառակուսիների գումարին՝ հանած այդ կողմերից մեկի յեվ սրա վրա գտնվող մյուս կողմի պրոեկցիայի կրկնապատիկ արտադրյալը։

Տրվում է $\triangle ABC$ *(գծ. 22), որի մեջ* $\angle A < 90^0$ *և* $BD \perp AC$։
Պետք է ապացուցել.

$BC^2=AB^2+AC^2-2AC \cdot AD$։

Ապացուցումն։ *Ուղղանկյուն եռանկյան կողմերի հատկության հիման վրա (թեորեմ 5).*



Գծ. 22.

$\triangle BDC$*-ի մեջ՝* $BC^2=BD^2+DC^2$ . . *(1)*

և $\triangle ABD$*-ի մեջ՝* $BD^2=AB^2-AD^2$ . . *(2)*

Գծանկարից երևում է, որ $DC=AC-AD$, *հետևապես.*

$DC^2=AC^2-2AC \cdot AD+AD^2$ . . . . *(3)*

(2) և (3) հավասարություններից BD^2*-ու և* DC^2*-ու արժեքները դնելով (1) հավասարության մեջ, կստանանք.*

$$BC^2=AB^2-\underline{AD^2}+AC^2-2AC \cdot AD+\underline{AD^2}$$

կամ $BC^2=AB^2+AC^2-2AC \cdot AD$

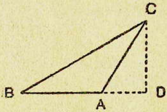
ԹԵՈՐԵՄ։ Եռանկյան մեջ՝ բութ անկյան դիմացը գտնվող կողմի քառակուսին հավասար է մյուս երկու կողմերի քառակուսիների գումարին՝ ավելացրած այդ կողմերից մեկի և իր շարունակության վրա գտնը-վող մյուս կողմի պրոեկցիայի կրկնապատիկ արտադրյալը։

Տրվում է $\triangle ABC$, *որի մեջ* $\angle A > 90^0$ *(գծ. 23) և* CD*-ն հիմքի (*AB*-ի) շարունակության վրա իջեցրած բարձրությունն է։*

Պետք է ապացուցել.

$BC^2=AB^2+AC^2+2AB \cdot AD$։

Ապացուցումն։ *5-րդ թեորեմի հիման վրա՝*



Գծ. 23

$\triangle BCD$*-ի մեջ՝* $BC^2=BD^2+CD^2$ . . . *(4)*

և $\triangle ACD$*-ի մեջ՝* $CD^2=AC^2-AD^2$ . . . *(5)*

Գծանկարից երևում է, որ

$$BD=AB+AD,$$

հետևապես

$$BD^2=AB^2+2AB \cdot AD+AD^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

(5) և (6) հավասարություններից CD^2*-ու և* BD^2*-ու արժեքները դնելով (4) հավասարության մեջ՝ կստանանք.*

$$BC^2=AB^2+2AB \cdot AD+\underline{AD^2}+AC^2-\underline{AD^2}$$

կամ $BC^2=AB^2+AC^2+2AB \cdot AD$, *այն, ինչ պետք էր ապացուցել։*

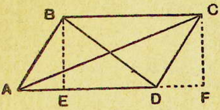
Հետագայում (§ 72) դուք կտեսնեք, որ 5, 6 և 7 թեորեմները հանդիսանում են եռանկյունաչափական մի ընդհանուր թեորեմի մասնավոր դեպքեր։

ԹԵՈՐԵՄ 8: **Զուգահեռագծի մեջ՝ անկյունագծերի քառակուսիների գումարը հավասար է նրա բոլոր կողմերի քառակուսիների գումարին:**

Տրված է ABCD *զուգահեռագիծը (գծ. 24)։*

Պետք է ապացուցել.

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2=CD^2+AD^2.$$



Գծ. 24

Ապացուցում։ *Իջեցնենք* $BE \perp AD$ *և* $CF \perp AD$։ *Այժմ գործադրելով 6-րդ թեորեմը* $\triangle ABD$*-ի նկատմամբ և 7-րդ թեորեմը* $\triangle ACD$*-ի նկատմամբ, կստանանք.*

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AD\cdot AE \quad . \ . \ . \ (7)$$

$$AC^2=AD^2+CD^2+2AD\cdot DF \quad . \ . \ . \ (8)$$

$\triangle ABE = \triangle DCF$ *(ինչու), այստեղից* $AE=DF$։ *Գումարելով (7) և (8) հավասարությունները՝ կստանանք.*

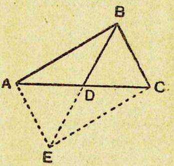
$$BD^2+AC^2=AB^2+AD^2-\underline{2AD\cdot AE}+AD^2-CD^2+\underline{2AD\cdot DF}.$$

Նկատելով, որ $AD=BC$ *և, հետևապես,* $AD^2=BC^2$, *բացի այդ ընդգծված անդամներն իրար վոչնչացնում են, ուստի կստանանք.*

$$BD^2+AC^2=AB^2+AD^2+BC^2+CD^2$$

Այս թեորեմը հնարավորություն է տալիս հաշվելու յեռանկյան միջնագիծը, յեթե հայտնի յեն նրա կողմերը։ Օրինակ. $\triangle ABC$*-ի մեջ (գծ. 25)* BD*-ն յենթադրենք* AC *կողմի միջնագիծն է (այսինքն* $AD=DC$*)։*

Նշանակենք AB, BC *և* AC *համապատասխանաբար* c*-ով,* a*-ով և* b*-ով և* BD*-ն՝* m_b*-ով։ Շարունակելով* BD, *վերցնելով* $DE=BD$ *և միացնելով* E *կետը* A *և* C *կետերի հետ, կստանանք զուգահեռագիծ (ինչու)* ABCE։ *8-րդ թեորեմի հիման վրա.*



Գծ. 25.

$$BE^2+AC^2=AB^2+BC^2+CE^2+AE^2$$

(կամ) $(2m_b)^2+b^2=2a^2+2c^2$

այստեղից $4m_b^2=2a^2+2c^2-b^2$

կամ

$$m_b=\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2}$$

Նշանակելով BC *և* AB *կողմերի միջնագիծը* m_a*-ով և* m_c*-ով, նույն դատողությամբ կստանանք հետևյալ ֆորմուլները.*

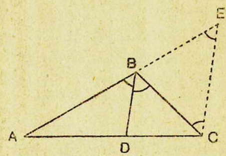
$$m_a=\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2} \quad \text{և} \quad m_c=\frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}$$

ԹԵՈՐԵՄ 9։ Եռանկյան ներքին անկյան կիսորդը բաժանում է այդ անկյան հանդիպակաց կողմն այնպիսի մասերի, վորոնք համեմատական են մյուս յերկու կողմերին։

Տրված է. ABC *յեռանկյան մեջ (գծ. 26)* BD-*ն ներքին* B *անկյան կիսորդն է, այսինքն* $\angle ABD = \angle DBC$։

Պետք է ապացուցել.

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$$



Գծ. 26

Ապացուցում։ *Տանենք* $CE \parallel BD$ *մինչև* AB *կողմի շարունակության հետ հատվելը, այստեղից.*

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BE} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

վորովհետև զուգահեռ ուղիղները, հատելով անկյան կողմերը, բաժանում են նրանց համեմատական հատվածների (այդ թեորեմը ձեզ հայտնի յե անցյալ տարվա ծրագրից)։ $\angle ABD = \angle BEC$, *վորպես համապատասխան անկյուններ,* $\angle DBC = \angle BCE$, *վորպես ներքին խաչադիր անկյուններ, իսկ* $\angle ABD=\angle DBC$ *ըստ պայմանի, այստեղից* $\angle BEC=\angle BCE$ *(ինչու), հետևապես* $BE=BC$, *վորովհետև յեռանկյան մեջ հավասար անկյունների դիմացը գտնվում են հավասար կողմեր։*

(9) հավասարության մեջ փոխարինելով BE-*ն իրեն հավասար* BC-*ով, կստանանք.*

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$$

Ապացուցեք հակադարձ թեորեմը.—**Յերբ յեռանկյան գագաթից տարված ուղիղը բաժանում է հանդիպակաց կողմն այնպիսի մասերի, վորոնք համեմատական են մյուս յերկու կողմերին, ապա նա յեռանկյան այդ գագաթի անկյան կիսորդն է։**

Ապացուցելու համար պետք է կատարել նույն կառուցումները, ինչպես ուղիղ թեորեմի համար, և կրկնել նույն դատողությունները, միայն տարբեր հաջորդականությամբ։

§ 40. ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ՄԱԿԵՐԵՍԻ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆԸ ՆՐԱ ՅԵՐԵՔ ԿՈՂՄԵՐՈՎ (ՀԵՐՈՆԻ ՖՈՐՄՈՒԼԸ)

Վերցնենք $\triangle ABC$ *(գծ. 22), վորի մեջ* $\angle A < 90^\circ$։

Նշանակենք BC, AC, AB *կողմերը և յեռանկյան մակերեսը* a, b, c *և* S *տառերով։*

Հայտնի յե, վոր յեռանկյան

$$S=\frac{b.BD}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Պյութագորի թեորեմի հիման վրա՝

$$BD=\sqrt{c^2-AD^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

6-րդ թեորեմի հիման վրա՝

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AC.AD$$

կամ

$$a^2=c^2+b^2-2b.AD,$$

որտեղից

$$AD=\frac{c^2+b^2-a^2}{2b},$$

Դնելով AD-ի այդ արժեքը (2) հավասարության մեջ, կստանանք.

$$BD=\sqrt{c^2\left(\frac{c^2+b^2-a^2}{2b}\right)^2},$$

կամ՝ հանրահաշվական հետևյալ ֆորմուլի հիման վրա՝

$$x^2-y^2=(x+y)\ (x-y),$$

$$BD=\sqrt{\left(c+\frac{c^2+b^2-a^2}{2b}\right)\cdot\left(c-\frac{c^2+b^2-a^2}{2b}\right)},$$

Կատարելով փակագծերի մեջ մատնանշված գումարում և հանումը, կստանանք.

$$BD=\sqrt{\frac{2bc+c^2+b^2-a^2}{2b}\cdot\frac{2bc-c^2-b^2+a^2}{2b}} \quad \ldots \quad (3)$$

Նկատելով, որ

$$2bc+c^2+b^2-a^2=(b+c)^2-a^2=(b+c+a)\ (b+c-a)$$

և $2bc-c^2-b^2+a^2=a^2-(b^2-2bc+c^2)=a^2-(b-c)^2=$

$$=(a+b-c)(a-b+c),$$

(3) հավասարությունը կարող ենք ձևակերպել այսպես.

$$BD=\sqrt{\frac{(b+c+a)\ (b+c-a)\ (a+b-c)\ (a-b+c)}{4b^2}}$$

կամ

$$BD=\frac{1}{2b}\sqrt{(b+c+a)\ (b+c-a)\ (a+b-c)\ (a-b+c)},$$

Դնելով BD այդ արժեքը (1) հավասարության մեջ և կրճատելով b-ի վրա՝ կստանանք.

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(b+c+a)\ (b+c-a)\ (a+b-c)(a-b+c)} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Յեռանկյան $a+b+c$ պարագիծը նշանակենք $2p$-ով։ Յեթե

$$a+b+c=2p,$$

ապա $a+b+c-2a=2p-2a$ կամ $b+c-a=2(p-a)$;
$a+b+c-2b=2p-2b$ կամ $a-b+c=2(p-b)$;
$a+b+c-2c=2p-2c$ կամ $a+b-c=2(p-c)$;

Այժմ (4) հավասարությունը կարելի յե գրել հետևյալ ձևով.

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{2p\cdot 2(p-a)\cdot 2(p-c)\cdot 2(p-b)}$$

Հանելով քառակուսի արմատ 16-ից, կրճատելով 4-ի վրա և ապա արտադրիչներ տեղափոխելով կստանանք.

$$\boxed{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Այդ է Հերոնի ֆորմուլը, վոր հնարավորություն է տալիս հաշվելու յեռանկյան մակերեսը նրա տված յերեք կողմերով։

Օրինակ. Յեթե

$a=13$ cm, $b=14$ cm և $c=15$ cm, ապա $2p=13+14+15$,

վորտեղից

$$p=21,\ p-a=8,\ p-b=7 \text{ և } p-c=6;$$

հետևապես

$$S=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=\sqrt{3\cdot 7\cdot 8\cdot 7\cdot 2\cdot 3}=\sqrt{4^2\cdot 3^2\cdot 7^2}=4\cdot 3\cdot 7=84\text{cm}^2.$$

Յեթե տված են յեռանկյան կողմերը, կարելի յե հաշվել նրա բարձրությունները, արտահայտելով յեռանկյան կողմերը յերկու յեղանակով, այն է՝ Հերոնի ֆորմուլով և սովորական ֆորմուլով, վորն արտահայտում է յեռանկյան մակերեսը նրա վորևե կողմի և համապատասխան բարձրության արտադրյալի կեսով։ Նշանակելով յեռանկյան a, b և c կողմերի համապատասխան բարձրությունները h_a, h_b, h_c-ով, կստանանք.

$$\frac{a\cdot h_a}{2}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

վորտեղից վորոշում ենք h_a։ Նույն ձևով կգտնենք նաև h_b և h_c։

Օրինակ։ Դնելով նախորդ օրինակի թվային արժեքները, կստանանք.
$\frac{13\cdot h_a}{2}=84$, վորտեղից $h_a=\frac{168}{13}=12\frac{12}{13}$ cm; $\frac{14\cdot h_b}{2}=84$ և այլն։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

403. Ապացուցեք, վոր յեթե շրջանագծի վորևե կետից տանենք տրամագիծ և լար, ապա լարը միջին համեմատական է տրամագծի և նրա վրա գտնվող իր պրոյեկցիայի նկատմամբ։

404. Ապացուցեք հետևյալ թեորեմը. եթե շրջանից դուրս վերցրած կետից տարված են շրջանին միքանի հատողներ, ապա յուրաքանչյուր հատողի և նրա արտաքին մասի արտադրյալն անփոփոխ թիվ է։

405. Հաշվեցեք այն հատվածը, վորը միջին համեմատական է հետևյալ հատվածների նկատմամբ. 1) 4 cm և 9 cm, 2) 16 cm և 25 cm, 3) 5 cm և 6 cm, 4) 2,4 cm և 1,5 cm։

406. Գրաֆիկորեն ցույց տվեք (գծանկարի ոգնությամբ), վոր a և b տված յերկու անհավասար հատվածների միջին թվաբանականին հավասար հատվածը մեծ է նույն a և b հատվածների միջին համեմատականին հավասար հատվածից։

ԾԱՆՈԹՈՒԹՅՈՒՆ.—Նույնը կարելի յե ապացուցել վերլուծական յեղանակով (մաթեմատիկական դատողությամբ)։ Յեթե $a > b$, ապա, ակներև է, վոր $(a-b)^2 > 0$ (ամեն տեսակի յերկու թվերի տարբերության քառակուսին միշտ դրական թիվ է) կամ $a^2-2ab+b^2 > 0$ կամ $a^2-2ab+b^2+4ab > 4ab$ կամ $(a+b)^2 > 4\,ab$ կամ $a+b > 2\sqrt{ab}$ կամ $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$։

407. Հաշվեցեք շրջանագծի կենտրոնից 10 cm հեռավորության վրա վերցրած կետից այդ շրջանագծին տարած շոշափողի յերկարությունը, յեթե շառավիղը հավասար է 6 cm։

408. Հաշվեցեք 1 cm շառավիղ ունեցող շրջանին արտագծած յեռանկյան կողմերը, յեթե այդ յեռանկյան գագաթները շրջանի կենտրոնից գտնվում են՝ $\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{5}$ cm և $\sqrt{10}$ cm հեռավորության վրա։

409. Յեռանկյան կողմերը սանտիմետրերով հավասար են՝ 1) 5, 12 և 13; 2) 12, 35 և 40; 3) 6, 7 և 8։ Յուրաքանչյուր դեպքում վորոշել, թե ինչպիսի անկյուն է յեռանկյան ամենամեծ անկյունը. սուր, ուղիղ թե բութ։

410. Յեռանկյան եջերը հավասար են 15cm և 20 cm։ Հաշվեցեք. 1) Եջերի պրոեկցիաները ներքնաձիգի վրա, 2) ուղիղ անկյան գագաթից ներքնաձիգի վրա իջեցրած ուղղահայացի յերկարությունը:

411. Հաշվեցեք հավասարակող սեղանի (տրապեցի) բարձրությունը, յեթե նրա զուգահեռ կողմերը հավասար են 48 cm և 30 cm, իսկ անզուգահեռ կողմերը հավասար են 41 cm-ի։

412. Մի ընդհանուր կետից շրջանագծին տարված են՝ հատող և շոշափող։ Վորոշեք շոշափողի յերկարությունը, յեթե նա 11 cm-ով մեծ է հատողի արտաքին մասից և նույնքանով փոքր է նրա ներքին մասից։

413. Վորոշեցեք մի կետից շրջանագծին տարված հատողը և շոշափողը, յեթե նրանց գումարը հավասար է 4dcm, իսկ հատողի արտաքին մասը 6 cm-ով փոքր է շոշափողից։

414. Շրջանից դուրս վերցրած կետից այդ շրջանին տարած շոշափողը հավասար է 7 cm-ի, իսկ նույն կետից տարած ամենամեծ հատողի ներքին մասը 7 cm-ով մեծ է արտաքին մասից։ Վորոշեք շրջանի շառավիղը։

415. Յեռանկյան հիմքն անկյան կիսողով բաժանվում է յերկու այնպիսի մասերի, վորոնցից մեկը 7 cm-ով մեծ է մյուսից և 5 cm-ով փոքր

է հարևան կողմից։ Վորոշեք յեռանկյան հիմքը, յեթե նրա յերրորդ կողմը հավասար է 12 cm-ի։

416. Զուգահեռագծի կողմերը հավասար են՝ 11 cm և 7 cm։ Վորոշեք նրա անկյունագծերը, յեթե նրանցից մեկը 2 cm-ով մեծ է մյուսից։

417. Զուգահեռագծերի անկյունագծերը հավասար են՝ 8 dcm և 15 dcm, իսկ կողմերից մեկը 5 cm-ով մեծ է մյուսից։ Վորոշեք կողմերը։

418. Ասում են, վոր «ուղիղ հատվածը բաժանված է 2 մասի միջին և արտաքին հարաբերությամբ», կամ, այլապես, «վոսկե բաժանումով», յեթե մեծ մասը միջին համեմատական է ամբողջ հատվածի և նրա փոքր մասի նկատմամբ։

Գտեք միջին և արտաքին հարաբերությամբ բաժանված 30 cm յերկարության հատվածի մեծ մասը։

419. Միջին և արտաքին հարաբերությամբ բաժանված հատվածի փոքր մասը հավասար է 8 cm-ի։ Վորոշեք այդ հատվածը։

420. Ներգծած կանոնավոր տասնանկյան կողմը՝ a_{10} հավասար է միջին և արտաքին հարաբերությամբ բաժանված շառավիղի մեծ մասին։ Արտահայտեք a_{10} շրջանի R շառավիղի միջոցով։

421. Մի կետից միաժամանակ սկսեցին շարժվել յերկու մարմին, հեռանալով միմյանցից փոխադարձ ուղղահայաց ուղղությամբ։ Մարմինները շարժվում են միակերպությամբ՝ առաջինը $5\frac{\text{m}}{\text{վայրկ.}}$ արագությամբ, յերկրորդը՝ $12\frac{\text{m}}{\text{վայրկ.}}$ արագությամբ։ Վորքան ժամանակից հետո մարմինների միջև յեղած տարածությունն ուղիղ գծով հավասար կլինի 845 m-ի։

422. Ուղղանկյուն յեռանկյանը ներգծած է մի շրջան, վորի շառավիղը հավասար է 4,5 cm-ի։ Ներքնաձիգը հավասար է 22,5 cm-ի։ Վորոշեք այդ յեռանկյան պարագիծը։

423. Յերկու իրար հատող լարերից մեկը բաժանվել է 3 : 8 հարաբերությամբ, իսկ մյուսը՝ 8 cm և 27 cm մասերի։ Վորոշեք առաջին լարի յերկարությունը։

424. Յերկու իրար հատող լարերից մեկը հավասար է 18 dcm-ի, իսկ մյուսի մասերը հավասար են՝ 4 dcm և 8 dcm։ Վորոշեք առաջին լարի մասերը։

425. Յերկու լար հատում են իրար շրջանի ներսը։ Առաջին լարի մասերը հավասար են՝ 4 cm և 9 cm, իսկ յերկրորդ լարի մասերից մեկը 5 cm-ով մեծ է մյուսից։ Վորոշեք յերկրորդ լարի յերկարությունը։

426. 16 cm յերկարության լարն ուղղահայաց է տրամագծին և բաժանում է նրան 2 մասի, վորոնցից մեկը 19 cm-ով փոքր է մյուսից։ Վորոշեք շրջանի շառավիղը։

427. Մի ընդհանուր կետից շրջանագծին տարված են՝ հատող և շոշափող։ Հատողի ամբողջ յերկարությունը հավասար է 24 cm-ի, իսկ նրա արտաքին մասը յերեք անգամ փոքր է շոշափողից։ Վորոշեք շոշափողի յերկարությունը։

§ 41. $x=\sqrt{a^2 \pm b^2}$; $x=\frac{ab}{c}$; $x=\frac{a^2}{c}$ և $x=\sqrt{ab}$ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ

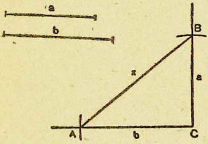
Այն հարցերում, վորտեղ տված հատվածները չափված են և արտահայտվում են վորևե յերկարության միավորի ոգնությամբ, ապա վորոնվող հատվածը գտնելու համար տված հատվածների թվային արժեքների հետ կատարում ենք այս կամ այն հանրահաշվական գործողությունները, վորոնք բղխում են վորոնվող հատվածի և տված հատվածների յերկրաչափական առընչություններից։ Բայց հատվածները յերբեմն տալիս են առանց մատնանշելու նրանց չափը։ Այդ դեպքում վորոշել վորոնվող հատվածը՝ նշանակում է այն կառուցել տված հատվածների ոգնությամբ, նախապես արտահայտելով նրան տված հատվածների միջոցով վորևե յերկրաչափական առընչության հիման վրա։

Դիտենք այդ տիպի միջանի ամենահասարակ և հաճախակի հանդիպող խնդիրները, յերբ անհայտ x *հատվածը վորոշվում է հետևյալ ֆորմուլներից մեկով.*

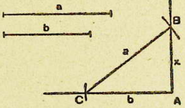
$$1)\ x=\sqrt{a^2+b^2}; \quad 2)\ x=\sqrt{a^2-b^2}; \quad 3)\ x=\frac{ab}{c};$$

$$4)\ x=\frac{a^2}{c}; \quad 5)\ x=\sqrt{ab};$$

1. $x=\sqrt{a^2+b^2}$: *Այդ ֆորմուլին հանգում ենք հետևյալ խնդիրը լուծելիս. վորոշել ուղղանկյուն յեռանկյան* x *ներքնաձիգը, յեթե հայտնի յեն նրա* a *և* b *էջերը։ Այսպես, ուրեմն,* x *հատվածը վորոշելու համար պետք է կառուցել ուղղանկյուն յեռանկյուն նրա տված յերկու էջերով։ Դրա համար կառուցում ենք յերկու փոխադարձ ուղղահայաց ուղիղներ և նրանց հատման* C *կետից նշանակում նրանցից մեկի վրա հատված* CB=a, *իսկ մյուսի վրա հատված* CA=b։ *Միացնելով* A *և* B *կետերը, ստանում ենք վորոնվող հատված* AB=x *(գծ. 27)։*



Գծ. 27.



Գծ. 28.

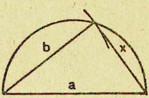
2. $x=\sqrt{a^2-b^2}$: *Այստեղ խնդիրը բերում է մեզ ուղղանկյուն յեռանկյան* x *էջի վորոշմանը, յերբ հայտնի յեն նրա* a *ներքնաձիգը և* b *էջը,*

այսինքն յեռանկյան կառուցմանը նրա տված ներքնաձիգով և էջով։ Ցույց տանք կառուցման 2 յեղանակ։

1 յեղանակ։ Կառուցում ենք յերկու փոխադարձ ուղղահայաց ուղիղներ։ Նրանց հատման A կետից նշանակում ենք նրանցից մեկի վրա հատված $AC=b$ և C կետից a շառավիղով տանում ենք մի այնպիսի աղեղ, վորը հատի ուղիղներից յերկրորդը։ Միացնելով հատման B կետը C կետի հետ, ստանում ենք վորոնվող ABC յեռանկյունը, վորի մեջ $AC=b$, $BC=a$ և $AB=x$ (գծ. 28)։

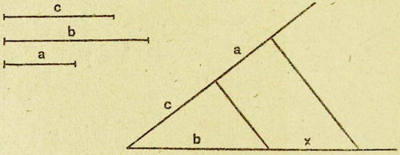
2 յեղանակ։ Տված a հատվածի վրա՝ վորպես տրամագծի վրա՝ կառուցում ենք կիսաշրջանագիծ, ապա a հատվածի ծայրից b շառավիղով տանում ենք մի այնպիսի աղեղ, վորը հատի այդ կիսաշրջանագիծը։ Միացնելով հատման կետը a հատվածի ծայրերի հետ, ստանում ենք վորոնվող ուղղանկյուն (ինչու) յեռանկյունը, վորի մեջ էջերից մեկը հավասար է b-ին, իսկ մյուսը—վորոնվող x հատվածին (գծ. 29)։

Ակներև է, վոր յերկու դեպքում էլ x հատվածի կառուցումը հնարավոր է միայն այն ժամանակ, յերբ $a>b$, հակառակ դեպքում՝ 1) կամ $\sqrt{a^2-b^2}$ կլինի կեղծ ($a<b$), և կառուցումն անհնարին, 2) կամ $\sqrt{a^2-b^2}$ հավասար կլինի 0-ի ($a=b$) և, հետևապես, $x=0$։



Գծ. 29.

3. $x=\frac{ab}{c}$, Այդ ֆորմուլին հանգում ենք հետևյալ խնդիրը լուծելիս. գտնել x հատվածը, վորը հանդիսանում է տված a, b և c յերեք հատվածների չորրորդ համեմատականը։ Դրա համար պետք է գտնել այն x հատվածը, վորը բավարարում է $\frac{c}{b}$ և $\frac{a}{x}$ համեմատությանը կամ մի այլ համեմատության, վորն ստացվում է տվածից անդամների տեղափոխությամբ։ Հիրավի, համեմատությունից հետևում է, վոր $x=\frac{ab}{c}$, Կառուցումը կատարվում է հետևյալ ձևով. վերցնում ենք մի կամավոր անկյուն (գծ. 30), նրա կողմերից մեկի վրա նշանակում ենք c և a հատվածները, իսկ մյուսի վրա՝ b հատվածը



Գծ. 30.

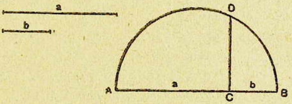
և ուղիղով միացնում c և b հատվածների ծայրերը։ Ապա a հատվածի ծայրից այդ ուղիղին տանում ենք մի զուգահեռ, վորը հատելով անկյան յերկմորդ կողմը, առաջացնում է վորոնվող x հատվածը, ինչպես այդ հետևում է համեմատական հատվածներին վերաբերյալ թեորեմից, վորոնք ստացվում են անկյան կողմերի վրա մի շարք զուգահեռ ուղիղների միջոցով (տես Աշխատանքի գիրք 7-րդ տարվա դասընթաց)։ Խնդիրը հնարավոր է, ինչպիսի հատվածներ էլ վոր լինեն տված a, b և c հատվածները։

4. $x=\frac{a^2}{c}$ Այս խնդիրը հանգում է նախորդ խնդրի լուծման այն պայմանի դեպքում, յերբ a և b հատվածներն իրար հավասար են, այսինքն b=a։ Հետևապես a-ն յերկրաչափական անընդմիջվող համեմատության ներքին անդամն է, իսկ x-ը՝ արտաքին անդամներից մեկը։ $\frac{c}{a}=\frac{a}{x}$։ Նախորդ խնդրի նման կառուցումն կատարվում է ըստ այն պայմանի, վոր b հատվածը վերցվում է a-ին հավասար։ Խնդիրը միշտ հնարավոր է։

5. $x=\sqrt{ab}$։ Այս խնդիրը տարբերվում է նախորդից նրանով, վոր այստեղ x-ն ինքն է հանդիսանում անընդմիջվող յերկրաչափական համեմատության ներքին անդամը. $a:x=x:b$։ Հետևապես $x=\sqrt{ab}$ ֆորմուլն ստացվում է հետևյալ խնդրի լուծման դեպքում. գտնել տված յերկու հատվածների միջին համեմատականը։ Կառուցումն հնարավոր է յերեք յեղանակով։

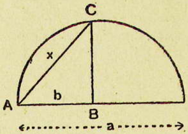
1 Ծանոթություն։ Ոգտվելով այն թեորեմից, վոր շրջանագծի վորևէ կետից տրամագծի վրա իջեցրած ուղղահայացը մի հատված է, վորը միջին համեմատական է տրամագծի վրա առաջացած հատվածների նկատմամբ, վարվում են այսպես.

Տված հատվածների գումարին հավասար՝ AB=a+b, հատվածի վրա, վորպես տրամագծի, կառուցում են կիսաշրջանագիծ։ a և b հատվածների միացման C կետից տրամագծին կանգնեցնում են ուղղահայաց, վորը հատում է շրջանագիծը D կետում, և ստանում x=DC վորոնվող հատվածը (գծ. 31)։



Գծ. 31.

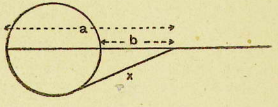
2 Ծանոթություն։ Նկատի ունենալով, վոր լարը միջին համեմատական է ամբողջ տրամագծի և նրա վրա գտնվող իր պրոեկցիայի նկատմամբ, տված հատվածներից մեկն ընդունում են վորպես տրամագիծ (թող այդ լինի a հատվածը) և նրա վրա կառուցում են կիսաշրջանագիծ։ Այդ տրամագծի ծայրից նշանակում են հատված AB=b, և ընդունելով այն վորպես անհայտ լարի պրոեկցիան, նրա B ծայրից կանգնեցնում են BC-ն՝ ուղղահայաց տրամագծին։ Միացնելով այդ ուղղահայացի և շրջանագծի հատման C կետը A կետի հետ, ստանում են վորոնվող x հատվածը AC լարի ձևով (գծ. 32)։



Գծ. 32

3 յեղանակ։ Կարելի յե, վերջապես, օգտվել այն թեորեմից, վոր յեթե շրջանից դուրս վերցրած կետից շրջանին տարված են վորևե շոշափող և հատող, ապա շոշափողը մի հատված է, վորը միջին համեմատական է ամբողջ հատողի և նրա արտաքին մասի միջև:

x հատվածի կառուցման համար տված մեծ հատվածից, (թող այդ լինի a հատվածը) հանում են փոքր b հատվածը և տարբերության վրա, վորպես տրամագծի վրա, կառուցում են շրջան (գծ. 33)։ Ապա a հատվածի արտաքին ծայրից տանում են այդ շրջանին շոշափող, վորը և կլինի վորոնվող x հատվածը։ Նըկատենք, վոր a և b հատվածների տարբերությունը կարևոր չէ, վոր անպատճառ լինի շրջանի տրամագիծը. նա կարող է լինել նաև շրջանի լարը։ Խնդիրը հնարավոր է a և b հատվածների ամեն տեսակ արժեքների դեպքում։



Գծ. 33.

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ Նախնական դիտողություններ։

Յեթե $x=\frac{abc}{de}$, ապա, յենթադրելով, վոր $y=\frac{ab}{d}$ և կառուցելով y հատվածը, կստանանք. $x=\frac{yc}{e}$։

Յեթե $x=a\sqrt{5}$, ապա x հատվածը կարելի յե կառուցել հետևյալ յերեք յեղանակներից մեկով. 1) $x=a\sqrt{5}=\sqrt{5a^2}=\sqrt{5a.a}$, այսինքն x-ը մի հատված է, վորը միջին համեմատական է $5a$ և a հատվածների նկատմամբ։ 2) $x=a\sqrt{5}=\sqrt{5a^2}=\sqrt{4a^2+a^2}=\sqrt{(2a)^2+a^2}$, այսինքն x-ն այն յեռանկյան ներքնաձիգն է, վորի էջերը կազմում են $2a$ և a։ 3) $x=a\sqrt{5}=$ $=\sqrt{5a^2}=\sqrt{9a^2-4a^2}=\sqrt{(3a)^2-(2a)^2}$, այսինքն x-ն այն յեռանկյան էջերից մեկն է, վորի ներքնաձիգն է՝ $3a$, իսկ մյուս էջը՝ $2a$։

Յեթե $x=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, ապա յենթադրելով, վոր $y=\sqrt{a^2+b^2}$ և կառուցելով y հատվածը, կստանանք. $x=\sqrt{y^2+c^2}$։

428. Կառուցեք հետևյալ հատվածները. 1) $x=a\sqrt{2}$, 2) $y=a\sqrt{3}$, վորտեղ a-ն տված կամավոր յերկարության հատված է։ Յենթադրելով, վոր

$a=3$ cm, ստացված x և y հատվածների յերկարությունները չափելով համեմատեք հաշվումներով ստացված $3\sqrt{2}$ cm և $3\sqrt{3}$ cm հատվածների յերկարությունների հետ։

Կառուցեք հետևյալ հատվածները.

429. 1) $x=a\sqrt{7}$; 2) $y=a\sqrt{10}$; 3) $z=a\sqrt{13}$։

430. $x=\frac{a^2b}{c^2}$; $x=\frac{mnpq}{klr}$; $x=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$։

431. $x=\frac{a\sqrt{8}}{3}$; $x=\frac{ab\sqrt{6}}{2}$; $x=\sqrt{ab+cd}$։

432. $x=\sqrt{a^2-b^2+c^2}$; $x=\sqrt{a^2+b^2-c^2+d^2}$։

433. Կառուցեք քառակուսի, վորը հավասարամեծ լինի. 1) տված ուղղանկյան, 2) տված ռոմբին, 3) տված յեռանկյան։

434. Կառուցեք քառակուսի, վորը հավասարամեծ լինի. 1) տված յերկու քառակուսիների գումարին, 2) տված յերկու քառակուսիների տարբերության, 3) տված յերեք քառակուսիների գումարին։

435. Կառուցեք մի քառակուսի, վորը հավասարամեծ լինի տված յերկու յեռանկյունների գումարին։

436. Կառուցեք տված հիմքով մի հավասարասրուն յեռանկյուն, վորը հավասարամեծ լինի տված քառակուսուն։

437. Կառուցեք տված ներքնաձիգով մի ուղղանկյուն յեռանկյուն, վորը հավասարամեծ լինի տված ռոմբին։

ԳԼՈՒԽ VII

ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՀԱՐՑԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄԸ

§ 42. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍԿԱՑՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Հավասարում կոչվում է այն հավասարությունը, վորը պարունակում է վորոշման յենթակա անհայտ մեծություններ:

Մի անհայտով հավասարումը, վորի ամբողջ հանրահաշվական բազմանդամը 0-ին հավասար ձևով է բերվում, կոչվում է n-րդ աստիճանի հավասարում, յեթե անհայտ մեծության ամենաբարձր աստիճանը հավասար է n-ի: Որինակ՝

$$x^2-3x+2-6x^5=0$$

հավասարումը կոչվում է 5-րդ աստիճանի հավասարում:

Լուծել հավասարումը—նշանակում է գտնել նրա արմատները: Հավասարման արմատներ կոչվում են անհայտ մեծությունների այն թվային արժեքները (**կամ տառային** *արտահայտությունները*), **վորոնք հավասարման անհայտ մեծությունների տեղը դնելուց հետո հավասարումը վեր են ածում նույնության:** *Դուք գիտեք, վոր առաջին աստիճանի մի անհայտով հավասարումն ունի միայն մի արմատ. իսկ քառակուսի հավասարումը միշտ ունենում է յերկու արմատ, դրանց թվում հաշվի առած նաև յերևակայականները: Բարձրագույն մաթեմատիկայի մեջ ապացուցվում է, վոր մի անհայտով n-րդ աստիճանի հավասարումն ունենում է n թվով արմատներ:*

Միքանի անհայտով միքանի հավասարումներ միասին կազմում են **հավասարումների սիստեմ:** *Սիստեմը կոչվում է* **վորոշյալ,** *յեթե հավասարումների թիվը հավասար է նրանց մեջ պարունակվող անհայտների թվին: Սիստեմը կոչվում է* **անորոշ,** *յեթե հավասարումների թիվն ավելի պակաս է, քան այդ հավասարումների մեջ պարունակվող անհայտների թիվը. այդպիսի դեպքերում հավասարումներն ունենում են անհամար շատ արմատներ: Անորոշ հավասարումների ամենահասարակ ձևն է առաջին աստիճանի յերկու անհայտով հավասարումը: Յեվ հիրավի, $5x-3y=2$ հավասարումն ունի անհամար թվով ամբողջ ու կոտորակ, դրական և բացասական զույգ արմատներ: Այդ բանում համոզվելու համար անհայտներից մեկնումեկին կամավոր նշանակություններ տվեք և վճռեցեք հավասարումը:*

43. ԴԵՊՔԵՐ, ՅԵՐԲ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ ԿՈՐՑՆՈՒՄ Է ԱՐՄԱՏՆԵՐ։ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԿՈՂՄՆԱԿԻ ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Մենք գիտենք, վոր հավասարման յերկու մասն էլ յեթե բազմապատկելու լինենք զերոյից տարբեր արտադրիչով, կստանանք մի հավասարում, վորը համազոր է տվածին, այսինքն կունենա նույն արմատները, ինչ վոր տված հավասարումն։

Յեթե հավասարման յերկու մասն էլ բազմապատկենք զերոյով, կստանանք մի հավասարում, վորը կբավարարի անհայտի անհամար շատ արժեքներին։ Օրինակ՝

$$x^2+35=12x$$

հավասարման արմատներն են $x_1=5$ $\quad x_2=7$

Բայց $(x^2+35)\cdot 0=12x\cdot 0$ *հավասարումից ստացվում է* $0=0$ *նույնությունը, x-ի ամեն տեսակ արժեքի դեպքում։ (Կատարեցեք վարժություններ և համոզվեցեք այդ բանում)։*

Կարող է պատահել, վոր հավասարման յերկու մասերն էլ բաժանվեն մի այնպիսի հանրահաշվական արտահայտության վրա, վորն իր մեջ պարունակվող անհայտին փոխարինող տառի վորևէ արժեքի դեպքում դառնում է զերո։

Ենթադրենք՝ տված է հետևյալ հավասարումը.

$$x^2=4x,$$

վորը բավարարվում է, յեթե $x_1=4$ *և* $x_2=0$։

Նրա յերկու մասից էլ հանենք 16։

$$x^2-16=4x-16$$

Պարզ յերևում է, վոր այս հավասարումը համազոր է տված հավասարմանը։

Այժմ էլ այդ հավասարումը պատկերացնենք հետևյալ ձևով.

$$(x+4)\ (x-4)=4\ (x-4)$$

և յերկու մասն էլ բաժանենք $(x-4)$*-ի վրա, վորից հետո կստանանք.*

$$x+4=4$$

այստեղ, յեթե $x=0$*-ի, ապա կստանանք* $4=4$ *նույնությունը, իսկ յեթե* $x_1=4$*, ապա կստանանք* $8=4$ *անհեթեթությունը։ Այս տեղի ունեցավ այն պատճառով, վոր հավասարման յերկու մասն էլ կրճատեցինք միևնույն* $x-4$ *արտադրիչով, վորը* $x_1=4$*-ի արժեքի դեպքում դառնում է զերո, և մենք այլևս իրավունք չունենք այդ արժեքը* $x+4=4$ *հավասարման արմատը համարելու։*

Յեվ իրավի, յեթե մենք չիմանայինք, վոր տված հավասարման արմատը $(x-4)$ *տարբերությունը դարձնում է զերո, ապա* $(x-4)$*-ով կրճատումը կվերածեր մեզ քառակուսի հավասարումը գծային հավասարման, այսինքն կկորչեր* $x=4$ *արմատը, վորն այդ վերջին հավասարման չի բավարարում։*

Ընդհանրապես պետք է նկատի ունենալ, վոր հավասարման յերկու մասերն էլ անհայտ պարունակող հանրահաշվական արտահայտության վրա բաժանելիս հավասարումը կարող է կորցնել արմատը։ Որինակ, յեթե տված է հետևյալ հավասարումը,

$$x^2-1=(x-1)(9-x),$$

ապա պարզ ձև տալուց հետո կստանանք.

$$x^2-5x+4=0,$$

վորը տալիս է $x_1=+4$ և $x_2=+1$ արմատները։

Այնինչ, յեթե մենք մինչև պարզ ձևի բերելը x^2-1 արտահայտեյինք $(x-1)(x+1)$ ձևով և հավասարման յերկու մասն էլ կրճատեյինք $(x-1)$-ով, ապա կստանայինք մի նոր հավասարում.

$$x+1=9-x,$$

վորն ունի միայն մի արմատ, այն է՝ $x=4$-ը. հետևապես հավասարումը կորցրեց $x=1$ արմատը. հենց այն արմատը, վորը $x-1$ տարբերությունը դարձնում է զերո։

Վերը նշածը նկատի ունենալով, հավասարման յերկու մասն անհայտ պարունակող արտահայտությունով բազմապատկելու դեպքում անհրաժեշտ է փորձել՝ արդյոք նոր հավասարումը համազոր կլինի՞ տված հավասարմանը, քանի վոր անհայտի վորոշ արժեքների դեպքում այդ արտահայտություն-ները կարող են դառնալ զերո։

Այդ ձևի խնդիրների հանդիպում ենք կոտորակ անդամներ ունեցող հավասարումներ լուծելիս, յերբ նրանց հայտարարը պարունակում է ան-հայտ։

Յենթադրենք՝ տված է հետևյալ հավասարումը.

$$\frac{x^2}{(x-3)^2}+\frac{4}{x-3}=\frac{2x+3}{(x-3)^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Հայտարարներից ազատվելու համար հավասարման յերկու մասերն էլ բազմապատկում ենք $(x-3)^2$-ով և ստանում.—

$$x^2+4(x-3)=2x+3$$

կամ

$$x^2+2x-15=0\ \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

վճռելով այդ հավասարումը, կստանանք.

$$x_1=+3 \qquad x_2=-5$$

Ստուգենք՝ ճիշտ են արդյոք այդ արմատները.

տեղադրելով $x=-5$՝ կստանանք.

$$\frac{25}{64}+\frac{4}{-8}=\frac{-7}{64}$$

կամ նույնություն.

$$\frac{25}{64}-\frac{32}{64}=-\frac{7}{64}$$

հետևապես —5 արժեքը տված հավասարման արմատն է։ Իսկ $x_1=3$ արժեքը տեղադրելով՝ կստանանք.

$$\frac{9}{0}+\frac{4}{0}=\frac{9}{0},$$

վորը զուրկ է վորևէ իմաստից,

Այնինչ, հավասարում (2)-ը յերկու արժեքով էլ բավարարվում է, հետևապես համազոր չէ հավասարում (1)-ին, վորովհետև վերջինս բավարարվում է միայն $x_2=-5$ արժեքով։

Ուրեմն $x_1=3$ արմատը մի կողմնակի կամ ավելորդ արմատ է և ստացվեց այն պատճառով, վոր հայտարարից ազատվելու համար հավասարման յերկու մասն էլ բազմապատկեցինք $(x-3)^2$-ով, իսկ այդ արտադրիչը $x=3$-ի դեպքում դառնում է զերո։

Քննենք միքանի օրինակներ։

I. $$\frac{6}{x-4}-x=\frac{39}{4-x} \qquad (3)$$

ազատվելով հայտարարներից՝ կստանանք.

$$6-x(x-4)=-39,$$

վորտեղից

$$x^2-4x-45=0 \qquad (4)$$

վորը վճռելով կստանանք.

$$x_1=9\ ,\quad x_2=-5$$

Յերկու արմատն էլ բավարարում են թե հավասարում (3)-ը և թե (4)-ը, վորովհետև դրանցից վոչ մեկը հայտարարը չի դարձնում զերո։

II. $$\frac{1}{1-x}=x+\frac{5x-4}{1-x} \qquad (5)$$

ազատվելով հայտարարներից և պարզ ձև տալուց հետո՝ կստանանք.

$$x^2-6x+5=0 \qquad (6)$$

վորտեղից $x_1=5$; $x_2=1$, բայց հավասարում (6)-ը համազոր չէ հավասարում (5)-ին, քանի վոր $x_1=5$-ի դեպքում հավասարում (5)-ից կստացվի նույնություն.

$$-\frac{1}{4}=5-\frac{21}{4},$$

իսկ $x_2=5$-ի դեպքում հավասարում (5)-ը կորցնում է իմաստը, այսինքն $x_2=1$ արմատը կլինի կողմնակի արմատ։

III. $$\frac{2-x}{1-x}-\frac{1}{2-2x}=x+\frac{1}{2-2x} \quad \dots\dots\dots (7)$$

Ազատվելով հայտարարից և պարզ ձև տալուց հետո՝ կստանանք.

$$x^2-2x+1=0 \quad \dots\dots\dots\dots (8)$$

այստեղից էլ $x_1=x_2=1$. բայց $x=1$-ի դեպքում հավասարում (7)-ն իմաստ չունի, այսինքն նա ընդհանրապես արմատներ չի ունենում։

§ 44. ԱՐՄԱՏԱՆԻՇԻ ՏԱԿ ԱՆՀԱՅՏ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՊԱՐԶ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Վճռենք այսպիսի մի խնդիր.—

Ուղղանկյուն յեռանկյան մի էջը 12 cm է, իսկ մյուս էջի և ներքնաձիգի գումարը հավասար է 24 cm-ի։ Գտնել ներքնաձիգն ու մյուս էջը։

Ընդունենք անհայտ էջի յերկարությունն x cm. այդ դեպքում, ըստ պայմանի, կստացվի.

$$x+\sqrt{x^2+144}=24,$$

այսինքն, մի հավասարում, վորի մեջ անհայտը մտնում է արմատանիշի տակ։ Մեկուսացնենք ռադիկալը (քառակուսի արմատը).

$$\sqrt{x^2+144}=24-x$$

հավասարման յերկու մասն էլ բարձրացնենք քառակուսի աստիճանի (ինչու համար).

$$x^2+144=576-48x+x^2.$$

Նման անդամների միացումն կատարելուց հետո՝ կստանանք.

$$48x=432,$$

այստեղից՝ $x=9$, այսինքն յեռանկյան անհայտ էջը հավասար է 9 cm-ի, հետևապես ներքնաձիգն էլ հավասար կլինի 15 cm-ի։

Ինչպես տեսնում ենք, հավասարումը տալիս է միայն մի արմատ. սակայն արմատից ազատվելը մտցնում է, այնպես ասած, կողմնակի վճիռներ։

Որինակ, վերցնենք հետևյալ հավասարումը.

$$x+\sqrt{16-x}=10 \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

մեկուսացնում ենք ռադիկալը.

$$\sqrt{16-x}=10-x$$

հավասարման յերկու մասն էլ բարձրացնում ենք քառակուսի աստիճան.

$$16-x=100-20x+x^2, \quad \dots\dots\dots (2)$$

իսկ միացում կատարելուց հետո ստանում ենք.

$$x^2-19x+84=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

այսինքն, քառակուսի հավասարում. հետևապես նա կունենա յերկու արմատ։

Վճռելով այդ հավասարումը՝ գտնում ենք.

$$x=\frac{19}{2}\pm\sqrt{\frac{361-336}{4}}=\frac{19\pm5}{2}$$

այսինքն $x_1=12$; $x_2=7$

Տեղադրման միջոցով իսկույն կարելի յե համոզվել, վոր $x_2=7$ արժեքը բավարարում ե (1), (2), (3) հավասարումներին, իսկ $x_1=12$ արժեքը բավարարում ե միայն (3) հավասարման և չի բավարարում (1), (2) հավասարումներին. հետևապես x-ի այդ արժեքը կողմնակի վճիռ ե, վորն ստացվել ե հավասարում (2)-ի յերկու մասերը քառակուսի աստիճան բարձրացնելու շնորհիվ ռադիկալից ազատվելու նպատակով։ Այլ խոսքով՝ հավասարում (3)-ը համազոր չե տված հավասարման։ Վորպեսզի $x_1=12$ արժեքը ռադիկալ պարունակող հավասարման արմատ դառնա, հարկավոր ե հավասարում (1)-ի մեջ արմատի առաջ դրված նշանը հակառակը դարձնել.

$$x-\sqrt{16-x}=10 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

այն ժամանակ

$$-\sqrt{16-x}=10-x,$$

և քառակուսի աստիճան բարձրացնելով՝ կստանանք.

$$16-x=100-20x+x^2$$

այսպիսով հավասարում (1)-ը համազոր ե (1) և (4) հավասարումների սիստեմին, վորոնք եյապես ձուլվում են մի հավասարման մեջ, յեթե հիշենք, վոր քառակուսի արմատի առաջ միշտ ել յերկու նշան ե հասկացվում.

$$x+(\pm\sqrt{16-x})=10$$

Հետևապես, հավասարում (3)-ը, բացառությամբ արմատ x_2-ի, վորը բավարարում ե հավասարում (1)-ին, ունի այդ հավասարման նկատմամբ կողմնակի արմատ, վորը բավարարում ե հավասարում (4)-ին։ Հավասարում (4)-ը կարելի յե համարել հավասարում (1)-ի լրացուցիչը։

Կարող ե պատահել, վոր ռադիկալ պարունակող հավասարումը չբավարարվի վոչ մի արմատով։

Որինակ՝ հավասարում

$$5-\sqrt{x}=6$$

տալիս է $x=1$ արժեքը, բայց այդ արմատը բավարարում է դրա լրացուցիչ հավասարում

$$5+\sqrt{x}=6\text{-ին}$$

Համեմատաբար ավելի բարդ են յերկու ռադիկալ պարունակող հավասարումները։ Օրինակ.

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1$$

Մեկուսացնում ենք առաջին ռադիկալը

$$\sqrt{x+1}=1-\sqrt{2x+3}$$

և հավասարման յերկու մասն էլ քառակուսի աստիճան բարձրացնում.

$$x+1=1+2x+3-2\sqrt{2x+3}$$

Միացում կատարելով և արմատը մեկուսացնելով՝ կստանանք.

$$2\sqrt{2x+3}=x+3$$

Յերկրորդ անգամ հավասարման յերկու մասը քառակուսի աստիճան ենք բարձրացնում, վորպեսզի ազատվենք մնացած ռադիկալից ևս.

$$4(2x+3)=x^2+6x+9$$

կամ

$$x^2-2x-3=0,$$

վորից հետո գտնում ենք.

$$x_1=3;\ x_2=-1։$$

Հեշտությամբ կարելի յե համոզվել, վոր $x_2=-1$ արմատը բավարարում է տված հավասարման, իսկ $x_1=3$ արմատը կողմնակի վճիռ է, վորը բավարարում է տվածին լրացուցիչ հավասարման.

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1$$

Ընդհանրապես, արմատանիշի տակ անհայտ պարունակող հավասարումները լուծելիս, ստացած արմատները միշտ պետք է փորձել, ստուգման յենթարկել՝ վորոշելու համար, թե հատկապես վո՛ր արմատներն են բավարարում տված հավասարման և վորոնք՝ լրացուցիչ հավասարման։

Մի օրինակ էլ լուծենք.

$$\sqrt{x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{a}$$

Յերկու մասն էլ քառակուսի աստիճան բարձրացնելով՝ կստանանք.

$$x+a-x+2\sqrt{x(a-x)}=a$$

կամ

$$2\sqrt{x(a-x)}=0$$

վորտեղից

$$x_1=0;\ x_2=a$$

Երկու արմատն էլ բավարարում են հավասարման։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ. Վճռեք հետևյալ հավասարումները.

438. $x+\sqrt{16x+x^2}=8$ 439. $\sqrt{x+7}=\sqrt{x}+\sqrt{5}$

440. $\sqrt{x+5}=1+\sqrt{x}$ 441. $1+\sqrt{2x}=\sqrt{x+7}$

442. $\sqrt{25x-1,5}-5\sqrt{x}+1=0$

443. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{6-x}=4$

444. $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-3}=10$

445. $\sqrt{x-7}-\sqrt{x+1}=-2$

446. $\sqrt{ax}+\sqrt{3ax-a^2}=a$

447. $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a+b}$

448. $x+\sqrt{2ax+x^2}=a$

449. $\sqrt{a+\sqrt{x}}-\sqrt{a-\sqrt{x}}=\sqrt{a}$

450. $\sqrt{4+x\sqrt{36+x^2}}=x+2$

451. $\sqrt{3x-3}+\sqrt{5x-19}=\sqrt{3x+4}$

452. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-10}=2\sqrt{x-2}$

453. $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}-\sqrt{x+21}=0$

454. $x=1+\sqrt{3x-5}$ 455. $\sqrt{17-\sqrt{x-8}}=4$

456. $2\sqrt{x+18}+\sqrt{4x-3}=15$

457. $\sqrt{25-x}=5-2\sqrt{x}$

458. $\left(\sqrt{7-x}-\sqrt{x-3}\right)^2=2\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{x-3}\right)$

459. $\sqrt{x+12}-\frac{10}{\sqrt{x+2}}=\sqrt{5x-56}$

460. $\sqrt{a-z}+\sqrt{z-b}=\sqrt{a-b}$

461. $\sqrt{37+x}-12+\sqrt{37-x}=0$

462. $\sqrt{17+x}+\sqrt{x-28}=15$

463. $3\sqrt{112-8x}=\sqrt{3x+7}+19$

464. $\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}=\sqrt{7x+1}$

465. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{7x-27}=\sqrt{3x+4}$

466. $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=6$

467. $2\sqrt{x}-3=x-2\sqrt{x}$

468. $7\sqrt{\frac{3}{2}x}-5=\sqrt{\frac{x}{5}+45}+\frac{7}{4}\sqrt{10x+56}$

469. $\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}=3$ 470. $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}}=\dfrac{1}{3}$

471. $\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=\dfrac{x}{2}$ 472. $\dfrac{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x-1}}=2$

473. *Այն վո՞ր թիվն է, վոր իր քառակուսի արմատից մեծ է 20-ով։*

§ 45. ԲԻԿՎԱԴՐԱՏ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Չորրորդ աստիճանի թերի հավասարումը, վորը պարունակում է զույգ աստիճանացույցով անհայտներ և ազատ անդամ, այսինքն հետևյալ ձևի հավասարում

$$ax^4+bx^2+c=0,$$

կոչվում է **բիկվադրատ** *(կրկնակի քառակուսի) հավասարում։*

Այդպիսի հավասարումը լուծելու համար վեր ենք ածում այն քառակուսի հավասարումների. մեկ լրիվ և յերկու թերի քառակուսի հավասարումների։ Դրա համար դիմում են **օժանդակ անհայտի.** *յենթադրելով, վոր*

$$x^2=y$$

ապա

$$x^4=y^2$$

և հավասարումը կընդունի հետևյալ ձևը.

$$ay^2+by+c=0։$$

Լուծելով այս հավասարումը՝ կգտնենք

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

հետևապես

$$y_1=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ և } y_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Վորովհետև y-ն այստեղ ունի յերկու արժեք, ուստի

$$x^2=y_1 \text{ և } x^2=y_2$$

այստեղից

$$x=\pm\sqrt{y_1} \text{ և } x=\pm\sqrt{y_2}$$

այսպիսով, ուրեմն, բիկվադրատ հավասարումն ունենում է ընդամենը **չորս** *արմատ.*

$$x_1=+\sqrt{y_1};\ x_2=-\sqrt{y_1};\ x_3=+\sqrt{y_2} \text{ և } x_4=-\sqrt{y_2}$$

Յեթե օժանդակ հավասարման y_1 և y_2 արմատները **դրական են,** *ապա բիկվադրատ հավասարման արմատներն* **իրական** *կլինեն։ Յեթե y_1 և y_2 բացասական են, բիկվադրատ հավասարման արմատները* **յերևակայական** *կլինեն։ Բայց այդ, յեթե y_1 և y_2 տարբեր նշաններ ունեն, բիկվադրատ* հավասարումն կունենա յերկու իրական և յերկու յերևակայական արմատներ։ Վերջապես, յեթե y_1 և y_2 էլ միաժամանակ յերևակայական են, ապա բիկվադրատ հավասարման չորս արմատն էլ յերևակայական կլինեն։

Որպես որինակ լուծենք հետևյալ հավասարումը.

$$x^4-25x^2+144=0$$

Ընդունելով $x^2=y$, կստանանք.

$$y^2-25y+144=0$$

վորտեղից և կստացվի

$$y=\frac{25}{2}\pm\sqrt{\frac{625}{4}-144}=\frac{25}{2}\pm\frac{7}{2},$$

այսինքն $y_1=16$; $y_2=9$; հետևապես,

$$x=\pm\sqrt{16} \text{ կամ } x=\pm\sqrt{9}$$

Այսպիսով, տված բիկվադրատ հավասարման համար կստանանք 4 իրական արմատներ.

$$x_1=+4;\ x_2=-4;\ x_3=+3 \text{ և } x_4=-3$$

Մի որինակ ևս լուծենք. տված է հավասարում՝

$$(z^2+z)^2-(z^2+z)=6$$

Բաց անելով փակագծերը և պարզ ձև տալուց հետո կստանանք.

$$z^4+2z^3-z-6=0$$

Մենք այս հավասարումը չեյինք կարող լուծել, բայց ուշադրություն դարձնելով տված հավասարման ձախ մասի վրա, տեսնում ենք, վոր անհրաժեշտ չէ անպայման բաց անել փակագծերը, այլ հարկավոր է ընդունել.

$$z^2+z=x,$$

վորից հետո կստանանք քառակուսի հավասարում՝

$$x^2-x-6=0$$

վորը կտա. $x_1=3$ և $x_2=-2$

այժմ կունենանք յերկու քառակուսի հավասարում.

$$z^2+z=x_1 \text{ կամ } z^2+z-3=0$$

և

$$z^2+z=x_2 \text{ կամ } z^2+z+2=0$$

բայց հավասարում՝ $z^2+z-3=0$ կտա յերկու իրական արմատ

$$z_1=\frac{-1+\sqrt{13}}{2} \text{ և } z_2=\frac{-1-\sqrt{13}}{2},$$

իսկ հավասարում՝ $z^2+z+2=0$ կտա յերկու յերևակայական արմատ

$$z_3=\frac{-1+\sqrt{-7}}{2} \text{ և } z_4=\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ Վճռեցեք հետևյալ հավասարումները.

474. $x^4+12x^2-64=0$

475. $3x^4-x^2-2=0$

476. $x^4-10x^2+61=0$

477. $3x^4-26x^2-9=0$

478. $x^4+9x^2+20=0$

479. $12x^4+x^2-6=0$

480. $x^4-60x^2+875=0$

481. $64x^4-244x^2+225=0$

482. $(z^2-z)^2-(z^2-z)=2$ Յենթադրեցեք $(z^2-z)=x$

483. $(x^2-5x)^2+5(x^2-5x)=36$

484. $x^4-4(a^2+b^2)x^2+4a^2b^2=0$

485. $4(x^2-x+1)^2-5(x^2-x+1)=21$. Յենթադրեցեք $(x^2-x+1)=z$

§ 46. ՅԵՐԿՈՒ ԱՆՀԱՅՏՈՎ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐ

Մենք գիտենք, վոր յերկու կամ ավելի հավասարումներ, վորոնք պարունակում են համապատասխան թվով անհայտներ, կոչվում են **սիստեմ**։ **Սիստեմի արմատներ կոչվում են անհայտների այն արժեքները, վորոնք սիստեմ կազմող բոլոր հավասարումները դարձնում են նույնություն**։

Յերկու հավասարում, վորոնցից մեկը պարունակում է առաջին աստիճանի անհայտներ, իսկ մյուսի մեջ անհայտներից թեկուզ մեկը **յերկրորդ աստիճանի** է, կազմում են **յերկրորդ աստիճանի սիստեմ**։ Սիստեմն առավել ևս յերկրորդ աստիճանի կկոչվի, յեթե հավասարումներից յուրաքանչյուրի մեջ վորևէ անհայտը **յերկրորդ աստիճանի** լինի։ **Յերկրորդ աստիճանի հավասարման սիստեմ** է նաև այն հավասարումը, վորի մեջ անդամներից մեկն ու մեկը պարունակում է առաջին աստիճանի յերկու անհայտների **արտադրյալը**, վորովհետև անհայտներից մեկը մյուսով փոխարինելուց հետո (տեղադրման միջոցով) այդ նույն անհայտի վերաբերմամբ ստացվում է **քառակուսի** հավասարում։ Վերցնենք այդպիսի սիստեմներ վճռելու միքանի դեպքեր։

1. $x+y=a \qquad xy=b$

Ավելի պարզ ու հասկանալի կլինի, յեթե վարվենք այսպես. մեզ հայտնի յեն յերկու թվերի գումարը և արտադրյալը, հետևապես, մենք կարող ենք այդ թվերը համարել այն քառակուսի հավասարման **արմատները** (ինչու), վորի յերկրորդ անդամի գործակիցն է $-a$, իսկ ազատ անդամն է $+b$, այսինքն

$$z^2-a \quad z+b=0$$

և վորովհետև

$$z=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$$

ապա

$$z_1=x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b} \text{ և } z_2=y=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$$

Օրինակ, ուղղանկյան չափումների գումարն է 21, մակերեսը՝ 108: Կազմում ենք $x+y=21$; $xy=108$ սիստեմը. x-ի և y-ի թվային արժեքները գտնելու համար դիմում ենք $z^2-21z+108=0$ օժանդակ քառակուսի հավասարման:

Հիրավի, լուծելով այս հավասարումը, գտնում ենք

$$z=\frac{21}{2}\pm\sqrt{\frac{441}{4}-108}=\frac{21\pm8}{2},$$

հետևապես $z_1=x=12$ և $z_2=y=9$

2. Նման ձևով լուծում են $x-y=a$; $xy=b$ սիստեմը: Այդ սիստեմը կարելի է ձևակերպել այսպես.

$$x+(-y)=a \qquad x\cdot(-y)=-b$$

և x-ն ու y-ը համարել հետևյալ քառակուսի հավասարման արմատներ՝

$$z^2-az-b=0$$

այն ժամանակ

$$z=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}$$

հետևապես

$$z_1=x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b} \text{ և } z_2=-y\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}$$

ուստի

$$y=-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}$$

Օրինակ, յերկու թվերի տարբերությունն է 4, արտադրյալը՝ 77: Այդ թվերը գտնելու համար կազմում ենք

$z-y=4$; $xy=77$ սիստեմը:

Համապատասխան քառակուսի հավասարումը կլինի.

$$z^2-4z-77=0$$

որտեղից կստացվի.

$$z=2\pm\sqrt{4+77}=2\pm9$$

այսինքն. $z_1=x=11$ և $z_2=-y=-7$,

հետևապես, $y=7$:

3. Տված է սիստեմ
$$\begin{cases} x^2+y^2=a & \dots\dots\dots\dots \\ x+y=b & \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Ավելի պարզ ու հասկանալի կլինի այսպես անել. հավասարում (2) յերկու մասերն էլ քառակուսի բարձրացնել.

$$x^2+2xy+y^2=b^2$$

Անհայտների քառակուսիների գումարը փոխարինելով (1) հավասարման a քանակությունով՝ կստանանք.

$$2xy+a=b^2$$

կամ

$$xy=\frac{b^2-a}{2}$$

և այն ժամանակ կունենանք

$$\begin{cases} x+y=b \\ xy=\dfrac{b^2-a}{2} \end{cases}$$ *սիստեմը, վորը կարելի յե վճռել*

1-ին օրինակի ձևով։

Որինակ, ուղղանկյուն յեռանկյան եջերի գումարը հավասար ե 13-ի, իսկ ներքնաձիգը՝ $\sqrt{85}$։

Գտնենք եջերը։

Կազմում ենք սիստեմ՝ $x+y=13 \quad x^2+y^2=85$

$$\begin{array}{r} x^2+y^2+2xy=169 \\ -\;x^2+y^2 \qquad =85 \\ \hline 2xy=84 \end{array}$$

կամ

$$xy=42$$

Ըստ գումարի 13-ի և արտադրյալ 42-ի կազմում ենք քառակուսի հավասարում.

$$z^2-13z+42=0$$

վորտեղից

$$z_1=x=7; \qquad z^2=y=6$$

4. Տված ե սիստեմ՝ $\begin{cases} x^2+y^2=a \quad \dots\dots\dots\dots (3) \\ xy=b \quad \dots\dots\dots\dots (4) \end{cases}$

Կրկնապատկում ենք (4) հավասարման յերկու մասը՝

$$2xy=2b \quad \dots\dots\dots\dots (5)$$

Գումարում ենք (3)-ի և (5)-ի համապատասխան անդամները.

$$x^2+y^2+2xy=a+2b \quad \dots\dots\dots (6)$$

Հանում ենք (5)-ի և (3)-ի համապատասխան անդամները.

$$x^2+y^2-2xy=a-2b \quad \dots\dots\dots (7)$$

ապա հանելով (6)-ից և (7)-ից՝ կստանանք.

$x+y=\pm\sqrt{a\pm2b}$ *(2 հավասարում)*

$x-y=\pm\sqrt{a-2b}$ *(2 հավասարում)*

Այս սիստեմի լուծումից ստացվում են հետևյալ չորս հավասարումների կոմբինացիաները.

$$1)\ \begin{cases} x+y=+\sqrt{a+2b} \\ x-y=+\sqrt{a-2b} \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x+y=+\sqrt{a+2b} \\ x-y=-\sqrt{a-2b} \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x+y=-\sqrt{a+2b} \\ x-y=+\sqrt{a-2b} \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} x+y=-\sqrt{a+2b} \\ x-y=-\sqrt{a-2b} \end{cases}$$

Օրինակ, ուղղանկյուն յեռանկյան ներքնաձիգն է 10, իսկ նրա մակերեսը 24։ Գտնենք էջերը։ Կազմենք սիստեմ՝

$$x^2+y^2=100 \text{ և } xy=48 \text{ կամ } 2xy=96$$

ապա

$$x^2+y^2+2xy=196 \text{ և } x^2+y^2-2xy=4$$

հետևապես

$$x+y=\pm 14 \text{ և } x-y=\pm 2$$

Այժմ կունենանք

$$1)\ \begin{cases} x+y=+14 \\ x-y=+2 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x+y=+14 \\ x-y=-2 \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x+y=-14 \\ x-y=+2 \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} x+y=-14 \\ x-y=-2 \end{cases}$$

Առաջին դեպքից ստացվում է՝ $x-8$; $y=6$։

Յերկրորդ դեպքից ստացվում է՝ $x=6$; $y=8$։

Այս արժեքները առաջարկված յերկրաչափական խնդրի պատասխան են։

Յերրորդ դեպքում ստանում ենք՝ $x=-6$; $y=-8$. չորրորդ դեպքում՝ $x=-8$ և $y=-6$։

Այս արժեքները խնդրի պայմաններին չեն բավարարում, սակայն բավարարում են կազմած հավասարման սիստեմին։

5. Տված է սիստեմ՝
$$\begin{cases} x^2-y^2=a \quad \dots\dots\dots (8) \\ xy=b \quad \dots\dots\dots (9) \end{cases}$$

Այս սիստեմն ավելի պարզ կլինի այսպես գրել.

$$x^2+(-y^2)=a$$

(9) հավասարման յերկու մասն էլ քառակուսի աստիճան բարձրացնենք.

$$x^2y^2=b^2$$

և փոխենք նշանները՝

$$x^2(-y^2)=-b^2$$

Յենթադրելով $x^2=u$ և $-y^2=v$, սիստեմը կստանա հետևյալ ձևակերպումը.

$$u+v=a$$
$$uv=-b^2$$

այսինքն վերածվեց (1)-ին դեպքին։

Գտնելով u և v, հեշտությամբ կգտնենք x-ը և y-ը։

Որինակ, սիստեմ՝

$$\begin{cases} x^2-y^2=13 \\ xy=42 \end{cases}$$

կարող է ձևակերպվել այսպես.

$$u+v=13$$
$$uv=-1764$$

այն ժամանակ

$$z^2-13z-1764=0$$

վորտեղից

$$z=\frac{13\pm 85}{2}$$

այսինքն

$$z_1=u=49 \text{ և } z_2=v=-36$$

կամ

$$x^2=49 \text{ և } y^2=36$$

Բայց այդ դեպքում

$$x=\pm 7 \text{ և } y=\pm 6$$

Եվ վորովհետև

$$xy=42=(+7)\cdot(+6)=(-7)\cdot(-6)$$

ապա ուրեմն հետևյալ արժեքների կոմբինացիաները կբավարարեն այս սիստեմը.

$$1)\begin{cases} x=+7 \\ y=+6 \end{cases} \text{ և } 2)\begin{cases} x=-7 \\ y=-6 \end{cases}$$

իսկ արժեքների հետևյալ կոմբինացիաները՝

$$3)\begin{cases} x=+7 \\ y=-6 \end{cases} \text{ և } 4)\begin{cases} x=-7 \\ y=+7 \end{cases}$$

կբավարարեն

$$x^2-y^2=13$$
$$xy=-42 \text{ սիստեմին։}$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ. *Վճռեցեք հետևյալ հավասարումների սիստեմները.*

486. $\begin{cases} x+y=12 \\ xy=35 \end{cases}$

487. $\begin{cases} x-y=8 \\ xy=20 \end{cases}$

488. $\begin{cases} x+y=19 \\ xy=84 \end{cases}$

489. $\begin{cases} x-y=11 \\ xy=80 \end{cases}$

490. $\begin{cases} x+y=4\frac{8}{15} \\ xy=\frac{2}{3} \end{cases}$

491. $\begin{cases} x-y=\frac{7}{12} \\ xy=\frac{1}{8} \end{cases}$

492. $\begin{cases} x+y=2,5 \\ xy=1,56 \end{cases}$

493. $\begin{cases} x-y=0,1 \\ xy=1,32 \end{cases}$

494. $\begin{cases} x^2+y^2=74 \\ x+y=12 \end{cases}$

495. $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ x-y=2 \end{cases}$

496. $\begin{cases} x^2+y^2=241 \\ x+y=19 \end{cases}$

497. $\begin{cases} x^2+y^2=208 \\ x-y=4 \end{cases}$

498. $\begin{cases} x^2-y^2=51 \\ x+y=17 \end{cases}$

499. $\begin{cases} x^2-y^2=65 \\ x-y=5 \end{cases}$

500. $\begin{cases} x^2+y^2=305 \\ x-y=9 \end{cases}$

501. $\begin{cases} x^2+y^2=157 \\ xy=66 \end{cases}$

502. $\begin{cases} x^2-y^2=25 \\ xy=12 \end{cases}$

503. $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ xy=6 \end{cases}$

504. $\begin{cases} x^2-y^2=105 \\ xy=44 \end{cases}$

505. $\begin{cases} x^2+y^2=1\frac{1}{144} \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases}$

506. $\begin{cases} x^2+y^2=2\frac{81}{400} \\ xy=1 \end{cases}$

507. $\begin{cases} x^2-y^2=0,21 \\ xy=0,1 \end{cases}$

508. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \\ x+y=5 \end{cases}$

509. $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6} \\ x-y=-3 \end{cases}$

510. $\begin{cases} (x+y^2-24(x+y)+140=0 \\ xy=24 \end{cases}$

511. $\left.\begin{aligned} x+y&=40-3\sqrt{x+y} \\ x^2+y^2&=457 \end{aligned}\right\}$

512. $\left.\begin{aligned} \sqrt{x}+\sqrt{y}&=5 \\ xy&=36 \end{aligned}\right\}$

513. $\left.\begin{aligned} \sqrt{x}-\sqrt{y}&=1 \\ \sqrt{xy}&=12 \end{aligned}\right\}$

514. $\left.\begin{aligned} \sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}&=\frac{3}{2} \\ x-y&=6 \end{aligned}\right\}$

515. $\left.\begin{aligned} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}&=\frac{5}{2} \\ x+y&=10 \end{aligned}\right\}$

§ 47. ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ԿԱԶՄԵԼԸ

Որինակով պարզենք յերկու անհայտով քառակուսի հավասարման սիստեմ կազմելու ձևերը։

Նույնչափ բեռներ ունեցող յերեք նավ պարպելու համար աշխատում են յերեք արտել։ Յերկրորդում 10 մարդ ավելի յե, իսկ յերրորդում 20 մարդ պակաս ե, քան առաջին արտելում։ Առաջին արտելը պարպելը վերջացրեց 10 ժամում, իսկ յերկրորդը, վորի յուրաքանչյուր բանվորը մի ժամում 80 kg ավելի յեր դուրս կրում, քան առաջին արտելի ամեն մի բանվորը, պարպումը վերջացրեց 8 ժամում։ Յերրորդ արտելը, վորի ամեն մի բանվորը ժամը 80 kg ավելի պակաս եր դուրս կրում, քան առաջին արտելինը, պարպումն ավարտեց 15 ժամում։ Քանի՞ բանվոր կար յուրաքանչյուր արտելում, և այս կամ այն արտելի ամեն մի բանվորը ժամը վորքան եր դուրս կրում։

Լուծում։ *Առաջին արտելը բաղկացած եր* x *թվով բանվորներից, և ամեն մի բանվորը ժամը դուրս եր կրում* y *կիլո․ հետևապես 10 ժամում դուրս կկրեին* 10xy *կիլո։ Յերկրորդ արտելում պայմանի համաձայն կար* x+10 *բանվոր, և յուրաքանչյուրը մի ժամում դուրս եր կրում* (y+80) kg. *հետևապես 8 ժամում կկրեյին 8* (x+10) (y+80) kg։ *Այսպիսով հնարավոր ե կազմել սիստեմի առաջին հավասարումը․*

$$10xy=8(x+10)(y+80) \quad \ldots \ldots (1)$$

Յերրորդ արտելում պայմանի համաձայն կար x—20 *մարդ, և յուրաքանչյուրը մի ժամում կրում եր* (y—80) kg. *հետևապես, 15 ժամում կկրեյին 15* (x—20) (y—80) kg.։

Կազմում ենք սիստեմի յերկրորդ հավասարումը․

$$10xy=15(x-20)(y-80) \quad \ldots \ldots (2)$$

Կրճատենք այդ յերկու հավասարումները․

$$5xy=4(x+10)(y+80)$$

$$2xy=3(x=20)(y-80)$$

Ազատվենք փակագծերից․

$$5xy=4xy+320x+40y+3200 \quad \ldots \ldots (3)$$

$$2xy=3xy-240x-60y+8000 \quad \ldots \ldots (4)$$

Գումարենք համապատասխան անդամները.

$$7xy=7xy+80x-20y+8000$$

կամ

$$20y-80x=8000$$

կրճատումից հետո կստանանք.

$$y-4x=400$$

իսկ այստեղից

$$y=400+4x \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

Միացում կատարելուց հետո հավասարում (3)-ը կդառնա.

$$xy=320x+40y+3200$$

Տեղադրելով y-ի արժեքը՝ կստացվի.

$$x(400+4x)=320x+40(400+4x)+3200$$

փակագծերը բաց անելուց և միացում կատարելուց հետո կստանանք.

$$x^2-20x-4800=0$$

որտեղից

$$x=10\pm\sqrt{100+4800}=10\pm70,$$

հետևապես, $x_1=80$; $x_2=-60$ (ակներև է, որ վերջին արմատը չի բավարարում)։

Հավասարում (5)-ից կգտնենք.

$$y=400+4x=720$$

Այսպես, ուրեմն, առաջին արտելում 80 հոգի էյին, և յուրաքանչյուրը մի ժամում դուրս էր կրում 720 kg., յերկրորդ արտելում՝ 90 հոգի, և յուրաքանչյուրը մի ժամում կրում էր 800 kg., յերրորդ արտելում 60 մարդ էր աշխատում, և յուրաքանչյուրը մի ժամում կրում էր 640 kg.։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

516. Յերկու թվերի արտադրյալն է 750, իսկ քանորդը՝ $3\frac{1}{3}$։ Գտեք այդ թվերը։

517. Յերկու թվերի քառակուսիների գումարն է m, իսկ նրանց քառակուսիների տարբերությունը՝ n։ Գտեք այդ թվերը։

518. 39-ը վերածեք այնպիսի յերկու գումարելիների, որ նրանց քառակուսիների գումարը հավասարվի 17199-ի։

519. 25-ը վերածեք այնպիսի յերկու գումարելիների, որ նրանց արտադրյալը հավասարվի 156-ի։

520. 30-ը վերածեք այնպիսի յերկու գումարելիների, որ նրանց քառակուսիների տարբերությունը հավասարվի 120-ի։

521. 72-ը վերածեք յերկու այնպիսի արտադրիչների, որ նրանց քառակուսիների գումարը հավասար լինի 108-ի։

522. Ուղղանկյան պարագիծը հավասար է 54m-ի, իսկ մակերեսը՝ 180m²-ի։ Գտեք կողմերը։

523. Գտեք ուղղանկյան կողմերը, յեթե նրա անկյունագիծը հավասար է 5,3 cm ի, իսկ պարագիծը՝ 14,6 cm-ի։

524. Ուղղանկյուն յեռանկյան էջերի գումարը հավասար է 26 dm-ի, իսկ մակերեսը՝ 84 dm²-ի։ Գտեք էջերի յերկարությունը։

525. Ուղղանկյուն յեռանկյան էջերի տարբերությունն է 17 cm, ներքնաձիգը՝ 85 cm։ Գտեք էջերը։

526. Հավասարասրուն յեռանկյան բարձրությունն է 15 cm, պարագիծը՝ 50 cm։ Գտեք կողմերը։

527. Յեռանկյան մակերեսն է 42 cm², Հիմքը բարձրությունից 5 cm-ով ավելի յէ։ Գտեք հիմքը։

528. Տրապեցի մակերեսն է 40 cm²։ Վորոշեցեք այդ տրապեցի բարձրությունը, յեթե նա 3 cm-ով կարճ է միջին գծից։

529. Շրջանի շառավիղը հավասար է 19,5 cm-ի։ Այդ շրջանին ներգծած ուղղանկյան պարագիծը հավասար է 102 cm-ի։ Վորոշեցեք ուղղանկյան կողմերը։

530. Ուղղանկյուն յեռանկյան մակերեսը հավասար է 54 cm²-ի։ Էջերի հարաբերությունն է $\frac{3}{4}$։ Գտեք էջերը։

531. Գրքի մի էջի տառերի թիվն է 1900։ Յեթե տողերի թիվը 2-ով ավելացնենք, իսկ յուրաքանչյուր տողի տառերի թիվը պակասեցնենք 3-ով, էջի տառերի թիվը կհավասարվի 1880-ի։ Էջը քանի՞ տողից և ամեն մի տողը քանի՞ տառից է բաղկացած։

532. Արհեստանոցի համար ցանկանում էին 60 ռուբլով գնել միքանի պտուտակային բանալիներ։ Բայց բանից յերևաց, որ յուրաքանչյուր բանալին մեկ ռուբլով պակաս արժեր, ուստի 3 բանալիով ավելի գնեցին։ Քանի՞ բանալի գնեցին։

533. Արհեստանոցում 32 կին ու տղամարդ էին աշխատում. տղամարդկանց աշխատավարձը յերկու ռուբլով ավելի յէր կանանց աշխատավարձից, բայց թե տղամարդկանց և թե կանանց ամենօրյա աշխատավարձը հավասար եր 60 ռուբլու։ Գտնել տղամարդկանց թիվը։

Բերենք մի օրինակ և ցույց տանք, թե ինչպես են վճռում յերկրորդ աստիճանի յերեք անհայտով յերեք հավասարումների սիստեմը։

Ուղղանկյուն յեռանկյան պարագիծն է 12, մակերեսը՝ 6։ Պահանջվում է գտնել կողմերը։

Վճիռը։ Ընդունենք էջերը x և y, իսկ ներքնաձիգը՝ z։ Այն ժամանակ ըստ պայմանի կունենանք.

$$x+y+z=12 \qquad \dots \dots (6)$$

$$xy=12 \qquad \dots \dots (7)$$

իսկ ըստ Պյութագորի թեորեմի՝

$$x^2+y^2=z^2 \qquad \dots \dots (8)$$

Հավասարում (6)-ից ունենք.

$$x+y=12-z$$

Հավասարման յերկու մասերը քառակուսի դարձնելով՝ կստանանք.

$$x^2+2xy+y^2=144=24z+z^2$$

Օգտվելով (7) և (8) հավասարումներից՝ կարող ենք գրել.

$$z^2+24=144-24z+z^2$$

Միացում կատարելով՝ կստանանք.

$$24z=120$$

Հետևապես

$$z=5$$

Բայց այդ դեպքում

$$x+y=7$$

$$xy=12$$

Նկատի առնելով գումարի և արտադրյալի հատկությունը, հեշտությամբ կգտնենք, որ

$$x=4;\ y=3 \text{ կամ } x=3;\ y=4$$

Վճռեցեք հետևյալ խնդիրը.

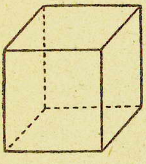
534. *Տաշած ուղղանկյուն գերանի յերեք չափումները միմյանց հարաբերում են այնպես, ինչպես 3:4:12։ Գերանի անկյունագիծը հավասար է 91 cm-ի։ Գտեք գերանի կողերի չափերը։*

ԳԼՈՒԽ VIII

ՈՒՂԻՂ ԳԾԵՐԻ ՅԵՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՓՈԽԱԴԱՐՁ ԴԻՐՔԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

§ 48. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՎՈՐՈՇՈՒՄՆԵՐ ՅԵՎ ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Ինչպես յերևում է այս նոր գլխի վերնագրից, դուք դառնում եք այն յերկրաչափական ձևերի ուսումնասիրության, վորոնք չեն տեղավորվում մի հարթության վրա։ Յերկրաչափության այս մասը կոչվում է **տարածաչափություն** (**ստերեոմետրիա**), վորը տարբերվում է **հարթաչափությունից** (**պլանիմետրիայից**), վորտեղ ուսումնասիրվում են այն գծերն ու ձևերը, վորոնք տեղավորվում են մի հարթության վրա։ Հարթաչափական կամ հարթ ձևերը միանգամայն պարզ պատկերանում են հարթ գծանկարի վրա իրենց բնական մեծությամբ կամ վորևէ մասշտաբով։ Հարթ գրատախտակի կամ հարթ թղթի վրա պատրաստված հարթ պատկերի գծանկարը չի աղավաղում պատկերի ձևը։ Որինակ, ուղղանկյունը պատկերանում է այնպես, վոր նրա անկյունները մնում են ուղիղ, իսկ հանդիպակաց կողմերը՝ հավասար և զուգահեռ, մի խոսքով՝ ուղղանկյունը գծանկարի վրա պահպանում է իր բոլոր հատկանիշները։ Սակայն յերբ մենք անցնում ենք յերկրաչափական մարմինների ուսումնասիրության կամ այն գծերի և պատկերների համեմատության, վորոնք չեն տեղավորվում մի հարթության վրա, ցանկանալով պատրաստել գծանկարը, մենք ստիպված ենք լինում հարթության վրա համենայն դեպս պատկերացնել այն, ինչ վոր նրա վրա չի զետեղվում։ Դրա համար էլ գծանկարն ստացվում է **պայմանական**, և պահանջվում է յերևակայության վորոշ լարվածություն գծանկարը հասկանալու համար։ Որինակ, 34-րդ գծանկարի վրա պատկերացրած է խորանարդը։ Դուք գիտեք, վոր խորանարդի բոլոր նիստերը քառակուսիներ են, մինչդեռ գծանկարի վրա քառակուսիների ձևով դուք տեսնում եք միայն յերկու նիստը (առաջինը և յետևինը), իսկ մնացած նիստերը պատկերանում են զուգահեռագծերով։ Այդպիսի գծանկարը կոչվում է **հեռանկարային** (**պերսպեկտիվ**)։ 34-րդ գծանկարի վրա խորանարդի միջանի կողերը գծված են կետային գծով. դրա մեջ վորոշ պայմանականություն կա։ Յերևակայենք, վոր խորանարդի



Գծ. 34.

նիստերն անթափանցիկ են, և պայմանավորվենք՝ տեսանելի կողերը պատկերացնել անընդհատ գծերով, իսկ անտեսանելի կողերը՝ կետային գծերով։ Այդ դեպքում անընդհատ և կետային գծերի զուգորդումը թույլ կտա մեզ հեշտությամբ ըմբռնել՝ վորտեղ են գծանկարի վրա խորանարդի առաջի կամ յետևի նիստերը, վորտեղ են նրա աջ կամ ձախ կողմնային նիստերը և այլն։

Յեթե յերկաթուղային գծով գնալու լինենք, ապա կտեսնենք, վոր զուգահեռ ռելսերը հորիզոնի վրա միանում են միմյանց հետ։ Զուգահեռ հեռագրաթելերը էլ միանում են միմյանց հետ հորիզոնի վրա։ Հեռագրական բոլոր սյուները յերևում են ուղղաձիգ գծերով, սակայն յուրաքանչյուր ավելի հեռու գտնվող սյուն պատկերանում է ավելի փոքր գծերով, քան ավելի մոտ կանգնածը։ Զուգահեռականության կամ առարկաների չափի այսպիսի տեսողական աղավաղումը տարածության մեջ առաջանում է մեր տեսողության կառուցվածքից և կոչվում է **հեռանկարային**։ Այն, ինչ վոր տեսնում ենք հեռանկարում, նույնն էլ պատկերացնում ենք հեռանկարային հարթ գծանկարի վրա։ Հիշեցեք, վոր **հեռանկարային գծանկարի վրա բոլոր ուղղաձիգ հատվածները մնում են ուղղաձիգ գծերով**, միայն կարող են փոփոխվել իրենց մեծությամբ։ Իսկ հորիզոնական հատվածները կարող են փոփոխված պատկերանալ վոչ միայն իրենց մեծությամբ, այլ և իրենց ուղղությամբ։ Միաժամանակ հորիզոնական հատվածները կարող են մնալ հորիզոնական գծերով։ Օրինակ, յերկաթուղային գծի զուգահեռ և հորիզոնական գծերով դասավորված գերանները հեռանկարում էլ յերևում են զուգահեռ և հորիզոնական գծերով, միայն հետզհետե փոքրանում են իրենց մեծությամբ։ Հորիզոնական հարթության թեք գծերով դասավորված հատվածները հեռանկարում փոփոխվում են ընդհանրապես թե իրենց ուղղությամբ և թե իրենց մեծությամբ, թեպետ կարող են լինել և բացառություններ։

Տարածաչափության ուսումնասիրության ժամանակ հեռանկարային գծանկարների ըմբռնողության տեսակետից դժվարությունների հանդիպելու դեպքում կարող են օգնության գալ ձեզ այդ գծանկարների կաղապարները։ Հարթություններ կաղապարելու համար վերցնում են ստվարաթղթի կտորներ, իսկ ուղղաձիգ ուղիղների համար — մետաղե կամ փայտե բարակ ձողիկներ։ Թեք ուղիղները կաղապարում են բարակ թելերով, վորոնց մի ծայրն ամրացնում են ստվարաթղթի վրա, իսկ մյուսը՝ ձողիկներին։ Պատրաստեցեք, օրինակ, այն հորիզոնական հարթության կաղապարը, վորին կանգնեցրած է ուղղահայաց (ուղղաձիգ ուղիղ) և այդ ուղղահայացի վորևէ կետից հարթության վրա իջեցրած են 3—4 զանազան յերկարության թեքերի հատվածներ։ Պատրաստեցեք այնուհետև ձեր այդ կաղապարի հեռանկարային գծանկարը։

2. **Տարածության վորևէ սահմանափակված մասը կոչվում է յերկրաչափական մարմին։** Այն սահմանը, վորը բաժանում է մարմինը նրան շրջապատող տարածությունից, կոչվում է **մարմնի մակերևույթ**։ Առհասարակ **մակերևույթ կոչվում է այն հետքը, վորն առաջանում է ուղիղ կամ կոր գծի շարժումից։** Մակերևույթները կարող են լինել չափազանց տարբեր ձևերի։ Վորևէ մակերևույթի վորևէ յերկու կետեր կարելի յե միացնել ուղիղ գծով։ Այդպիսի ուղիղներ մակերևույթի նոր կետերով կարելի

յե տանել այնքան, վորքան ցանկանանք։ Յեթե այդ դեպքում պարզվի, վոր յուրաքանչյուր ուղիղ իր բոլոր կետերով գտնվում է մակերևույթի վրա, ապա այդպիսի մակերևույթը կկոչվի հարթություն։ Բոլոր մակերևույթներից ամենամեծ նշանակությունն ունեցողը հարթությունն ե, վորը պետք ե պատկերացնել անվերջ շարունակված իր բոլոր կողմերով։ Բայց գծանկարի վրա հարթությունը պայմանորեն պատկերացնում են զուգահեռագծի ձևով, վորը նշանակում են լատինական այբուբենի վորևե գլխատառով, սովորաբար P, Q։ Գծանկար 35-ի վրա պատկերացրած ե P հարթությունը։ Այդպիսի զուգահեռագծի սուր անկյունը սովորաբար վերցնում են մոտավորապես հավասար 30-ի։

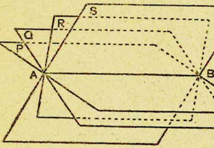
Գծ. 35.

3. Յեթե վորևե P հարթության յուրաքանչյուր կետը միաժամանակ պատկանում ե և մի ուրիշ Q հարթության, ապա այդ P և Q հարթությունների մասին ասում են, վոր նրանք ձուլվում են մի հարթության կամ, ուրիշ խոսքով, նրանք կազմում են մի հարթություն։

4. Հարթաչափությունից հայտնի յե, վոր յերկու կետ միանգամայն վորոշում են ուղիղ գծի դիրքը, այսինքն, վոր յերկու կետերի մեջ կարելի յե տանել միայն մի ուղիղ գիծ։ Տեսնենք քանի կետով ե վորոշվում հարթության դիրքը տարածության մեջ։

Յենթադրենք, վոր տարածության մեջ վերցրած ե վորևե կամավոր կետ։ Ակներև ե, վոր այդ կետով կարելի յե տանել հարթություններ, ինչքան էլ վոր ուզենք, կամ, ուրիշ խոսքով, միևնույն հարթությունն անցնելով տված կետով, տարածության մեջ կարող ե ընդունել ամեն տեսակի դիրք։ Այդ պատճառով էլ ասում են, վոր մի կետը չի վորոշում հարթության դիրքը տարածության մեջ։

Այժմ յենթադրենք, վոր տարածության մեջ վերցրած են վորևե A և B յերկու կետեր (գծ. 36)։ Ինչպես յերևում է 36-րդ գծանկարից, յերկու կետով կարելի յե տանել հարթություններ, վորքան վոր ուզենք, կամ, ուրիշ խոսքով, միևնույն հարթությունը, անցնելով տված յերկու կետով, տարածության մեջ կարող ե ընդունել զանազան դիրքեր։ Այդպես, ուրեմն, յերկու կետը նույնպես չեն վորոշում հարթության դիրքը տարածության մեջ։



Գծ. 36.

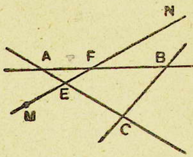
Վորովհետև տված A և B կետերով կարելի յե տանել ուղիղ գիծ, ապա կարելի յե ասել, վոր ուղիղ գիծը չի վորոշում հարթության դիրքը տարածության մեջ։

Հետևյալ թեորեմից կպարզվի, վոր հարթության դիրքը տարածության մեջ վորոշելու համար անհրաժեշտ է և բավական է ունենալ յերեք կետ միայն այն պայմանով, վոր նրանք չգտնվեն մի ուղիղի վրա։

ԹԵՈՐԵՄ։ Մի ուղիղի վրա չգտնվող յերեք կետերով կարելի յե տանել հարթություն, այն էլ՝ միայն մեկը։

Ապացուցում։ Տարածության մեջ յերևակայենք A, B և C յերեք կամավոր կետեր, վորոնք չեն գտնվում մի ուղիղ գծի վրա (դժվար չե պատկերացնել այդ առանց գծանկարի)։ A և B կետերով տանենք մի ուղիղ գիծ, իսկ այդ ուղիղ գծով տանենք մի կամավոր հարթություն։ Պտտելով այդ հարթությունը AB ուղիղի շուրջը, կտեսնենք, վոր նա տարածության մեջ ընդունում է զանազան դիրքեր, վորոնց մեջ կլինի այնպիսին, յերբ այդ հարթությունը կանցնի C կետով։ Այդպես, ուրեմն, մի ուղիղի վրա չգտնվող յերեք կետերով կարելի յե տանել հարթություն։ Այժմ ապացուցենք, վոր A, B և C վերցրած յերեք կետերով կարելի յե տանել միայն մի հարթություն։

Յենթադրենք, վոր A, B և C կետերով (գծ. 37) տարված են յերկու հարթություն. մեկը գծանկարի P հարթությունը, իսկ մյուսը գծանկարի վրա չնշանակված P_1 հարթությունը։ Հարթության վորոշման համաձայն AB, AC և BC ուղիղները գտնվում են թե P հարթության և թե P_1 հարթության վրա։ Վերցնենք P հարթության վրա կամավոր M կետը և տանենք MN ուղիղն այնպես, վոր նա հատի AC և AB ուղիղները համապատասխան E և F կետերում։ Այստեղից E և F կետերը, գտնվելով AC և AB ուղիղների վրա, գտնվում են նաև P_1 հարթության վրա, հետևապես MN ուղիղը ևս գտնվում է P_1 հարթության վրա, այդ պատճառով և M կետը, գտնվելով MN ուղիղի վրա, գտնվում է նաև P_1 հարթության վրա։ Իսկ MN ուղիղը կարելի յե տանել ինչպիսի ուղղությամբ էլ կամենանք և նրա վրա M կետը կարելի յե վերցնել վորտեղ էլ վոր կամենանք, հետևապես կարելի յե ասել, վոր P հարթության վորևե M կետը միաժամանակ պատկանում է նաև P_1 հարթությանը, իսկ այդ նշանակում է (3-րդ կետի հիման վրա), վոր P և P_1 հարթությունները ձուլվում և կազմում են մի հարթություն։



Գծ. 37.

Այստեղից յեզրակացնում ենք, վոր մի ուղիղի վրա չգտնվող յերեք կետեր միանգամայն վորոշում են հարթության դիրքը տարածության մեջ։

Բացի դրանից հարթության դիրքը տարածության մեջ վորոշվում է. 1) **ուղիղ գծով և նրանից դուրս գտնված կետով**, վորովհետև այդ դեպքում ունենք յերեք վորոշակի կետեր, վորոնցից յերկուսը վորոշում են տված ուղիղի դիրքը, իսկ յերրորդը գտնվում է այդ ուղիղից դուրս, 2) **յերկու զուգահեռ ուղիղներով**, վորովհետև այդ դեպքում ունենք յերեք վորոշակի կետեր, վորոնցից յերկուսը վորոշում են տված ուղիղներից մեկի դիրքը, իսկ յերրորդով անցնում է մյուս ուղիղը, վորը զուգահեռ է առաջինին, 3) **յերկու իրար հատող ուղիղներով**, վորովհետև այդ դեպքում ունենք յերեք վորոշակի կետեր, վորոնցից մեկը տված ուղիղների հատման կետն է, իսկ յերկուսը՝ զատ-զատ, հատման կետի հետ միասին վորոշում են տված ուղիղների դիրքը։

Մատնանշած հատկանիշները, վորոնք վորոշում են հարթության դիրքը տարածության մեջ, չափազանց կարևոր նշանակություն ունեն տարածաչափական թեորեմների մեծագույն մասի ապացուցման ժամանակ, վորովհետև հաճախ է լինում հենվել հարթաչափական թեորեմների վրա, իսկ այդ հնարավոր է միայն այն ժամանակ, յերբ դիտվող գծերի և ձևերի զուգորդումը գտնվում է մի հարթության վրա, ուրիշ խոսքերով՝ յերբ դրանց վրայով կարելի յե տանել հարթություն։

4. Հարթության վորոշման համաձայն ուղիղ գիծը, հարթության հետ ունենալով յերկու ընդհանուր կետ, գտնվում է նրա վրա իր մնացած բոլոր կետերով։ Ուղիղ գիծը հարթության հետ ունենալով միայն մի ընդհանուր կետ, կոչվում է այդ հարթության **հատող**։ *Այդ դեպքում ուղիղ գիծը հարթությունով բաժանվում է յերկու* **կես-ուղիղների**, *վորոնք տեղավորվում են հարթության տարբեր կողմերում։ Այն ուղիղը, վորը հարթության հետ չունի վոչ մի ընդհանուր կետ, կոչվում է* **զուգահեռ** *այդ հարթությանը, ուրիշ խոսքով՝ այդ ուղիղը չի* **հատում հարթությունը**։

5. Յերկու հարթություններ կարող են. 1) **իրար հատել**, *յեթե մի հարթության վոչ բոլոր, այլ միայն միքանի կետերը միաժամանակ պատկանում են նաև մյուս հարթությանը. 2)* **զուգահեռ** *լինել, յեթե նրանք չունեն վոչ մի ընդհանուր կետ։*

6. Գծանկար 36-րդը դիտելուց յերևում է, վոր.

1) յեթե P և Q հարթություններն ունեն A ընդհանուր կետ, ապա նրանք ունեն նաև մի **ընդհանուր ուղիղ**, *վորն անցնում է այդ կետով։*

2) **յերկու հարթությունները իրար հատում են միշտ մի ուղիղ գծով**։

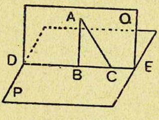
§ 49. ՈՒՂԻՂ ԳԻԾ ՅԵՎ ՆՐԱՆ ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆ

1. ՍԱՀՄԱՆՈՒՄՆ։ Հարթությանն ուղղահայաց կոչվում է այն ուղիղը, վորը հատելով հարթությունը, առաջացնում է ուղիղ անկյուններ այդ հարթության վրա գտնվող յեվ հատման կետով անցնող ամեն մի ուղիղի հետ։

ԹԵՈՐԵՄ 1. Հարթությունից դուրս գտնվող կետից այդ հարթությանը կարելի յե իջեցնել միայն մի ուղղահայաց, *վորովհետև ամեն մի յերկրորդ AC ուղիղ կլինի թեք (գծ. 38)։*

Տանելով AB և AC յերկու ուղղահայաց ուղիղներով Q հարթությունը (հնարավո՞ր է այդ), ինքնուրույն համոզվեցեք արտահայտված առաջադրության ճշմարտության մեջ։

ԹԵՈՐԵՄ 2։ Հարթության վրա վերցրած կետից կարելի յե կանգնեցնել միայն մի ուղղահայաց։



Գծ. 38.

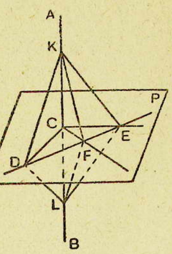
Ապացուցեք ինքնուրույն։

ԹԵՈՐԵՄ 3։ Այն ուղիղը, վորը հատելով հարթությունը՝ ուղղահայաց է այդ հարթության վրա գտնվող յեվ հատման կետով անցնող յերկու ուղիղներին, ապա նա ուղղահայաց է այդ հարթության վրա գտնվող յեվ նույն հատման կետով անցնող ամեն մի ուղիղի։

Տրված են. P հարթությունը (գծ. 39), AB ուղիղը, վորը հատում է P հարթությունը C կետում, CD, CE և CF ուղիղները, վորոնք գտնվում են

P հարթության վրա, AB ⊥ CD և AB ⊥ CE: Պետք է ապացուցել, որ AB ⊥ CF:

Ապացուցում: P հարթության վրա տանենք մի կամավոր DE ուղիղ, որը հատի CD, CE և CF ուղիղները. AB ուղիղի վրա C կետից վերցնենք CK և CL հավասար հատվածները և միացնենք K և L կետերը D, E և F կետերի հետ: Հաջորդաբար դիտենք հետևյալ հինգ զույգ յեռանկյունները:

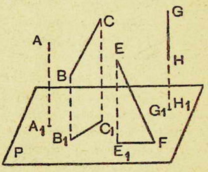


Գծ. 39.

1) △ KDC = △CDL, որովհետև CK=CL ըստ կառուցման, CD ընդհանուր է, իսկ ∠ KCD = ∠ DCL=d-ի (ըստ պայմանի), հետևապես DK=DL; 2) △KEC = △LEC (ինչու), այստեղից KE=EL; 3) △ DKE = =▽DEL ըստ III հատկանիշի, հետևապես ∠ KDF = ∠ FDL; 4) △ DKF = △ DLF (ինչու), այստեղից KF=FL; 5) △ CKF = =△CLF (ինչու), այստեղից ∠ KCF= =∠ FCL; որովհետև ∠ KCF և ∠ FCL կից են, ապա KL ⊥ CF կամ AB ⊥ CF (ինչու): P հարթության վրա CF ուղիղը կամավոր տարված է հատման C կետով, ապա նույն ձևով կարելի յե ապացուցել, որ AB ուղիղն ուղղահայաց է նաև ամեն մի ուղիղի, որը գտնվում է P հարթության վրա և անցնում է C կետով, հետևապես AB ուղիղն ուղղահայաց է P հարթությանը (ինչու):

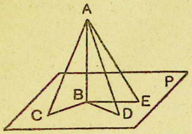
ԿԵՏԵՐԻ ՅԵՎ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ՊՐՈԵԿՑԻԱ՝ ԵՐԸ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ: ԹԵՔԵՐԻ ՅԵՎ ՆՐԱՆՑ ՊՐՈԵԿՑԻԱՆԵՐԻ ՓՈԽՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ: ՅԵՐԵՔ ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ԹԵՈՐԵՄԸ

2. ՍԱՀՄԱՆՈՒՄՆԵՐ: A կետի պրոեկցիան P հարթության վրա կոչվում է այն A_1 կետը, որտեղ A կետից իջեցրած ուղղահայացը հատվում է P հարթության հետ (գծ. 40): Ակներև է, որ հարթության վրա գտնվող կետն ինքը կլինի իր պրոեկցիան այդ հարթության վրա: **BC հատվածի պրոեկցիան հարթության վրա կոչվում է այն $B_1 C_1$ հատվածը, որը գտնվում է P հարթության վրա յեվ միացնում է B յեվ C կետերի պրոեկցիաները P հարթության վրա:** Յեթե EF հատվածը P հարթության հետ ունի ընդհանուր կետ, ապա EF հատվածի պրոեկցիան P հարթության վրա այն E_1F հատվածն է, որը գտնվում է P հարթության վրա և միացնում է F կետը E կետի պրոեկցիայի հետ P հարթության վրա: Յեթե GH հատվածն ունի հարթությանն ուղղահայաց ուղղություն, ապա նրա պրոեկցիան կլինի H_1 կետը:



Գծ. 40.

ԹԵՈՐԵՄ։ *Յեթե հարթությունից դուրս գտնվող կետից իջեցնենք նրա վրա ուղղահայաց և զանազան թեքեր, ապա.* **1)** **ուղղահայացն ավելի կարճ է, քան վորեվե թեք.** **2)** **հավասար թեքերն ունեն հավասար պրոյեկցիաներ.** **3)** **հավասար պրոյեկցիաներ ունեցող թեքերն իրար հավասար են,** **4)** **թեքերից մեծն ունի յեվ մեծ պրոյեկցիա.** **5)** **թեքերից այն է մեծ, վորի պրոյեկցիան մեծ է։**

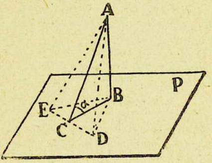


Գծ. 41.

Այս առաջադրության ճշմարտության մեջ համոզվելը դժվար չէ, յեթե յուրաքանչյուր զույգ AC և AB, AD և AB, AE և AB ուղիղներով (գծ. 41) տանենք հարթություն և կիրառենք հարթաչափության համապատասխան թեորեմները։ (Թողնում ենք այդ իրենք՝ աշակերտները կատարեն)։

Այստեղից հետևում է, վոր **կետի յեվ հարթության միջեվ յեղած հեռավորությունը չափվում է այդ կետից հարթությանն իջեցրած ուղղահայացով։**

Յերեք ուղղահայացների վերաբերյալ **ԹԵՈՐԵՄԸ։ Այն ուղիղը, վորն ուղղահայաց է թեքի պրոյեկցիային հարթության վրա, ապա նա ուղղահայաց է նայեվ այդ թեքին։**



Գծ. 42.

Տրված է. $AB \perp P$, AC—*թեք է և* $DE \perp BC$ *(գծ. 42)*։

Պետք է ապացուցել, վոր $DE \perp AC$։

Ապացուցումն։ DE *ուղիղի վրա* C *կետից վերցնենք* CD *և* CE *հավասար հատվածները և միացնենք* D *և* E *կետերը* A *և* B *կետերի հետ։ Այստեղից* $\triangle DBC = \triangle CBE$, *վորովհետև նրանց* BC *եջն ընդհանուր է, իսկ* DC *եջը հավասար է* CE *եջին ըստ կառուցման, հետևապես* $BD=BE$ *(ինչու)։ Ուրեմն* $AD=AE$, *վորպես հավասար պրոյեկցիաներ ունեցող թեքեր։ Այստեղից* $\triangle ACD=\triangle ACE$ *(ինչու), հետևապես* $\angle ACD=\angle ACE$։ *Վորովհետև* ACD *և* ACE *անկյունները կից են, ապա* $DE \perp AC$ *(ինչու)։*

§ 50· ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՈՒՂԻՂՆԵՐ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

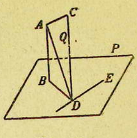
ԹԵՈՐԵՄ։ Յեթե յերկու զուգահեռ ուղիղներից մեկն ուղղահայաց է հարթությանը, ապա մյուսն էլ ուղղահայաց է այդ նույն հարթությանը։

Տրված է. $AB \parallel CD$ *և* $AB \perp P$ *(գծ. 43)*։

Պետք է ապացուցել, վոր $CD \perp P$։

Ապացուցումն։ AB *և* CD *ուղիղներով տանենք* Q *հարթությունը, վորը կհատի* P *հարթությունը վորևէ* BD *ուղիղով։ Վորովհետև* AB*-ն ուղ-*

ուղղահայաց է P հարթությանն ըստ պայմանի, ապա $AB \perp BD$, հետևապես և $CD \perp BD$ (ինչու)։ Այժմ P հարթության վրա տանենք $DE \perp BD$-ին և վերցնենք վորևէ AD թեքը, վորի պրոեկցիան կլինի BD-ն։ Այդ դեպքում DE ուղղահայաց լինելով BD պրոեկցիային, ուղղահայաց կլինի նաև AD թեքին և, հետևապես, Q հարթությանը, ուրեմն և CD ուղիղին։ Հետևապես CD ուղիղն ուղղահայաց է P հարթության վրա գտնվող DB և DE յերկու ուղիղներին, ուրեմն նա ուղղահայաց է այդ P հարթությանը (ինչու)։



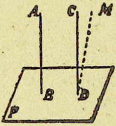
Գծ. 43.

ԹԵՈՐԵՄ։ Միևնույն հարթությանը տարած յերկու ուղղահայացները իրար զուգահեռ են։

Այս թեորեմը նախորդ թեորեմի հակադարձն է, վորովհետև ինչ վոր այնտեղ տրված էր պայմանում, այստեղ դառնում է վորոնվող յեզրակացություն, իսկ առաջվա յեզրակացությունը դառնում է պայման։ Վոչ ամեն թեորեմ ունի իր հակադարձը. որինակ, ձեզ հայտնի յե հետևյալ թեորեմը. հակադիր անկյունները իրար հավասար են. յեթե կազմենք դրա հակադարձ թեորեմը, ապա կստանանք սխալ հասկացողություն, այն է՝ յեթե անկյունները իրար հավասար են, ապա իրար հակադիր են։

Մեծ մասամբ հակադարձ թեորեմներն ապացուցվում են մի առանձին մեթոդով, այն է՝ **հասցնելով անհեթեթության**։ Այդ մեթոդը կայանում է նրանում, վոր վորոնվող յեզրակացությանն անում են հակառակ յենթադրություն, վորից հանում են անհեթեթության հասցնող տրամաբանական յեզրակացություններ. այդ համոզում է ընդունել, վոր կատարված յենթադրությունն անհնարին է, ուստի ճիշտ է միայն վորոնվող յեզրակացությունը։

Գործադրենք մատնանշված մեթոդը վերը բերած թեորեմն ապացուցելու համար։ Մենք կամենում ենք ապացուցել, վոր միևնույն հարթությանը տարած յերկու ուղղահայացներն իրար զուգահեռ են։ Հակառակ յեզրակացությունը կարող է լինել միայն հետևյալը, վոր այդ ուղիղները զուգահեռ չեն։ Յենթադրենք, վոր AB-ն զուգահեռ չէ CD-ին։ Այդ դեպքում տանենք D կետով DM ուղիղը՝ զուգահեռ AB-ին (գծ. 44), իսկ յեթե $DM \parallel AB$, ապա ուղիղ թեորեմի հիման վրա $DM \perp P$։ Ստացվեց, վոր D կետում P հարթությանը տարված են DC և DM յերկու ուղղահայացներ, այսինքն ստացվեց անհեթեթություն։ Ուրեմն չի կարելի յենթադրել, վոր AB-ն զուգահեռ չէ CD-ին, հետևապես հնարավոր է միայն այն յենթադրությունը, վոր $AB \parallel CD$, այսինքն թեորեմը ճիշտ է։



Գծ. 44.

ԹԵՈՐԵՄ։ Յեթե յերկու ուղիղներ զատ-զատ զուգահեռ են մի յերրորդ ուղիղի, ապա նրանք զուգահեռ են յեվ իրար։

Այս թեորեմն ապացուցելու համար պատրաստեցեք AB, CD և KM յերեք ուղիղների գծանկարը։ Թող $AB \parallel CD$ և $KM \parallel CD$։ Պետք է ապացուցել, վոր $AB \parallel KM$։ P հարթությունը տարեք ուղղահայաց CD ուղիղին։ Այդ դեպքում AB և KM ուղիղներն ուղղահայաց կլինեն այդ հարթությանը և, հետևապես, $AB \parallel KM$ (ինչու, առաջնորդվեցեք նախորդ թեորեմներով)։

§ 51. ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆԸ ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՈՒՂԻՂ

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: Հարթությունը և այդ հարթության վրա չգտնվող որևէ ուղիղ կոչվում են զուգահեռ, երբ անսահման շարունակելու դեպքում նրանք չեն հատվում:

Ակներև է, որ հարթությունից դուրս վերցրած կետով կարելի է տանել այդ հարթությանը զուգահեռ ուղիղներ, որքան էլ կամենանք:

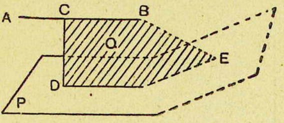
ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՅԵՎ ՈՒՂԻՂԻ ԶՈՒԳԱՀԵՌԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՏԿԱՆԻՇՆԵՐԸ

ԹԵՈՐԵՄ: Միևնույն ուղիղին ուղղահայաց հարթությունը և ուղիղն իրար զուգահեռ են:

Տրված է $AB \perp CD$ *և* $P \perp CD$ *(գծ. 45)։*

Պետք է ապացուցել, որ $AB \parallel P$*։*

Ապացուցումն: *Ենթադրենք, որ AB ուղիղը և P հարթությունը զուգահեռ չեն և հատվում են որևէ E կետում։ Տանենք իրար հատող AB և CD յերկու ուղիղներով Q հարթությունը (հնարավոր է այդ և չի՞ կարելի մի ուրիշ հարթություն ևս տանել)։ Այդ դեպքում Q և P հարթությունները կհատվեն DE ուղիղով։ Վորովհետև* $CD \perp P$*, ապա* $CD \perp DE$ *(ինչու)։ Ստացվում է, որ Q հարթության վրա CD-ին միևնույն E կետից իջեցրած են EC և ED յերկու ուղղահայացները, որն անհնարին է (ինչու), հետևապես պետք է ընդունել, որ* $AB \parallel P$*։*

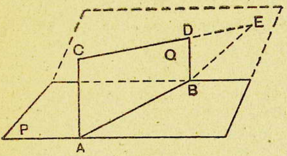


Գծ. 45.

ԹԵՈՐԵՄ: Յեթե ուղիղը զուգահեռ է հարթության վրա գտնվող որևէ ուղիղի, ապա նա զուգահեռ է և այդ հարթությանը:

Տրված է $CD \parallel AB$ *և AB գտնվում է P հարթության վրա (գծ. 46)։*

Պետք է ապացուցել, որ $CD \parallel P$*։*



Գծ. 46.

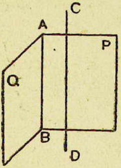
Ապացուցումն: *CD և AB ուղիղներով տանենք Q հարթությունը, որը կհատի P հարթությունը AB ուղիղով (ինչու)։ Այժմ յենթադրենք, որ CD ուղիղը և P հարթությունը զուգահեռ չեն իրար և հատվում են որևէ E կետում։ Այդ դեպքում հատման E կետը միաժամանակ գտնվելով P և Q հարթությունների վրա, պետք է գտնվի նրանց հատման AB ուղիղի վրա։ Հետևապես CD և AB ուղիղները պետք է հատվեն, իսկ այդ անհնարին է, վորովհետև նրանք ըստ պայմանի զուգահեռ են։ Ուրեմն պետք է ընդունել, որ* $CD \parallel P$*։*

ԹԵՈՐԵՄ *(նախորդ թեորեմի հակադարձը)։* P հարթությանը զուգահեռ CD ուղղով անցնող Q հարթությունը հատում է P-ն AB ուղղով, վորը զուգահեռ է CD-ին *(գծ. 46)։*

Այս թեորեմն ապացուցեք անհեդեղության հասցնող մեթոդով։

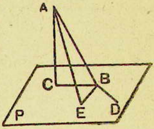
ԹԵՈՐԵՄ։ Հարթությանը զուգահեռ ուղիղն ամենուրեք հավասար հեռավորության վրա է գտնվում այդ հարթությունից *(ապացուցեք ինքնուրույն)։*

ԹԵՈՐԵՄ։ Յեթե CD ուղիղը *(գծ. 47)* զուգահեռ է յերկու իրար հատող P յեվ Q հարթություններին, ապա նա զուգահեռ է նրանց հատման AB ուղղին։



Գծ. 47.

Յեվ հիրավի, յեթե CD-ն զուգահեռ չլիներ AB-ին, ապա նրանք կհատվեյին, և հատման կետը, գտնվելով AB-ի վրա, պետք է միաժամանակ գտնվեր P և Q հարթությունների վրա, այսինքն CD պետք է հատեր և P և Q, վորն անհնարին է ըստ պայմանի, վորովհետև CD ∥ P *և* CD ∥ Q*։ Այդպես, ուրեմն,* AB *և* CD *ուղիղները չեն կարող հատվել, հետևապես* CD ∥ AB*։*



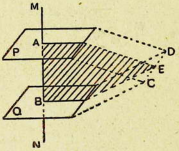
Գծ. 48.

ԹԵՈՐԵՄ։ Այն բոլոր BD, BC, BE յեվ այլն ուղիղներից, վորոնք գտնվում են P հարթության վրա յեվ անցնում են AB ուղղի յեվ P հարթության հատման B կետով, ամենափոքր անկյունը AB-ի հետ կազմում է նրա BC պրոյեկցիան P հարթության վրա։ *(Ապացուցեք ինքնուրույն)։ Այդ անկյունը կոչվում է* AB *թեքի անկյուն* P *հարթության նկատմամբ (գծ.48)։*

§ 52. ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

I. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՎՈՐՈՇՈՒՄՆԵՐ

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄՆ։ Հարթությունները կոչվում են զուգահեռ, յերբ նրանք անսահման շարունակելու դեպքում իրար չեն հատում։ *Զուգահեռ հարթությունների գոյությունն ունենալը, նրանց կառուցման յեղանակը և հարթությունների զուգահեռականության հիմնական հատկանիշը պարզվում են հետևյալ թեորեմներից։*



Գծ. 49.

ԹԵՈՐԵՄ։ Յեթե յերկու հարթություններ ուղղահայաց են միևնույն ուղղին, ապա նրանք իրար զուգահեռ են։ *Տրված է.* MN *ուղիղը և նրա վրա* A *և* B *յերկու կամավոր կետերը (գծ. 49)։ Տանենք այդ կետերով* MN *ուղղին ուղղահայաց* P *և* Q *հարթությունները (ինչու այդ հնարավոր է)։ Պետք է ապացուցել, վոր* P ∥ Q*։*

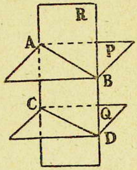
Ապացուցում։ *Ենթադրենք, որ* P *և* Q *հարթությունները հատվում են որևէ* CD *ուղղով։ Վերցնելով* CD *ուղղի վրա կամավոր* E *կետը, տանենք այդ կետով և* MN *ուղղով* R *հարթությունը (հնարավո՞ր է այդ և ինչո՞ւ), որը կհատի* P-*ն* AE *ուղղով, իսկ* Q *հարթությունը* BE *ուղղով։ Այդ դեպքում* MN ⊥ AE *և* MN ⊥ BE *(ինչո՞ւ), որն անհնարին է (ինչո՞ւ)։ Հետևապես մեր ենթադրությունը, որ* P *և* Q *հարթությունները հատվում են, անհնարին է. ուրեմն* P ∥ Q։

ԹԵՈՐԵՄ *(նախորդի հակադարձը)*։ **Եթե ուղիղն ուղղահայաց է երկու զուգահեռ հարթություններից մեկին, ապա նա ուղղահայաց է և մյուսին։**

Ապացուցեք այս թեորեմն անհեթեթության հասցնող մեթոդով։

ԹԵՈՐԵՄ։ Եթե երկու զուգահեռ հարթություններ հատվում են մի երրորդ հարթությունով, ապա հատման ուղիղները իրար զուգահեռ են։

Տրված է. P ∥ Q; R *հարթությունը հատում է* P-*ն* AB *ուղղով, իսկ* Q—CD *ուղղով (գծ. 50)։ Պետք է ապացուցել, որ* AB ∥ CD։



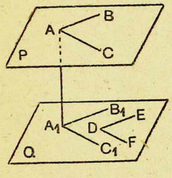
Գծ. 50.

Ապացուցում։ AB *և* CD *ուղիղները չեն կարող հատվել, որովհետև հակառակ դեպքում կհատվեին նաև* P *և* Q *հարթությունները, որը հակասում է պայմանին, հետևապես* AB ∥ CD։

ԹԵՈՐԵՄ։ Հարթությունից դուրս վերցրած կետով կարելի է տանել այդ հարթությանը զուգահեռ հարթություն, այն էլ միայն մեկը *(ինչո՞ւ)*։

2․ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԶՈՒԳԱՀԵՌԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՏԿԱՆԻՇՆԵՐԸ

Հարթությունների զուգահեռականության պայմաններից մեկն արտահայտում է միևնույն ուղղին տարած երկու ուղղահայաց հարթությունների վերաբերյալ թեորեմը։ Մյուս պայմանները պարզվում են հետևյալ երկու թեորեմներով։



Գծ. 51.

ԹԵՈՐԵՄ։ Եթե մի հարթության երկու իրար հատող ուղիղները համապատասխանաբար զուգահեռ են մյուս հարթության երկու իրար հատող ուղիղներին, ապա այդ հարթությունները իրար զուգահեռ են։

Տրված է. AB ∥ DE *և* AC ∥ DF *(գծ. 51)։*

Պետք է ապացուցել, որ P ∥ Q։

Ապացուցում։ A *կետից իջեցնենք* AA_1 *ուղղահայացը* Q *հարթության վրա և* A_1 *կետով տանենք* $A_1B_1 \parallel DE$ *և* $A_1C_1 \parallel DF$։ *Այդ դեպքում*

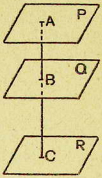
$A_1B_1 \parallel AB$ և $A_1C_1 \parallel AC$, որովհետև AB և A_1B_1 յերկու ուղիղները, վորոնք զուգահեռ են DE յերրորդ ուղիղին և AC և A_1C_1 յերկու ուղիղները, վորոնք զուգահեռ են DF յերրորդ ուղիղին, համապատասխանաբար զուգահեռ են նաև իրար։ Մյուս կողմից $AA_1 \perp A_1B_1$ և $AA_1 \perp A_1C_1$ (ինչու), հետևապես $AA_1 \perp AB$ և $AA_1 \perp AC$ (ինչու)։ Այստեղից հետևում է, վոր $AA_1 \perp P$-ին. ուրեմն $P \parallel Q$ (ինչու)։

ԹԵՈՐԵՄ։ Յեթե յերկու հարթություններ զատ-զատ զուգահեռ են մի յերրորդ հարթության, ապա նրանք զուգահեռ են յեվ իրար։

Տրված է $P \parallel R$ *և* $Q \parallel R$ *(գծ. 52)։*

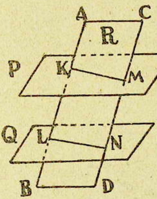
Պետք է ապացուցել, վոր $P \parallel Q$*։*

Ապացուցում։ *P հարթության վրա վերցրած կամավոր A կետից կանգնեցնենք* $AC \perp P$*։ Այդ ուղղահայացը կհատի R հարթությունը C կետում և Q հարթությունը B կետում (ինչու մի ուղղահայացը կհատի Q և R յերկու հարթությունները)։ Վորովհետև* $P \parallel R$ *ըստ պայմանի, ապա* $AC \perp R$ *(ինչու), վորովհետև* $Q \parallel R$ *ըստ պայմանի, ապա* $AC \perp Q$*։ Հետևապես* $P \parallel Q$*, վորովհետև P և Q զատ-զատ ուղղահայաց են AC-ին։*



Գծ. 52.

3· ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ



Գծ. 53.

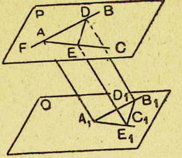
ԹԵՈՐԵՄ։ Զուգահեռ հարթությունների (P յեվ Q) միջեվ ընկած զուգահեռ ուղիղների հատվածները (KL յեվ MN) իրար հավասար են *(գծ. 53)։*

Տանենք AB և CD ուղիղներով R հարթությունը, կստանանք այդ հարթության վրա KMNL զուգահեռագիծը (ինչու), վորի հանդիպակաց KL և MN կողմերն իրար հավասար են։

Հետեվանք։ *Յերկու զուգահեռ հարթություններից մեկի բոլոր կետերը հավասարապես են հեռացված մյուսից, այդ պատճառով* **յերկու հարթությունների հեռավորությունը միմյանցից չափում են այն ուղիղ հատվածով, վորն ուղղահայաց է այդ յերկու հարթություններին** *(ինչու)։*

ԹԵՈՐԵՄ: Համապատասխանաբար զուգահեռ կողմեր ունեցող յերկու անկյունները գտնվում են զուգահեռ հարթությունների վրա յեվ հավասար են իրար, *յեթե յերկուսն էլ սուր են կամ բութ,* **կամ նրանց գումարը հավասար է յերկու ուղիղ անկյան,** *յեթե նրանցից մեկը սուր է, իսկ մյուսը բութ։*

Այս թեորեմը հարթաչափության համապատասխան թեորեմի ընդհանրացումն է, վորտեղ նման անկյունները դիտվում են մի հարթության վրա, իսկ այստեղ նրանք գտնվում են զանազան հարթությունների վրա։ Այդ հարթությունների զուգահեռականությունը հետևում է նախորդ թեորեմներից (ինչու), մնում է միայն ապացուցել, վոր անկյունները կամ հավասար են իրար, կամ նրանց գումարը հավասար է յերկու ուղիղ անկյան։



Գծ. 54.

Տրված է $AB \parallel A_1B_1$; $AC \parallel A_1C_1$; AB և AC (գծ. 54) գտնվում են P հարթության վրա, իսկ A_1B_1 և A_1C_1—Q հարթության վրա; $P \parallel Q$ (ինչու)։ Վերցնենք այն դեպքը, յերբ յերկու անկյուններն էլ սուր են։

Պետք է ապացուցել, վոր $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$։

Ապացուցումն։ Վերցնենք $AD = A_1D_1$ և $AE = A_1E_1$ ու միացնենք A և A_1, D և D_1, E և E_1 կետերը։

Վորովհետև AD հատվածը և հավասար է, և զուգահեռ A_1D_1 հատվածին, իսկ AE հատվածը և՛ հավասար է և զուգահեռ A_1E_1 հատվածին, ապա զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմերի հատկության հիման վրա AA_1 հատվածը և հավասար է և զուգահեռ EE_1 հատվածին, և AA_1 հատվածը և հավասար է և զուգահեռ DD_1 հատվածին, վորտեղից հետևում է, վոր DD_1 հատվածը և հավասար է և զուգահեռ EE_1 հատվածին (ինչու)։ Հետևապես DE հատվածը և հավասար է և զուգահեռ D_1E_1 հատվածին (ինչու), ուրեմն $\triangle ADE = \triangle A_1D_1E_1$ ըստ III հատկանիշի։ Հետևապես $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$։

Շարունակելով AB-ն՝ կստանանք FAC բութ անկյունը, իսկ $\angle FAC + \angle BAC = 2d$-ի (ինչու), մյուս կողմից $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ ըստ ապացուցման. փոխարինելով $\angle BAC$-ն իրեն հավասար $\angle B_1A_1C_1$-ով, կստանանք. $\angle FAC + \angle B_1A_1C_1 = 2d$-ի։

Նույն ձևով կարելի յե ապացուցել, վոր համապատասխանաբար ուղղահայաց կողմեր ունեցող անկյունները կամ հավասար են իրար, յեթե յերկուսն էլ սուր են կամ բութ, կամ նրանց գումարը հավասար է յերկու ուղիղ անկյան, յեթե նրանցից մեկը սուր է, իսկ մյուսը բութ։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

535. Ապացուցեք, վոր տված ուղիղով և նրա պրոեկցիայով վորևե հարթության վրա կարելի յե տանել միանգամայն վորոշակի հարթություն։

Ցուցմունք։ Ոգտագործեք մի հարթությանն ուղղահայաց յերկու ուղիղների վերաբերյալ առաջադրությունը և վերհիշեք հարթության դիրքը տարածության մեջ վորոշող պայմանները։

536. Ապացուցեք, վոր հարթությանը թեք հատվածի պրոեկցիան ավելի փոքր է, քան ինքը հատվածը, և վոր հարթությանը զուգահեռ հատվածի պրոեկցիան հավասար է այդ հատվածի յերկարությանը։

537. Հարթությունից 5,6 cm հեռավորության վրա գտնվող կետից իջեցված է 6,5 cm երկարությամբ մի թեք։ Հաշվեցեք այդ թեքի պրոեկցիայի երկարությունը։

538. Հատվածի ծայրերը հարթությունից գտնվում են 3,2 cm և 8 cm հեռավորության վրա։ Հաշվեցեք այդ հատվածի երկարությունը, եթե նրա պրոեկցիայի երկարությունը հավասար է 5,5 cm-ի։

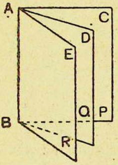
539. Հաշվեցեք թեքի երկարությունը, եթե նրա պրոեկցիայի երկարությունը հավասար է 7 cm, և եթե այդ թեքը հարթության հետ կազմում են 45^{0}-ի անկյուն։

ԳԼՈՒԽ IX

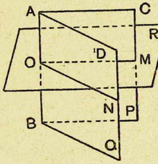
ՅԵՐԿՆԻՍՏ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ։ ՓՈԽԱԴԱՐՁ ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ ԲԱԶՄԱՆԻՍՏ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ։ ՊՐԻԶՄԱՆԵՐ ՅԵՎ ԲՈՒՐԳԵՐ

§ 53. ՍԱՀՄԱՆՈՒՄՆԵՐ ՅԵՎ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԴՐՈՒՅԹՆԵՐ

1. Տարածության այն մասը, վորը պարփակված է մի ուղղից յելնող յերկու կիսահարթությունների միջև, կոչվում է յերկնիստ անկյուն։ Կիսահարթությունների ընդհանուր ուղիղը կոչվում է յերկնիստ անկյան կող։ Յերկնիստ անկյունը նշանակում ու. կարդում ենք 4 տառով, վորոնցից միջին յերկուսը նշում են կողը, իսկ ծայրերինը՝ անկյան նիստերի վրա վերցրած վորևէ յերկու կետ։ Գծանկար 55-ում պատկերացրած է յերեք հարթություն՝ P, Q և R, վորոնք ունեն մի ընդհանուր AB ուղիղ և առաջացնում են յերեք յերկնիստ անկյուն՝ CABD, CABE և DABE։ Ակներև է, վոր յերկնիստ անկյուն CABE-ն հավասար է CABD և DABE յերկնիստ անկյունների գումարին։ Ակներև է նաև, վոր յերկնիստ անկյուններն առաջանում են հարթությունների հատումից։



Գծ. 55.



Գծ. 56.

2. Յեթե CABD յերկնիստ անկյան նիստերը հատենք վորևէ R հարթությամբ այնպես, վոր ուղղահայաց լինի նրա կողին՝ վորևէ O կետում, ապա այն ուղիղ գծերը, վորոնց վրայով R հարթությունը հատելու յե P և Q նիստերը, կառաջացնեն NOM գծային անկյունը, վորը համապատասխան կլինի CABD յերկնիստ անկյան (գծ. 56)։ Վորովհետև NO և MO ուղիղներն ուղղահայաց են AB կողին (ինչու), ապա ուրեմն գծային անկյուն

կարելի չէ ստանալ AB կողի վորևէ կետից P և Q հարթությունների վրայով AB-ին ուղղահայացներ տանելով։

3. Ակներև է, վոր ամեն մի յերկնիստ անկյուն կարելի յե հագցնել մյուսի մեջ այնպես, վոր նրանց կողերը համատեղվեն, և վոր յերկնիստ անկյուններից մեկի մի նիստը համատեղվի մյուս յերկնիստ անկյան մի նիստի հետ։ Յեթե այնուհետև մյուս յերկու նիստերն էլ համատեղվեն, ապա յերկնիստ անկյունները կհամարվեն **կոնգրուենտ** *կամ միմյանց* **հավասար**։ *Իսկ յեթե մյուս նիստերը չհամատեղվեն, այդ դեպքում այն յերկնիստ անկյունը կհամարվի փոքր, վորը կկազմի մյուսի մասը։*

Ամեն մի յերկու յերկնիստ անկյուն կարելի յե մեկը մյուսին կցել այնպես, վոր նրանց կողերը համատեղվեն և մեկի մի նիստը համատեղվի մյուսի մի նիստի հետ։ Յեթե այդ դեպքում մնացած յերկու նիստերը միմյանց շարունակություն կազմեն, ապա յերկնիստ անկյունները կկոչվեն **կից**։ *Իրար հավասար կից անկյունները կոչվում են* **ուղիղ**։

Ուղիղից փոքր յերկնիստ անկյունը կոչվում է **սուր**, *իսկ ուղիղից մեծը՝* **բութ**։

Յերկու յերկնիստ անկյուն կարելի յե միմյանց կցել այնպես, վոր նրանց կողերը համատեղվեն, իսկ անկյուններից մեկի մի նիստը մյուս անկյան նիստի շարունակությունը կազմի։ Յեթե այնուհետև յերկու անկյան մնացած նիստերը ևս իրար շարունակություն կազմեն, ապա այդպիսի յերկնիստ անկյունները կկոչվեն **հակադիր**։

Հագցնելով մի յերկնիստ անկյուն մյուսի մեջ, պարզ և հասկանալի կդառնան հետևյալ առնչությունները։

1) Հավասար յերկնիստ անկյունները ունեն հավասար գծային անկյուններ. 2) Յերկնիստ անկյուններից մեծն ունի յեվ մեծ գծային անկյուն։ Հակադարձը 1) Յերբ յերկնիստ անկյունների գծային անկյունները միմյանց հավասար են, ապա նրանց համապատասխան յերկնիստ անկյունները յեվս իրար հավասար են. 2) Յերկնիստ անկյուններից նա յե մեծ, վորի գծային անկյունը մեծ է։

Նույնը կարելի յե ասել և ուղիղ յերկնիստ անկյունների մասին. **1) Ուղիղ յերկնիստ անկյան գծային անկյունը հավասար է ուղիղ անկյան. 2) Յերկնիստ անկյունն ուղիղ է, յերբ նրա գծային անկյունն ուղիղ է։**

§ 54. ՅԵՐԿՆԻՍՏ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՉԱՓՈՒՄԸ

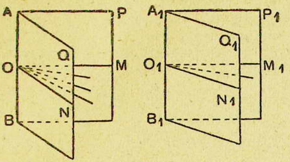
ԹԵՈՐԵՄ։ Յերկնիստ անկյունները համեմատական են իրենց գծային անկյուններին։ *Տված է. $\angle MON$ յերկնիստ անկյուն PABQ-ի գծային անկյունն է. $\angle M_1O_1N_1$-ը յերկնիստ անկյուն $P_1A_1B_1Q_1$-ի (գծ. 57) գծային անկյունն է։ Պահանջվում է ապացուցել, վոր*

$$\frac{PABQ}{P_1A_1B_1Q_1}=\frac{\angle MON}{\angle M_1O_1N_1}$$

Ապացուցում։ *1-ին դեպք. անկյուններ MON և $M_1O_1N_1$ համաչափ են։*

Ենթադրենք, որ այդ անկյունների ընդհանուր չափը m անգամ պարունակվում է անկյուն MON-ի և n անգամ անկյուն $M_1O_1N_1$-ի մեջ, ուր m և n-ը՝ ամբողջ թվեր են. այն ժամանակ

$$\frac{\angle MON}{\angle M_1O_1N_1}=\frac{m}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$



Գծ. 57.

Բաժանենք անկյուն MON-ը m հավասար մասերի և անկյուն $M_1O_1N_1$-ը n հավասար մասերի. մի կողմից AB և A_1B_1 ուղիղների, մյուս կողմից MON և $M_1O_1N_1$ անկյունները m և n հավասար մասերի բաժանող ուղիղներով անցկացնենք հարթություններ (հնարավո՞ր է այդ արդյոք)։ Այն ժամանակ յերկնիստ անկյուն $PABQ$ կբաժանվի m հավասար յերկնիստ անկյունների (ինչո՞ւ), իսկ յերկնիստ անկյուն $P_1A_1B_1Q_1$-ը՝ n նույնպիսի հավասար մասերի։ Հետևապես,

$$\frac{PABQ}{P_1A_1B_1Q_1}=\frac{m}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Բաղդատելով (1) և (2) հավասարումները՝ կգտնենք

$$\frac{PABQ}{P_1A_1B_1Q_1}=\frac{\angle MON}{\angle M_1O_1N_1}$$

2-րդ դեպք. անկյուններ MON և $M_1O_1N_1$-ը անհամաչափելի յեն։

Բաժանենք անկյուն $M_1O_1N_1$ q հավասար մասերի, վորտեղ q կամավոր ամբողջ թիվ է։ Անկյուն MON չի կարող իր մեջ ամբողջ թիվ անգամ նույնպիսի հավասար մասեր պարունակել. յենթադրենք $\angle MON$ պարունակում է իր մեջ նույնպիսի p մասեր պակասորդով և նույնպիսի $p+1$ մասեր հավելորդով, ուր p-ն ամբողջ թիվ է։ Այն ժամանակ կստանանք մոտավոր ճշտությամբ հարաբերություն

$$\frac{\angle MON}{\angle M_1O_1N_1}=\frac{p}{q}\left(\frac{1}{q}\text{-ի մոտավոր ճշտությամբ}\right) \quad \ldots (3)$$

Մի կողմից AB և A_1B_1 կողերի, մյուս կողմից MON անկյունը p մասերի և անկյուն $M_1O_1N_1$ q մասերի բաժանող ուղիղներով անցկացնենք հարթություններ. այն ժամանակ $P_1A_1B_1Q_1$ կբաժանվի q հավասար յերկնիստ անկյունների (ինչո՞ւ), իսկ $PABQ$ կպարունակի p քանակությամբ նույնպիսի յերկնիստ անկյուններ պակասորդով և $p+1$ քանակությամբ հավելորդով։ Հետևապես, կստանանք մոտավոր ճշտությամբ հարաբերություն՝

$$\frac{PABQ}{P_1A_1B_1Q}=\frac{p}{q}\left(\frac{1}{q}\text{-ի մոտավոր ճշտությամբ}\right)\;.\;.\;.\;(4)$$

Բաղդատելով (3) և (4) հավասարումները՝ կստանանք

$$\frac{PABQ}{P_1A_1B_1Q_1}=\frac{\angle MON}{\angle M_1O_1N_1}$$

Այս թեորեմից կարելի յե հանել յերկնիստ անկյունների չափման հետևյալ յեզրակացությունը. **յերկնիստ անկյունները չափվում են իրենց համապատասխան գծային անկյուններով.** *այսինքն, յերկնիստ անկյունը պարունակում է այնքան «յերկնիստային» աստիճաններ և աստիճանի մասեր, վորքան անկյունային աստիճաններ և աստիճանի մասեր է պարունակում իր մեջ համապատասխան գծային անկյունը։ Յերկնիստային աստիճան համարվում է այնպիսի յերկնիստ անկյունը, վորի գծային անկյունը հավասար է մի անկյունային աստիճանի։*

Մի հարթության մյուսին թեքի անկյունը չափվում է այդ հարթություններով առաջացած յերկնիստ անկյան գծային անկյունով։

§ 55. ՓՈԽԱԴԱՐՁ ԻՐԱՐ ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

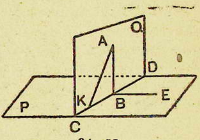
ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ։ Յերկու հարթություններ համարվում են փոխադարձ իրար ուղղահայաց, յերբ հատվելով առաջացնում են ուղիղ յերկնիստ անկյուն։

ՅԵՐԿՈՒ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑ ԼԻՆԵԼՈՒ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ

ԹԵՈՐԵՄ։ Յերկու հարթություն փոխադարձ իրար ուղղահայաց են, յերբ նրանցից մեկն անցնում է այն ուղիղի վրայով, վորն ուղղահայաց է մյուս հարթությանը։

Տված է. $AB \perp P$. *հարթություն* Q *անցնում է* AB*-ի վրայով։ Պահանջվում է ապացուցել, վոր* $Q \perp P$ *(գծ. 58)։*

Ապացուցում։ P *հարթության վրա* B *կետով անցկացնենք* BE *ուղիղն այնպես, վոր ուղղահայաց լինի* P *և* Q *հարթությունների հատման* CD *ուղիղին։ Վորովհետև* $AB \perp CD$ *(ինչու), ապա* $\angle ABE$ *գծային անկյունն է* P *և* Q *հարթություններով առաջացած յերկնիստ անկյան։ Բայց* $\angle ABE$ *ուղիղ է (ինչու)։ Հետևապես յերկնիստ անկյուն* $QDCP$ *էլ ուղիղ է (ինչու)։*



Գծ. 58.

Ակներև է, վոր տված հարթությանը տարած ուղղահայաց ուղիղով այդ հարթությանը կարելի յե **անհամար** *ուղղահայաց հարթություններ անցկացնել։*

ԹԵՈՐԵՄ։ Յերկու հարթություն փոխադարձ իրար ուղղահայաց են, յերբ նրանցից մեկն ուղղահայաց է մյուս հարթության վրա ցանվող ուղիղին։

Տված է. BE ուղիղը գտնվում է P հարթության վրա. $Q \perp BE$. Հարթությունները P և Q-ն հատվում են CD ուղիղով (ինչու)։ Պահանջվում է ապացուցել, որ $Q \perp P$ (գծ. 58)։

Ապացուցում։ *Անցկացնենք Q հարթության վրա $BA \perp CD$։ Որովհետև $Q \perp BE$, ապա $BC \perp CD$ (ինչու). հետևապես, $\angle ABE$ գծային անկյուն է P և Q հարթություններով առաջացած յերկնիստ անկյան։ Որովհետև $Q \perp BE$, ապա $BE \perp BA$ (ինչու). հետևապես, $\angle ABE = d$, այսինքն P և Q հարթությունները փոխադարձաբար ուղղահայաց են։*

§ 56. ՓՈԽԱԴԱՐՁ ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Յերկու հարթությունների ուղղահայաց լինելու պայմաններից բղխում են այդ հարթությունների հետևյալ հատկությունները.

1. **Այն ուղիղը, վորն ուղղահայաց է փոխադարձ ուղղահայաց հարթությունների հատման գծին յեվ գտնվում է դրանցից մեկի վրա, ուղղահայաց է նայեվ մյուս հարթությանը։**

2. **Այն ուղիղը, վորն ուղղահայաց է փոխադարձ ուղղահայաց հարթություններից մեկին, գտնվում է մյուս հարթության վրա, յերբ նրա հետ ունի մի ընդհանուր կետ։**

3. **Մի յերրորդ հարթության ուղղահայաց յերկու հարթությունների հատման գիծն ուղղահայաց է այդ յերրորդին։**

§ 57. ԲԱԶՄԱՆԻՍՏ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

Բազմանիստ անկյուն կոչվում է տարածության այն մասը, վորը պարփակված է մի կետում հատվող յերեք կամ ել ավելի հարթությունների միջեվ։ *Բազմանիստ անկյուն կազմող հարթությունները կոչվում են նրա* **նիստեր**, *բոլոր նիստերի հատման կետը կոչվում է* **գագաթ**. *հարևան նիստերի հատման գծերը կոչվում են* **կողեր**. *կողերով առաջացած անկյունները կոչվում են* **բազմանիստ անկյան հարթ անկյուններ**։ *Բազմանիստ անկյուններ են խորանարդի, պրիզմաների, բուրգերի և այլ յերկրաչափական մարմինների գագաթների անկյունները, վորոնք առաջանում են այդ մարմինների նիստերի հատումից։*

Բազմանիստ անկյունն առնվազն ունի յերեք նիստ. այդպիսի բազմանիստ անկյունը կոչվում է **յեռանիստ** *անկյուն։*

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

540. *Ապացուցեք, վոր յերկու կից յերկնիստ անկյունների գումարը հավասար է յերկու ուղիղ անկյան։*

541. *Ապացուցեք, վոր հակադիր յերկնիստ անկյունները հավասար են։*

542. *Ապացուցեք, վոր համապատասխանաբար զուգահեռ նիստեր ունեցող յերկնիստ անկյունները կամ հավասար են, կամ նրանց գումարը հավասար է 2d-ի։*

543. *Ապացուցեք, վոր գծային անկյան և նրա համապատասխան յերկնիստ անկյան ներսը վերցրած վորևե կետից նրա նիստերին տարած ուղղահայացներով կազմած անկյան գումարը հավասար է 2d-ի։*

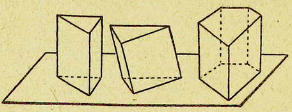
§ 58. ԲԱԶՄԱՆԻՍՏ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ: **Այն մարմինը, վորը սահմանափակված է ամեն կողմից բազմանկյուններով կամ յեռանկյուններով, կամ միաժամանակ յեվ առաջիններով յեվ յերկրորդներով, կոչվում է բազմանիստ:** *Բազմանիստը սահմանափակող բազմանկյուններն ու յեռանկյունները կոչվում են նիստեր. յերկուական հարևան նիստերի հատման ուղիղ գծերը կոչվում են բազմանիստի գագաթներ, իսկ բազմանկյունների անկյունները կոչվում են բազմանիստի հարթ անկյուններ:*

Հարց: Բազմանիստն առնվազը քանի՞ նիստ ունի:

§ 59. ՊՐԻԶՄԱՆԵՐ ՅԵՎ ԶՈՒԳԱՀԵՌԱՆԻՍՏՆԵՐ

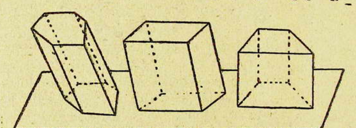
Պրիզմա *կոչվում է այն բազմանիստը, վորի մի զույգ նիստերը միմյանց հավասար և զուգահեռ հարթությունների վրա դասավորված n-անկյուններ են (պրիզմայի վերին և ստորին* **հիմքերը**), *իսկ մնացած նիստերը զուգահեռագծեր են (պրիզմայի* **կողմնային նիստերը**)*: Յեթե n-ը հավասար է 3-ի, 4-ի, 5-ի և այլն, ապա պրիզման էլ համապատասխանաբար կկոչվի* **յեռանկյուն, քառանկյուն, հնգանկյուն** *պրիզմա և այլն (գծ. 59 և 60):*



Գծ. 59.

Հիմքերի միջև հեռավորությունը կոչվում է պրիզմայի **բարձրություն**, *իսկ հիմքերի միջև գտնվող կողերը կոչվում են* **պրիզմայի կողմնային կողեր**:

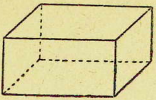
Պրիզմաները լինում են ուղիղ և թեք: **Ուղիղ** *կոչվում է այն պրիզման, վորի կողմնային նիստերն ուղղանկյուն են կամ քառակուսի, կամ վորի բոլոր կողմնային կողերն ուղղահայաց են հիմքերին (գծ. 59 և 60): Ակներև է, վոր ուղիղ պրիզմայի բարձրությունը հավասար է իր կողմնային կողին:* **Թեք** *կոչվում է այն պրիզման, վորի կողմնային նիստերի մեջ պատահում են նաև զուգահեռագծեր կամ շեղանկյուններ. Նկատենք, վոր թեք պրիզմայի միքանի կողմնային նիստերը կարող են լինել ուղղանկյուններ կամ քառակուսիներ (գծ. 60):*



Գծ. 60.

Ուղիղ պրիզման, վորի հիմքերը կանոնավոր n-անկյուններն են, կոչվում է n-անկյուն պրիզմա:

Այն պրիզման, որի բոլոր նիստերը զուգահեռագծեր են, կոչվում է զուգահեռանիստ (գծ. 61)։



Գծ. 61.

Այն զուգահեռանիստը, որի բոլոր նիստերը քառակուսիներ են, կոչվում է **խորանարդ**։ *Այն զուգահեռանիստը, որի բոլոր նիստերն ուղղանկյուններ են, կամ որի հիմքը քառակուսի չէ և կողմնային նիստերը՝ ուղղանկյուններ, կոչվում է ուղղանկյուն զուգահեռանիստ։ Ուղղանկյուն զուգահեռանիստի մի գագաթից ելնող 3 կողերը նրա չափումներն են։*

Պրիզմաների նման զուգահեռանիստները լինում են ուղիղ և թեք։

Պրիզմայի բոլոր նիստերի մակերեսների գումարը կոչվում է նրա **լրիվ մակերես**։ *Պրիզմայի կողմնային նիստերի մակերեսների գումարը կոչվում է պրիզմայի* **կողմնային մակերևույթ**։

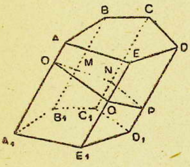
§ 60. ՊՐԻԶՄԱՅԻ ԿՈՂՄՆԱՅԻՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԸ

Ամեն մի պրիզմայի կողմնային կողերը միմյանց հավասար են (ինչու)։ Որևէ հարթություն չեթե ուղղահայաց է պրիզմայի կողմնային կողերից մեկին, ապա նա ուղղահայաց է մնացած կողմնային կողերին (ինչու)։ Որևէ հարթություն յեթե ուղղահայաց է n-անկյուն պրիզմայի կողերին, ապա նրան հատելիս առաջացնում է n-անկյուն, որը կոչվում է պրիզմայի **ուղղահայաց կտրվածք**. *Նա կոնգրուենտ (հավասար) չէ թեք պրիզմայի հիմքերին, բայց ակներև է, որ կոնգրուենտ է ուղիղ պրիզմայի հիմքերին։*

ԹԵՈՐԵՄ։ *Ամեն մի պրիզմայի կողմնային մակերևույթը հավասար է իր ուղղահայաց կտրվածքի պարագծի և կողմնային կողի արտադրյալին։*

Տված է. n-անկյուն թեք պրիզմա (գծ. 62). OMNPQ—*նրա ուղղահայաց կտրվածքն է, որը տարած է նրա* AA_1 *կողի վրա կամավոր վերցրած* O *կետով։ Պրիզմայի կողմնային մակերևույթը նշանակենք* S *տառով։ Պահանջվում է ապացուցել, որ*

$$S=(OM+MN+NP\cdot\ .\ .\ .).AA_1$$



Գծ. 62.

Ապացուցում։ *Պրիզմայի կողմնային մակերևույթը հավասար է նրա կողմնային նիստեր կազմող զուգահեռագծերի մակերեսների գումարին։ Որովհետև բոլոր կողմնային կողերն ուղղահայաց են* OMNP. . .*-ի մակերեսին, ուստի* $AA_1 \perp OQ$; $BB_1 \perp OM$; $CC_1 \perp MN$; . . . . *և այլն. (ինչու)։ Դրա համար էլ* OM, MN, NP . . . *բարձրություններ են* AA_1B_1B*-ին,* BB_1C_1C*-ին,* CC_1D_1D*-ին . . . . որոշելով այդ զուգահեռագծերի մակերեսները՝ կստանանք. մակ.* $AA_1B_1B=AA_1\cdot OM$; *մակ.* $BB_1C_1C=BB_1\cdot MN$;

մակ. $CC_1D_1D = CC_1 \cdot NP$ . . . . Գումարելով այդ հավասարությունների համապատասխան անդամները և նկատելով, որ $AA_1 = BB_1 = CC_1$ . . . կստանանք. $S = AA_1 \cdot OM + AA_1 \cdot MN + AA_1 \cdot NP +$ . . . . . դուրս բերելով փակագծից այդ հավասարության աջ մասի ընդհանուր արտադրիչ AA_1-ը, կստանանք. $S = (OM + MN + NP + \ . \ . \ .) \cdot AA_1$.

Այս թեորեմից բխում է, որ **ուղիղ պրիզմայի կողմնային մակերևույթը** *հավասար է հիմքի պարագծի և կողմնային կողի արտադրյալին (ինչու)։*

ԶՈՒԳԱՀԵՌԱՆԻՍՏԻ ՆԻՍՏԵՐԸ ՅԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆԱԳԾԵՐԸ

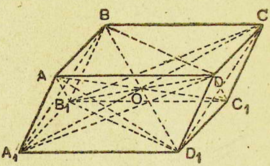
Ամեն մի զուգահեռանիստի հանդիպակաց նիստերը զուգահեռ են և կոնգրուենտ (ինչու)։

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ։ *Զուգահեռանիստի անկյունագիծ կոչվում է այն հատվածը, որը միացնում է յերկու հանդիպակաց գագաթներ։ Զուգահեռանիստն ունենում է տարբեր յերկարության 4 անկյունագիծ։ Գծանկար 63-ում տարված են անկյունագծեր՝* AC_1, BD_1, CA_1, *և* DB_1.

ԹԵՈՐԵՄ։ Ամեն մի զուգահեռանիստի անկյունագծերը հատվում են մի կետում, վորն այդ անկյունագծերից յուրաքանչյուրը բաժանում է յերկու հավասար մասի։

Տրված է զուգահեռանիստ $ABCDD_1C_1B_1A_1$ *(գծ. 63)։ Պահանջվում է ապացուցել, որ նրա անկյունագծերը հատվում են մի այնպիսի* O *կետում, որ* $AO = OC_1$, $BO = OD_1$, $CO = OA_1$ *և* $DO = OB_1$.

Ապացուցում։ *Վորովհետև* ADC_1B_1 *պատկերը զուգահեռագիծ է (ինչու), ուստի նրա* AC_1 *և* DB_1 *անկյունագծերը հատման* O *կետում կիսվում են (ինչու)։* BDD_1B_1 *պատկերը ևս զուգահեռագիծ է, վորի* BD_1 *և* DB_1 *անկյունագծերը նույնպես իրենց հատման կետում կիսվում են. վորովհետև* DB_1*-ի միջնակետը* O *կետն է, ուստի այդ կետը պետք է լինի և* BD_1*-ի միջնակետը։* A_1BCD_1 *պատկերը զուգահեռագիծ է, վորի* BD_1 *և* CA_1 *անկյունագծերն իրենց հատման կետում կիսվում են. վորովհետև* BD_1*-ի միջնակետը* O *կետն է. ապա այդ կետը պետք է լինի նաև* CA_1*-ի միջնակետը։ Այսպիսով, ուրեմն, նախ և առաջ,* O *կետը հանդիսանում է բոլոր անկյունագծերի համար ընդհանուր հատման կետ. յերկրորդ, այդ կետը կիսում է յուրաքանչյուր անկյունագիծ։*



Գծ. 63.

ԹԵՈՐԵՄ։ Ուղղանկյուն զուգահեռանիստի անկյունագծերը հավասար են միմյանց, յեվ յուրաքանչյուր անկյունագծի քառակուսին հավա-

սար է զուգահեռանիստի բոլոր յերեք չափումների քառակուսիների գումարին։

Տրված է $ABCDD_1C_1B_1A_1$ *ուղղանկյուն զուգահեռանիստը (գծ. 64), այսինքն նրա բոլոր նիստերն ուղղանկյուններ են։*

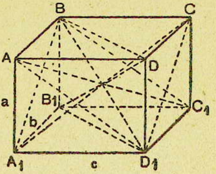
Բերենք հետևյալ նշանակումները.

$$AA_1=BB_1=CC_1=DD_1=a$$

$$A_1B_1=AB=DC=D_1C_1=b$$

$$A_1D_1=AD=BC=B_1C_1=c$$

Անկյունագծի յերկարությունը նշանակենք d *տառով.*



Գծ. 64.

Պահանջվում է ապացուցել, վոր 1) $AC_1=BD_1=CA_1=DB_1$ *և 2)* $d^2=a^2+b^2+c^2$։

Ապացուցում։ B_1BDD_1 *պատկերն ուղղանկյուն է, հետևապես* $BD_1=DB_1$ *(1) (ինչու)։* A_1BCD_1 *պատկերն ուղղանկյուն է. հետևապես,* $BD_1=CA_1$ *(2)։* ABC_1D_1 *պատկերն ուղղանկյուն է. հետևապես,* $BD_1=AC_1$ *(3)։ Բաղդատելով (1), (2) և (3) հավասարությունները՝ կստանանք.*

$$BD_1=DB_1=CA_1=AC_1։$$

Ոգտագործելով Պյութագորի թեորեմը՝ ուղղանկյուն յեռանկյուն BD_1B_1*-ից կստանանք.* $BD_1^2=BB_1^2+B_1D_1^2$. *ուղղանկյուն յեռանկյուն* $A_1B_1D_1$*-ից կստանանք.* $B_1D_1^2=A_1B_1^2+A_1D_1^2$, *հետևապես* $BD_1^2=BB_1^2+A_1B_1^2+A_1D_1^2$ *կամ* $d^2=a^2+b^2+c^2$։

Վորովհետև խորանարդի $a=b=c$, *ապա* $d^2=3b^2$, *այսինքն խորանարդի անկյունագծի քառակուսին հավասար է նրա մի կողի յեռապատիկ քառակուսուն։*

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

544. *Ապացուցեք, վոր ամեն մի պրիզմայի կողմնային կողերի թիվը հավասար է նրա բոլոր կողերի թվի մի յերրորդ մասին։*

545. *Ապացուցեք, վոր* n*-անկյուն պրիզմայի բոլոր հարթ անկյունների գումարը հավասար է* $8d(n-1)$*-ի։*

546. *Վորոշեցեք խորանարդի լրիվ մակերևույթը, յեթե նրա կողը հավասար է* a*-ի։*

547. *Քանի՞ կող ունի պրիզմայի հիմքը, յեթե նրա բոլոր հարթ անկյունների գումարը հավասար է* 2880^0*-ի։*

548. *Գտեք խորանարդի կողը, յեթե նրա անկյունագիծը հավասար է* 9cm*-ի։*

549. *Գտեք ուղղանկյուն զուգահեռանիստի անկյունագիծը և լրիվ մակերևույթը, յեթե նրա չափումներն են* 3cm, 4cm *և* 5cm։

550. *Ուղղանկյուն զուգահեռանիստի չափումները համեմատական են 2, 3 և 4 թվերին։ Լրիվ մակերևույթը հավասար է* $208cm^2$։ *Գտեք նրա չափումները։*

551. *Ցույց տվեք, որ ուղղանկյուն զուգահեռանիստի անկյունագծային հատվածքների մակերեսները համապատասխանաբար հավասար են* $a\sqrt{b^2+c^2}$, $b\sqrt{a^2+b^2}$ *և* $c\sqrt{a^2+b^2}$, *որտեղ* a, b *և* c*-ն զուգահեռանիստի չափումներն են։*

Ծանոթություն։ **Անկյունագծային հատված** *կոչվում է այն ուղղանկյունը, որի անկյունագծերն են զուգահեռանիստի յերկու անկյունագիծը։*

§ 61. ԲՈՒՐԳԵՐ

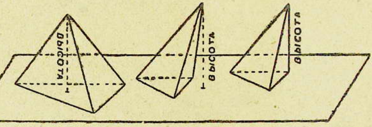
ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ՝։ Բուրգ կոչվում է այն **բազմանկյունը**, **որի մի նիստը ո-անկյուն է, իսկ մնացած նիստերը մի կետում միացող յեռանկյուններ են.** *միացման կետը կոչվում է բուրգի* **գագաթ.** *ո-անկյունը կոչվում է* **հիմք**, *իսկ մնացած նիստերը՝ բուրգի կողմնային նիստեր (վորոշեք, թե բուրգն առնվազն քանի նիստ ունի)։*

Բուրգի կողմնային կողեր *կոչվում են այն կողերը, վորոնք յելնում են բուրգի գագաթից։ Բուրգի բոլոր կողերն ընդհանրապես տարբեր են միմյանցից։*

Բուրգի բարձրություն *կոչվում է այն ուղղահայացը, վորն իջեցնում են բուրգի գագաթից հիմքի հարթությանը։ Բուրգի բարձրությունը կարող է իջնել հիմքին, այդ դեպքում կգտնվի բուրգի ներսում, կամ իջնել հիմքի շարունակությանը, այդ դեպքում կգտնվի դրսում։ Յեթե կողմնային կողերից մեկն ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը, հենց նա յել կլինի բուրգի համար բարձրություն (գծ. 65)։*

Բուրգերը չեն լինում ուղիղ կամ թեք, այլ լինում են միայն կանոնավոր և անկանոն։

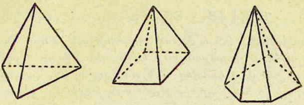
Բուրգը կոչվում է **կանոնավոր**, *յեթե նրա հիմքը կանոնավոր ո-անկյուն է (ո-ը կարող է հավասար լինել և 3-ի), և յեթե կողմնային կողերը հավասար են միմյանց. կանոնավոր բուրգի կողմնային նիստերը* **հավասարասրուն** *յեռանկյուններ են։ 65 և 66 գծանկարներում բերված են յեռանկյուն, քառանկյուն և հնգանկյուն բուրգեր, բայց այդ գծանկարներին նայելով հնարավոր չէ վորոշել նրանց կանոնավոր և անկանոն լինելը, վորովհետև դրանք բուրգի հեռանկարներն են։*



Գծ. 65.

Բուրգի բոլոր նիստերի անկյունները կոչվում են **հարթ անկյուններ։**

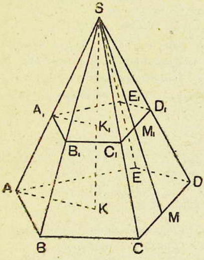
Կանոնավոր բուրգի կողմնային նիստի բարձրությունը կոչվում է բուրգի **ապոթեմ** (հարթագիծ)։ Բուրգի լրիվ մակերևույթը կոչվում է նրա բոլոր նիստերի մակերեսների գումարը։ Բուրգի կողմնային մակերևույթը կոչվում է նրա կողմնային նիստերի մակերեսների գումարը։



Գծ. 66.

ԲՈՒՐԳԻ ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՀԱՏՎԱԾՔՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

ԹԵՈՐԵՄ. Յեթե բուրգը հատենք հիմքին զուգահեռ հարթությամբ, ապա 1) **կողմնային կողերը յեվ բարձրությունը կբաժանվեն համեմատական մասերի.** 2) **հատվածքում կստացվի հիմքի բազմանկյանը նման բազմանկյուն.** 3) **հիմքի յեվ հատվածքի մակերեսները համեմատական են բուրգի գագաթից ունեցած նրանց հեռավորությունների քառակուսիներին։**



Գծ. 67.

Տրված է n-անկյուն բուրգ SABCD . . . E (գծ. 67)։ Տված բուրգի SK բարձրության կամավոր վերցրած K_1 կետով անցկացնենք մի հարթություն այնպես, որ զուգահեռ լինի հիմքին և կողմնային նիստերի հետ հատվելով առաջացնի n-անկյուն $A_1B_1C_1D_1 \ldots E_1$։

Հիմքի մակերեսը նշանակենք x տառով, իսկ հատվածքի մակերեսը՝ x_1-ով։ Պահանջվում է ապացուցել.

$$1)\ \frac{SA_1}{A_1A}=\frac{SB_1}{B_1B}=\frac{SC_1}{C_1C}=\ldots=\frac{SE_1}{E_1E}=\frac{SK_1}{K_1K}$$

$$2)\ ABC\ldots E \sim A_1B_1C_1\ldots E_1,$$

$$3)\ \frac{x}{x_1}=\frac{SK^2}{SK_1^2}$$

Ապացուցումն։ Յերկու զուգահեռ հարթությունների հատկության համաձայն (բուրգի հիմքը և հատվածքը), վորոնք հատվում են մի յերրորդ հարթությամբ (բուրգի կողմնային նիստերը) կունենանք.

$$A_1B_1 \parallel AB, \quad B_1C_1 \parallel BC \; . \; . \; . \; . \; . \; A_1E_1 \parallel AE, \quad A_1K_1 \parallel AK$$

Անցկացնենք AS և SK-ով հարթություն։ Ինչու համար հնարավոր է այդ։ Վորովհետև յուրաքանչյուր կողմնային նիստի կողմնային կողերը մի հարթության վրա գտնվող անկյան կողմեր են, ուստի նրանց վերաբերմամբ կարելի յե հարթաչափության այն թեորեմը կիրառել, վորն ասում է, թե անկյան կողմերը հատվելով զուգահեռ ուղիղներով՝ վեր են ածվում համեմատական մասերի. ուստի.

$$\frac{SA_1}{A_1A}=\frac{SB_1}{B_1B}; \quad \frac{SB_1}{B_1B}=\frac{SC_1}{C_1C}; \quad \frac{SC_1}{C_1C}=\frac{SD_1}{D_1D}; \quad \frac{SD_1}{D_1D}=\frac{SE_1}{E_1E} \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$. \; . \; . \; . \; \frac{SA_1}{A_1A}=\frac{SK_1}{K_1K},$$

Այս հարթությունների մասեր կազմող հարաբերությունները բաղդատելով, կստանանք.

$$\frac{SA_1}{A_1A}=\frac{SB_1}{B_1B}=\frac{SC_1}{C_1C}= \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \frac{SE_1}{E_1E}=\frac{SK_1}{K_1K},$$

2) Վորովհետև $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$; $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$ . . . . $\angle EAB = \angle E_1A_1B_1$ (ինչու), ապա ուրեմն, հիմքի և հատվածքի բազմանկյունների համապատասխան անկյունները հավասար են. Մնում է միայն ապացուցել, վոր նրանց կողմերը համեմատական են։ ASB և A_1SB_1, BSC և B_1SC_1 . . . . ESA և E_1SA_1 յեռանկյունների նմանության հետևանքով, կստանանք.

$$\frac{AS}{A_1S}=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BS}{B_1S}; \quad \frac{BS}{B_1S}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CS}{C_1S}; \; . \; . \; . \; \frac{CS}{C_1S}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{SD}{SD_1};$$

$$\frac{SD}{SD_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{SE}{SE_1}; \quad \frac{SE}{SE_1}=\frac{EA}{E_1A_1}=\frac{SA}{SA_1},$$

Բաղդատելով այս հարաբերությունները միմյանց հետ, կտեսնենք, վոր նրանք բոլորն էլ միմյանց հավասար են (ինչո՞ւ)։ Հետևապես,

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EA}{E_1A_1},$$

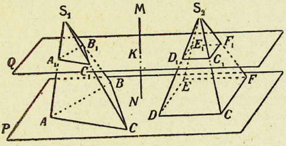
այսինքն բազմանկյունների (հիմքի և հատվածքի) կողմերը համեմատական են։ Նշանակում է ABC . . . . E և $A_1B_1C_1$ . . . . E_1 բազմանկյունները նման են։

3) Վորովհետև նման բազմանկյունների մակերեսները հարաբերում են միմյանց այնպես, ինչպես նրանց համապատասխան կողմերի քառակուսիները, ապա $\frac{x}{x_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}$ (1)։ ASK և A_1SK_1 յեռանկյունների նմանու-

թյունից կստանանք. $\frac{AS}{A_1S}=\frac{SK}{SK_1}$, բայց $\frac{AS}{A_1S}=\frac{AB}{A_1B_1}$; հետևապես $\frac{AB}{A_1B_1}=$ $=\frac{SK}{SK_1}$ կամ $\frac{AB^2}{A_1B_1{}^2}=\frac{SK^2}{SK_1{}^2}$ (2)։ Բաղդատելով (1) և (2) հավասարություն- ները, կստանանք $\frac{x}{x_1}=\frac{SK^2}{SK_1{}^2}$։

Բուրգի հիմքին զուգահեռ հարթությունը բաժանում է նրան յերկու մասի, վորոնցից հիմքին կից մասը կոչվում է **հատած բուրգ**։ Հատած բուրգի կողմնային նիստերը սեղաններ են (տրապեցներ), իսկ մնացած նիստերը, վորոնք զուգահեռ և նման բազմանկյուններ են (ինչու), կոչ- վում են **հիմքեր**՝ մեծ և փոքր։

ԹԵՈՐԵՄ: Յեթե հավասար բարձրություն ունեցող յերկու բուրգ գագաթներից հավասար հեռավորությամբ հատվում են հիմքերին զուգա- հեռ հարթություններով, ապա հատվածքների մակերեսները համեմատական են հիմքերի մակերեսներին:



Գծ. 68.

Ջննենք այն յերկու բուրգերը, վորոնց հիմքերը համատեղվում են P հարթության հետ (գծ. 68)․ յուրաքանչյուր բուրգի բարձրությունը նշանակված է MN-ով. MN-ի վրա կամավոր վերցրած K կետով անցկաց- նենք Q հարթությունը՝ զուգահեռ P հարթության։ Նշենք x և x_1 տառե- րով առաջին բուրգի հիմքի և հատվածքի մակերեսները, իսկ y և y_1 տա- ռերով՝ յերկրորդինը։ Պահանջվում է ապացուցել, վոր $\frac{x}{y}=\frac{x_1}{y_1}$։

Ապացուցում: Բուրգերի մեջ զուգահեռ հատվածքների հատկության հիման վրա ունենք. $\frac{x}{x_1}=\frac{MN^2}{MK^2}$ և $\frac{y}{y_1}=\frac{MN^2}{MK^2}$, վորտեղից և կստացվի $\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}$։ Տեղափոխելով համեմատության միջին անդամները, կստա- նանք. $\frac{x}{y}=\frac{x_1}{y}$։

Հետևանք.—Յեթե հավասար բարձրություն ունեցող յերկու բուրգ ունեն հավասարամեծ հիմքեր, ապա և հավասարամեծ են գագաթներից հավասար հեռավորության վրա գտնվող նրանց հատվածքները։ Ցույց հի- րավի, յեթե x=y, ապա $x_1=y_1$։

§ 62. ԼՐԻՎ ՅԵՎ ՀԱՏԱԾ ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԲՈՒՐԳԻ ԿՈՂՄՆԱՅԻՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԸ

ԹԵՈՐԵՄ։ Լրիվ կանոնավոր բուրգի կողմնային մակերեվույթը հավասար է հիմքի պարագծի յեվ ապոթեմի արտադրյալի կեսին։

Տված է կանոնավոր n-*անկյուն* $SABC \ldots E$ *(գծ. 67) բուրգը։ Նշենք նրա կողմնային մակերևույթը* S *տառով, հիմքի պարագիծը* P *և ապոթեմը* $(SM \perp CD)$ a *տառերով։*

Պահանջվում է ապացուցել, որ $S=\frac{Pa}{2}$

Ապացուցումն: *Քանի որ կանոնավոր բուրգի կողմնային նիստերը միմյանց հավասար հավասարասրուն յեռանկյուններ են, ուստի* S*-ը* n *անգամ մեծ է* CSD *յեռանկյան մակերեսից, որը, ինչպես գիտենք, հավասար է* $\frac{CD \cdot a}{2}$*։ Հետևապես,* $S=\frac{n \cdot CD \cdot a}{2}$*, բայց* $n \cdot CD=P$*, ուրեմն* $S=\frac{Pa}{2}$*։*

ԹԵՈՐԵՄ. Հատած կանոնավոր բուրգի կողմնային մակերեվույթը հավասար է հիմքերի պարագծերի գումարի յեվ ապոթեմի արտադրյալի կեսին։

Հատած կանոնավոր բուրգ ստանում ենք այն դեպքում, յերբ լրիվ կանոնավոր բուրգը հատում ենք հիմքին զուգահեռ հարթությամբ։

Տրված է A_1D n*-անկյուն հատած կանոնավոր բուրգը (գծ. 67)։ Նշենք նրա կողմնային մակերևույթը* S*-ով, հիմքերի պարագծերը* P *և* p*, իսկ ապոթեմը* a *տառերով (հատած կանոնավոր բուրգի ապոթեմն է կողմնային նիստերից որևէ մեկի բարձրությունը՝* $MM_1=a$*)։ Պահանջվում է ապացուցել, որ*

$$S=\frac{(P+p)a}{2}$$

Ապացուցումն։ *Քանի որ հատած կանոնավոր բուրգի կողմնային բոլոր նիստերը միմյանց հավասար տրապեցներ են, ապա ուրեմն* S*-ը* n *անգամ մեծ է* CC_1D_1D *տրապեցի մակերեսից, որը, ինչպես մենք գիտենք, հավասար է* $\frac{(CD+C_1D_1)MM_1}{2}$

Հետևապես

$$S=\frac{n(CD+C_1D_1)MM_1}{2}=\frac{(n \cdot CD+n \cdot C_1D_1) \cdot MM_1}{2}=\frac{(P+p)a}{2}$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

552. **Ապացուցեք, վոր** n*-անկյուն բուրգի բոլոր հարթ անկյունների գումարը հավասար է* $4d(n-1)$*։*

553. *Յեթե բուրգի կողմնային կողերը միմյանց հավասար են, ապա նրա բարձրության և հիմքի հարթության հատման կետը կլինի հիմքին արտագծած շրջանի կենտրոնը։*

554. *(Նախկինին հակադարձ թեորեմ)։ Յեթե բուրգի բարձրության և հիմքի հարթության հատման կետը հիմքին արտագծած շրջանի կենտրոնն է, ապա բուրգի կողմնային կողերը հավասար են միմյանց։*

555. *Յեթե բուրգի կողմնային նիստերը միատեսակ են թեքված հիմքի հարթությանը, ապա բուրգի բարձրության և նրա հիմքի հարթության հատման կետը կլինի բուրգի հիմքին ներգծած շրջանի կենտրոնը։*

556. **Ցուցմունք**։ *Բուրգի բարձրությունով անցկացրեք հարթություններ այնպես, վոր ուղղահայաց լինեն բուրգի կողմնային կողերին։*

557. *(Նախկինին հակադարձ թեորեմ)։ Յեթե բուրգի բարձրության և նրա հիմքի հարթության հատման կետը հիմքին ներգծած շրջանի կենտրոնն է, ապա բուրգի կողմնային նիստերը միատեսակ թեքում ունեն հիմքի հարթությանը։*

Ցուցմունք։ *Կատարեցեք 555-րդ խնդրում հիշված կառուցումը։*

Դիտողություն։ *553 և 554 վարժությունների մեջ ձևակերպված թեորեմներից բղխում է, վոր բուրգի կողմնային կողերը կարող են միմյանց հավասար լինել միայն այն դեպքում, յեթե բուրգի հիմքը լինի այնպիսի պատկեր, վորի շուրջը կարելի լինի արտագծել շրջան։ (Թվեցեք այդ պատկերները)։*

555 և 556 վարժություններում ձևակերպված թեորեմներից բղխում է, վոր բուրգի հիմքի յերկնիստ անկյունները կարող են հավասար լինել միայն այն դեպքում, յեթե բուրգի հիմքը լինի այնպիսի պատկեր, վորին կարելի լինի ներգծել շրջան։ (Թվեցեք այդ պատկերները)։

558. *Վորոշեցեք կանոնավոր յեռանկյուն բուրգի լրիվ մակերևույթն ու բարձրությունը, յեթե նրա բոլոր կողերը հավասար են* a*-ի։*

559. *Վորոշեցեք կանոնավոր քառանկյուն բուրգի լրիվ մակերևույթն ու բարձրությունը, յեթե նրա բոլոր կողերը հավասար են* a*-ի։*

560. *Վորոշեցեք կանոնավոր 6-անկյուն բուրգի բարձրությունը, ապոթեմը և լրիվ մակերևույթը, յեթե հիմքի կողը հավասար է* a*-ի, իսկ կողմնային կողը հավասար է* b*-ի։*

561. *Գտեք յեռանկյուն բուրգի կողմնային մակերևույթը, վորի հիմքի կողերը հավասար են 3* cm*-ի, 4* cm*-ի, 5* cm*-ի, յեթե բուրգի բարձրությունն է 7* cm *և այդ բարձրության ու հիմքի հարթության հատման կետը հիմքին ներգծած շրջանի կենտրոնն է։*

562. *Կանոնավոր քառանկյուն բուրգը, վորի հիմքի կողը հավասար է 2* cm*-ի, իսկ կողմնային կողը հավասար է 3* cm*-ի, հատվել է հիմքին զուգահեռ և բուրգի բարձրության միջնակետով անցնող հարթությամբ։ Գտեք այդպիսով առաջացած հատած բուրգի կողմնային մակերևույթը։*

563. *Գտեք քառանկյուն բուրգի լրիվ մակերևույթը, յեթե հիմքը 10* cm *կողմ ունեցող քառակուսի յե, բարձրությունը հավասար է 10* cm*-ի և յեթե բուրգի բարձրության ու հիմքի հատման կետը համատեղվում է հիմքի գագաթներից մեկի հետ։*

ԳԼՈՒԽ X

ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

§ 63. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ՆՇԱՆԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Երկրաչափությունից հայտնի է, որ եռանկյունը միանգամայն որոշվում է և կարելի է կառուցել, եթե տրված են. 1) երկու կողմը և նրանցով կազմած անկյունը, 2) մեկ կողմը և նրա վրա գտնվող երկու անկյունները, 3) երեք կողմերը։ Բացի դրանցից հայտնի է, որ տված երկու կողմերով և նրանցից մեկի հանդիպակաց անկյունով եռանկյուն կառուցելու դեպքում կարող է տեղի ունենալ երկու վճիռ։ Այդպես, ուրեմն, եռանկյունը որոշելու համար նրա վեց հիմնական տարրերից (ելեմենտներից—երեք կողմ և երեք անկյուն) անհրաժեշտ է իմանալ **երեք** *տարրը, որոնցից* **մեկը** *պետք է լինի* **գծային**։ *Երեք անկյունը չեն որոշում եռանկյունը և չի կարող հաշվել որպես երեք տվյալ, որովհետև, երբ տրված են եռանկյան երկու անկյունը, ապա նրա երրորդ անկյունը չի հանդիսանում որպես կամավոր մեծություն։ Այդ դեպքում եռանկյունները, որոնք կառուցվում են տված երեք անկյուններով, ինչպես հայտնի է, առաջացնում են* **նման** *եռանկյուններ։*

*Երկրաչափությունը հնարավորություն է տալիս կառուցել եռանկյունը նրա տված երեք տարրերով, բայց չի մատնանշում այն կախումը, որի հիման վրա կարելի լինի գտնել մնացած տարրերը։ Թվային կախումը եռանկյան կողմերի միջև երկրաչափության մեջ տրվում է միայն ուղղանկյուն եռանկյան համար (***Պյութագորի** *թեորեմը)։ Եռանկյան կողմերի և անկյունների միջև եղած կախումը իրագործվում է* **եռանկյունաչափական ֆունկցիաների** *ներմուծմամբ։*

§ 64. ՍՈՒՐ ԱՆԿՅԱՆ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ

Ութերորդ խմբակի ծրագրից մեզ հայտնի են սուր անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաները։ Մի անգամ ևս վերհիշենք նրանց։ Վերցընենք մի ուղղանկյուն եռանկյուն (գծ. 69)։

Անկյան հակադիր էջի հարաբերությունը ներքնաձիգին կոչվում է այդ անկյան սինուս։

Օրինակ.

$$\sin A = \frac{BC}{AB}; \quad \sin B = \frac{AC}{AB}.$$

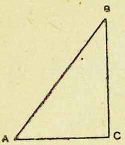
Անկյան կից էջի հարաբերությունը ներքնաձիգին կոչվում է այդ անկյան կոսինուս։

Օրինակ.

$$\cos A=\frac{AC}{AB};\quad \cos B=\frac{BC}{AB}.$$

Անկյան հակադիր էջի հարաբերությունը կից էջին կոչվում է այդ անկյան տանգենս։

Օրինակ.



$$\operatorname{tg} A=\frac{BC}{AC};\quad \operatorname{tg} B=\frac{AC}{BC}$$

Անկյան կից էջի հարաբերությունը հակադիր էջին կոչվում է այդ անկյան կոտանգենս.

Օրինակ.

$$\operatorname{ctg} A=\frac{AC}{BC};\quad \operatorname{ctg} B=\frac{BC}{AC}.$$

Գծ. 69.

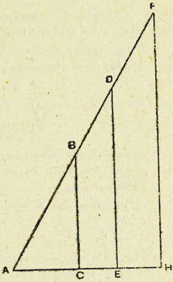
Սահմանումներից յերևում է, վոր տանգենսը և կոտանգենսը հակադարձ հարաբերություններ են։

Յեթե մենք վերցնենք մի շարք ուղղանկյուն յեռանկյուններ, վորոնք ունեն միևնույն սուր անկյունը (գծ. 70), ապա այդ յեռանկյունները կլինեն նման (ինչու)։ Օգտվելով նման յեռանկյունների կողմերի համեմատականությունից, կստանանք.

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{DE}{AD}=\frac{FH}{AF}.$$

Հետևապես, տվյալ սուր անկյան սինուսն ունի վորոշակի մեծություն, վորը **չի կախված** *ուղղանկյուն յեռանկյան* **կողմերի յերկարությունից։**

Կարելի յե ցույց տալ, վոր ապացուցված հատկությունը գործադրելի յե բոլոր յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների նկատմամբ։ Կատարեք այդ։



Գծ. 70.

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

564. *Գծանկարեք կամավոր սուր անկյուն և, կատարելով անհրաժեշտ չափումները 1* mm*-ի մոտավոր ճշտությամբ, հաշվեցեք յեռանկյունաչափական չորս ֆունկցիաները։*

565. *Կառուցեք անկյունը, յեթե* 1) $\sin x=0{,}6$; 2) $\cos x=\frac{3}{4}$; 3) $\operatorname{tg} x=1{,}5$; 4) $\operatorname{ctg} x=2{,}4$։

§ 65· ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների վորոշման հիման վրա կարելի յե գտնել ուղղանկյուն յեռանկյան վորևե տարրը, յեթե հայտնի յեն նրա մեկ կողմը և սուր անկյուններից մեկը։

Այսպես.

$$\sin A = \frac{BC}{AB};\ \textit{այստեղից}\ BC = AB \sin A;$$

$$\cos B = \frac{BC}{AB};\ \textit{այստեղից}\ BC = AB \cos B.$$

Հետևապես, **էջը հավասար է ներքնաձիգի յեվ հանդիպակաց անկյան սինուսի կամ կից անկյան կոսինուսի արտադրյալին։**

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC};\ \textit{այստեղից}\ BC = AC \operatorname{tg} A;$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{BC}{AC};\ \textit{այստեղից}\ BC = AC \operatorname{ctg} B.$$

Հետևապես, **էջը հավասար է մյուս էջի յեվ հանդիպակաց անկյան տանգենսի կամ կից անկյան կոտանգենսի արտադրյալին։**

Բացի դրանից ուղղանկյուն յեռանկյունը լուծելու համար կարելի յե օգտագործել նաև յերկրաչափությունից հայտնի հետևյալ յերկու ֆորմուլները։

1) $\angle A + \angle B = 90^0$;

2) $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Ուղղանկյուն յեռանկյան լուծումը հանգում է հետևյալ չորս հիմնական դեպքերին, յերբ հայտնի յեն.

1) ներքնաձիգը և սուր անկյուններից մեկը.

2) ներքնաձիգը և էջերից մեկը.

3) էջը և սուր անկյուններից մեկը.

4) յերկու էջերը։

Ուղղանկյուն յեռանկյան անհայտ տարրերը և մակերեսը գտնելու համար կազմեցեք վերը թված բոլոր դեպքերի ֆորմուլները։ Համառոտ գրելու համար նշանակեցեք. ներքնաձիգը c *տառով. BC էջը, վորը գտնվում է A անկյան դիմաց՝* a *տառով. AC էջը, վորը գտնվում է B անկյան դիմաց՝* b *տառով։*

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

566. *Վորոշեք ռադիոկայմի բարձրությունը, յեթե նրան կայուն պահելու համար ձգված պարաններից մեկն ամրացրած է գետնին ռադիոկայմի հիմքից 15,4m հեռավորության վրա և կազմում է գետնի մակերևույթի հետ 53^0-ի անկյուն։*

567. *Վորոշեք մինչև անմատչելի կետը յեղած հեռավորությունը, յեթե այդ անմատչելի հեռավորությանն ուղղահայաց գծի յերկարությունը հավասար է 25,6m և այդ գծի ծայրից անմատչելի հեռավորությունը յերևում է 39^0-ի անկյան տակ։*

568. Վորոշեք հավասարասրուն չեռանկյան հիմքը, յեթե նրա սրունքի յերկարությունը հավասար ե 15cm-ի, իսկ հիմքին կից անկյունն ունի 45°-ն։

569. Վորոշեք հավասարասրուն չեռանկյան սրունքը, յեթե հիմքը հավասար ե 18 cm-ի, իսկ գագաթի անկյունը հավասար ե 56°-ի։

570. Ռոմբի կողմը հավասար ե 12 cm-ի, իսկ անկյունագծերից մեկը՝ 16 cm-ի։ Վորոշեք այդ ռոմբի կողմերով կազմված անկյունները, նրա յերկրորդ անկյունագիծը և մակերեսը։

571. Ուղղանկյան կողմերը հավասար են 18 cm-ի և 25 cm-ի։ Վորոշեք այդ ուղղանկյան անկյունագծերով կազմված անկյունը։

572. Հաշվեցեք ներգծած կանոնավոր 12-անկյան կողմը, յեթե շրջանի շառավիղը հավասար ե 10 cm-ի։

573. Շրջանին ներգծած n կողմ ունեցող կանոնավոր բազմանկյան կողմը վորոշելու համար, կազմեցեք ֆորմուլ, յեթե շրջանի շառավիղն ե R։

574. Հաշվեցեք կանոնավոր 8-անկյունու կողմը, յեթե այդ բազմանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը հավասար ե 15 cm-ի։

575. Կազմեցեք ֆորմուլ n կողմ ունեցող կանոնավոր բազմանկյան կողմը վորոշելու համար, յեթե նրան ներգծած շրջանի շառավիղն ե՝ r։

576. Ներգծած կամ արտագծած շրջանի շառավիղով կազմեցեք ֆորմուլ n կողմ ունեցող կանոնավոր բազմանկյան մակերեսը վորոշելու համար։

577. Հաշվեցեք կանոնավոր 6-անկյուն բուրգի լրիվ և կողմնային մակերևույթները, յեթե նրա ապոթեմը հավասար ե 25 cm-ի և կողմնային նիստը հիմքի հարթության հետ կազմում ե 59°-ի անկյուն։

578. Հաշվեցեք կանոնավոր 8-անկյուն բուրգի լրիվ և կողմնային մակերևույթները, յեթե նրա բարձրությունը հավասար ե 10 cm-ի, իսկ հիմքին ներգծած շրջանի շառավիղը հավասար ե 8 cm-ի։

579. Գտեք ուղղանկյուն չեռանկյան պակասող տարրերը և մակերեսը հետևյալ տվյալներով.

1) c=165 m; $\angle A=49^{\circ}$;	*2)* c=28 m; $\angle B=24^{\circ}$;
3) a=15 cm; c=24 cm;	*4)* b= 8 m; c=12 m
5) b=85 cm; $\angle A=38^{\circ}$;	*6)* b=13 m; $\angle B=21^{\circ}$;
7) a=24 m; b=10 m;	*8)* a=27 m; b=36 m։

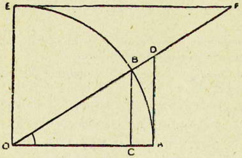
580. Հավասարակող տրապեցի ներքևի հիմքն ե՝ 28 cm, վերևինը՝ 16 cm, իսկ սուր անկյունը հավասար ե՝ 50°-ի։ Հաշվեցեք այդ տրապեցի բարձրությունը, մակերեսը և անկյունագծերը։

§ 66 ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՎՈՐՈՇՈՒՄԸ

Ոգտվելով ուղղանկյուն յեռանկյունուց, մինչև այժմ մենք դիտում եյինք սուր անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները։ Մինչդեռ շեղանկյուն յեռանկյունը կարող ե ունենալ մեկ բութ անկյուն։ Այդ պատճառով անհրաժեշտ ե տալ ամեն մի անկյան նկատմամբ գործադրելի յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների ավելի ընդհանուր վորոշումը։

Ամեն մի անկյան մեծությունը կարելի յե դիտել, պտտելով նրա կողմերից մեկը մյուսի շուրջը: Այդ հասկացողությամբ կարելի յե ասել, վոր ժամացույցի սլաքը 9 ժամվա ընթացքում կպտտվի, կազմելով 270°-ի անկյուն:

Յեռանկյունաչափության մեջ մի կողմի պտտման շարժումը մյուսի նկատմամբ դիտում ենք ժամացույցի սլաքի շարժման հակառակ ուղղությամբ: Այն անկյունը, վորը կազմվում է այդ ուղղությամբ պտտվելուց, հաշվում են դրական: Հակառակ ուղղությամբ պտտվելը (ժամացույցի սլաքով) կազմում է մի անկյուն, վորի մեծությունը հաշվում են բացասական:



Գծ. 71.

Հետագայում ամեն մի անկյուն կդիտենք, վորպես կենտրոնական, գծելով նրա գագաթից կամավոր շառավիղով մի աղեղ: Դիտելով մեկ շառավիղի պտտվելը մյուսի շուրջը ժամացույցի սլաքի շարժման հակառակ ուղղությամբ, անվանենք AO շառավիղը (գծ. 71) անշարժ շառավիղ և OB շառավիղը—շարժական:

Այդ պայմանով յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներին կարելի յե տալ հետևյալ սահմանումները:

1) Շարժական շառավիղի ծայրից անշարժի վրա իջեցրած ուղղահայացի հարաբերությունը շառավիղին կոչվում է անկյան սինուս:

BC ուղիղը այդ դեպքում կոչվում է սինուսի գիծ:

$$\sin BOA = \frac{BC}{OB},$$

2) Կենտրոնից մինչև սինուսի գծի հեռավորության հարաբերությունը շառավիղին կոչվում է անկյան կոսինուս:

OC ուղիղը կոչվում է կոսինուսի գիծ:

$$\cos BOA = \frac{OC}{BO},$$

3) Այն շոշափողի հարաբերությունը շառավիղին, վորը տարված է անշարժ շառավիղի ծայրից մինչև շարժական շառավիղի շարունակության հետ հատվելը, կոչվում է անկյան տանգենս:

AD շոշափողը կոչվում է տանգենսի գիծ:

$$\operatorname{tg} BOA = \frac{AD}{OB}$$

4) Կոտանգենսի ներմուծման համար BOA անկյանն ավելացնում ենք BOE անկյունը, վորը լրացնում է առաջինը մինչև 90°: Սկզբնական շառավիղին ուղղահայաց շառավիղի ծայրից տանում ենք EF շոշափողը մինչև շարժական շառավիղի շարունակության հետ հատվելը:

Այն շոշափողի հարաբերությունը շառավիղին, վորը տարված է անշարժին ուղղահայաց շառավիղի ծայրից մինչև շարժական շառավիղի շարունակության հետ հատվելը, կոչվում է անկյան կոտանգենս:

EF *շոշափողը կոչվում է կոտանգենսի գիծ.*

$$\mathrm{sot}\ BOA=\frac{EF}{OB},$$

Վերը բերած յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների սահմանումները հարմար են նրանով, վոր, ոգտվելով այդ սահմանումներից, մենք յեռանկյունաչափական բոլոր ֆունկցիաներն արտահայտում ենք միքանի հատվածքների և միևնույն մեծության (շառավիղի) հարաբերությամբ։

Այդ սահմանումները չեն հակասում նրանց, վորոնք բերված են նախորդ §§*-ում ուղղանկյուն յեռանկյունների գործադրման նկատմամբ։*

Իսկապես վոր, $\sin BOA=\frac{BC}{OB}$, *իսկ* BOC *ուղղանկյուն յեռանկյան մեջ* $\frac{BC}{OB}$ *ներկայանում է անկյան հակադիր էջի հարաբերությունը ներքնաձիգին։*

Յեռանկյունաչափական մյուս ֆունկցիաների նկատմամբ ևս նոր սահմանումները համեմատեք նախկինների հետ։ Կոտանգենսի նախկին և նոր սահմանումների համեմատության դեպքում նկատի ունեցեք, վոր $\angle BOA=\angle OFE$։

Բացի մատնանշված յեռանկյունաչափական չորս ֆունկցիաներից, յերբեմն ոգտվում են նաև հետևյալ յերկուսով. սեկանսով և կոսեկանսով։

Կենտրոնի յեվ տանգենսի գծի ծայրի միջեվ յեղած հեռավորության հարաբերությունը շառավիղին կոչվում է անկյան սեկանս,

OD *ուղիղը կոչվում է* **սեկտանսի գիծ:**

$$\sec BOA=\frac{OD}{OB},$$

Կենտրոնի յեվ կոտանգենսի գծի ծայրի միջեվ յեղած հեռավորության հարաբերությունը շառավիղին կոչվում է անկյան կոսեկանս,

OF *ուղիղը կոչվում է* **կոսեկանսի գիծ.**

$$\csc BOA=\frac{OF}{OB},$$

§ 67. ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ

Լրացուցիչ *անկյուններ կոչվում են այն յերկու անկյունները, վորոնց գումարը հավասար է* 90^0*-ի։ Օրինակ.* BOA *և* BOE *լրացուցիչ անկյուն-*

ներ են (տես գծ. 72)։ Նշանակելով BOA *անկյան մեծությունը* α[1]) *տառով, կստանանք, որ* BOE *անկյան մեծությունը հավասար է՝* $90^0-\alpha$։

Լրացուցիչ BOE *անկյան համար շարժական շառավիղ կլինի* OB *շառավիղը, իսկ անշարժ շառավիղ կլինի* OE *շառավիղը։ Տանելով* HB $\perp$ OE, *կստանանք*.

$$\sin\alpha=\frac{BC}{OA}=\frac{OH}{OE}=\cos(90^0-\alpha);$$

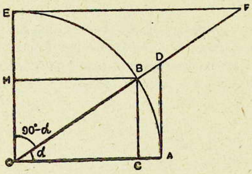
$$\cos\alpha=\frac{OC}{OA}=\frac{HB}{OE}=\sin(90^0-\alpha)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{AD}{OA}=\frac{AD}{OE}=\operatorname{ctg}(90^0-\alpha);$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{EF}{OA}=\frac{EF}{OE}=\operatorname{tg}(90^0-\alpha):$$

Ուղղանկյուն յեռանկյան սուր անկյունները լրացուցիչ անկյուններ են, ապա ուրեմն վերըստացված առընչությունները կարելի յե ստանալ նաև ուղղանկյուն յեռանկյունուց։ Օրինակ (գծ. 69).

$$AC=AB\sin B;\quad AC=AB\cos A;$$ *Այստեղից* $\sin B=\cos A$։



Գծ. 72.

Ստուգեցեք լրացուցիչ անկյունների միացած յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների կախումները, օգտվելով ուղղանկյուն յեռանկյունուց։

Այդ հատկության հիման վրա 45⁰-ից ավելի մեծ անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիայի ամեն մի արժեքը կարելի յե բերել 45⁰-ից ավելի փոքր անկյան մյուս յեռանկյունաչափական ֆունկցիայի արժեքին։ Օրինակ, $\sin 55^0=\cos 35^0$, *վորովհետև* $35^0+55^0=90^0$։ *Այդ հատկությունը, ինչպես հայտնի յե, օգտագործված է յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների աղյուսակը կազմելու ժամանակ։*

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

581. *Բերեք 45⁰-ից ավելի փոքր անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների.*

1) $\operatorname{tg}60^0$; *2)* $\operatorname{ctg}75^0$; *3)* $\cos 72^0$; *4)* $\sin 85^0$:

---

[1]) *Հունարեն այբուբենի առաջին տառն է, վորը կարդացվում է՝ ալ՛ֆա, յեռանկյունաչափության մեջ հաճախ գործ են ածվում հունարեն այբուբենի հետևյալ տառերը.* β *(բետտա) և* γ *(գամմա)։*

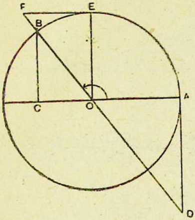
§ 68. ԲՈՒԹ ԱՆԿՅԱՆ ՏԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ

Տեռանկյունաչափական ֆունկցիաների վորոշումները գործադրենք BOA բութ անկյան նկատմամբ (գծ. 73)։

Սինուսի (BC) գիծը տանելու համար անհրաժեշտ է շարունակել անշարժ շառավիղը դեպի ձախ։

Կոսինուսի (OC) գիծը կտեղավորվի կենտրոնից դեպի ձախ։

Տանգենսի գիծը տանելու համար մինչև շարժական շառավիղի հետ հատվելը, անհրաժեշտ է վերջինս շարունակել կենտրոնի մյուս կողմը, և տանգենսի (AB) գիծը կտեղավորվի սկզբնական շառավիղից դեպի ներքև։



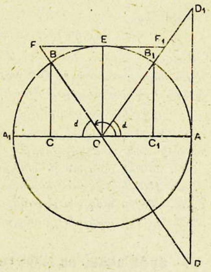
Գծ. 73.

Կոտանգենսի (EF) գիծը կտեղավորվի լրացուցիչ անկյունների անշարժ շառավիղից դեպի ձախ։

Այդ դեպքերում ինկատի չեն առնում վոչ միայն տեռանկյունաչափական ֆունկցիաների գծերի մեծությունը, *այլ և նրանց* ուղղությունը։ *Յեթե վորևէ տեռանկյունաչափական ֆունկցիայի գիծն ուղղված է* դեպի աջ *կամ* դեպի վերեվ, *ապա նա համարվում է* դրական։ *Հակառակ ուղղության դեպքում* դեպի ձախ *կամ* դեպի ներքեվ *տեռանկյունաչափական ֆունկցիան համարվում է* բացասական։ *Ինչպես յերևում է գծանկարից, BOA բութ անկյան սինուսը կլինի դրական, իսկ կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը—բացասական։*

Սեկանսը և կոսեկանսը համարվում են դրական, *յեթե այդ ֆունկցիաների գծերի ուղղությունը* զուգադիպում *է շարժական շառավիղի* ուղղությանը։ *Իսկ յեթե այդ ֆունկցիաների գծերի ուղղությունն* ուղիղ հակադիր *է շարժական շառավիղի* ուղղությանը, *և նրանք գտնվում են նրա շարունակության վրա կենտրոնի մյուս կողմում, ապա սեկանսը և կոսեկանսը համարվում են* բացասական։

Որինակ, BOA բութ անկյան համար (գծ. 73) շարժական շառավիղը կլինի BO, իսկ սեկանսի OD գիծը գտնվում է շարժական շառավիղի շարունակության վրա կենտրոնի մյուս կողմում։ Այդ պատճառով բութ անկյան սեկանսը բացասական է։



Գծ. 74.

Բութ անկյան կոսեկանսի (OF) գծի ուղղությունը զուգադիպում է շարժական շառավիղի ուղղությանը։ Այդ պատճառով բութ անկյան կոսեկանսը դրական է։

Դիտելով յերկու անկյուն, վորոնց գումարը հավասար է 180^0-ի, կարելի յե 90^0-ից ավելի մեծ ամեն մի անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները բերել 90^0-ից ավելի փոքր անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների։ Վերցնենք BOA բութ անկյունը և BOA_1 սուր անկյունը (գծ. 74), այնպես վոր $\angle BOA + \angle BOA_1 = 180^0$։ Նշանակելով BOA_1 անկյունը α-ով կստանանք.

$$\angle BOA = 180^0 - \alpha$$

Կառուցելով $\angle B_1OA = \angle BOA_1$, կունենանք.

$$\sin(180^0-\alpha) = \frac{BC}{OA};\quad \sin\alpha = \frac{B_1C_1}{OA};\ \text{իսկ}\ BC = B_1C_1,$$

Հետևապես,

$$\sin(180^0-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180^0-\alpha) = -\frac{OC}{OA};\quad \cos\alpha = \frac{OC_1}{OA};\ \text{իսկ}\ OC = OC_1,$$

Հետևապես,

$$\cos(180^0-\alpha) = -\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^0-\alpha) = -\frac{AD}{OA};\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{AD_1}{OA};\ \text{իսկ}\ AD = AD_1,$$

Հետևապես,

$$\operatorname{tg}(180^0-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(180^0-\alpha) = -\frac{EF}{OA};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{EF_1}{OA};\ \text{իսկ}\ EF = EF_1,$$

Հետևապես,

$$\operatorname{ctg}(180^0-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

Այսպես, ուրեմն, $180^0-\alpha$ և α անկյունների յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները բացարձակ մեծությամբ մնում են նույնը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը փոխում են նշանը։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

Բերեք 90^0-ից ավելի փոքր և 45^0-ից ավելի փոքր անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների.

582. 150^0-ի անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները։
583. 120^0-ի անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները։
584. 135^0-ի անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները։
585. 110^0-ի անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները։

§ 69. ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՓՈԽԱԴԱՐՁ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԿԱԽՈՒՄՆԵՐ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՂ ՖՈՐՄՈՒԼՆԵՐԸ

Յեթե տված է անկյան մեծությունը, կարելի յե վորոշել յուրաքանչյուր յեռանկյունաչափական ֆունկցիայի համապատասխան արժեքը։ Համկանալի չէ ուրեմն, որ միևնույն անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները պետք է որոշ կախում ունենան իրարից։ Հանենք այդ կախումները սուր անկյան համար։

Կառուցենք BOA սուր անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները (գծ. 71)։

1) Յեռանկյուն OBC-ից ունենք $BC^2+OC^2=OB^2$ հավասարությունը։

Բաժանելով հավասարության յերկու մասերը OB^2-ու վրա, կստանանք.

$$\left(\frac{BC}{OB}\right)^2+\left(\frac{OC}{OB}\right)^2=1$$

կամ, նշանակելով BOA անկյունը α-ով և ներմուծելով յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները, կստանանք.

$$\boxed{\sin^2 \alpha+\cos^2 \alpha=1} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

2) $\triangle ODA \sim \triangle OBC$, այստեղից $AD : BC=OA : OC$։

Բաժանելով շառավիղի վրա համեմատության բոլոր անդամները, կստանանք.

$$\frac{AD}{OA} : \frac{BC}{OA}=1 : \frac{OC}{OA}$$ կամ $\operatorname{tg} \alpha : \sin \alpha=1 : \cos \alpha$ կամ

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha=\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

3) $\triangle OEF \sim \triangle ODA$, այստեղից $EF : OA=OE : AD$։

Բաժանելով շառավիղի վրա համեմատության բոլոր անդամները, կստանանք.

$$\frac{EF}{OA} : 1=1 : \frac{AD}{OA}$$ կամ

$$\boxed{\operatorname{ctg} \alpha=\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

Այսպես, ուրեմն, կոտանգենսը տանգենսի հակադարձ ֆունկցիան է։

Համեմատելով վերջին յերկու ֆորմուլները, կոտանգենսի համար կարելի յե ստանալ հետևյալ լրացուցիչ ֆորմուլը.

$$\operatorname{ctg} \alpha=\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}։$$

Վերը բերված ֆորմուլները համարվում են ճիշտ նաև 90^0-ից ավելի մեծ անկյունների համար։

Սեկանսի և կոսեկանսի կախումները մյուս յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներից արտահայտվում են հետևյալ ֆորմուլներով.

1) ODA *և* OBC *յեռանկյունների նմանությունից հետևում է.*

$$OD : OB = OA : OC \text{ կամ } \frac{OD}{OA} : 1 = 1 : \frac{OC}{OA} \text{ կամ } \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

2) OEF *և* OBC *յեռանկյունների նմանությունից հետևում է.*

$$OF : OB = OE : BC \text{ կամ } \frac{OF}{OA} : 1 = 1 : \frac{BC}{OA} \text{ կամ } \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Այդ յերկու ֆորմուլների փոխարեն, վորոնք արտահայտում են սեկանսի և կոսեկանսի կախումն սինուսից և կոսինուսից, կարելի յե ստանալ հետևյալ յերկու ուրիշ ֆորմուլները.

1) ODA *յեռանկյունից հետևում է.*

$$OD^2 = AD^2 + OA^2 \text{ կամ } \left(\frac{OD}{AO}\right)^2 = \left(\frac{AD}{OA}\right)^2 + 1 \text{ կամ}$$

$$\sec^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha + 1.$$

2) OEF *յեռանկյունից հետևում է.*

$$OF^2 = EF^2 + OE^2 \text{ կամ } \left(\frac{OF}{OE}\right)^2 = \left(\frac{EF}{OE}\right)^2 + 1 \text{ կամ}$$

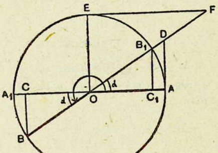
$$\csc^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha + 1.$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

586. *Իմանալով, վոր 30°-ի անկյան սինուսը հավասար է* $\frac{1}{2}$*-ի, հաշվեցեք այդ անկյան մյուս յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները։*

587. *Հաշվեցեք* α *անկյան մյուս յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները, յեթե.* *1)* $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; *2)* $\cos\alpha = \frac{3}{4}$; *3)* $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5$; *4)* $\operatorname{ctg}\alpha = 1$; *5)* $\sin\alpha = 0{,}4$; *6)* $\cos\alpha = 0{,}8$.

§ 70. 180°-ԻՑ ԱՎԵԼԻ ՄԵԾ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ



Գծ. 75.

Կառուցենք 180°-ից ավելի մեծ և 270°-ից ավելի փոքր մի անկյուն։ Նշանակելով BOA_1 *անկյունը α-ով, կստանանք* $\angle BOA = 180° + \alpha$*։ Դիտենք* BOA *անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները (գծ. 75)։*

Այդ անկյան սինուսի գիծն ուղղված է ներքև, իսկ իր մեծությամբ հավասար է α *անկյան սինուսի գծին։ Այդ պատճառով.*

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha.$$

Կոսինուսի գիծն ուղղված է դեպի ձախ, իսկ իր մեծությամբ հավասար է α *անկյան կոսինուսի գծին։*

Այդ պատճառով,

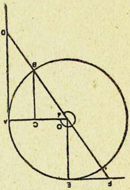
$$\cos(180^0+\alpha)=-\cos\alpha\text{։}$$

Տանգենսի և կոտանգենսի գծերը թե մեծությամբ և թե ուղղությամբ հավասար են α անկյան տանգենսի և կոտանգենսի գծերին, հետևապես.

$$\operatorname{tg}(180^0+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(180^0+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha\text{։}$$

Այդպես ուրեմն, 180⁰-ից ավելի մեծ և 270⁰-ից ավելի փոքր անկյունների յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներից, սինուսը և կոսինուսը բացասական են, իսկ տանգենսը և կոտանգենսը՝ դրական։



Գծ. 75.

Կառուցենք 270⁰-ից ավելի մեծ և 360⁰-ից ավելի փոքր անկյուն և դիտենք նրա յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները։ Նշանակենք α-ով այն սուր անկյունը, վորը լրացնում է անկյուն BOA *մինչև 360⁰-ն, կստանանք (գծ. 76).* $\angle BOA=360^0-\alpha$։

Գծանկարից յերևում է, վոր

$$\sin(360^0-\alpha)=-\sin\alpha;$$

$$\cos(360^0-\alpha)=\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(360^0-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(360^0-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha\text{։}$$

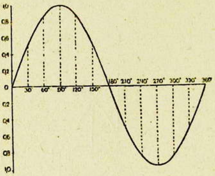
Այդպես ուրեմն, 270⁰-ից ավելի մեծ և 360⁰-ից ավելի փոքր անկյունների յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներից անկյան կոսինուսը դրական է, իսկ մյուս յերեք յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները բացասական են։

§ 71. ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՓՈՓՈԽՈՒՄԸ ԿԱԽՎԱԾ ԱՆԿՅԱՆ ՓՈՓՈԽՈՒՄԻՑ

Յուրաքանչյուր անկյան համապատասխանում է յեռանկյունաչափական ֆունկցիայի վորոշ արժեքը։ Անկյան փոփոխումից փոփոխվում են նրանց յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները։

Անհրաժեշտ է պարզել այդ փոփոխման օրենքը։ Դիտենք մասնավոր դեպքերը։ Որինակ, $\sin 30^0=0{,}5$; $\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}87$։ *Մենք տեսնում ենք, յերբ անկյունը մեծանում է յերկու անգամ, նրա սինուսն էլ մեծանում է, բայց վոչ յերկու անգամ։ Այդպես ուրեմն, անկյան և նրա սինուսի փոփոխման միջև համեմատականություն չկա։ Պատկերացնելով էլի և ներքնաձգի հարաբերությունը, կտեսնենք, վոր սինուսը միշտ կանոնավոր կտորակ է։*

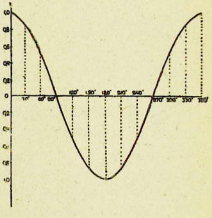
Դիտենք նրա փոփոխումը, երբ անկյունը մեծանում է՝ 0°-ից մինչև 360°։ Ակներև է, որ sin 0°=0; երբ անկյունը մեծանում է 0°-ից մինչև 90°, սինուսը նույնպես մեծանում է, մնալով միշտ դրական։ Սինուսի ամենամեծ արժեքը հավասար է 1-ի, որին նա հասնում է 90°-ի անկյան դեպքում։ Երբ անկյունը մեծանում է 90°-ից մինչև 180°-ն, սինուսը փոքրանում է, մնալով դրական։ Sin 180°=0։ Այնուհետև անկյան մեծանալուց սինուսը դառնում է բացասական և աճում է՝ իր բացարձակ մեծությամբ մինչև—1 (270°-ի անկյան դեպքում)։ Նշանակելով x-երի առանցքի վրա 0-ից մինչև 360° անկյունները և y-ների առանցքի վրա սինուսի արժեքները, կստանանք սինուսի փոփոխման գրաֆիկը, որը կոչվում է **սինուսոիդ** (գծ. 77)։



Գծ. 77.

Վերցնելով աղյուսակից սինուսի յուրաքանչյուր 10-ական աստիճանի արժեքները, կառուցեք սինուսոիդը միլիմետրային թղթի վրա։

Անկյան **կոսինուսն** իր մեծությամբ նույնպես չի կարող մեծ լինել միավորից և արտահայտվում է **կանոնավոր կոտորակով**։ 0°-ի անկյան կոսինուսը հավասար է, 1-ի,ապա կոսինուսը հետզհետե փոքրանում է, երբ անկյունն աճում է մինչև 90°, որի դեպքում կոսինուսը դառնում է 0։ Այնուհետև անկյան փոփոխումից կոսինուսը դառնում է բացասական և աճում է իր բացարձակ մեծությամբ։ Cos 180°=—1; cos 270°=0։ Երբ անկյունը մեծանում է 270°-ից մինչև 360°, կոսինուսը նորից դառնում է դրական, աճելով մինչև+1 (360°-ի անկյան դեպքում)։ Կոսինուսների փոփոխման գրաֆիկը տրվում է 78-րդ գծանկարում։



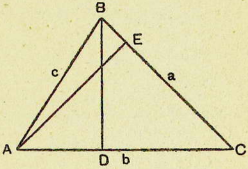
Գծ.78.

Անկյան 0°-ից մինչև 90° փոփոխման դեպքում տանգենսը փոփոխվում է 0-ից մինչև անսահմանություն, որովհետև 90°-ի անկյան դեպքում շարժական շառավիղը զուգահեռ է անշարժ շառավիղի ծայրից տարած շոշափողին, և շարժական շառավիղի ու այդ շոշափողի հատման կետը գտնվում է անսահմանության մեջ։ Երբ անկյունը փոփոխվում է 90°-ից մինչև 180°, տանգենսը մնում է բացասական և փոքրանում է իր բացարձակ մեծությամբ մինչև 0։ 180°-ից մինչև 270° տանգենսը փոփոխվում է այնպես, ինչպես 0°-ից մինչև 90°, և 270°-ից մինչև 360° այնպես, ինչպես 90°-ից մինչև

270^{0}։ Հետաքրքիր է, որ $\operatorname{tg} 90^{0}$ և $\operatorname{tg} 270^{0}$ կարելի չէ ընդունել հավասար $\pm\infty$ կախված անկյան փոփոխման ուղղությունից։ Կոտանգենսի փոփոխումները հակադարձ են տանգենսի փոփոխումներին։ Կառուցեք տանգենսի և կոտանգենսի փոփոխման գրաֆիկները։

§ 72. ՇԵՂԱՆԿՅՈՒՆ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԷԼԵՄԵՆՏՆԵՐԻ ՓՈԽԱԴԱՐՁ ԿԱԽՄԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՖՈՐՄՈՒԼՆԵՐԸ

Մինչև այժմ մեզ հայտնի յեղած ֆորմուլները հնարավորություն եյին տալիս վճռել ուղղանկյուն յեռանկյուններ։ Հավասարասրուն յեռանկյան, շեղանկյանի, կանոնավոր բազմանկյան և այլ պատկերների վերաբերմամբ նույն ֆորմուլները կիրառելու համար հարկավոր է նախորոք այդ պատկերները վերածել ուղղանկյուն յեռանկյունների։ Այժմ դուրս բերենք շեղանկյուն յեռանկյան էլեմենտների փոխադարձ կախումն արտահայտող ֆորմուլներ։



Գծ. 79.

1. Յեռանկյուն ABC-ի համապատասխանաբար A, B, C անկյունների դիմաց գտնվող կողմերի յերկարությունները նշանակենք a, b և c փոքրատառերով։ Իջեցնելով BD և AE բարձրությունները, կստանանք.

$$BD = c \sin A; \qquad BD = a \sin C$$

Հետևապես, $c \sin A = a \sin C$ կամ $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{a}{\sin A}$,

Բացի այդ.

$$AE = c \sin B \text{ և } AE = b \sin C$$

Հետևապես, $c \sin B = b \sin C$ կամ $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B}$,

Բաղդատելով յերկու համեմատությունները, կստանանք.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

Ստացված այս համեմատությունն արտահայտում է յեռանկյունաչափության մեծ կարևոր **ՍԻՆՈՒՍՆԵՐԻ ԹԵՈՐԵՄԸ**.—**եռանկյան կողմերը համեմատական են հանդիպակաց անկյունների սինուսներին**։

Ապացուցենք, որ **ամեն մի** եռանկյան համար կողմի և հանդիպակաց անկյան սինուսի հարաբերությունը **կայուն մեծություն** է և հավասար է **արտագծած շրջանի տրամագծին**։

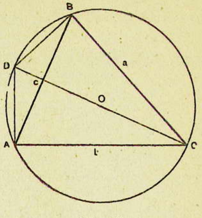
Ցենթադրենք տված է ABC յեռանկյունը (գծ. 80) a, b և c կողմերով և յեռանկյանն արտագծած, R շառավիղ ունեցող շրջանագծի O կենտրոնը։ Վորևէ գագաթից, օրինակ C-ից տանենք CD տրամագիծը։ Ուղղանկյուն յեռանկյուն CDB-ի մեջ անկյուն BDC-ն հավասար է անկյուն A-ին։

Հետևապես.

$$a = 2\,R \sin BDC = 2\,R \sin A$$

կամ $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$

Ուղղանկյուն յեռանկյուն ADC-ից կստանանք.



Գծ. 80.

$$b = 2\,R \sin ADC = 2\,R \sin B$$

կամ $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$

Տանելով մյուս գագաթից տրամագիծ, կարելի յե ապացուցել, վոր

$$\frac{c}{\sin C} = 2R$$

Հետևապես,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Առաջարկվում է ապացուցել, վոր ուղղանկյուն և բութանկյուն յեռանկյունների մեջ էլ կողմի և հանդիպակաց անկյան սինուսի հարաբերությունը կայուն մեծություն է։

2. Ցերկրաչափությունից գիտենք, թե ինչպես են վորոշում սուր կամ բութ անկյան դիմացի կողմի քառակուսին (տես § 39)։

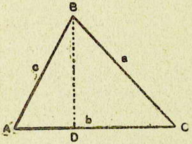
Մոտենանք այդ թեորեմին յեռանկյունաչափական տեսակետից։

A սուր անկյուն ունեցող յեռանկյուն ABC-ի (գծ. 81) մեջ ունենք.

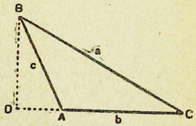
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b \cdot AD, \qquad \text{իսկ } AD = c \cos A$$

AD-ի մեր գտած արժեքը դնելով ֆորմուլի մեջ, կստանանք.

$$\underline{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$



Գծ. 81.



Գծ. 82.

Բութ անկյուն յեռանկյուն ABC-ի մեջ (գծ. 82) ունենք.

$$a^2=b^2+c^2+2b\cdot AD$$

բայց

$$AD=c\cos BAD=c\cos(180^\circ-A)=-c\cos A$$

Տեղադրելով AD-ի նշանակությունը, կստանանք.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

Այսպես ուրեմն, մուծելով յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներ, մենք տեսնում ենք, վոր յեռանկյան սուր և բութ անկյուններին հանդիպակաց կողմերի քառակուսիներն արտահայտող ֆորմուլները ձուլվում են մի ֆորմուլի մեջ, վորը ճիշտ է ամեն մի յեռանկյան համար։

Ֆորմուլ.

$$\underline{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A}$$

ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒՄ Է ԿՈՍԻՆՈՒՍՆԵՐԻ ԹԵՈՐԵՄԸ.—յեռանկյան մի կողմի քառակուսին հավասար է մյուս կողմերի քառակուսիների գումարին, առանց այդ յերկու կողմի յեվ նրանցով կազմած անկյան կոսինուսի կրկնապատիկ արտադրյալի։

Կոսինուսների այս թեորեմը կիրառեք յեռանկյան մյուս յերկու կողմերի վերաբերմամբ։

Կոսինուսների այս թեորեմը կիրառեք ուղիղ անկյան հանդիպակաց կողմի քառակուսու վերաբերմամբ։

3. Շեղանկյուն յեռանկյունները վճռելու համար, նրանց ֆորմուլներից զատ, կիրառում են նաև յերկրաչափությունից հայտնի հետևյալ փոխհարաբերությունը.

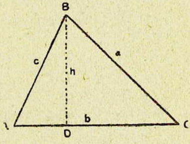
$$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ։$$

§ 73. ՇԵՂԱՆԿՅՈՒՆ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ՖՈՐՄՈՒԼՆԵՐԻ ԳՈՐԾԱԴՐՈՒՄԸ ԱՅԼ ՅԵՎ ԱՅԼ ՀԱՐՑԵՐԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ

1. ՇԵՂԱՆԿՅՈՒՆ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ՄԱԿԵՐԵՍԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

Յեռանկյուն ABC-ի մակերեսը $=\frac{bh}{2}$ *(գծ. 83),* $h=c\sin A=a\sin C$։

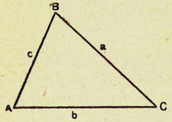
Ուստի $\triangle ABC$*-ի S-ը* $=\frac{ab\sin C}{2}=\frac{bc\sin A}{2}$, *այսինքն՝* **յեռանկյան մակերեսը հավասար է իր յերկու կողմերի յեվ այդ կողմերով կազմած անկյան սինուսի արտադրյալի կեսին։**



Գծ. 83.

2. ԱՆՄԱՏՉԵԼԻ ԿԵՏԻ ՀԵՌԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՎՈՐՈՇՈՒՄԸ

Յենթադրենք հարկավոր է չափել A *կետի և, լճով, ճահճով, գետով և այլ խոչընդոտներով զատված անմատչելի* B *կետի հեռավորությունը (գծ. 84)։ Հարցը վճռելու համար տեղում ընտրում են մի այնպիսի յերրորդ* C *կետ, վորտեղից յերևան* A *և* B *կետերը։ Այնուհետև չափում են* AC *հեռավորությունը և անկյունաչափ գործիքը դնելով* A *և* C *կետերում, վորոշում են* A *և* C *անկյունների մեծությունը։*



Գծ. 84.

Սինուսների թեորեմից գիտենք.

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}; \text{ բայց } \sin B = \sin[180^\circ - (A+C)] = \sin(A+C)$$

Ուստի

$$c=\frac{b\sin C}{\sin(A+C)}$$

3. ԱՆՄԱՏՉԵԼԻ ԱՌԱՐԿԱՅԻ ԲԱՐՁՐՈՒԹՅԱՆ ՎՈՐՈՇՈՒՄԸ

Յենթադրենք անհրաժեշտ է վորոշել լեռան բարձրությունը։ Հարթավայրի վոր կետումն էլ կանգնելու լինենք, մենք անմիջականորեն չենք կարող չափել մեր դիտելու վայրի և լեռան գագաթից հորիզոնական հարթության թողած ուղղահայացի հիմքի հեռավորությունը։ Այդպիսի դեպքերում, լեռան բարձրությունը վորոշելու համար, գետնի հորիզոնական մակերևույթի վրա ընտրում են յերկու՝ A *և* C *կետեր այնպես (գծ. 82), վոր այդ կետերը գտնվեն լեռան գագաթից իջեցրած ուղղաձիգ հարթության վրա։ Այդ կետերից ամեն մեկում դնելով անկյունաչափ գործիքն այնպես, վոր հնարավոր լինի ուղղաձիգ հարթության վրա գտնված անկյունները վորոշելու, չափում են* BAD *և* BCA *անկյունները։*

Այն ժամանակ յեռանկյուն BAC*-ից կստանանք.*

$$\frac{BA}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$$

$\angle CBA = \angle BAD - \angle C$, *վորովհետև* $\angle BAD$ *արտաքին անկյուն է յեռանկյուն* ABC*-ի համար։*

Ուստի

$$BA=\frac{AC\cdot\sin C}{\sin B}=\frac{AC\cdot\sin C}{\sin(A-C)}.$$

Յեռանկյուն DBA*-ից ստանում ենք*

$$DB = BA\cdot\sin A=\frac{AC\cdot\sin A\cdot\sin C}{\sin(A-C)}$$

Յեթե անկյունաչափ գործիքի բարձրությունը (նշանակենք այն h տառով) գետնից հաշված վորոշվող բարձրության համեմատությամբ չնչին ե, այդ դեպքում հաշվի չեն առնում այդ h-ի մեծությունը։ Այդպես են վարվում, որինակ, լեռան բարձրությունը վորոշելիս։ Բայց յեթե h-ի մեծությունը չնչին չե վորոշվող բարձրության համեմատությամբ, որինակ՝ ծառի, շենքի համեմատությամբ, ապա գտած բարձրությանն ավելացնում են h-ի մեծությունը։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

588. Հաշվեցեք յեռանկյուն ABC-ի մակերեսը, յեթե $a=28,5$ m, $b=31,4$ m և $\angle C=38^{\circ}15'$։

589. Հաշվեցեք յեռանկյուն ABC-ի մակերեսը, յեթե $b=22,4$ m., $\angle A=32^{\circ}45'$ և $\angle C=48^{\circ}20'$։

590. Հաշվեցեք ուղղանկյան մակերեսը, յեթե նրա անկյունագիծը հավասար ե 0,76 m և յեթե անկյունագծերը հատվում են $31^{\circ}25'$ անկյան տակ։

591. Հաշվեցեք զուգահեռագծի մակերեսը, յեթե նրա հիմքը հավասար ե 1,59 ш. և անկյունագծերի հետ կազմում ե $25^{\circ}38'$ և $32^{\circ}45'$ արկյուններ։

592. Հաշվեցեք զուգահեռագծի մակերեսը, յեթե նրա անկյունագծերը հավասար են 1,76 m և 0,89 m և հատվում են $64^{\circ}17'$ անկյան տակ։

593. Հաշվեցեք ռոմբի մակերեսը, վորի կողմը հավասար ե 0,65 m և անկյունը հավասար ե $57^{\circ}42'$։

594. Հաշվեցեք շրջանի շառավիղը, յեթե այն արտագծած ե այնպիսի յեռանկյան, վորի մի կողմը հավասար ե 18 cm., իսկ այդ կողմի հանդիպակաց անկյունը՝ 57°։

595. Հաշվեցեք ABCD տրապեցի մակերեսը, յեթե նրա AD ստորին հիմքը հավասար ե 54,3 m., BC վերին հիմքը՝ 42,8 m., $\angle A=53^{\circ}28'$ և $\angle D=42^{\circ}53'$։

596. Հաշվեցեք A անմատչելի կետի հեռավորությունը B և C կետերից, յեթե BC հեռավորությունը հավասար ե 220 m., անկյուն ABC հավասար ե $75^{\circ}45'$ և անկյուն ACB՝ $81_{0}37'$։

597. Հաշվեցեք բլուրի AB ուղղաձիգ բարձրությունը, յեթե B կետով անցնող հորիզոնական ուղիղի վրա գտնվող C և D կետերի հեռավորությունը 185 m ե, և յեթե անկյունաչափ գործիքը, վորն ունի 1,5 m բարձրություն, ցույց ե տալիս, վոր անկյուն ACB հավասար ե $78^{\circ}15'$, իսկ անկյուն ADB՝ $65^{\circ}42'$։

598. Գետի նույն ափին և իրարից 115 m հեռավորության վրա գտնվող A և B կետերից յերևում ե C սյունը, վորը գտնվում ե գետի մյուս ափին և բացի այդ անկյուն CAB հավասար ե $70^{\circ}18'$ և անկյուն $CBA=78^{\circ}24'$։ Հաշվեցեք գետի լայնությունը։

§ 74. ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԼՈԳԱՐԻԹՄՆԵՐԻ ԱՂՅՈՒՍԱԿՆԵՐԻՑ ՈԳՏՎԵԼԸ

Դուք արդեն անցյալ տարվանից գիտեք սուր անկյունների սինուսների և տանգենսների աղյուսակներից ոգտվել։ Հիմա յել պետք ե սովորենք *օգտվել յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների լոգարիթմների աղյուսակից։*

Աղյուսակները բերված են գրքի վերջը չորս յերեսում, վորոնցից առաջին յերկուսը պարունակում են սինուսների և կոսինուսների լոգարիթմների աղյուսակները, իսկ մնացած յերկուսը՝ տանգենսների և կոտանգենսների լոգարիթմների աղյուսակները։

Ինչու համար աղյուսակներում բերված են միայն սուր անկյունների յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների լոգարիթմները։

Ուշադրությամբ զննեցեք աղյուսակների միայն առաջին յերեսը․ մնացած յերեսներինը նույն ձևով են կազմած։

Տրված են բոլոր լոգարիթմների վոչ միայն մանտիսները, այլ և խարակտերիստիկները․ յուրաքանչյուր սյունյակում միատեսակ խարակտերիստիկները չեն կրկնվում, այլ միանգամ են գրված, հետևապես միջանկյալ տողերում, ուր բացակայում են խարակտերիստիկները, պետք է վերցնել նրանց կամ վերը կամ ներքև տպածը։

Տրված են վոչ բոլոր սուր անկյունների սինուսների և կոսինուսների լոգարիթմները, այլ այն անկյունների, վորոնք արտահայտված են աստիճաններով և, բացի այդ, րոպեների կլոր տասնյակներով։ Միջանկյալ անկյունների սինուսների և կոսինուսների լոգարիթմները կարելի յե գտնել ինտերպոլացումներով։

Միևնույն յերեսում անկյունների աստիճանները բերված են և ձախ և աջ ծայրերի սյունյակներում․ աջ սյունյակում աստիճանների թվերն աճում են ներքևից դեպի վեր։ Ձախ սյունյակի աստիճանները վերաբերում են սինուսներին, իսկ աջ սյունյակինը՝ կոսինուսներին։

Տասնյակ րոպեները հաշվում են կամ վերևում ձախից աջ և այդ րոպեներ ցույց տվող թվերը վերաբերում են սինուսներին, կամ ներքևում աջից ձախ և այդ րոպեներ ցույց տվող թվերը վերաբերում են կոսինուսներին։ Րոպեները հաշվելու ուղղությունները ցույց են տրված սլաքներով։

Այսպես ուրեմն, $\lg \sin a^0 b'$ *զետեղված է կամ ձախ, կամ աջ յերեսում գտնվող այն տողի և այն սյունյակի հատման տեղում, վորոնցից առաջինի ձախ ծայրում ցույց է տրված* a^0, *իսկ յերկրորդի վերևի ծայրում՝* b'. $\lg \cos a^0 b'$ *զետեղված է կամ ձախ, կամ աջ յերեսում գտնվող այն տողի և այն սյունյակի հատման տեղում, վորոնցից առաջինի աջ ծայրում ցույց է տրված* a^0, *իսկ յերկրորդի ներքևի ծայրում՝* b'։

Վերջին յերկու յերեսներում սինուսի տեղը բռնում է տանգենսը, իսկ կոսինուսի տեղը՝ կոտանգենսը․ հետևապես տանգենսների լոգարիթմները գտնվում են սինուսների լոգարիթմների նման, իսկ կոտանգենսներինը՝ կոսինուսների լոգարիթմների նման։

Յեթե անկյունը պարունակում է ամբողջ թվով աստիճաններ, ապա յեռանկյունաչափական ֆունկցիայի լոգարիթմը գտնվում է այն սյունյակում, վորտեղ ցույց է տրված $0'$։ *Նկատի ունեցեք, վոր այդ սյունյակը պատկանում է վերևում նշանակված սինուսին կամ տանգենսին, իսկ ներքևում՝ կոսինուսին կամ կոտանգենսին։*

Ստուգեցեք ստորև բերածները.

$\lg \sin 18^{\circ}40' = \bar{1},5052$	$\lg \cos 7^{\circ}50' = \bar{1},9959$
$\lg \sin 56^{\circ}20' = \bar{1},9203$	$\lg \cos 45^{\circ} = \bar{1},8495$
$\lg \sin 67^{\circ} = \bar{1},9640$	$\lg \cos 86^{\circ}10' = \bar{2},8251$
$\lg \mathrm{tg}\, 23^{\circ}10' = \bar{1},6314$	$\lg \mathrm{ctg}\, 12^{\circ}40' = 0,6483$
$\lg \mathrm{tg}\, 46^{\circ} = 0,0152$	$\lg \mathrm{ctg}\, 63^{\circ}30' = \bar{1},6977$
$\lg \mathrm{tg}\, 72^{\circ}20' = 0,4969$	$\lg \mathrm{ctg}\, 70^{\circ} = \bar{1},3634$

599. *Դուրս գրեցեք հետևյալ ֆունկցիաների լոգարիթմները.*

$\sin 6^{\circ}20'$; $\sin 38^{\circ}$; $\sin 64^{\circ}40'$; $\cos 3^{\circ}50'$; $\cos 28^{\circ}50'$; $\cos 70^{\circ}30'$; $\mathrm{tg}\, 4^{\circ}50'$; $\mathrm{tg}\, 39^{\circ}10'$; $\mathrm{tg}\, 85^{\circ}$; $\mathrm{ctg}\, 1^{\circ}20'$; $\mathrm{ctg}\, 32^{\circ}30'$; $\mathrm{ctg}\, 75^{\circ}40'$։

Ինչու համար

$$\lg \sin 36^{\circ}20' = \bar{1},7727 = \lg \cos 53^{\circ}40'$$

$$\lg \mathrm{tg}\, 79^{\circ}10' = 0,7181 = \lg \mathrm{ctg}\, 10^{\circ}50'$$

Այս հարցերին պատասխանելուց հետո, հավանորեն, դուք կկարողանաք բացատրել, թե ինչու յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների լոգարիթմների աղյուսակներում սինուսներն ու կոսինուսները միացնում են մի աղյուսակի մեջ, տանգենսներն ու կոտանգենսները՝ նույնպես մի աղյուսակի մեջ։

Յեթե անկյունը տրված է աստիճաններով և րոպեներով, վորտեղ րոպեները կլորացրած չեն տասնյակներով, ապա յեռանկյունաչափական ֆունկցիայի լոգարիթմը գտնում են աղյուսակային տվյալների ինտերպոլացումով։

1. ԻՆՏԵՐՊՈԼԱՑՈՒՄ lg sin և lg tg ԳՏՆԵԼՈՒ ԴԵՊՔՈՒՄ

Յենթադրենք՝ հարկավոր է գտնել $\lg \sin 53^{\circ}34'$։ *Դատում ենք ու ձևակերպում այսպես.*

$$53^{\circ}30' < 53^{\circ}34' < 53^{\circ}40';$$

$$\sin 53^{\circ}30' < \sin 53^{\circ}34' < \sin 53^{\circ}40'$$

$$\lg \sin 53^{\circ}30' < \lg \sin 53^{\circ}34' < \lg \sin 53^{\circ}40'$$

$$\bar{1},9052 < \lg \sin 53^{\circ}34' < \bar{1},9061.$$

Այս յերկու մանտիսների՝ 9052-*ի և* 9061-*ի տարբերությունը հավասար է* 9-*ի։ Այդ տարբերությունը միմյանցից* 10'-*ով զանազանվող* $53^{\circ}30'$ *և* $53^{\circ}40'$ *անկյունների սինուսների լոգարիթմային տարբերությունն է։ Տված* $53^{\circ}34'$ *անկյունը* $53^{\circ}30'$-*ից մեծ է* 4'-*ով,* $\lg \sin 53^{\circ}34'$-*ի մանտիսը մեծ կլինի* g $\sin 53^{\circ}30$-*ի մանտիսից* x-*ով։*

Նկատի առնելով 10, 9, 4 և x թվերի միջև յեղած համեմատականությունը, որի փոքրիկ աղյուսակը բերում են տեղն ու տեղը, գրում ենք համեմատություն և ստանում՝ x=3,6. Կլորացնելով x-ի այդ արժեքը մեկի մոտավոր ճշտությամբ, ստանում ենք 4։

$$\begin{array}{c} 10 - 9 \\ 4 - x \\ \hline x : 9 = 4 : 10 \end{array}$$

$$x = \frac{9 \cdot 4}{10} = \frac{36}{10} = 3{,}6 \backsim 4$$

Այսպես, ուրեմն, lg sin 53°34'-ի մանտիսը մեծ ե lg sin 53°30'-ի մանտիսից չորս միավորով։

$$\lg \sin 53^\circ 34' = \left| \begin{array}{r} \bar{1},9052 \\ +4 \end{array} \right| = \bar{1},9056.$$

Ընդունված ե վերը բերած դատողությունը համառոտ այսպես ձևակերպել.

$$\left.\begin{array}{l} \lg \sin 53^\circ 30' = \bar{1},9052 \\ 10' - 9 \qquad\qquad x \backsim 4 \\ 4' - x \\ \hline \lg \sin 53^\circ 34' = \bar{1},9056 \end{array}\right\} +$$

Հետևապես, դուրս ենք գրում անմիջական փոքր անկյան սինուսի լոգարիթմը, գտնում ենք դուրս գրած այդ մանտիսի և նույն տողում դեպի աջ գտնվող հետևյալ մանտիսի տարբերությունը. կազմում ենք համեմատություն. հաշվում ենք միջանկյալ տարբերությունը և այդ տարբերությունն ավելացնում դուրս գրած լոգարիթմին, որովհետև սուր անկյան մեծանալու դեպքում մեծանում ե նաև նրա սինուսը. ուստի մեծանում ե և սինուսի լոգարիթմը։

Ստուգեցեք հետևյալը. պետք ե գտնել lg tg 72°16'

$$\left.\begin{array}{l} \lg \operatorname{tg} 72^\circ 10' = 0,4925 \\ 10' - 44 \quad x = \frac{264}{10} \backsim 26 \\ 6' - x \\ \hline \lg \operatorname{tg} 72^\circ 16' = 0,4951 \end{array}\right\} +$$

Գտած տարբերությունը (26) նույնպես ավելացնում ենք, որովհետև սուր անկյունը մեծանալու դեպքում տանգենսը ել մեծանում ե։

Վարժություններ։ Գտեք.

600. lg sin 27°52'; lg sin 41°18'; lg sin 67°53'; lg sin 79°33';
601. lg tg 17°26' ;lg tg 49°57'; lg tg 68°19'; lg tg 81°14':
602. lg sin 36°45'; lg sin 82°14'; lg tg 28°51'; lg tg 73°29';

2. ԻՆՏԵՐՊՈԼԱՑՈՒՄԸ lg cos և lg cotg ԳՏՆԵԼՈՒ ԴԵՊՔՈՒՄ

Այսպիսի դեպքերում ևս վերը բերածի նման ենք վարվում, բայց գտած միջանկյալ տարբերությունը վոչ թե գումարում, այլ **հանում** **ենք** *դուրս գրած լոգարիթմից, վորովհետև սուր անկյունը մեծանալու դեպքում կոսինուսն ու կոտանգենսը փոքրանում են, հետևապես, փոքրանում են նաև* lg cos *և* lg cotg*-ը։ Բացի այդ, համեմատություն կազմելու համար, գտնում ենք դուրս գրած մանտիսի և դրանից* **դեպի** **ձախ**, *նույն տողում գտնվող հարևան մանտիսի տարբերությունը։*

Օրինակներ։

Ենթադրենք հարկավոր է գտնել.

lg cos $48^\circ 24'$

$$\left.\begin{array}{l} \lg\cos 48^\circ 40' = \bar{1},8198 \\ \quad (8198 - 8184) \\ 10' - 14 \\ \;\;2 - x \quad x = \dfrac{14 \cdot 2}{10} \backsim 3 \\ \hline \lg\cos 48^\circ 42' = \bar{1},8195 \end{array}\right\} -$$

Այժմ էլ գտնենք

lg ctg $16^\circ 27'$

$$\left.\begin{array}{l} \lg\operatorname{ctg} 16^\circ 20' = 0,5331 \\ \quad (5331 - 5284) \\ 10' - 47 \\ \;\;7' - x \quad x = \dfrac{329}{10} \backsim 33 \\ \hline \lg\operatorname{ctg} 16^\circ 27' = 0,5298 \end{array}\right\} -$$

Վարժություններ։ *Գտնել.*

603. lg cos $57^\circ 13'$; lg cos $18^\circ 38'$; lg cos $73^\circ 8'$; lg cos $5^\circ 19'$։
604. lg ctg $65^\circ 25'$; lg ctg $19^\circ 24'$; lg ctg $50^\circ 31'$; lg ctg $7^\circ 46'$:
605. lg cos $29^\circ 32'$; lg cos $82^\circ 25'$; lg ctg $18^\circ 57'$; lg ctg $72^\circ 19'$:

Դիտողություն։ *Տված անկյան կոսինուսի կամ կոտանգենսի լոգարիթմը փնտրելու դեպքում միշտ կարելի յե դրանց փոխարեն փնտրել* lg sin *կամ* lg tg, *վորովհետև*

$$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha) \text{ և } \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)\text{։}$$

3. ԳՏՆԵԼ ԱՆԿՅՈՒՆԸ ՆՐԱ ՍԻՆՈՒՍԻ ԿԱՄ ՏԱՆԳԵՆՍԻ ՏՎԱԾ ԼՈԳԱՐԻԹՄԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

Օրինակ 1. *Գտնել α, յեթե* lg sin $\alpha = \bar{1},7201$։

Սինուսների լոգարիթմների աղյուսակներում փնտրում ենք, թե վորտեղ են տված խարակտերիստիկն ու մանտիսը։ Այդ դեպքում անհրաժեշտ է ուշադրություն դարձնել միաժամանակ և՛ խարակտերիստիկի, և՛ մանտիսի վրա։

Հիրավի, մեր բերած օրինակի համար աղյուսակում գտնում ենք տրված խարակտերիստիկը և մանտիսը։ Վորովհետև մենք փնտրում ենք անկյունն ըստ lg sin*-ի, ուստի համապատասխան աստիճանները վերցնում ենք նույն տողի ձախ ծայրում գտնվածը, իսկ րոպեները՝ նույն սյունյակի վերին ծայրինը։ Այդպիսով գտնում ենք. $\alpha = 31^\circ 40'$։*

Օրինակ 2. *Գտնել* α, *յեթե* $\lg \operatorname{tg} \alpha = 0{,}4070$, *կլորացնելով րոպեները լրիվ տասնյակների մոտավոր ճշտությամբ։*

Տանգենսների աղյուսակում չկա 0,4070, բայց կան 0,4046 և 0,4083։ Տված մանտիսը մոտ է յերկրորդին, ուստի ընդունում ենք $\lg \operatorname{tg} \alpha \backsim 0{,}4083$, *ուստի և* $\alpha = 68^\circ 40'$։

Օրինակ 3. *Գտնել* α, *յեթե* $\lg \sin \alpha = \overline{1}{,}9762$, *և յեթե անհրաժեշտ է անկյունը հաշվել մեկ րոպեյի մոտավոր ճշտությամբ։*

Գտնում ենք.

$$\overline{1}{,}9761 < \overline{1}{,}9762 < \overline{1}{,}9765$$

$$\lg \sin 71^\circ 10' < \lg \sin \alpha < \lg \sin 71^\circ 20'$$

$$71^\circ 10' < \alpha < 71^\circ 20'$$

$71^\circ 10'$ *և* $71^\circ 20'$ *զանազանվում են 10'-ով, իսկ դրանց սինուսների լոգարիթմների մանտիսները միմյանցից տարբերվում են 9765—9761=4-ով. անկյուն* α, *վորի սինուսի լոգարիթմի մանտիսը* $71^\circ 10'$ *անկյան սինուսի լոգարիթմի մանտիսից ավելի յե՝ 9762—9761=1-ով, ավելի յե* $71^\circ 10'$*-ից x րոպեյով։*

Կազմենք աղյուսակ և համեմատություն.

$$\left.\begin{array}{r} 10'-4 \\ x'-1 \end{array}\right\} \quad x:10=1:4; \qquad x=\frac{10}{4}=2{,}5 \backsim 3,$$ *Ուրեմն* $\alpha = 71^\circ 13'$։

Վերը բերած հաշվումները հաճախ դասավորում են այսպես.

$$\begin{array}{r|ll} \lg \sin 71^\circ 10' = \overline{1}{,}9761 & 10'-4 & (9765-9761) \\ +3 & x'-1 & x=\frac{10}{4} \backsim 3' \\ \hline \alpha = 71^\circ 13' & & \end{array}$$

Պարզեցեք հետևյալ հաշվումները։ Պետք է գտնել անկյուն α, *յեթե* $\lg \operatorname{tg} \alpha = \overline{1}{,}6862$

$$\begin{array}{rll} \lg \operatorname{tg} 25^\circ 50' = \overline{1}{,}6850 & 10'-32 & \\ +4 & x'-12 & x=\frac{120}{32} \backsim 4' \\ \hline \alpha = 25^\circ 54' & & \end{array}$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ Գտեք անկյուն α, *յեթե*

606. $\lg \sin \alpha = \overline{1}{,}8816$; $\lg \operatorname{tg} \alpha = \overline{1}{,}2697$; $\lg \operatorname{tg} \alpha = 0{,}1559$։

607. $\lg \sin \alpha = \overline{1}{,}6888$; $\lg \operatorname{tg} \alpha = 0{,}2697$; $\lg \operatorname{tg} \alpha = 0{,}8513$։

608. $\lg \sin \alpha = \overline{1}{,}2353$; $\lg \operatorname{tg} \alpha = \overline{1}{,}2697$; $\lg \operatorname{tg} \alpha = \overline{1}{,}3187$։

Այսպես, ուրեմն, յեթե մեզ տված սինուսի կամ տանգենսի լոգարիթմը չկա աղյուսակում, և ցանկանում ենք անկյունը 1'-ի մոտավոր ճշտությամբ վորոշել, այդ դեպքում տվածի անմիջական փոքր խարակտերիստիկի և մանտիսի միջոցով փնտրում ենք աղյուսակային լոգարիթմը։ Համեմատության օգնությամբ հաշված ու գտած րոպեների միջանկյալ տարբերությունն ավելացնում ենք այն անկյան վրա, վորի մանտիսը դուրս եյինք գրել աղյուսակից։

4. ԳՏՆԵԼ ԱՆԿՅՈՒՆԸ ՆՐԱ ԿՈՍԻՆՈՒՍԻ ԿԱՄ ԿՈՏԱՆԳԵՆՍԻ ՏՎԱԾ ԼՈԳԱՐԻԹՄԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

Վորովհետև սուր անկյան աճման դեպքում կոսինուսն ու կոտանգենսը նվազում են, ուստի կոսինուսի կամ կոտանգենսի լոգարիթմի միջոցով անկյունը գտնելու դեպքում, պահպանելով նախկին ձևը և ուշ դարձնելով խարակտերիստիկի վրա՝ դուրս ենք գրում տված մանտիսի անմիջապես մեծ մանտիսը։ Համեմատության ոգնությամբ հաշված րոպեների միջանկյալ տարբերությունը նույնպես ավելացնում ենք այն անկյանը, վորի մանտիսը դուրս եյինք գրել աղյուսակից։

Որինակներ.

Պետք է գտնել անկյունն α, *յեթե* $\lg\cos\alpha=\bar{1},5689$

$$\lg\cos 68^{0}10'=\bar{1},5704$$

$$\begin{array}{ll} 10'-31 & (5704-5673) \\ x'-15 & (5704-5689) \end{array} \quad x=\frac{10\cdot 15}{31}\sim 5';\ \alpha=68^{0}15'$$

Պետք է գտնել անկյունն α, *յեթե* $\lg\operatorname{ctg}\alpha=\bar{1},3054$

$$\lg\operatorname{ctg} 78^{0}30'=\bar{1},3085$$

$$\begin{array}{ll} 10'-65 & (3085-3020) \\ x'-31 & (3085-3054) \end{array} \quad x=\frac{10\cdot 31}{65}\sim 5';\ \alpha=78^{0}35'$$

Պետք է գտնել անկյունն α, *յեթե* $\lg\operatorname{ctg}\alpha=0,3054$։ *Աղյուսակում անմիջականորեն գտնում ենք.* $\alpha=26^{0}20'$։

Վերջին յերկու որինակներում պարզվում է այն յերկու անկյունների տարբերությունը, վորոնց կոտանգենսների լոգարիթմներն ունեն միևնույն մանտիսը, բայց տարբեր խարակտերիստիկներ։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ. Գտեք անկյունն α, *յեթե*

609. $\lg\cos\alpha=\bar{1},5811$; $\lg\operatorname{ctg}\alpha=0,6401$; $\lg\cos\alpha=\bar{1},9970$

610. $\lg\cos\alpha=\bar{1},7980$; $\lg\operatorname{ctg}\alpha=\bar{1},6401$; $\lg\operatorname{ctg}\alpha=\bar{1},8787$

611. $\lg\cos\alpha=\bar{1},9642$; $\lg\operatorname{ctg}\alpha=\bar{2},6401$; $\lg\operatorname{ctg}\alpha=0,3875$

§ 75. ԳՈՐԾՆԱԿԱՆ ԼՈԳԱՐԻԹՄԱՑՈՒՄՆ

Լոգարիթմացնելու ֆորմուլներին հնարավոր յեղածին չափ պետք է պարզ ձև տալ։ Այնուհետև, հանրահաշվական լոգարիթմացնելու որենքներով, պետք է գրել հաշվումների պլանը։ Ոժանդակ հաշվումներն անում են մի կողմում, բայց անպայման միևնույն թերթի վրա, վորպեսզի հնարավոր լինի դյուրությամբ ստուգումներ կատարել։ Բոլոր հաշվումները պետք է գրել վորոշ, առանց շտապելու, ուղիղ շարքերով, տողերի և սյունյակների պարզ միջտարածություններով։

Օրինակ 1. Գտնենք x-ը, եթե $x=\dfrac{8,67\cdot\cos^2 64^\circ 17'}{\sqrt{3}\cdot \mathrm{tg}\, 76^\circ 38'}$

Հիմնական գրություն

$\lg x=$	$\lg 8,67$	$=$	$0,9380$
	$2\lg\cos 64^\circ 17'$		$\bar{1},2748$
			$0,2128$
	$\frac{1}{2}\lg 3$		$0,2386$
	$\lg \mathrm{tg}\, 76^\circ 38'$		$0,6241$
			$0,8627$
			$\bar{1},3501$

$x=0,224$

Օժանդակ հաշվումներ

$\lg\cos 64^\circ 10'=\bar{1},6392$

$10'-26$

$7'-y_1 \qquad y_1\sim 18$

$\lg\cos 64^\circ 17'=\bar{1},6374$

$\times 2$

$\bar{1},2748$

$\lg 3=0,4777 \mid 2$

$0,2386$

$\lg \mathrm{tg}\, 76^\circ 30'=0,6197$

$10'-55$

$8'-y_2 \qquad y_2\sim 44$

$\lg \mathrm{tg}\, 76^\circ 38'=0,6241$

Օրինակ 2. Գտնել անկյուն α, եթե

$$\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\pi^2\cdot\sqrt{\sin 15^\circ 28'}\cdot \mathrm{tg}\, 62^\circ 13'}{\sqrt[5]{0,62\cdot\cos 6^\circ 25'}}$$

Հիմնական գրություն

$\lg \mathrm{ctg}\alpha=$	$2\lg\pi$	$=$	$0,9944$
	$\frac{1}{2}\lg\sin 15^\circ 28'$		$\bar{1},7130$
	$\lg \mathrm{tg}\, 62^\circ 13'$		$0,2783$
			$0,9857$
	$\frac{1}{5}\lg 0,62$		$\bar{1},9585$
	$\lg\cos 6^\circ 25'$		$\bar{1},9972$
			$\bar{1},9557$
			$\bar{1},0300$

$\alpha=5^\circ 20'$

Օժանդակ հաշվումներ

$\lg\pi=0,4972$

$\times 2$

$0,9944$

$\lg\sin 15^\circ 20'=\bar{1},4223$

$10'-46$

$8'-y_1 \qquad y_1\sim 37$

$\lg\sin 15^\circ 28'=\bar{1},4260 \mid 2$

$\bar{1},7130$

$\lg \mathrm{tg}\, 62^\circ 10'=0,2774$

$10'-31$

$3'-y_2 \qquad y_2\sim 9$

$\lg \mathrm{tg}\, 62^\circ 13'=0,2783$

$\lg 0,62=\bar{1},7924 \mid 5$

$\bar{1},9585$

$\lg\cos 6^\circ 20'=\bar{1},9973$

$10'-1$

$5'-y_3 \qquad y_3\sim 1$

$\lg\cos 6^\circ 25'=\bar{1},9972$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։

Գտեք x-ը, յեթե

612. $x=\sqrt{2}\cdot\sin 68^\circ19'$

613. $x=\cos 71^\circ16'\cdot tg^2 18^\circ39'$

614. $x=0,06\cdot\cos 17^\circ34'$

615. $x=\sin^2 15^\circ27'\cdot cotg 81^\circ5'$

616. $x=\sqrt[3]{1,0}\cdot tg\,41^\circ5'$

617. $x=16,2^2\cdot tg\,17^\circ37'$

618. $x=0,004\cdot ctg\,7^\circ52'$

619. $x=\sqrt[4]{0,017\cdot\sin^2 42^\circ32'}$

620. $x=\dfrac{1,12^3\cdot\cos 18^\circ41'}{ctg\,41^\circ8'}$

621. $x=\dfrac{\pi^2\cdot tg\,9^\circ56'}{\cos 14^\circ25'}$

622. $x=\dfrac{0,62^3\cdot\sqrt{\sin 40^\circ18'}}{ctg^2 7^\circ24'\sqrt{7}}$

623. $x=\dfrac{\sqrt[3]{\cos 39^\circ11' tg 40^\circ20'}}{ctg^3 15^\circ47'\cdot\sqrt{\pi}}$

624. $x=\sqrt{\dfrac{1,8^3\cdot ctg\,18^\circ16'}{\sqrt{0,2}\cdot\sin 41^\circ52'}}$

625. $x=\sqrt[3]{\dfrac{\cos^2 50^\circ16'\cdot 0,67}{tg\,70^\circ4'\cdot 0,15^5}}$

626. $x=\dfrac{3,056\cdot ctg^3 77^\circ26'\cdot\sqrt{5}}{4,15\cdot\sqrt{\sin 18^\circ49'}}$

627. $x=\dfrac{\sqrt{\pi}\cdot 1,503^6\cdot tg\,47^\circ38'}{0,35^2\cdot ctg\,56^\circ18'}$

628. $x=\dfrac{\sqrt{\cos 50^\circ43'\cdot tg 63^\circ17'\cdot 0,079}}{ctg 51^\circ24'\cdot\sin^3 17^\circ43'}$

629. $x=\dfrac{1,065^3\cdot\sqrt[3]{tg\,63^\circ23'}\cdot\sin 71^\circ46'}{\cos^2 18^\circ47'\cdot\sqrt{0,0871}}$

630. $x=0,6724\cdot\sqrt[3]{tg 75^\circ13'}+\sqrt[5]{0,3}\cdot\cos^3 80^\circ9'$

631. $x=3,826^2\cdot\sin^3 79^\circ26'-\sqrt{0,091}\cdot tg 13^\circ21'$

632. $x=\dfrac{2,69^2\cdot ctg\,40^\circ32'}{tg^3 47^\circ56'}+\dfrac{\sqrt[3]{\pi\cdot\cos 27^\circ16'}}{ctg\,66^\circ34'}$

Ցուցմունք։ *630—632 համար օրինակներից յուրաքանչյուր միանդամը հաշվում են առանձին-առանձին։*

633. $x=-0,6\cdot tg^2 56^\circ49'$

634. $x=-\sqrt[3]{0,2\cdot\cos^2 73^\circ42'}$

635. $x=-\sqrt{\pi^3\cdot\sin 75^\circ25'}$

636. $x=-0,8763\cdot ctg^3 19^\circ56'$

Ցուցմունք։ *633—635 համար օրինակների մեջ x-ը պարզորեն բացասական թվի չէ հավասար, և դրա համար էլ հնարավոր չէ անմիջապես լո-*

գարիթմացնել. այդպիսի դեպքերում չենթադրում են $x=-y$, *ուր* y*-ը դրական թիվ է. հաշվում և իմանում են* y*-ը, վորից հետո գտնում են բացասական* x*-ի նշանակությունը։*

637. $x=\pi\cdot\operatorname{tg}126^\circ1'$	638. $x=\sqrt{5}\cdot\sin 99^\circ26'$
639. $x=\cos157^\circ36'\cdot\sin170^\circ42'$	640. $x=\sqrt[3]{\operatorname{ctg}142^\circ51'}$

Ցուցմունք։ *637—640 համար որինակներում բութանկյան չեռանկյունաչափական ֆունկցիան նախորոք փոխարինվում է իրեն հավասար սուր անկյան ֆունկցիայով, վորից հետո հաշվումը շարունակում են վերը բերած ցուցմունքի համաձայն։*

Հաշվեցեք անկյուն x*-ը, յեթե*

641. $\sin x=0{,}7245\cdot\sqrt{0{,}5}$	642. $\cos x=\sqrt[3]{0{,}462\cdot0{,}95}$
643. $\operatorname{tg}x=\pi^2\cdot\sqrt{0{,}9684}$	644. $\operatorname{ctg}x=1{,}006^3\cdot\sqrt{0{,}873}$
645. $\sin x=\operatorname{tg}32^\circ17'$	646. $\cos x=\operatorname{ctg}76^\circ8'$
647. $\operatorname{tg}x=\sqrt{\sin 84^\circ15'}$	648. $\operatorname{ctg}x=\sqrt[3]{\cos10^\circ46'}$
649. $\operatorname{tg}x=\dfrac{1{,}08^2\cdot\cos16^\circ24'}{\sin28^\circ36'}$	650. $\operatorname{ctg}x=\dfrac{\sqrt{2{,}006^3\cdot\operatorname{tg}16^\circ16'}}{3{,}1\cdot\cos35^\circ42'}$
651. $\sin x=\dfrac{1{,}193^3\cdot\operatorname{tg}46^\circ14'}{2{,}05^2\cdot\operatorname{ctg}29^\circ51'}$	652. $\cos x=\dfrac{\sqrt[3]{2{,}15\cdot\operatorname{tg}30^\circ8'}}{3{,}862\cdot\operatorname{ctg}20^\circ4'}$

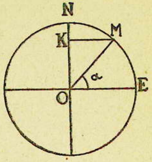
Դիտողություն. *Յեթե* $\sin x=-m$, *վորտեղ* m*-ը դրական թիվ է, չենթադրում ենք, վոր* $x=180^\circ+y$. *այն ժամանակ* $\sin x=\sin(180^\circ+y)=$ $=-\sin y$*։ Հետևապես,* $-\sin y=-m$, *այստեղից էլ* $\sin y=m$*։ Գտնելով սուր անկյուն* y*-ը, ստանում ենք՝* $x=180^\circ+y$*։*

Յեթե $\cos x=-m$, *չենթադրում ենք* $x=180^\circ-y$ [*կամ* $x=90^\circ+y$]. *այն ժամանակ* $\cos x=\cos(180^\circ-y)=-\cos y$. *այստեղից էլ* $\cos y=m$ *և այլն։*

Յեթե $\operatorname{tg}x=-m$, *չենթադրում ենք* $x=180^\circ-y$. *այդ դեպքում* $\operatorname{tg}x=$ $=-\operatorname{tg}y$ *և այլն։ Նմանապես, յեթե* $\operatorname{ctg}x=-m$, *չենթադրում ենք* $x=180^\circ-y$ *և այլն։*

653. $\sin x=-\sqrt[3]{0{,}05}$	654. $\cos x=-0{,}724^2\cdot\sqrt{2}$
655. $\operatorname{tg}x=-\pi\cdot\sin18^\circ53'$	656. $\operatorname{ctg}x=-\sqrt{7{,}261\cdot\operatorname{tg}16^\circ25'}$

657. Գծանկար 85-ում պատկերացրած է յերկրագնդի միջօրեականը (պարզության համար ընդունում են այն վորպես շրջանագիծ). N-ը՝ հյուսիսային բևեռն է, E-ն՝ հասարակածի վրա վորևե կետ, իսկ MK-ն այն M կետի վրայով անցնող զուգահեռական շրջանագծի շառավիղն է, վորի աշխարհագրական լայնությունը վորոշվում է անկյուն $\alpha=\angle MOE$։ Կազմեցեք MK վորոշող ֆորմուլը, նկատի ունենալով նրա կախումն R-ից (յերկրագնդի շառավիղից) և անկյուն α-ից։ Հաշվեցեք Մոսկվայի վրայով անցնող զուգահեռական շրջանագծի յերկարությունը ($\alpha=55^{\circ}46'$) և M կետի շարժման արագությունը մի վայրկյանում՝ յերկրի իր առանցքի շուրջն օրական պտույտի ժամանակ։ Վորոշեցեք R-ի մեծությունը, ընդունելով յերկրագնդի միջօրեականի յերկարությունը հավասար 40.10^{6}m-ի։



Գծ. 85.

658. Թնդանոթային ռումբի հորիզոնական հեռավորությունը հաշվում են հետևյալ ֆորմուլով.

$$x=\frac{2v^{2}\cdot tg\alpha\cdot\cos^{2}\alpha}{g}$$

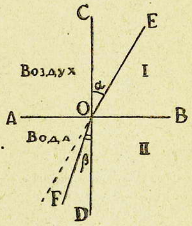
այստեղ v-ն ռումբի սկզբնական արագությունն է (մետրեր մի վայրկյանում), α-ն՝ հորիզոնական գծի հետ թնդանոթի խողովակի կազմած թեքի անկյունն է. $g=9,8$ (ծանրության ուժի արագացումը)։ x-ը պետք է վորոշել մետրերով։

Հաշվեցեք x-ի արժեքը, յենթադրելով

$$v=950\frac{\text{մտ}}{\text{վայր.}},\ \alpha=48^{\circ}$$

659. Լույսի ճառագայթը մի միջավայրից (որինակ՝ օդի) մի ուրիշ միջավայր (որինակ՝ ջրի) անցնելիս փոխում է իր ուղղությունը կամ, ինչպես ասում են, բեկվում է։

Յեթե AB (գծ. 86) յերկու միջավայրերը բաժանող գիծն է, և յեթե լույսի ճառագայթն ընկնում է EO ուղղությամբ, կազմելով AB-ին ուղղահայաց CD-ի հետ $COE=\alpha$ անկման անկյուն, ապա, ճառագայթը բեկվելով, CD ուղղահայացի հետ կկազմի մի նոր՝ $FOD=\beta$ անկյուն։ Յեթե ճառագայթն ավելի պակաս խտության միջավայրից ավելի մեծ խտության միջավայր է անցնում, որինակ՝ օդից անցնում ջրի մեջ, ապա $\alpha>\beta$։



Գծ. 86.

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ հարաբերությունը, վորը սովորաբար n տառով են նշանակում, կոչվում է II միջավայրի ցուցիչ I միջավայրի վերաբերմամբ։ Սովորաբար I միջավայր համարվում է օդը, իսկ II կարող է համարվել ջուրը, ապակին, ալկոհոլը և այլն. $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n$ հավասարության հիման վրա՝ կարելի յէ գտնել α, β, n յերեք մեծություններից վորևէ մեկը, յեթե դրանցից 2-ը հայտնի յեն։

Յեթե տված է, վոր ջրի համար n=1,33-ի, կրոնգլասի (ապակու լավ տեսակը) համար n=1,55-ի, գլիցերինի համար n=1,47-ի, հաշվեցեք անկյուն β, յեթե լույսի ճառագայթը կազմում է անկյուն α=68°30′ և թափանցում է. 1) օդից ջուր, 2) օդից կրոնգլաս, 3) օդից գլիցերին։

Հաշվեցեք սպիրտի բեկման ցուցիչը, յեթե կատարած փորձը ցույց տվեց, վոր α=71° և β=44°։

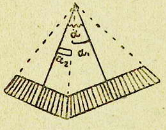
660. Ձգողական ուժը (T) թեք հարթության վրա հաշվում են հետևյալ ֆորմուլով.

$$T=P(\sin\alpha+f\cos\alpha),$$

վորի մեջ P—բեռան զանգվածն է՝ արտահայտված կիլոգրամներով. α—հորիզոնի հետ հարթության կազմած թեքի անկյունը. f—շփման գործակիցը, կախված այն հանգամանքից, թե ինչպիսի նյութեր են շփվում միմյանց հետ։ T-ի մեծությունը վորոշվում է կիլոգրամներով։ 150 kg ծանրության յերկաթե տակառը գլորվում է կաղնի տախտակի վրայով, վորի թեքությունը հորիզոնական հարթության հետ կազմում է 15°-ի անկյուն։ Շփումը նվազեցնելու համար տախտակը թրջած է ջրով, ուստի f=0,26։ Հաշվեցեք ձգողական ուժը։ Յեթե տախտակը քսած լինեյին ճարպով, այդ դեպքում f=0,08։ Ի՞նչքանով կնվազեր ձգողական ուժը։

661. Հետևյալ մեծություններից r-ը՝ ատամնավոր անիվի շառավիղն է, s-ը՝ յերկու կից ատամների առանցքների միջտարածությունը, և m-ը՝ ատամների թիվն է, վորոնք միմյանց հետ կապված են

$$\frac{r}{s}=\frac{1}{2\cdot\sin\frac{180^0}{m}}$$ ֆորմուլով։

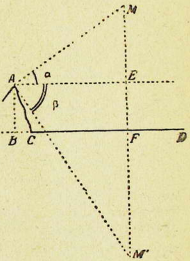


Գծ. 87.

Գտեք s-ի արժեքը, յեթե r=16 cm-ի և m=24։

662. Գծանկար 87-ում պատկերացրած է կոնաձև ատամների կցորդվելը, վորոնց շառավիղներն են—r_1 և r_2. α-ն ատամների միջև առաջացած անկյունն է։ Անկյուններ α, α_1 և α_2 միջև գոյություն ունեն հետևյալ հարաբերությունները.

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{\frac{r_1}{r_2}\cdot\sin\alpha}{1+\frac{r_1}{r_2}\cos\alpha}$$ և $$\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{\sin\alpha}{\frac{r_1}{r_2}+\cos\alpha}$$



Գծ. 88.

Հաշվեք և գտեք α_1 և α_2, ընդունելով, որ $\alpha=80^{0}$ և $\frac{r_1}{r_2}=0,75$։

Ի՞նչ ֆորմուլով կարելի յե ստուգել կատարած այդ հաշվումները։

663. Յենթադրենք AB-ն (գծ. 38) բարձր ափի ուղղաձիգ բարձրությունն է ջրի CD մակերևույթի վրա, AB=h։ M ամպի աչքի ընկնող տեղը ջրի մեջ արտացոլվում ե այնպես, որ MF=FM¹։ Տեսողության ճառագայթները, որոնք M կետից գալիս են դեպի դիտողության A կետը, հորիզոնական AE ուղիղի հետ կազմում են α և β անկյուններ։ Որոշեցեք ամպի ուղղաձիգ բարձրությունը։ Հաշվումներն անելու համար ընդունեցեք h=32m, $\alpha=59^{0}25'$ և $\beta=61^{0}35'$։

664. Հաշվեցեք յեռանկյուն ABC-ի մակերեսը, յեթե բարձրություն BD=23,5 m, $\angle A=39^{0}51'$ և $\angle B=61^{0}23'$։

665. Հաշվեցեք յեռանկյուն ABC-ի կողմերը, յեթե A անկյան բիսեկտրիսը հավասար ե 24,5cm, $\angle B=43^{0}23'$ և $\angle C=53^{0}38'$։

666. Հաշվեցեք յեռանկյուն ABC-ի կողմերը, որի արտագծյալ շրջանի R=15 cm, $\angle A=55^{0}45'$, $\angle B=48^{0}31'$։

ԼՕԳԱՐԻԹՄ. I. Թվերի

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	9	13	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	12	15	19	23	27	31	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	11	14	18	21	25	28	32
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	7	10	13	16	20	33	26	30
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	28
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	9	11	14	17	20	23	26
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	14	16	19	22	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	3	5	8	10	13	15	18	20	23
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	6635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

$\lg\pi = 0.4972$

լոգարիթմներ.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	6	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9058	9053	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1		2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1		2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1		2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1		2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

$$\mathrm{tg}\frac{1}{\pi} = \bar{1},5029$$

3· ՍՈՒՐ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՊԱՆԳԵՆՄՆԵՐԻ

Աստիճաններ	lg sin →							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60	
0	$-\infty$	$\bar{3},4637$	$\bar{3},7648$	$\bar{3},9408$	$\bar{2},0658$	$\bar{2},1627$	$\bar{2},2419$	89
1	$\bar{2},2419$	$\bar{2},3088$	$\bar{2},3668$	$\bar{2},4179$	4637	5050	5428	88
2	5428	5776	6097	6397	6677	6940	7188	87
3	7188	7423	7645	7857	8059	8251	8436	86
4	8436	8613	8783	8946	9104	9256	9403	85
5	$\bar{2},9403$	$\bar{2},9545$	$\bar{2},9683$	$\bar{2},9816$	$\bar{2},9945$	$\bar{1},0070$	$\bar{1},0192$	84
6	$\bar{1},0192$	$\bar{1},0311$	$\bar{1},0426$	$\bar{1},0539$	$\bar{1},0648$	$\bar{1},0755$	$\bar{1},0859$	83
7	0859	0961	1060	1157	1252	1345	1436	82
8	1436	1525	1612	1697	1781	1863	1943	81
9	1943	2022	2100	2176	2251	2324	2397	80
10	2397	2468	2538	2606	2674	2741	2806	79
11	2806	2871	2934	2997	3058	3119	3179	78
12	3179	3238	3296	3353	3410	3466	3521	77
13	3521	3575	3629	3682	3734	3786	3837	76
14	3837	3887	3937	3986	4035	4083	4130	75
15	4130	4177	4223	4269	4314	4359	4403	74
16	4403	4447	4491	4533	4576	4618	4659	73
17	4659	4701	4741	4781	4821	4861	4900	72
18	4900	4939	4977	5015	5052	5090	5126	71
19	5126	5163	5199	5235	5271	5306	5341	70
20	5341	5375	5409	5443	5477	5510	5543	69
21	5543	5576	5609	5641	5673	5704	5736	68
22	5736	5767	5798	5828	5859	5889	5919	67
23	5919	5948	5978	6007	6036	6065	6093	66
24	6093	6121	6149	6177	6205	6232	6260	65
25	6260	6287	6313	6340	6366	6392	6418	64
26	6418	6444	6470	6495	6521	6546	6571	63
27	6571	6595	6620	6644	6668	6692	6716	62
28	6716	6740	6763	6787	6810	6833	6856	61
29	6856	6878	6901	6923	6946	6968	6990	60
30	6990	7012	7033	7055	7076	7097	7118	59
31	7118	7139	7160	7181	7201	7222	7242	58
32	7242	7262	7282	7302	7322	7342	7361	57
33	7361	7381	7400	7419	7438	7457	7476	56
34	7476	7494	7513	7531	7550	7568	7586	55
35	7586	7604	7622	7640	7657	7675	7692	54
36	7692	7710	7727	7744	7761	7778	7795	53
37	7795	7811	7828	7845	7861	7877	7893	52
38	7893	7910	7926	7942	7957	7973	7989	51
39	7989	8004	8020	8035	8050	8066	8081	50
40	8081	8096	8111	8125	8140	8155	8169	49
41	8169	8184	8198	8213	8227	8241	8255	48
42	8255	8269	8283	8297	8311	8324	8338	47
43	8338	8351	8365	8378	8391	8405	8418	46
44	$\bar{1},8418$	$\bar{1},8431$	$\bar{1},8444$	$\bar{1},8457$	$\bar{1},8469$	$\bar{1},8482$	$\bar{1},8495$	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Աստի-ճան.
	lg cos →							

ՑԵՎ ԿՈՍԻՆՈՒՍՆԵՐԻ ԼՈԳԱՐԻԹՄՆԵՐԸ:

Աստիճաններ	lg sin →							
	0′	10′	20′	30′	40′	50	60′	
45	1.8495	1,8507	1,8520	1,8532	$\overline{1}$,8545	$\overline{1}$,8557	$\overline{1}$,8569	44
46	8569	8582	8594	8606	8618	8630	8641	43
47	8641	8653	8665	8676	8688	8699	8711	42
48	8711	8722	8733	8745	8756	8767	8778	41
49	8778	8789	8800	8811	8821	8832	8843	40
50	8843	8853	8864	8874	8884	8895	8905	39
51	8905	8915	8925	8935	8946	8955	8965	38
52	8965	8975	8985	8995	9004	9014	9024	37
53	9024	9033	9042	9052	9061	9070	9080	36
54	9080	9089	9098	9107	9116	9125	9134	35
55	9134	9143	9151	9160	9169	9177	9186	34
56	9186	9194	9203	9211	9219	9228	9236	33
57	9236	9244	9252	9260	9268	9276	9284	32
58	9284	9292	9300	9308	9315	9323	9331	31
59	9331	9338	9346	9353	9361	9368	9375	30
60	9375	9383	9390	9397	9404	9411	9418	29
61	9418	9425	9432	9439	9446	9453	9459	28
62	9459	9466	9473	9479	9486	9492	9499	27
63	9499	9505	9512	9518	9524	9530	9537	26
64	9537	9543	9549	9555	9561	9567	9573	25
65	9573	9579	9584	9590	9596	9602	9607	24
66	9607	9613	9619	9624	9629	9635	9640	23
67	9640	9646	9651	9656	9661	9667	9672	22
68	9672	9677	9682	9687	9692	9697	9702	21
69	9702	9706	9711	9716	9721	9725	9730	20
70	9730	9734	9739	9744	9748	9752	9757	19
71	9757	9761	9765	9770	9774	9778	9782	18
72	9782	9786	9790	9794	9798	9802	9806	17
73	9806	9810	9814	9817	9821	9825	9828	16
74	9828	9832	9836	9839	9843	9846	9849	15
75	9849	9853	9856	9859	9863	9866	9869	14
76	9869	9872	9875	9878	9881	9884	9887	13
77	9887	9890	9893	9896	9899	9901	9904	12
78	9904	9907	9909	9912	9915	9917	9920	11
79	9920	9922	9924	9927	9929	9931	9934	10
80	9934	9936	9938	9940	9942	9944	9946	9
81	9946	9948	9950	9952	9954	9956	9958	8
82	9958	9959	9961	9963	9964	9966	9968	7
83	9968	9969	9971	9972	9973	9975	9976	6
84	9976	9978	9979	9980	9981	9982	9983	5
85	9983	9985	9986	9987	9988	9989	9989	4
86	9989	9990	9991	9992	9993	9993	9994	3
87	9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	2
88	$\overline{1}$,9997	1,9998	$\overline{1}$,9998	$\overline{1}$,9999	1.9999	1,9999	1,9999	1
89	$\overline{1}$,9999	0,0000	0,0000	0,0000	0.0000	0.0000	0,0000	0
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Աստի-ճան.
	← lg cos ←							

3· ՍՈՒՐ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԱՆԳԵՆՍՆԵՐԻ

Աստիճաններ	→ lg tg →							
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60	
0	$-\infty$	$\bar{3}$,4637	$\bar{3}$,7648	$\bar{3}$,9409	$\bar{2}$,0658	$\bar{2}$,1627	$\bar{2}$,2419	89
1	$\bar{2}$,2419	$\bar{2}$,3089	$\bar{2}$,3669	$\bar{2}$,4181	$\bar{2}$,4639	$\bar{2}$,5053	$\bar{2}$,5431	88
2	5431	5779	6101	6401	6682	6945	7194	87
3	7194	7429	7653	7865	8067	8261	8446	86
4	8446	8624	8795	8960	9119	$\bar{2}$,9272	$\bar{2}$.9420	85
5	$\bar{2}$,9420	$\bar{2}$,9563	$\bar{2}$,9701	$\bar{2}$,9836	$\bar{2}$,9966	$\bar{1}$,0093	$\bar{1}$,0216	84
6	$\bar{1}$,0216	$\bar{1}$,0336	$\bar{1}$,0453	$\bar{1}$,0567	$\bar{1}$,0678	0786	0891	83
7	0891	0995	1096	1194	1291	1385	1478	82
8	1478	1569	1658	1745	1831	1915	1997	81
9	1997	2078	2158	2236	2313	2389	2463	80
10	2463	2537	2609	2680	2750	2819	2887	79
11	2887	2954	3020	3085	3149	3212	3275	78
12	3275	3337	3397	3458	3517	3576	3634	77
13	3634	3691	3748	3804	3859	3914	3968	76
14	3968	4021	4074	4127	4178	4230	4281	75
15	4281	4331	4381	4430	4479	4527	4575	74
16	4575	4622	4669	4716	4762	4808	4853	73
17	4853	4898	4943	4987	5031	5075	5118	72
18	5118	5161	5203	5245	5287	5329	5370	71
19	5370	5411	5451	5492	5532	5571	5611	70
20	5611	5650	5689	5727	5766	5804	5842	69
21	5842	5879	5917	5954	5991	6028	6064	68
22	6064	6100	6136	6172	6208	6243	6279	67
23	6279	6314	6348	6383	6418	6452	6486	66
24	6486	6520	6554	6587	6620	6654	6687	65
25	6687	6720	6752	6785	6817	6850	6882	64
26	6882	6914	6946	6977	7009	7040	7072	63
27	7072	7103	7134	7165	7196	7226	7257	62
28	7257	7287	7318	7348	7378	7408	7438	61
29	7438	7467	7497	7526	7556	7585	7614	60
30	7614	7644	7673	7702	7730	7759	7788	59
31	7788	7186	7845	7873	7902	7930	7958	58
32	7958	7986	8014	8042	8070	8098	8125	57
33	8125	8153	8180	8208	8235	8263	8290	56
34	8290	8317	8344	8371	8398	8425	8452	55
35	8452	8479	8506	8533	8559	8586	8613	54
36	8613	8639	8666	8692	8719	8745	8771	53
37	8771	8797	8824	8850	8876	8902	8928	52
38	8928	8954	8980	9006	9032	9058	9084	51
39	9084	9110	9135	9161	9187	9213	9238	50
40	9238	9264	9289	9315	9341	9366	9392	49
41	9392	9417	9443	9468	9494	9519	9544	48
42	9544	9570	9595	9621	9646	9671	9697	47
43	9697	9722	9747	9773	9798	9823	$\bar{1}$,9848	46
44	$\bar{1}$,9848	$\bar{1}$,9874	$\bar{1}$,9899	$\bar{1}$.9924	$\bar{1}$,9950	$\bar{1}$,9975	0,0000	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Աստի-ճան.
	← lg ctg ←							

ՅԵՎ ԿՈՏԱՆԳԵՆՄՆԵՐԻ ԼՈԳԱՐԻԹՄՆԵՐԸ:

Աստիճաններ	→ lg tg →							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
45	0,0000	0.0025	0,0051	0,0076	0,0101	0,0126	0,0152	44
46	0152	0177	0202	0228	0253	0278	0303	43
47	0303	0329	0354	0380	0405	0430	0456	42
48	0456	0481	0507	0532	0557	0583	0608	41
49	0608	0634	0659	0685	0711	0736	0762	40
50	0762	0788	0813	0839	0865	0891	0916	39
51	0916	0942	0968	0994	1020	1046	1072	38
52	1072	1098	1124	1150	1176	1203	1229	37
53	1229	1255	1282	1308	1334	1361	1387	36
54	1387	1414	1441	1467	1494	1521	1548	35
55	1548	1575	1602	1629	1656	1683	1710	34
56	1710	1737	1765	1792	1820	1847	1875	33
57	1875	1903	1930	1958	1986	2014	2047	32
58	2042	2070	2099	2127	2155	2184	2212	31
59	2212	2241	2270	2299	2328	2357	2386	30
60	2386	2415	2444	2474	2503	2533	2563	29
61	2563	2592	2622	2652	2683	2713	2743	28
62	2743	2774	2805	2835	2866	2897	2928	27
63	2928	2960	2991	3023	3054	3086	3118	26
64	3118	3150	3183	3215	3248	3280	3313	25
65	3313	3346	3380	3413	3447	3480	3514	24
66	3514	3548	3583	3617	3652	3687	3722	23
67	3722	3757	3792	3828	3864	3900	3936	22
68	3936	3972	4009	4046	4083	4121	4158	21
69	4158	4196	4234	4273	4311	4350	4389	20
70	4389	4429	4469	4509	4549	4589	4630	19
71	4630	4672	4713	4755	4797	4839	4882	18
72	4882	4925	4969	5013	5057	5102	5147	17
73	5147	5192	5238	5284	5331	5378	5425	16
74	5425	5473	5521	5570	5619	5669	5720	15
75	5720	5770	5822	5873	5926	5979	6032	14
76	6032	6086	6141	6197	6252	6309	6366	13
77	6366	6424	6483	6542	6603	6664	6725	12
78	6725	6788	6851	6915	6981	7047	7114	11
79	7114	7181	7250	7320	7391	7464	7537	10
80	7537	7611	7687	7764	7842	7922	8003	9
81	8003	8085	8169	8255	8342	8431	8522	8
82	8522	8615	8709	8806	8904	9005	9109	7
83	9109	9214	0,9323	0.9433	0,9547	0,9664	0.9784	6
84	0,9784	0.9907	1,0034	1.0164	1.0299	1.0437	1,0581	5
85	1,0581	1,0728	0882	1040	1205	1376	1554	4
86	1554	1739	1933	2135	2348	2571	2806	3
87	2806	3055	3318	3599	3899	4221	4569	2
88	4569	4947	,5362	1,5819	1.6331	1,6911	1,7581	1
89	1.7581	1,8373	1,9342	2,0591	2,2352	2,5363	—∞	0
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Աստի-ճան.
	← lg ctg ←							

Ց Ա Ն Կ

Երես

ԳԼՈՒԽ I. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄԸ

ԳԼՈՒԽ II. ԻՌՌԱՑԻՈՆԱԼ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

ԳԼՈՒԽ III. ԼՈԳԱՐԻԹՄՆԵՐ

ԳԼՈՒԽ IV. ՅԵՐԿՐՈՐԴ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ ՅԵՎ ՆՐԱ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

ԳԼՈՒԽ V. ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆ

ԳԼՈՒԽ VI. ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԸ ՇՐՋԱՆԻ ՄԵՋ: ԹՎԱՅԻՆ ԿԱԽՈՒՄՆԵՐԸ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ՄԻՋԵՎ: ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄՆ

ԳԼՈՒԽ VII. ՀԱՐԱԲԵՐՈՒՄՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՀԱՐՑԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄՆ

ԳԼՈՒԽ VIII. ՈՒՂԻՂ ԳԾԵՐԻ ՅԵՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՓՈԽԱԴԱՐՁ ԴԻՐՔԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

ԳԼՈՒԽ IX. ՅԵՐԿՆԻՍՏ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ: ՓՈԽԱԴԱՐՁ ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ: ԲԱԶՄԱՆԻՍՏ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ: ՊՐԻԶՄԱՆԵՐ ՅԵՎ ԲՈՒՐԳԵՐ

ԳԼՈՒԽ X. ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԱՎԵԼՎԱԾ

ԳԻՆԸ 1 ՌՈՒԲԼԻ 80 ԿՈՊԵԿ (18 մամուլ)

ՀՍԽՀ ՊԵՏՀՐԱՏ

И. Ф. Берг, И. А. Знаменский, Г. Н. Попов, Н. И. Щетинин, И. Ф. Слудский, Н. П. Хвостов.

Рабочая книга по математике

VIII ого обучения

Госиздат ССР Армении
Эривань—1930