Պրոլետարներ բոլոր յերկրների, միացե՛ք.

Հ. Ս. Խ. Հ.

ՀՈՎՀ. ՆԱՎԱԿԱՏԻԿՅԱՆ

ՎԵՐԼՈՒԾԱԿԱՆ ՅԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

(ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆՈՒՄ ԿԱՐԴԱՑՎԱԾ ԴԱՍԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ—1923 թ.)

Géométrie analytque a trois dimensions par. H. Navakatikian. Erivan

ՄԱՍՆ Բ.

Պետական Համալսարանի Հրատարակչություն Յերեվան 1923.

Պոլիգրաֆտրեստի վիմագրատուն յեվ տպարան.

Հայաստանի Սոցիալիստական Խորհրդային Հանրապետություն

Պրոլետարներ բոլոր երկրների, միացե՛ք:

Հովհ. Նառկատիկյան

Վերլուծական երկրաչափություն

(Համալսարանում կարդացած դասախոսություններ - 1923 թ.)

Մասն Ի.

Géometrie analytique à trois dimensions
par. H. Narrkatikian. Erivan

ՀՍԽՀ

Ձեռագրի իրավունքով

Պետական Հրատարակչություն - N 73
Երևան - 1923

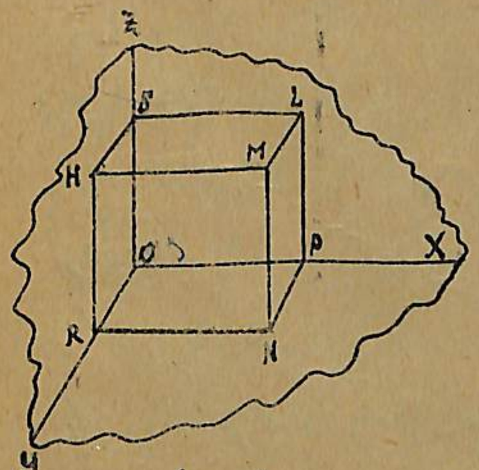
Վերլուծական յերկրաչափություն

Մաս Բ.

Գլուխ Ա.

§1. Ուղղագիծ կոորդինատներ:

1. Ինչպես որ հարթության վրա կետի դիրքը՝ նախապես ընտրած առանցքների նկատմամբ կարելի յէ որոշել յերկու կոորդինատների օգնությամբ, նույն յեղանակով կարելի յէ որոշել կետի դիրքը տարածության մեջ յերեք կոորդինատների օգնությամբ: Իրոք, վերցնենք տարածության մեջ յերեք՝ մի կետից յելնող առանցք՝ OX, OY, OZ, որոնք միմյանց նկատմամբ փոխադարձ ուղղահայաց են (Գծ. 1):



Գծ. 1

Այս առանցքներով որոշված են յերեք հարթություններ՝ XOY, YOZ և ZOX, որոնք նույնպես ուղղահայաց են և կազմում են յեռանիստ անկյուն: Յուրաքանչյուր կետ (M), որ գտնվում է այս յեռանիստ անկյան մեջ, ունի որոշ հեռավորություններ անկյան նիստերից՝ MH, ML, MN:

Յերբ փոխվում է կետի դիրքը, փոխվում են նաև նրա հեռավորությունները: Չափելով այդ հեռավորությունները նախապես ընտրած մասշտաբով, հնարավոր կլինի ամեն մի կետի համապատասխանել երեք թիվ, որոնք կորոշեն կետի դիրքը տարածության մեջ:

Այն թվերը կամ նրանց համապատասխան հատվածները կը կոչվեն կետի կոորդինատներ, OX, OY և OZ ուղիղ գծերը — կոորդինատային առանցքներ, իսկ XOY, YOZ և ZOX հարթությունները — կոորդինատային հարթություններ: Տարածական անկյան գագաթը — կոչված է կոորդինատների սկզբնակետ: Կոորդինատների առանցքները և հարթությունները միասին կոչվում են կոորդինատների սիստեմ:

Այսպիսով, M կետի կոորդինատները որոշելու համար այդ կետից իջեցնում ենք ուղղահայացներ կոորդինատային հարթությունների վրա: MH, MQ, MN հատվածները, կամ նրանց համապատասխան թվերը կլինեն M կետի կոորդինատները: Կետի կոորդինատները սովորաբար նշանակում են x, y, z տառերով, որոնցից x-ը զուգահեռ է OX առանցքին, y-ը — OY առանցքին և այլն: M կետի համար, օրինակ ունենք

$$x = MH = a, \quad y = MQ = b, \quad z = MN = c,$$

որ a, b, c այն թվերն են, որոնք արտահայտում են MH-ը, MQ-ը և MN-ը մասշտաբով չափելիս:

Նկարում նշանակված համաձայն OX առանցքը կոչվում է x-երի առանցք, OY-ը — y-ների առանցք և OZ-ը — z-երի առանցք:

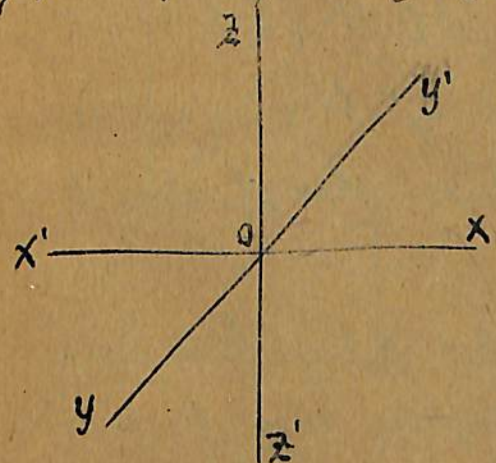
MH և MQ ուղղահայացներով, նույնպես և MH և MN, MQ և MN ուղղահայացներով տանենք հարթություններ. կստանանք մի ուղղանկյուն զուգահեռանիստ, որ

$$x = MH = OP = KN = a, \quad y = MQ = OK = PN = b,$$
$$z = MN = OS = c$$

Ուրեմն, M կետի կոորդինատները որոշելու համար կարելի է նաև այսպես վարվել՝ M կետով տանել զուգահեռ հարթություններ կոորդինատային հարթություններին, որոնք առանցքներից կկտրեն OP, OK և OS հատվածները. որոնք էլ կլինեն M կետի կոորդինատները: Կարելի է նաև M-ից իջեցնել (MN) ուղղահայաց XOY հարթության վրա, ապա N-ից տանել զուգահեռ y-ների առանցքին. կստանանք

$$x = OP, \quad y = PN \text{ և } z = NM:$$

2. Շարունակելով կոորդինատային հարթությունները, կստանանք O կետի շուրջը ութը տարածական անկյուն (նկ. 2):



Նկ. 2

Մինչև հիմա մենք տեսանք, թե ինչպես կարելի է որոշել կետի դիրքը, երբ նա գտնվում է $O(XYZ)$ տարածական անկյան մեջ: Նման ձևով կարելի է վարվել և այն դեպքում, երբ կետը գտնվում է մյուս տարածական անկյուններում, որոնք են՝ $O(XY'Z)$, $O(X'Y'Z)$ և այլն: Բայց որպեսզի հակառակ ինչպէս մի շատ առնենք, այսինքն՝ որոշեալ թվերից կազմած յուրաքանչյուր յեռյակին համապատասխանում միայն մի կէտ, զգեցել է կոորդինատների վերագրել միայն դրական արժէքներ, այլ և բացասական, միշտ այնպէս, ինչպէս կը գրէր առներ Ա. ձևով:

Այն հատվածները, որոնք գծուած են կոորդինատային առանցքների վրա կամ նրանց շարունակութեան վրա նրանց կվերագրենք դրական (+) նշանը, երբ նրանք առնեն OX, OY կամ OZ ուղղութիւնը, հակառակ դէպքում նրանց կվերագրենք մինուս (—) նշանը: Այսպիսով, եթե որևէ կէտի բոլոր կոորդինատները դրական են, կէտը գծուած է O(XYZ) յեռանիստ անկյան մէջ. եթե x կոորդինատը դրական է, իսկ մնացերը բացասական, այս կէտը գծուած է O(XY'Z') յեռանիստ անկյան մէջ, և այլն:

Վարժութիւններ. 1. Կառուցել հետեւյալ կէտերը (0,0,0), (2,3,1) (−2,3,1), (−2,−3,1) (−2,3,−1) (2,−3,1)(2,3,−1) (−2,−3,−1) (2,−3,−1), (0,2,−3), (3,0,1), (2,1,0):

2. Ինչ հարթության վրա յէ գծուած այն կէտը, որի x կոորդինատը զերո յէ, որի y կոորդինատը զերո յէ, որի z կոորդինատը զերո յէ:

3. Որտե՞ղ է գծուած այն կէտը, որի x և y կոորդինատները զերո յեն, որի y և z կոորդինատները զերո յեն, և այլն:

4. Կառուցել (0,0,−2) (1,0,0), (0,−3,0) կէտերը:

5. Որտե՞ղ են գծուած այն բոլոր կէտերը, որոնց x կոորդինատը

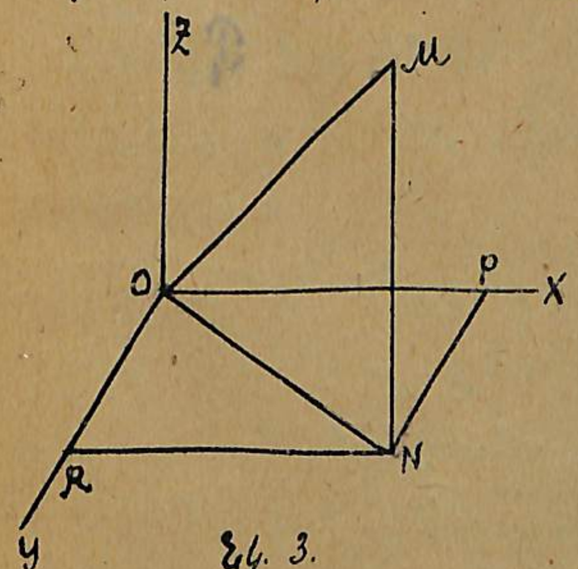
հավասար է a-ի:

6. Գտնել յերկրաչափական տեղը բոլոր այն կէտերի, որոնց $x=a$, $y=b$.

Ծանոթութիւն. Կոորդինատային առանցքները և հարթութիւնները միայն կազմած են կոորդինատների սիստեմը, և որովհետև առանցքները ուղիղ անկյաններ են կազմած, սիստեմը կոչված է ուղղանկյուն (հակառակ դէպքում նա կոչուէր — շեղանկյուն). Համաձայն մեր ընդունած սիստեմը կոչված է աջաձև, որովհետև կէտի կոորդինատները ուղիղ գծի հատվածներ են:

3. Խնդիր 1. Գտնել տրված M (x_1, y_1, z_1) կէտի հեռավորութիւնը սկզբնակէտից:

Կառուցած ենք M կէտի կոորդինատները՝ $x_1 = OP$, $y_1 = PN$, $z_1 = NM$: Պետք է գտնել $d = OM$ (գծ. 3)



Գծ. 3.

ONM յեռանկյունը ուղղանկյուն է ($\angle ONM = 90°$), նույնպես և OPN յեռանկյունը ուղղանկյուն է ($\angle OPN = 90°$): Հետևաբար կարող ենք գրել

$$d^2 = OM^2 = ON^2 + NM^2$$

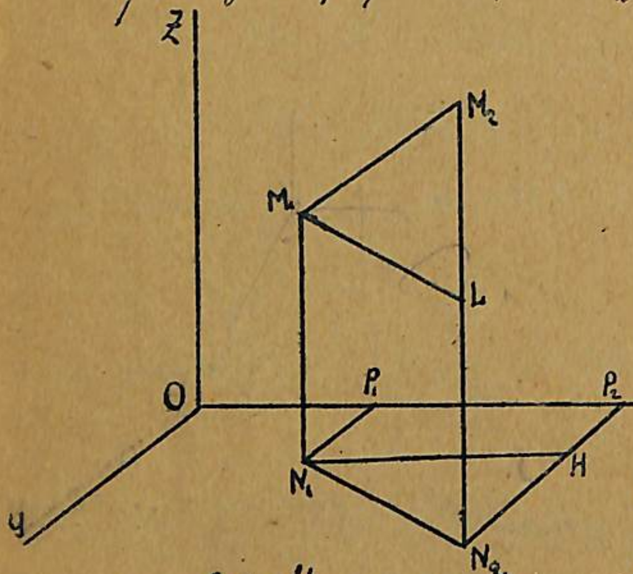
$$ON^2 = OP^2 + PN^2$$

Գումարելով այս հավասարութիւնները, կստանանք

$$d^2 = OP^2 + PN^2 + NM^2 =$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \quad \text{կամ}$$
$$d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \qquad (1):$$

Խնդիր 2. Գտնել $M_1(x_1, y_1, z_1)$ և $M_2(x_2, y_2, z_2)$ կետերի հեռավորությունը:

Կառուցած ենք M_1 և M_2 կետերի կոորդինատները՝



Նկ. 4

$OP_1 = x_1$, $P_1N_1 = y_1$, $N_1M_1 = z_1$,

$OP_2 = x_2$, $P_2N_2 = y_2$, $N_2M_2 = z_2$:

Պետք է հաշվել $M_1M_2 = d$:

Միացնում ենք N_1 և N_2 կետերը և M_1 կետից տանում ենք նաև զուգահեռ (M_1L) իսկ N_1-ից տանում ենք N_1H-ը զուգահեռ OX-ին: Դժվար չէ նկատել, որ

$\angle M_1LM_2 = \angle N_1HN_2 = 90°$, $M_1L = N_1N_2$, $N_1H = P_1P_2 = x_2 - x_1$, $HN_2 = y_2 - y_1$, $LM_2 = z_2 - z_1$: M_1LM_2 և N_1HN_2 ուղղանկյուն յեռանկյուններից ունենք՝

$$d^2 = M_1M_2^2 = M_1L^2 + (z_2 - z_1)^2$$
$$M_1L^2 = N_1N_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Տեղադրելով այս հավասարությունները ստանում ենք՝

$$d^2 = M_1M_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

կամ

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (2):$$

Վարժություններ:

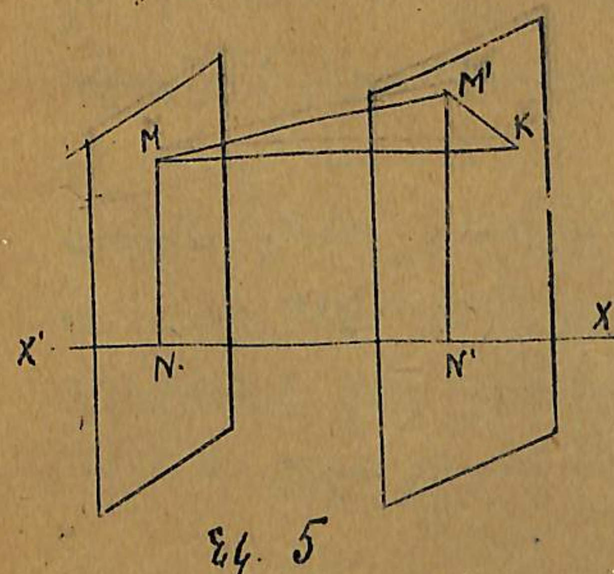
1. Գտնել այն կետերը, որոնք հավասար հեռավորությունների վրա են գտնված յուրաքանչյուր տված կետերից (2,1,3) և (1,0,2). Ինչ հավասարության են բավարարում այդ կետերի կոորդինատները:

2. Գտնել այն կետերը, որոնք հավասար հեռավորությունների վրա են գտնված յերեք տված կետերից: Ինչ հավասարության, կամ հավասարությունների են բավարարում այդ կետերի կոորդինատները:

3. (xy) և (xz) հարթությունների վրա գտնել այն կետերը, որոնց հեռավորությունները $(3, 0, 0)$ և $(0, 0, 2)$ կետերից հավասար լինեն 3-ի:

§ 2. Պրոյեկցիա:

Դիցուք տարածության մեջ տված է մի հաստատուն ուղիղ գիծ XX' և որևէ մի կետ (M): Այդ կետից տանենք XX'-ին ուղղահայաց հարթություն: Թող նրանց հատման կետը N-ն է, այդ N-ը կոչվում է M-ի պրոյեկցիան XX'-ի վրա (նկ. 5):



Նկ. 5

Թող տարածության մեջ տված է որևէ հատված MM', այդ կառուցելով նրա ծայրերի պրոյեկցիաները (N և N') XX'-ի վրա, ստանում ենք այս վերջինի վրա

NN' հատվածը, որը ցույց է տալիս MM'-ի պրոյեկցիան xx'-ի վրա:

Կետ 1-ից պետք չէ նկատել, որ M կետի x կոորդինատը (OP) ներկայացնում է OM-ի պրոյեկցիան x-երի առանցքի վրա (որովհետև MNPQ հարթությունը ուղղահայաց է x-ի առանցքին). Նմանապես y կոորդինատը և z կոորդինատը ներկայացնում են նույն OM-ի պրոյեկցիաները y-ների և z-երի առանցքների վրա:

Կետ 4-ից ասենք, որ M_1M_2 հատվածի պրոյեկցիան x-երի առանցքի վրա կլինի P_1P_2, այսինքն հավասար է $x_2 - x_1$ (որովհետև $M_1N_1P_1$ և $M_2N_2P_2$ հարթությունները ուղղահայաց են x-երի առանցքին): Նույն հատվածի պրոյեկցիան y-ների առանցքի վրա հավասար է $y_2 - y_1$, իսկ z-երի առանցքի վրա — հավասար է $z_2 - z_1$:

Յուրաքանչյուր հատվածի և նրա պրոյեկցիայի միջև գոյություն ունի որոշ կապակցություն. դիցուք MM'-ով կազմած անկյունը իր պրոյեկցիայի հետ (NN'-ի) (նկ. 5) հավասար է φ:

M կետից տանենք NN'-ի զուգահեռ (MK): Պետք չէ նկատել, որ M, N, K, N' կետերը մի հարթության վրա են գտնվում, ուստի MK = NN', իբրև զուգահեռների հատվածներ: Բայց այդ, նմանապես պետք չէ նկատել, որ ∠MKM' = 90° և ∠M'MK = φ, ուստի

$$MK = MM' \cos\varphi; \text{ հետևաբար}$$

$$NN' = MM' \cos\varphi \qquad (1)$$

այսինքն հատվածի պրոյեկցիան հավասար է նույն հատվածին՝ բազմապատկած նրանով կազմած անկյան cosinus'-ով:

2. Կիրառենք կետ 1-ին: Եթե OM-ով կազմած անկյունները կոորդինատային առանցքների հետ անվանենք α, β, γ, ապա (1) հավասարության հիման վրա, ունենք

$$x = OM \cdot \cos\alpha = d\cos\alpha$$
$$y = OM \cdot \cos\beta = d\cos\beta \qquad (2)$$
$$z = OM \cdot \cos\gamma = d\cos\gamma$$

որ x, y, z M կետի կոորդինատներն են, իսկ d = OM:

Նույնպես և կետ 4-ից ունենք

$$x_2 - x_1 = d\cos\alpha$$
$$y_2 - y_1 = d\cos\beta \qquad (3)$$
$$z_2 - z_1 = d\cos\gamma$$

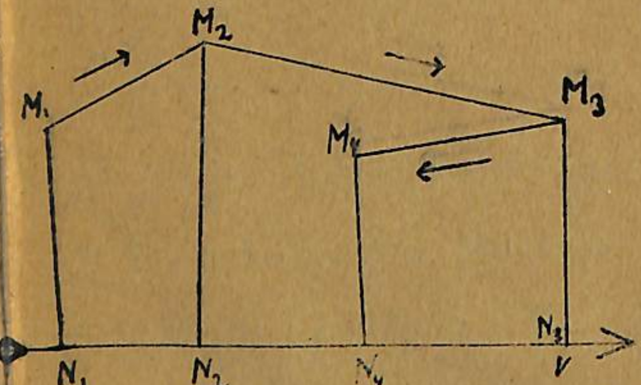
որտեղ x_1, y_1, z_1 M_1 կետի կոորդինատներն են, x_2, y_2, z_2 M_2 կետի կոորդինատներն են, $d = M_1M_2$, իսկ α, β, γ M_1M_2-ով կազմած անկյուններն են x-երի, y-ների և z-երի առանցքների հետ:

Եթե (3) կամ (2) հավասարությունները բարձրացնենք քառակուսի և ի նկատի ունենանք, որ $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ (տես §1 (2)), կստանանք հետևյալ կարևոր հավասարությունը

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (4)$$

ու նշանակում է, որ կամայական ուղղի հետ կազմած անկյուն-
ները կոորդինատային առանցքների հետ միմյանցից անկախ չեն,
այլ, եթե նրանցից երկուսը տրված են, ապա երրորդը որոշ-
վում է (4) հավասարումով:

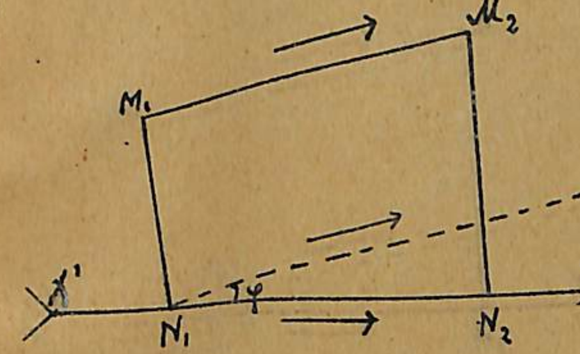
3. Բերենք XX'-ի վրա (պրոյեկցիաների առանցքի), որոշ-
ված և MM'-ի վրա կարելի է մի ուղղությամբ համարել
դրական, իսկ հակառակ - բացասական: Դրական ուղղությունը
ցույց է տված սլաքով: Հատվածի պրոյեկցիայի նշանը որոշվում
են հատվածի ուղղությամբ: Եթե պրոյեկցիան առանցքի
ուղղությամբ, ապա համարվում է դրական, հակառակ դեպ-
քում - բացասական: Օրինակ M_1M_2, M_2M_3 հատվածների
պրոյեկցիաները դրական են, որով-
հետև նրանք առանցքի
(XX') ուղղությամբ, իսկ M_3M_4-ի
պրոյեկցիան (N_3N_4) բացասա-
կան է:



Նկ. 6

Պրոյեկցիայի (1) հավասարությունը
արտահայտում է պրոյեկցիայի և նը-
շանի, անկախ է անկյունից
φ անկյունից, որովհետև թե ուղղի ոչ մեկ կազմած
անկյուններից մեկն է φ-ն: φ-անկյունը չափում ենք սը-
լաքի վրա նրա հակառակ դրական ուղղության ուղղի:

Եթե 7 գծագրում, M_1M_2 և նրա պրոյեկցիան (N_1N_2) դը-
րական են, և φ-ն սուր անկյուն է, ապա $N_1N_2 = M_1M_2 \cos\varphi$
ճիշտ է և բութ դեպքում: Եթե 8-րդ
գծագրում M_1M_2 և նրա պրոյեկ-
ցիան N_1N_2 հակառակ նշանների
են, բայց այս դեպքում φ-ն
բութ անկյուն է (նրա cosinus-ը
նշանակար բացասական է) ապա

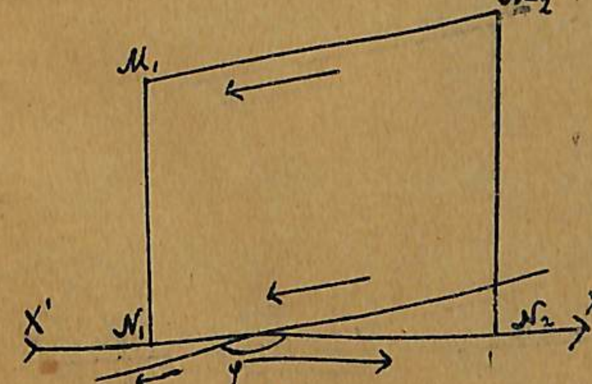


Նկ. 7

$$N_1N_2 = M_1M_2 \cos\varphi$$

կրկին ճիշտ է:

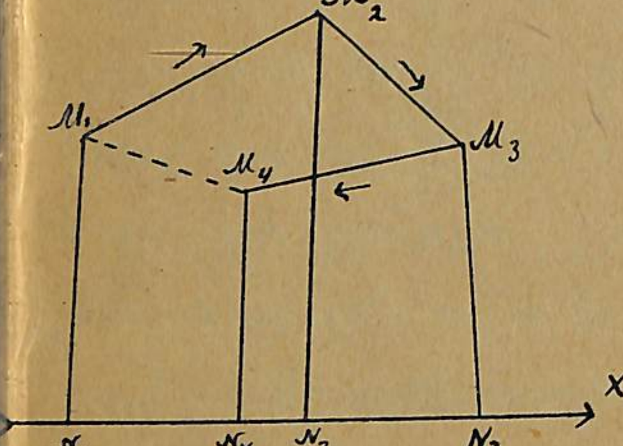
Այսպիսով ապացուցված է (1)
հավասարությունը ճիշտ է ամեն
մի դեպքում, անկախ ուղղի հատ-
վածի և առանցքի ուղղություն-
ներից, եթե φ անկյան չափը
ենք հաշվում դրա-
կան պտույտի համար:



Նկ. 8

4. Ապացուցենք նման պրո-
յեկցիաների մի կարևոր հատկությունը: Դիցուք տրված
է մի բեկյալ գիծ $M_1M_2M_3M_4$, որի կողմերը տար-
բեր ուղղություններ ունեն (նկ. 9): Գտնենք բոլոր կող-
մերի պրոյեկցիաների գումարը: M_1M_2-ի պրոյեկցիան
N_1N_2-ն է, M_2M_3-ի պրոյեկցիան N_2N_3-ն է, իսկ

M_3M_4-ի պրոյեկցիան N_3N_4-ն է, բայց բացասական է:



Գծ. 9

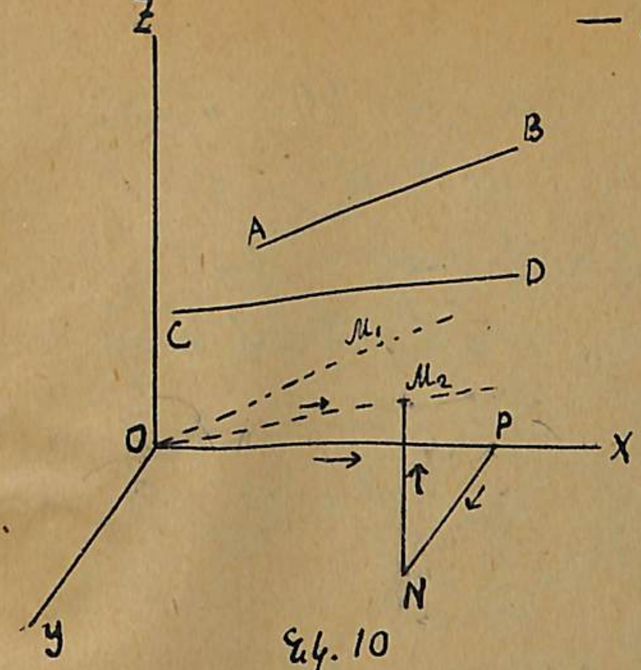
Որովհետև բոլոր պրոյեկցիաների գումարը կլինի

$$\overline{N_1N_2}+\overline{N_2N_3}+\overline{N_3N_4}=\overline{N_1N_4},$$

որը ներկայացնում է M_1M_4-ի պրոյեկցիան:

Այսպիսով մենք ապացուցեցինք, որ $M_1M_2M_3M_4$ բեկյալ գծի պրոյեկցիան հավասար է ծայրերը միացնող հատվածի (M_1M_4) պրոյեկցիային, եթե բեկյալ կողմերը միևնույն ուղղությամբ են: Առանց ապացույցի ընդունում ենք, որ փակ բեկյալի պրոյեկցիան հավասար է զրոյի:

5. Երկու ուղղությամբ մեզ տրված են տարածության մեջ երկու ուղիղ գծեր՝ AB և CD, և հայտնի է, որ AB-ն կոորդինատային առանցքների հետ կազմում է $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ անկյունները, իսկ CD-ն $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ անկյունները: Պետք է գտնել տրված երկու գծերով կազմված անկյունը: Այդ անկյունը գտնելու համար, պետք է տանել մի կետից, որպես սկզբնակետից զուգահեռներ AB և CD-ին (գծ. 10), որոնք առանցքների հետ նույն անկյունները կկազմեն, ինչ որ տրված գծերը: Նշանակենք M_1OM_2 անկյունը φ, (որը կլինի AB և CD-ով կազմված անկյունը) իսկ M_2 կետի կոորդինատ-



Գծ. 10

ները՝ x_2, y_2, z_2:

Ինչպես հայտնի է՝

$$x_2 = OM_2 \cos\alpha_2,$$

$$y_2 = OM_2 \cos\beta_2,$$

$$z_2 = OM_2 \cos\gamma_2:$$

Կառուցենք M_2 կետի կոորդինատները ($OP = x_2$, $PN = y_2$, $NM = z_2$) և վերցնենք $OPNM_2$ բեկյալ գծի պրոյեկցիան OM_1-ի վրա, որը հավասար պիտի լինի OM_2-ի պրոյեկցիային նույն գծի վրա:

Ունենք՝ $OP\cos\alpha_1 + PN\cos\beta_1 + NM_2\cos\gamma_1 = OM_2\cos\varphi$ (որովհետև OP, PN, NM_2 հատվածները OM_1-ի հետ կազմում են $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ անկյունները, իսկ OM_2-ը՝ φ անկյունը), կամ

$$x_2\cos\alpha_1 + y_2\cos\beta_1 + z_2\cos\gamma_1 = OM_2\cos\varphi:$$

Տեղադրելով x_2, y_2, z_2 արժեքները նախորդ հավասարություններից և կրճատելով OM_2-ի վրա, կստանանք՝

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 \qquad (5)$$

Այս հավասարությունից որոշվում է երկու ուղիղ գծերի ուղղահայաց լինելու պայմանը:

Իրոք, եթե AB և CD (կամ OM_1 և OM_2) ուղիղ ուղղահայաց են կազմում, $\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, ուստի

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0 \qquad (6)$$

(5) հավասարությունը կարելի է այլ կերպ գրել:
իսկ, նշանակելով OM_1 և OM_2-ը d_1 և d_2, ունենք

$$M_1M_2^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\cos\varphi \quad \text{կամ}$$

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 = d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos\varphi :$$

Բայց ի նկատի ունենալով, որ

$$d_1^2 = x_1^2+y_1^2+z_1^2, \quad d_2^2 = x_2^2+y_2^2+z_2^2,$$

$$x_1 = d_1\cos\alpha_1, \quad y_1 = d_1\cos\beta_1 \ldots\ldots$$

$$x_2 = d_2\cos\alpha_2, \quad y_2 = d_2\cos\beta_2 \quad \text{և այլն},$$

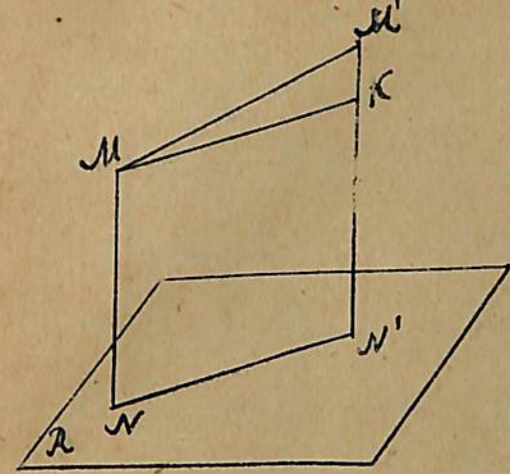
ունենք

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 :$$

Ծանոթություն: Հատող երկու ուղղի անկյան համար, այդ կետով տանում ենք ուղղանկյուն կոորդինատային առանցքներ: Բայց կարելի է երկու ուղղի անկյունը որոշել մեր ուղղանկյուն կոորդինատային հարթությունների միջոցով, այսինքն (առանցքների) անկյան կամ կոորդինատային հարթությունների միջոցով: Երկու ուղղի անկյունը ուղղանկյուն կոորդինատային հարթությունների հետ կազմած է ուղղանկյուն (պրոյեկցիաների) հավասար կլինի այն կազմած չափով:

6. Դիցուք այժմ մեր վերցրել ենք մի կետ, հատված ուղղանկյուն մի առանցքի վրա (պրոյեկցիաների առանցքի) վրա, բայց կարելի է պրոյեկցիա վերցնել և հարթության վրա: Դիցուք տրված է մի հարթություն

հարթություն R (Նկ. 11) և M, M' կետերը: Իջեցնենք այդ կետերից ուղղահայացներ R հարթությանը, կստանանք M-ի և M'-ի ուղղանկյուն պրոյեկցիաները (N և N') R հարթության վրա, իսկ NN' հատվածը կլինի MM'-ի ուղղանկյուն պրոյեկցիան նույն հարթության վրա:



Նկ. 11

Ցանկալի է ապացուցել, որ

$$NN' = MM'\cos\varphi, \qquad (6)$$

որտեղ φ-ն այն անկյունն է, որ MM' հատվածը կազմում է R հարթության հետ:

Իրոք, MN և $M'N'$, լինելով զուգահեռականներ, միևնույն հարթության վրա են գտնվում: M կետից տանենք MK զուգահեռ NN'-ին, կստանանք

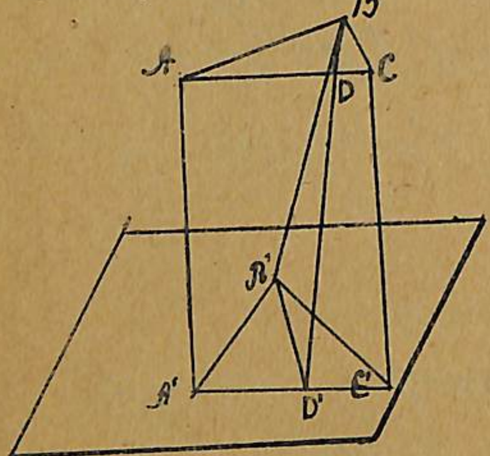
$$\angle M'MK = \varphi, \quad \angle M'KM = 90^\circ \text{ և } MK = NN'$$

հետևաբար

$$MK = NN' = MM'\cos\varphi \qquad (6)$$

(6) հավասարությունից երևում է, որ երբ $\varphi = 0$, ապա $NN' = MM'$, այսինքն՝ երբ տրված հատվածը զուգահեռ է պրոյեկցիայի հարթությանը, ապա նա հավասար է իր ուղղանկյուն պրոյեկցիային:

7. Դիցուք կենտ ուղիղ պրիզմայի մեջ յերեք կետ A, B, C. վերցնենք այդ կետերի պրոյեկցիաները (A', B', C') միևնույն հարթության վրա (գծ. 12): Ապացուցենք, որ ABC և A'B'C' յեռանկյունների մակերեսների միջև գոյություն ունի (6) հավասարության նման կապակցություն:



Գծ 12

Յենթադրենք, թե ABC յեռանկյան կողմերից մեկը, որպես AC-ն զուգահեռ է R հարթությանը, և ABC և R հարթությունների անկյունը հավասար է φ: Ապացուցենք այն, որ A'B'C' մակերեսը հավասար է ABC մակերեսին բազմապատկած $\cos\varphi$-ով:

BB'-ով տանենք AC-ին ուղղահայաց հարթություն (նա կլինի և A'C'-ին ուղղահայաց, որովհետև $AC \parallel A'C'$) կստանանք $BD \perp AC$, $B'D \perp A'C'$ և B'D-ն BD-ի ուղղագիծ պրոյեկցիան է: Ուստի

$$B'D' = BD \cos\varphi$$

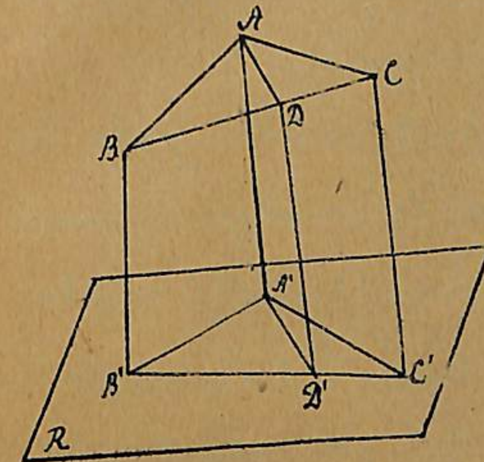
$$\text{մակերես } ABC = \frac{AC \cdot BD}{2}$$

$$\text{մակերես } A'B'C' = \frac{A'C' \cdot B'D'}{2}.$$

Վերջին հավասարության մեջ դնելով $A'C' = AC$ (որովհետև $AC \parallel A'C'$) և $B'D' = BD\cos\varphi$, կստանանք

$$(7) \quad \text{մակերես } A'B'C' = \frac{AC \cdot BD}{2} \cos\varphi = $$
$$= \text{մակերես } ABC \cdot \cos\varphi :$$

8. Դիցուք կետ ABC յեռանկյան ոչ մի կողմը զուգահեռ չէ պրոյեկցիաների հարթությանը (R): Այս դեպքում միշտ կարելի է յեռանկյան գագաթներից մեկով տանել մի ուղիղ գիծ (AD) այնպես, որ նա զուգահեռ լինի R հարթությանը և մի կողմը բաժանի յերկու մասի (գծ. 13):



Գծ. 13

Այդպիսով ABC յեռանկյունը բաժանված է յերկու մասի՝ ADB և ADC, և նրանց մի կողմը (AD) զուգահեռ է R հարթությանը:

Կիրառելով (7) հավասարության համաձայն ունենք

$$\text{մակերես } A'D'B' = \text{մակերես } ADB \cdot \cos\varphi$$

և $$\text{մակերես } A'D'C' = \text{մակերես } ADC \cdot \cos\varphi$$

Գումարելով այս հավասարությունները, ունենք

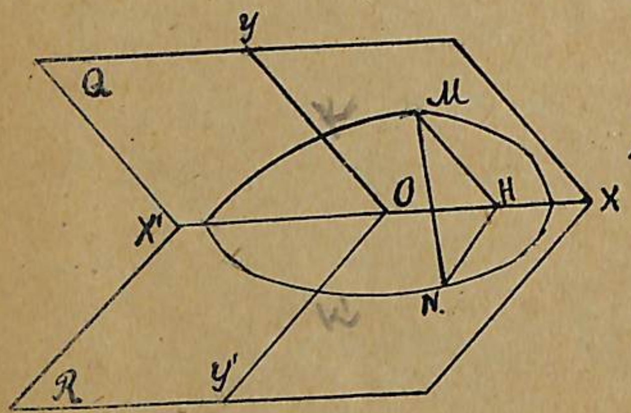
$$\text{մակերես } A'B'C' = \text{մակերես } ABC \cos\varphi \quad (8)$$

Դժվար չէ նույն թեորեմը ապացուցել կամավոր բազմանկյան վերաբերմամբ (որովհետև անկյունագծերի միջոցով բազմանկյունը կարելի է բաժանել յեռանկյունների, որոնց վերաբերմամբ թեորեմը ապացուցված է) և ան—

ասած կամավոր չափի հարթ պատկերի վերաբերմամբ, որով-
հետև այդպիսին չէր կարող է ընդունվել իբրև սահման ներ-
գծյալ բազմանկյունների:

Այդպիսով մենք կարող ենք ասել, որ
հարթ ձևի և նրա պրոյեկցիայի մակերեսների միջև
գոյություն ունի (8) առնչությունը:

9. Վերցնենք երկու հարթություն Q և R. նրանց հատ-
ման գիծը՝ XX' ընդունենք իբրև x-երի առանցք, և նրա O
կետը՝ կոորդինատների սկզբնա-
կետ: Այս Q և R հարթու-
թյունների վրա գծենք եր-
OY և OY' ուղղահայացների առանցք-
ներ ($OY \perp XX'$ և $OY' \perp XX'$):
O կետից, իբրև կենտրոնից Q
հարթության վրա գծենք մի
կիսաշրջանագիծ a շառավիղ-



Նկ. 14

ով և վերցնենք նրա կետերի պրոյեկցիաները R հար-
թության վրա: Ապացուցենք, որ այդ պրոյեկցիաները
գտնվում են էլիպսի վրա, այսինքն՝ շրջանագծի պրոյեկ-
ցիան կլինի էլիպս:

Վերցնենք շրջանագծի վրա մի կամավոր կետ $M(x,y)$,
որի $x = KM = OH$, իսկ $y = OK = HM$: M կետի
պրոյեկցիան դնենք — $N(x', y')$ է, որի աբսցիսը

$x' = K'N = OH$, իսկ օրդինատը հավասար է $HN = OK'$:
Դժվար չէ նկատել, որ M և N կետերի աբսցիսները հա-
վասար են, իսկ $y' = y\cos\varphi$, որտեղ φ-ն հարթությունների
կազմած անկյունն է:
M կետի կոորդինատները բավարարում են հետևյալ հավա-
սարմանը՝ $x^2 + y^2 = a^2$: Տեղադրելով x և y արժեքները՝
կստանանք

$$x'^2 + \left(\frac{y'}{\cos\varphi}\right)^2 = a^2 \quad \text{կամ}$$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2\cos^2\varphi} = 1 \qquad (9)$$

Այս հավասարումը ցույց է տալիս, որ $N(x'y')$
կետը գտնվում է մի էլիպսի վրա, որի առանցքներն են
$2a$ և $2a\cos\varphi$:

Եթե φ անկյունը ընտրենք այնպես, որ $\cos\varphi$ հա-
վասար լինի $\frac{b}{a}$, ապա (9) հավասարումը այսպես կար-
տագրվի՝ $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$:

Որից $2a$ և $2b$ առանցքներ ունեցող էլիպսը ներ-
կայացնում է այն շրջանի պրոյեկցիան, որի շառավիղը
հավասար է a, եթե էլիպսի և շրջանի հարթությունների
կազմած անկյան (φ) cosinus-ը հավասար է $\frac{b}{a}$:

(8) հավասարության հիման վրա մենք կարող ենք
ասել, որ էլիպսի մակերեսը հավասար է շրջանի մակերե-
սին՝ բազմապատկած $\cos\varphi$-ով =

$$\pi a^2 \cos\varphi = \pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi a b \ :$$

Այսպիսով՝ եռանկյան մակերեսը հավասար է Пab:

10. Դիցուք տարածության մեջ տված են $M_1(x_1, y_1, z_1)$ և $M_2(x_2, y_2, z_2)$, այս դեպքում դժվար չէ նկատել, որ M_1M_2 հատվածի պրոյեկցիան x-երի առանցքի վրա հավասար է $(x_2 - x_1)$-ի, y-ների առանցքի վրա — $(y_2 - y_1)$ և այլն. և եթե M_1M_2 կոորդինատային առանցքների հետ α, β, γ անկյուններ է կազմում, այն ժամանակ

$x_2 - x_1 = \overline{M_1M_2}\cdot\cos\alpha$, $y_2 - y_1 = \overline{M_1M_2}\cdot\cos\beta$, $z_2 - z_1 = \overline{M_1M_2}\cos\gamma$:

Բարձրացնելով այս հավասարությունները քառակուսի և գումարելով իրար, կստանանք երկու կետերի հեռավորության բանաձևը:

Հետևաբար երկու կետերի հեռավորության մեջ արտահայտված է նրա հատվածի պրոյեկցիաների միջոցով կոորդինատային առանցքների վրա:

Նման ձևով կարելի է վարվել հարթ պատկերի մակերեսի համար:

Իսկ, դիցուք ունենք մի հարթ պատկեր, որի մակերեսը հավասար է S-ի, և որի հարթության նորմալը առանցքների հետ α, β, γ անկյուններ է կազմում: Դժվար չէ նկատել, որ տված պատկերի հարթությունը (yz), (zx), (xy) հարթությունների հետ նույն α, β, γ (կամ նրանց լրացուցիչ) անկյուններ է կազմում: Հետևաբար, եթե S-ի պրոյեկցիան (yz), (zx) և (xy) հարթությունների վրա նշանակենք S_x, S_y և S_z, այն ժամանակ

$S_x = S\cos\alpha$, $S_y = S\cos\beta$, $S_z = S\cos\gamma$:

Այս հավասարություններից կստանանք

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$$

Վարժություններ:

1. Գտնել եռանկյան մակերեսը, որի գագաթներն են $A(x_1\, y_1\, z_1)$, $B(x_2\, y_2\, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$

Ցուցմունք. Այս գագաթների պրոյեկցիաները (xy) հարթության վրա կլինեն հետևյալ կետերը՝ $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$, $(x_3\, y_3)$:

Նման ձևով արտահայտված են պրոյեկցիաները մյուս կոորդինատային հարթությունների վրա:

2. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ և $M_2(x_2, y_2, z_2)$ կետերով անցնող ուղիղ գծի վրա գտնել $M(x, y, z)$ կետը այնպես, որ

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{m}{n},$$

որտեղ m և n տված թվեր են:

Պատասխան՝ $x = \frac{mx_1 + nx_2}{m+n}$, և այլն:

3. M_1M_2-ու առանցքների հետ կազմած անկյունների cosinus-ների հարաբերությունը հավասար է $l : m : n$: Գտնել այդ cosinus-ների արժեքները:

Ցուցմունք. Պետք է լուծել հետևյալ հավասարությունները՝

$$\frac{\cos\alpha}{l} = \frac{\cos\beta}{m} = \frac{\cos\gamma}{n}$$

և $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$:

Պատասխան՝

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \text{ և այլն}$$

Գլուխ Բ.

§ 3. Հավասարումների երկրաչափական նշանակությունը:

Ենթադրենք, երեք հավասարումները՝ $x=a$, $y=b$, $z=c$ ներկայացնում են մի կետ:

Ցույց տրված է, որ երեք հավասարում երեք անհայտներով՝ $F_1(x,y,z)=0$, $F_2(x,y,z)=0$ և $F_3(x,y,z)=0$, այս լուծելով այս հավասարումները, մենք կգտնենք մի, կամ մի քանի լուծում x, y և z-ի նկատմամբ, որոնցից յուրաքանչյուրը ներկայացնում է մի կետ: Հետևաբար երեք հավասարում երեք անհայտներով ներկայացնում են մի, կամ մի քանի կետ:

Այժմ տեսնենք, թե ինչ է ներկայացնում մի հավասարումը: Վերցնենք ամենապարզ հավասարումը՝ $x=a$ (կամ $y=b$, կամ $z=c$): Այս հավասարումը կարելի է հետևյալ ձևով արտագրել

$$x+0.y+0.z=a,$$

ենթադրում ենք այս հավասարման մեջ y-ին և z-ին կարելի է կամայական արժեքներ վերագրել, իսկ x-ը շարունակ հավասար է միշտ a-ի:

Դժվար չէ նկատել, որ (yz) հարթությանը զուգահեռ և նրանից a հեռավորության վրա գտնվող հարթությունը ներկայացնում է երկրաչափական տեղը նման պայմանի կետերի:

Ուրեմն $x=a$ հավասարումը ներկայացնում է մի հարթություն:

Վերցնենք հիմա ընդհանուր ձևով մի հավասարում երեք անհայտներով՝ $F(x,y,z)=0$:

Այստեղ անհայտներից երկուսին (որոնք y-ին և z-ին) կարելի է վերագրել կամայական արժեքներ և հաշվել x-ի համապատասխան արժեքը: Այսպիսով x, y, z-ի համար կգտնենք անթիվ թվով արժեքներ, որոնք բավարարում են տված հավասարմանը և անընդհատ փոփոխվում են: Անհայտների համապատասխան արժեքները այսինքն հավասարման յուրաքանչյուր լուծումը ներկայացնում է տարածության մեջ մի կետ, իսկ բոլոր լուծումները, կամ $F(x,y,z)=0$ հավասարումը ներկայացնի մի մակերևույթ:

Այստեղ անմիջապես հետևում է, որ երեք հավասարում ներկայացնում են կետեր, որոնք միաժամանակ երեք մակերևույթների վրա են գտնված, այսինքն մի քանի:

§ 4. Հարթության հավասարումը:

1. Այժմ ապացուցենք, որ յուրաքանչյուր առաջին աստիճանի հավասարումը ներկայացնում է հարթություն: Առաջին աստիճանի հավասարումը երեք անհայտներով ունի հետևյալ ընդհանուր ձևը

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

Պետք է ապացուցել, որ բոլոր այն կետերը, որոնց կոորդինատները բավարարում են (1) հավասարմանը, գտնվում են մի հարթության վրա:

(1) հավասարումը § 3-ի համաձայն ներկայացնում է մի մակերևույթ: Մնում է նկատել, որ յուրաքանչյուր այդ

որ՝ որևէ ուղիղ կետը գտնվում է (1)-ին հարթության վրա, որովհետև կետերով գտնվում է նույն հարթության վրա.

Իրոք, վերցնենք Q ուղիղ գծի $M_1(x_1, y_1, z_1)$ և $M_2(x_2, y_2, z_2)$ կետերը գտնվում են (1) հարթության վրա: Դա նշանակում է, որ M_1 և M_2 կետերի կոորդինատները բավարարում են (1) հավասարմանը, այսինքն՝

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

M_1M_2-ի վրա վերցնենք մի կամայական կետ $M(x, y, z)$ և դիցուք $\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{m}{n}$, այն ժամանակ, ինչպես գիտենք՝

$$x = \frac{mx_1 + nx_2}{m+n}, \quad y = \frac{my_1 + ny_2}{m+n}, \quad z = \frac{mz_1 + nz_2}{m+n} \qquad (3)$$

Տեղադրելով M կետի կոորդինատների արժեքները (3) հավասարություններից (1) հավասարման մեջ, կստանանք՝

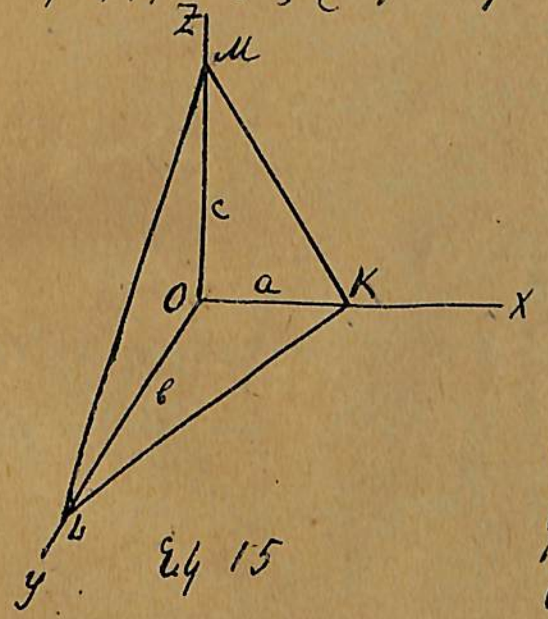
$$m(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) + n(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) = 0,$$

որի ձախ մասը, իրոք, հավասար է զերոյի շնորհիվ (2) հավասարությունների:

Հետևաբար, M_1M_2 ուղիղ գծի կամայական կետը (M) գտնվում է (1) հարթության վրա, եթե այդ ուղիղ գծի երկու կետերը (M_1 և M_2) գտնվում են նրա վրա, բաց դա նշանակում է, որ (1) հավասարումը ներկայացնում է մի հարթություն:

2. Հիմա ցույց տանք, թե ինչպես կոորդինատական առանցքներից կտրած հատվածներն արտահայտել հարթության հավասարման գործակիցներով:

Դրա համար բավական է գտնել հատման կետերը (1) հարթության և կոորդինատների առանցքների: x-երի առանցքն ունի այն հատկությունը, որ նրա կետերի y և z կոորդինատները հավասար են զերոյի: Հետևաբար, դնելով (1) հավասարման մեջ $y = 0$ և $z = 0$, կստանանք x կոորդինատը (նկ. 15) $x = OK = -\frac{D}{A}$:



Նկ 15

Նման ձևով կստանանք, որ y-ների առանցքից կտրած հատվածը

$OL = -\frac{D}{B}$, և $OM = -\frac{D}{C}$:

Ուրեմն, եթե կոորդինատների առանցքներից (1) հարթությամբ կտրած հատվածները նշանակենք a, b, c, այս դեպքում

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B} \quad \text{և} \quad c = -\frac{D}{C} \qquad (2):$$

Կարելի է լուծել և այս հակադարձ խնդիրը, այսինքն, եթե տրված են a, b և c հատվածները, ապա կարող ենք գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է K, L և M կետերով:

Իրոք, հարթության հավասարումն ունենալու համար, պետք է գտնենք նրա գործակիցներից որևէ երեքը, ...

նման հարթությունը ։ իսկ (2) հավասարություններից մեկ գալու են միայն այդ հարթությունները։ (2) հավասարություններից փոխարինելով A, B և C գործակիցները և տեղադրելով (1) հավասարման մեջ։

Ունենք՝

$$-\frac{Dx}{a} - \frac{Dy}{b} - \frac{Dz}{c} + D = 0$$

կամ

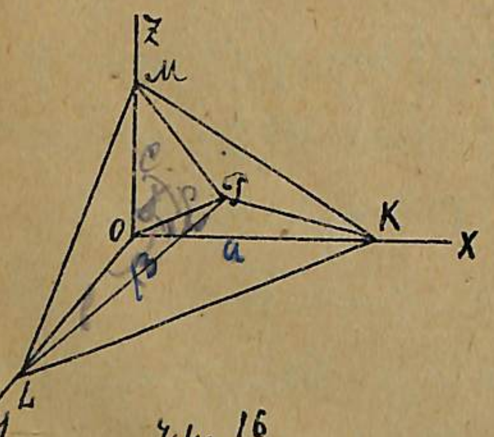
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (3)$$

Որին ասում են հատվածային հարթության հավասարում առանցքների հատվածներով։

3. Դիցուք տրված է հետևյալ հարթությունը՝

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (3)$$

Առանցքներից իջեցնենք նրա վրա OP ուղղահայացը (նկ 16)։



նկ. 16

Նշանակենք OP-ով կազմած անկյունները կոորդինատային առանցքների հետ (α, β, γ) և OP-ի հատվածը (p)։ OPK, OPL և OPM ուղղանկյուն եռանկյուններից (∠ OPK = 90°) ունենք

$$p = a\cos\alpha, \quad p = b\cos\beta, \quad p = c\cos\gamma \qquad (4)$$

կամ

$$\cos\alpha = \frac{p}{a}; \quad \cos\beta = \frac{p}{b}, \quad \cos\gamma = \frac{p}{c}$$

Քառակուսի բարձրացնելով այս հավասարությունները և գումարելով, կստանանք՝

$$1 = p^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

Հետևաբար

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \qquad (5)$$

իսկ

$$\cos\alpha = \frac{1}{a\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \quad \text{և այլն} \qquad (6)$$

Տեղադրելով (5) հավասարության մեջ a, b, c-ի նշանակությունները (2) հավասարություններից, կստանանք՝

$$p = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (5')$$

և

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \text{և այլն} \qquad (6')$$

Այսպիսով, երբ հարթության հավասարումը տրված է ընդհանուր ձևով ((1) հավասարումով), այն ժամանակ p, cos α և այլն, որոշվում են (5') և (6') հավասարություններով։

Կանոնական կոչվում է հարթության այն հավասարումը, որտեղ տրված են p և α, β, γ անկյունները և գրվում է նորմալ հավասարումը։

(4) հավասարություններից ունենք

$$a = \frac{p}{\cos\alpha}, \quad b = \frac{p}{\cos\beta}, \quad c = \frac{p}{\cos\gamma} :$$

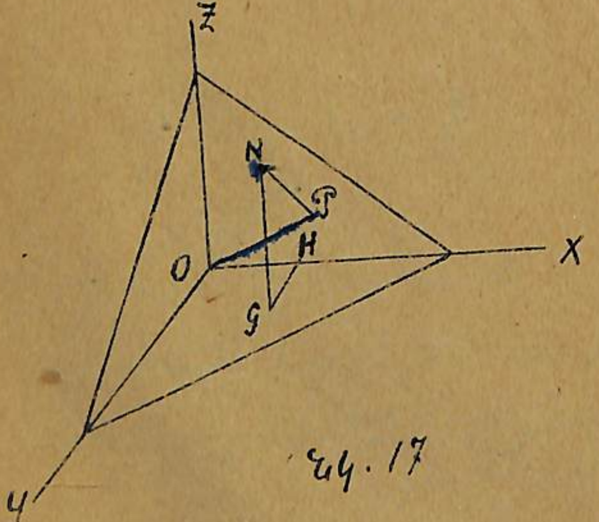
Տեղադրելով այդ արժեքները (3) հավասարման մեջ կստանանք՝

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (7)$$

Սրանով պարզվում է, որ ստացված այս հարթության հավասարումը, որի վրա իջեցրած ուղղահայացը հավասար է p-ի և այդ ուղղահայացի կազմած անկյունները կոորդինատային առանցքների հետ։

4. (7) հավասարումը կարելի է և անմիջապես ստանալ, եթե տրված են p, α, β, և γ :

Ենթադրենք, որ p, α, β, γ հայտնի են, վերցնենք մի կամայական կետ N (Գծ. 17):



Գծ. 17

N կետի կոորդինատները նշանակենք x, y, z, որ $x = OH$, $y = HG$ և $z = GN$: P և N կետերը միացնենք, OP ուղղահայաց է PN, որովհետև OP ուղղահայաց է հարթությանը:

Վերցնենք $OHGNP$ բեկյալ գծի պրոյեկցիան OP-ի վրա, որ հավասար է փակող գծին:

Կստանանք ունենք՝

$$OH \cdot \cos\alpha + HG \cdot \cos\beta + GN \cdot \cos\gamma + NP \cdot \cos 90^\circ = p$$

կամ $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (7)$

Հարթության հավասարման (7) ձևը կոչվում է նորմալ ձև:

(5') և (6') հավասարություններից հետևում է, որ հարթության հավասարումը ընդհանուր ձևից ((1) հավասարումը) նորմալի բերելու համար պետք է անդամ առ անդամ հավասարումը բաժանել $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$-ի վրա (նորմալ բաժանարար), կամ բազմապատկել $\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$-ով (նորմալ բազմապատկիչ):

Նորմալ բազմապատկիչի (կամ բաժանարարի) առջևի նշանը պետք է այնպես ընտրել, որ p-ն դրական արժեք ստանա:

Այսպիսով, եթե տրված է հարթության հավասարումը

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ապա նրան համապատասխան նորմալ հավասարումը կլինի՝

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z - \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

որտեղ

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

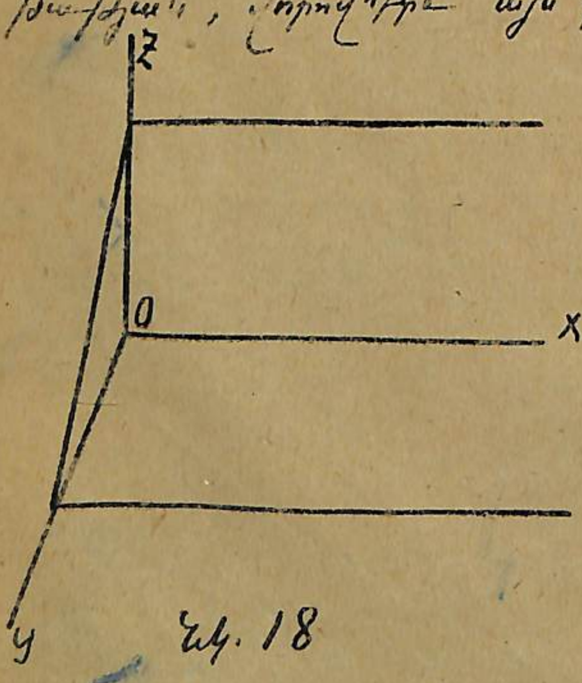
$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (5)$$

$$p = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

5. Հարթության հավասարման մասնավոր դեպքերը:

1) — Եթե $Ax + By + Cz + D = 0$ (1) հավասարման մեջ ազատ անդամը $D = 0$, ապա (1) հարթությունը անցնում է սկզբնակետով, որովհետև այս դեպքում հավասարումը բավարարվում է սկզբնակետի կոորդինատներով.

2) — Եթե նրա գործակիցներից որևէ մեկը հավասար է զերոյի, որինակ $A = 0$, ապա $By + Cz + D = 0$ ներկայացնում է x-երի առանցքին զուգահեռ մի հարթություն, որովհետև այս դեպքում x-երի առանցքից կտրած հատվածը $\left(a = -\frac{D}{A}\right)$ հավասար կլինի ∞ (տես (2) հավ.).



Գծ. 18

Նման ձևով կապացուցվի, որ $Ax + Cz + D = 0$ (կամ $Ax + By + D = 0$) ներկայացնում է զուգահեռ հարթություն y-երի (կամ z-երի) առանցքին:

3) — Եթե հարթության հավասարման մեջ բացակայում են

երկու ընթացիկ կոորդինատներ, որինակ $A = 0$ և $B = 0$, ապա

$$Cz + D = 0$$

ներկայացնում է մի հարթություն, որը զուգահեռ է թե x-երի և թե y-երի առանցքին. Հետևաբար նա զուգահեռ է (xy) հարթության և հեռավորությունը (xy)-ից հավասար է $-\frac{D}{C}$:

Նմանապես $Ax + D = 0$ (կամ $By + D = 0$) հարթությունը զուգահեռ է (yz) (կամ (xz)) հարթությանը և հեռավորությունը նրանից հավասար է $-\frac{D}{A}$ (կամ $-\frac{D}{B}$):

4). Եթե բացակայում են ընթացիկ կոորդինատներից մեկը և ազատ անդամը, որինակ $A = 0$ և $D = 0$, ապա

$$By + Cz = 0$$

ներկայացնում է մի հարթություն, որն անցնում է սկզբնակետով և զուգահեռ է x-երի առանցքին (տես 1) և 2) դեպքերը), հետևաբար նա անցնում է x-երի առանցքով:

Նույնպես և $Ax + Cz = 0$ հարթությունն անցնում է y-երի առանցքով, իսկ $Ax + By = 0$ անցնում է z-երի առանցքով:

5). Եթե ազատ անդամից բացի, զերոյի են հավասար և երկու գործակիցները, որինակ

$$D = 0,\ B = 0 \text{ և } C = 0,$$

ապա $Ax = 0$ կամ $x = 0$ հավասարումը ներկայացնում է այն հարթությունը, որի կետերի x կոորդինատը հավասար է զէրոյի, իսկ y և z կոորդինատները կարող են կամաւոր արժէք ունենալ: Այսինքն $x = 0$ հաւասարումը ներկայացնում է (yz) հարթութիւնը:

Նմանապէս և $y = 0$ (կամ $z = 0$) հաւասարումը կը լինի (xz) (կամ (xy)) հարթութեան հաւասարումը:

6). Վերջապէս, եթէ բոլոր գործակիցները բացի ազատ անդամից հաւասար են զէրոյի, այս

$$D = 0 \text{ կամ } 1 = 0$$

հաւասարումը կարելի է ընդունել իբրև անվերջ հեռու հարթութեան հաւասարումը:

Իրօք, ընդգծեցինք որ $Ax + By + Cz + D = 0$ հարթութեան կոորդինատային առանցքներից կտրած a, b, c հատուածները, փոխում հաւասար են՝

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}.$$

Հետևաբար, եթէ $A = B = C = 0$, այս a, b, c անվերջ մեծ են, այսինքն եթէ A, B, C գործակիցները չքում են զէրոյի, հարթութիւնը անվերջ հեռանում է և $D = 0$ ներկայացնում է անվերջ հեռու հարթութիւնը:

Խնդիրներ

Խնդիր 1. Գտնել $Ax + By + Cz + D = 0$ և $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ հարթութիւնների կազմած անկիւնը:

Երկու հարթութիւնների կազմած անկիւնը հաւասար է նրանց նորմալների (ուղղահայացների) կազմած անկեան:

Առաջինի առաջին հարթութեան նորմալը h, իսկ երկրորդինը h': Այս անկիւնից h-ով կազմած անկիւնները կոորդինատային առանցքների հետ α, β, γ, իսկ h'-ի կազմած անկիւնները նոյն առանցքների հետ α', β', γ', ունենք

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\alpha' = \frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \quad \text{և այլն:}$$

Եթէ նշենք h և h'-ով (կամ երկու հարթութիւններով) կազմած անկիւնը φ անունով, այս ունենք

$$\cos\varphi = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

Որոնք, այսպէս է արտայայտուած երկու հարթութիւնների կազմած անկեան cosinus-ը.

Այս հաւասարութիւնից անմիջապէս երևում է, որ երկու հարթութեան միմեանց ուղղահայաց լինելու պայմանն է, եթէ

$$AA' + BB' + CC' = 0$$

իսկ զուգահեռ լինելու պայմանն է, այսինքն, որ

$\cos\varphi = 1$. այսինքն

$$AA' + BB' + CC' = \pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,.\,\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}\,.$$

Քառակուսի բարձրացնելով երկու մասերը և կրճատելով կստանանք

$$(AB')^2 + (BA')^2 + (AC')^2 + (A'C)^2 + (BC')^2 + (B'C)^2 -$$

$$- 2AA'BB' - 2AA'CC' - 2BB'CC' = 0 \quad \text{կամ}$$

$$(AB' - A'B)^2 + (AC' - A'C)^2 + (BC' - B'C)^2 = 0$$

բայց այս հավասարությունը տեղի կունենա միայն այն դեպքում, երբ

$$AB' - A'B = 0,\quad AC' - A'C = 0 \quad \text{և} \quad BC' - B'C = 0$$

այսինքն

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

Ուրեմն, երկու հարթություն զուգահեռ են, երբ նրանց կոորդինատների գործակիցները համեմատական են.

Զուգահեռության պայմանը կարելի է և այլ կերպով գտնել:

Իրոք, առաջին հարթությունը առանցքների վրա կտրում է հետևյալ հատվածները

$$a = -\frac{D}{A},\quad b = -\frac{D}{B},\quad c = -\frac{D}{C}$$

իսկ երկրորդը

$$a' = -\frac{D'}{A'},\quad b' = -\frac{D'}{B'},\quad c' = -\frac{D'}{C'}$$

Երկու հարթությունները զուգահեռ կլինեն, երբ

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Այս հավասարություններում նախորդների տեղադրելով կարող

կունենք այսպես

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

Խնդիր 2.

Տրված կետով $(x'y'z')$ տանել տրված հարթությանը զուգահեռ հարթություն:

Ենթադրենք տրված հարթությունն է $Ax + By + Cz + D = 0$:

Մի հարթություն այն դեպքում զուգահեռ է, երբ փոփոխականների գործակիցները համեմատական են. ուստի

$Akx + Bky + Ckz + D = 0$ հարթությունը, որտեղ k-ն կամայական թիվ է զուգահեռ է տրվածին: Բաժանելով վերջին հավասարումը k-ի և $\frac{D}{k}$ անվանելով D'. կստանանք

$$Ax + By + Cz + D' = 0$$

Ստացվեց այսպիսով մի հարթություն, որը զուգահեռ է տրվածին: Այժմ պետք է D'-ը այնպես ընտրել, որ այդ հարթությունը անցնի $(x'y'z')$ կետով. այսինքն D'-ը պիտի բավարարի հետևյալ հավասարմանը

$$Ax' + By' + Cz' + D' = 0$$

Որոշելով D'-ի արժեքը այս հավասարումից և տեղադրելով (կամ հանելով այս հավասարումը նախորդից), կստանանք

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0,$$

որն անցնում է $(x'y'z')$ կետով և զուգահեռ է տրված հարթությանը:

Խնդիր 3. Գտնել տրված $M(x'y'z')$ կետի հեռավորությունը դված հարթությունից:

Դիցուք դված հարթությունն է

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

Տված կետով տանենք դրան զուգահեռ հարթություն:

Նրա հավասարումը կլինի

$$(x-x')\cos\alpha + (y-y')\cos\beta + (z-z')\cos\gamma = 0$$

կամ

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p' = 0$$

որ $p' = x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma$:

Կետի (x', y') կետի հեռավորությունը անվանենք h, այդ h հավասար կլինի $\pm(p'-p)$, որոնց առաջին նշանը համապատասխանում է այն դեպքի համար, երբ $p' > p$, այսինքն՝ երբ տված կետը և սկզբնակետը տված հարթության նկատմամբ գտնվում են հակառակ կողմերում. Երկրորդ նշանը համապատասխանում է հակառակ դեպքի համար:

Տեղադրելով p'-ի արժեքը, ստանում ենք

$$h = \pm(x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p):$$

Այսպիսով, տված կետի հեռավորությունը տված հարթությունից ստանալու համար, պետք է հարթության հավասարման մեջ ընթացիկ կոորդինատները փոխարինել տված կետի կոորդինատներով, երբ միայն հարթության հավասարումը նորմալ ձևով է տված:

Պարզ է, որ եթե հարթության հավասարումը տված է ընդ-

հանուր ձևով, այդ պետք է բերել նորմալ ձևի, որից հետո պետք է ընթացիկ կոորդինատները փոխարինել տված կետի կոորդինատներով: Որպես (x', y') կետի հեռավորությունը (h) $Ax + By + Cz + D = 0$ հարթությունից հավասար է

$$h = \pm\frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Խնդիր 4. Գտնել այն հարթությունը, որը անցնում է երեք տված կետերով (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3):

Դիցուք այդ հարթության հավասարումն է

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

որի գործակիցները դեռ հայտնի չեն, բայց տված կետերը պետք է գտնվեն այդ հարթության վրա:

Հետևաբար՝

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$
$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$$
$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0$$

որոշելով այդ հավասարումներից A, B, C և D անհայտների հարաբերությունը և տեղադրելով նախորդ հավասարման մեջ, կստանանք որոնած հարթության հավասարումը. բայց ավելի հարմար է և ավելի կարճ լուծել: Իրոք, դիցուք (x, y, z) որոնած հարթության կամայական կետն է: Այն ժամանակ, բացի վերոհիշյալ երեք հավասարումներից պետք է գրել անմիջապես և հետևյալ հավասարումը՝

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Այսպիսով ստացվում է չորս համասեռ հավասարում-
ների սիստեմ, որը համատեղ լինելու համար պետք է որ
անհայտ նրանց հավասարությունը՝

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Սա հենց կլինի որոնած հարթության հավասարումը: Հեր-
ցեպե այս հարթությանն անցնի և չորրորդ տված կետով
(x_4, y_4, z_4), անհրաժեշտ է, որ նրա կոորդինատները բավա-
րարեն նախորդ հավասարմանը, այսինքն պետք է անհայտ
նրանց հավասարությունը՝

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Որեմն, չորս տված կետերը (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) և (x_4, y_4, z_4) կգտնվեն միևնույն հարթության
վրա, եթե նրանց կոորդինատները բավարարեն նախորդ հա-
վասարմանը:

Խնդիր 5. Գտնել տված երեք հարթությունների հատ-
ման կետը:

Դիցուք տված հարթություններն են՝

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

Հատման կետի կոորդինատները գտնելու համար, պետք է լու-
ծել տված երեք հավասարումների սիստեմը:

Լուծելով, կստանանք

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D} \quad և \quad z = \frac{D_z}{D},$$

որտեղ

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad D_z = -\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix},$$

$$D_x = +\begin{vmatrix} B_1 & C_1 & D_1 \\ B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}, \quad D_y = +\begin{vmatrix} A_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}$$

Ընդհանրապես երեք հարթություն ունեն մի հատման կետ
և տված հարթությունները հատվում են յուրահատուկ անկյունում:

Բայց կարող են լինել անվերջ և հետևյալ մասնավոր դեպքերը:

ա) $D = 0$, իսկ D_x, D_y և D_z զրոյից տարբեր են:

Այս դեպքում $x = \infty$, $y = \infty$, $z = \infty$, այսինքն հար-
թությունների հատման կետը անվերջ հեռու է. հետևաբար
հարթությունները զուգահեռ են միևնույն ուղղի ...

բ) $D = 0$, $D_x = D_y = D_z = 0$

Այս դեպքում հարթութ. չորս անցնում է · այս նշանակում է, որ չորս հարթությունները մի ընդհանուր ուղիղ գծի անցնում, որը կարող է անվերջ հեռու լինել, այսինքն հարթությունները միմյանց զուգահեռ են:

դ.) $A_1 : B_1 : C_1 : D_1 = A_2 : B_2 : C_2 : D_2 = A_3 : B_3 : C_3 : D_3$

Այս դեպքում երեք տարբեր հարթություններ չունենք, այլ միայն համընկնում են, որովհետև երեք հավասարումն էլ միևնույն հարթություն են ներկայացնում:

Խնդիր 6. Ի՞նչ դեպքում չորս հարթություն մի հասարակ կետ ունեն:

Տրված հարթություններն են՝

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$
$$A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0$$
$$A_4 x + B_4 y + C_4 z + D_4 = 0$$

Որպեսզի այս չորս հարթություններն մի հասարակ կետ ունենան, անհրաժեշտ է, որ երեք հարթությունների հատման կետը անցնի և չորրորդով, այսինքն երեք (որոնց սահմանն) հավասարումների լուծումը պետք է բավարարի և չորրորդին: Հետևաբար պետք է գրել անհրաժեշտ հավասարությունը՝

$$A_4\cdot\frac{D_x}{D} + B_4\cdot\frac{D_y}{D} + C_4\cdot\frac{D_z}{D} + D_4 = 0$$

կամ

$$-A_4\begin{vmatrix} B_1 & C_1 & D_1 \\ B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} + B_4\begin{vmatrix} A_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} -$$

$$-C_4\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix} + D_4\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

Բայց այս հավասարության ձախ մասը ներկայացնում է տրված հավասարումների բոլոր գործակիցներից կազմված դետերմինանտը:

Ուրեմն չորս հարթություն կանցնեն մի ընդհանուր հասարակ կետով, եթե

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0$$

Խնդիր 7. Գտնել հատման կետը $Ax + By + Cz + D = 0$ հարթության և $M_1(x_1\, y_1\, z_1)$ և $M_2(x_2\, y_2\, z_2)$ կետերով անցնող ուղիղ գծի: Գտնել նաև այն հարաբերությունը, որով M_1M_2 հատվածը բաժանվում է այն կետով:

Եթե այդ հարաբերությունը անվանենք $m : n$, իսկ հատման կետը — $M(x, y, z)$, այդ դեպքում

$$x = \frac{mx_1 + nx_2}{m+n}, \quad y = \frac{my_1 + ny_2}{m+n}, \quad z = \frac{mz_1 + nz_2}{m+n}$$

Բայց վերջինիս կարող է լինել գտնվում է տրված հար-
թության վրա, որի կոորդինատները բավարարում են
$Ax + By + Cz + D = 0$ հավասարմանը, այսինքն՝ պետք
դրվի անհրաժեշտ հետևյալ հավասարությունը՝

$$A\frac{mx_1+nx_2}{m+n} + B\frac{my_1+ny_2}{m+n} + C\frac{mz_1+nz_2}{m+n} + D = 0$$

կամ

$$m(Ax_1+By_1+Cz_1+D) + n(Ax_2+By_2+Cz_2+D) = 0:$$

Լուծելով այս հավասարումը, որոնելի՝ հարաբերության նկատմամբ $\frac{m}{n}$՝

$$\frac{m}{n} = -\frac{Ax_2+By_2+Cz_2+D}{Ax_1+By_1+Cz_1+D}:$$

Տեղադրելով $\frac{m}{n}$-ի արժեքը x, y, z-ի (հատման կետի) արտահայտությունների մեջ, կստանանք հատման կետի կոորդինատները:

Խնդիր 8. Գտնել այն հարթությունը, որն անցնում է տրված $M(x', y', z')$ կետով և տրված երկու հարթությունների հատման գծով:

Դիցուք տրված հարթություններն են՝

$$U_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$U_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

որտեղ U_1 և U_2-ով նշանակված են հավասարումների ձախ մասերը:

Դժվար չէ նկատել, որ $U_1 + kU_2 = 0$ հավասարումը, որ

k-ն անորոշ, բայց հաստատուն պարամետր է, ներկայացնում է հարթություն և այդ հարթությունն անցնում է տրված հարթությունների ($U_1 = 0$ և $U_2 = 0$) հատման գծով:

Իրոք, $U_1 + kU_2 = 0$ փոփոխականների նկատմամբ առաջին աստիճանի է, քանի որ k հաստատուն պարամետր է. հետևաբար այդ հավասարումը ներկայացնում է հարթություն: Բացի այդ, դժվար չէ տեսնել, որ միաժամանակ $U_1 = 0$ և $U_2 = 0$ հարթությունների վրա գտնվող կետը (այսինքն՝ որի կոորդինատները բավարարում են $U_1 = 0$ և $U_2 = 0$ հավասարումներին), նաև գտնվում է և $U_1 + kU_2 = 0$ հարթության վրա (բավարարում է $U_1 + kU_2 = 0$ հավասարմանը):

Այսպիսով $U_1 + kU_2 = 0$ հավասարումը, որ k-ն անորոշ է և հաստատուն, ներկայացնում է հարթություն, որն անցնում է $U_1 = 0$ և $U_2 = 0$ հարթությունների հատման գծով:

Որպեսզի տրված խնդիրը լուծած լինենք, մնում է k-ն այնպես ընտրել, որ $U_1 + kU_2 = 0$ անցնի և $M(x', y', z')$ կետով: Դրա համար անհրաժեշտ է, որ M կետի կոորդինատները բավարարեն

$$U_1 + kU_2 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

այսինքն՝ պետք դրվի անհրաժեշտ հետևյալ հավասարությունը՝

$$A_1x'+B_1y'+C_1z'+D_1+k(A_2x'+B_2y'+C_2z'+D_2)=0,$$

որտեղից գտնում ենք k-ի արժեքը՝

$$k=-\frac{A_1x'+B_1y'+C_1z'+D_1}{A_2x'+B_2y'+C_2z'+D_2}:$$

Տեղադրելով k-ի արժեքը $U_1+kU_2=0$ հավասարման մեջ, ստանում ենք՝

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1-\frac{A_1x'+B_1y'+C_1z'+D_1}{A_2x'+B_2y'+C_2z'+D_2}(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

որը կլինի որոնած հարթության հավասարումը:

Խնդիր 9. Գտնել երկու հարթությունների կազմած անկյունների կիսող-հարթությունները:

Դիցուք տված հարթություններն են՝

$$U_1=A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

և

$$U_2=A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0:$$

Կիսող հարթությունները անցնում են նույն հարթման գծով, ուստի նրանց հավասարումը կունենա հետևյալ ձևը՝

$$U_1+kU_2=0:$$

Այժմ պետք է k-ն այնպես ընտրել, որ $U_1+kU_2=0$ լինի կիսող-հարթության հավասարումը: Այս նպատակով գտնենք k-ի երկրաչափական նշանակությունը: k-ի համար ունենք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$k=-\frac{U_1}{U_2}=-\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}$$

կամ, բազմապատկելով հավասարության երկու մասն և

$$\frac{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$$ -ով,

$$-k\cdot\frac{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}:\frac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

կամ

$$-k\frac{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=h_1:h_2,$$ որ

h_1 և h_2 (x,y,z) կետի հեռավորություններն են $U_1=0$ և $U_2=0$ հարթություններից:

Ուրեմն

$$k=-\frac{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\cdot\frac{h_1}{h_2}:$$

Եթե $(x.y.z)$ կետը գտնվելու է կիսող-հարթության վրա, այսինքն՝ $U_1+kU_2=0$ պետք է ներկայացնի այդ հարթությունը, ապա $h_1=\pm h_2$, և

$$k=\pm\frac{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}:$$

Հետևաբար կիսող հարթությունների հավասարումը կլինի՝

$$U_1\pm\frac{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}U_2=0:$$

Վարժություններ:

1. Հետևյալ կետերից $(0,1,3)$, $(-1,2,1)$, $(3,0,-2)$, $(2,1,0)$ որոնք գտնվում են այս հարթության վրա

$$3x - y + 10z - 5 = 0 :$$

Պատասխան՝ $(-1, 2, 1)$ և $(2, 1, 0)$ կետերը:

2. Ինչ հատվածներ են կտրում կոորդինատային առանցքներից հետևյալ հարթությունները՝

$$1).\ -2x - 3y + 5z - 12 = 0$$
$$2).\ -x + 2y - 3z - 6 = 0$$
$$3).\ -12y - 5z = 16$$
$$4).\ -2x - 13z = 1$$

Ներկայացնել այդ հավասարումները

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

ձևով:

Պատասխան

$$1).\ a = 6,\ b = -4,\ c = \frac{12}{5}$$
$$\frac{x}{6} - \frac{y}{4} + \frac{5z}{12} = 1.$$
$$3).\ a = \infty,\ b = \frac{4}{3},\ c = \frac{16}{5}$$
$$\frac{3y}{4} - \frac{5z}{16} = 1 :$$

4) Հարթությունը զուգահեռ է X-երի առանցքին:

3. Գտնել սկզբնակետի հեռավորությունը հետևյալ հարթություններից՝

$$1).\ x + 2y - 2z + 13 = 0$$
$$2).\ 3x - 2y + z - 1 = 0 :$$

Ինչ անկյուններ են կազմում այս հարթությունների ուղղահայացները կոորդինատային առանցքների հետ:

Պատասխան

$$1).\ p = \frac{13}{3} \cdot \cos\alpha = -\frac{1}{3},\ \cos\beta = -\frac{2}{3},\ \cos\gamma = -\frac{2}{3}$$

3. Գրել այն հարթության հավասարումը, որը անցնում է տրված երեք կետերով՝

$$1).\ (1, 0, -2),\ (-2, 1, 0),\ (3, 0, 1),$$
$$2).\ (-3, -1, 0),\ (1, 2, 1),\ (0, 1, -1),$$
$$3).\ (-1, 0, 2),\ (0, 3, 0),\ (1, 0, 2) :$$

4. Գտնել հետևյալ հարթությունների հատման կետերը

$$1).\ 2y - 3z - 4 = 0$$
$$x + 2y + z - 12 = 0$$
$$3x - y + 2z + 1 = 0$$
$$2).\ 4x - y + 2z - 2 = 0$$
$$2y + z = 0$$
$$3x - 2z + 1 = 0$$

5. Գրել այն հարթությունը, որը անցնում է $(2, -1, 3)$ կետով և զուգահեռ է $3x + y - 4z - 2 = 0$ հարթությանը:

Պատասխան՝ $3(x-2) + (y+1) - 4(z-3) = 0$:

6. Գտնել այն հարթությունը, որը անցնում է $(3, 1, 2)$ և $(5, 1, -1)$ կետերով և ուղղահայաց է

$$2x - 3y + z - 4 = 0$$

հարթությանը:

[illegible] տարածության կետով անցնող հարթության հավա-

[illegible]

սարումը կլինի

$$A(x-3)+B(y-1)+C(z-2)=0$$

Այդ հարթությունը պետք է անցնի նաև $(5, 1, -1)$ կետով. ուրեմն՝

$$2A-3C=0$$

բայց այդ նա պետք է լինի ուղղահայաց տրված հարթությանը. Հետևաբար՝

$$2A-3B+C=0$$

Այս երեք համասեռ հավասարումների սիստեմից ստանում ենք

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

որը և կլինի որոնած հարթության հավասարումը:

7. Գտնել հետևյալ հարթություններով կազմված անկյունների կիսող-հարթությունների հավասարումները՝

1) $x=0$, $y=0$ 2) $2x-z=4$, $3x+2y-z=1.$

8. Ինչ հարաբերությամբ է բաժանում

$$4x-2y+z-5=0$$

հարթությունը հետևյալ կետերով սահմանված հատվածը՝ $(1,0,3)$ և $(1,-1,2)$:

9. Գտնել այն հարթությունները, որոնք զուգահեռ են

$x-3y+2z-1=0$ հարթությանը և գտնվում են կոորդինատների սկզբնակետից հեռավոր 2-ով:

10. Գտնել հետևյալ զուգահեռ հարթությունների հեռավորությունները միմյանցից

$$2x-y+2z+4=0$$
$$2x-y+2z-5=0$$
$$2x-y+2z=0$$
$$2x-y+2z-1=0$$

11. Գտնել հետևյալ հարթություններով կազմված անկյունը՝

$$x+2y-z-7=0$$
$$5x-y+2z+5=0$$

Գլուխ Գ.

Ուղիղ գիծ

§5. Ուղիղ գծի հավասարումը

1. Ուղիղ գծի դիրքը տարածության մեջ որոշվում է, եթե տրված են նրա վրայի երկու կետերը. Հետևապես կարող ենք գտնել ուղիղ գծի հավասարումը, եթե տրված են նրա երկու կետերը:

Ենթադրենք, որ մի որևէ ուղիղ գիծ անցնում է $M_1(x_1 y_1 z_1)$ և $M_2(x_2 y_2 z_2)$ կետերով: Վերցնենք այդ ուղիղ գծի վրա մի կամայական կետ $M(x, y, z)$, որը M_1M_2 հատվածը բաժանում է $m:n$ հարաբերությամբ: Ինչպես գիտենք, այդ դեպքում

$$x = \frac{mx_1 + nx_2}{m+n}, \quad y = \frac{my_1 + ny_2}{m+n}, \quad z = \frac{mz_1 + nz_2}{m+n}$$

Այդ հավասարություններից անմիջապես ստանում ենք

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{z - z_1}{z_2 - z} = \frac{n}{m}$$

կամ

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{n}{m+n}$$

Այսպիսով ստանում ենք, որ M_1 և M_2 կետերով անցնող ուղիղ գծի կամայական կետի կոորդինատները բավարարում են հետևյալ երկու հավասարումներին

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (1)$$

Այդ պատճառով (1) հավասարումները կոչվում են M_1M_2

ուղիղ գծի հավասարումներ:

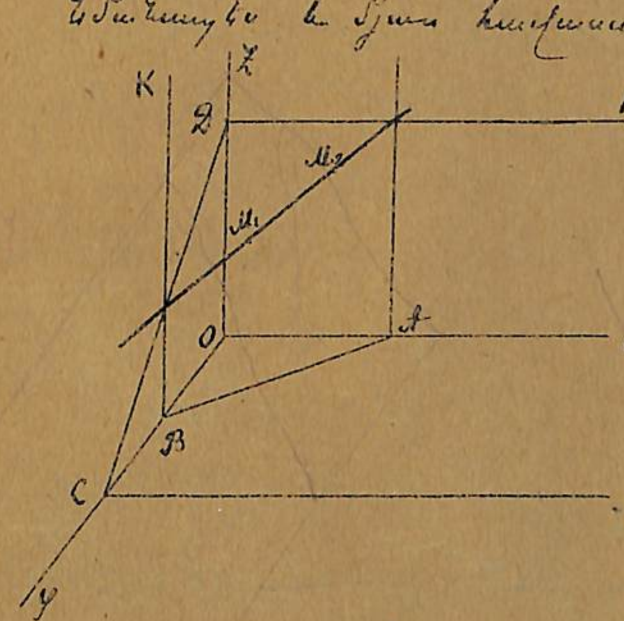
Այժմ ցույց տանք, թե հավասարումներից յուրաքանչյուրն առանձին ինչ է ներկայացնում:

Առաջին հավասարումը

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (2)$$

որի մեջ կոորդինատներից միայն երկուսն են մասնակցում, ներկայացնում է մի հարթություն. և որովհետև այդ հավասարումը z կոորդինատը չի պարունակում, այդ հարթությունը զուգահեռ է z-երի առանցքին (Նկ. 19. ABK հարթ.)

Նմանապես և միւս հավասարումը



Նկ. 19

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (3)$$

ներկայացնում է x-երի առանցքին զուգահեռ մի հարթություն (CDL):

Եթե մենք վերցնենք երրորդ հավասարումը, որը ստացվում է —

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} : \qquad (4)$$

Սա ներկայացնում է y-երի առանցքին զուգահեռ մի հարթություն:

Այսպիսով մենք տեսանք, որ այդ երեք հավասարումներից որոնց բավարարում են M_1M_2 գծի կամայական կետի կոորդինատները, առանձին-առանձին ներկայացնում են այդ հարթությունները:

որոնք անցնում են $M_1 M_2$ ուղիղ գծով և ուղղահայաց են կոորդինատների առանցքներին:

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ հավասարումը (xy) հարթության վրա ներկայացնում է ուղիղ գիծ. այդ գիծը — ABK և (xy) հարթությունների հատման գիծն է (AB):

Նմանապես և մյուս հավասարումը $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ հարթության վրա ներկայացնում է հատման գիծը (yz) և CDE հարթությունների:

Հետևաբար կարող ենք ասել, որ AB, CD ուղիղ գծերը ներկայացնում են $M_1 M_2$ գծի ուղղանկյուն պրոյեկցիաները (xy), (yz) հարթությունների վրա: Նմանապես և (4) հավասարումը ներկայացնում է $M_1 M_2$ գծի պրոյեկցիան (xz) հարթության վրա:

2. Բայց և գիտենք (տես 11. (3))

$x_2-x_1 = d\cos\alpha$, $y_2-y_1 = d\cos\beta$, $z_2-z_1 = d\cos\gamma$,

որ d-ն $M_1 M_2$ հատվածի երկարությունն է, իսկ α, β, γ անկյունները — $M_1 M_2$-ով կոորդինատային առանցքների հետ կազմած անկյուններն են: Այդ հավասարությունների շնորհիվ (4) հավասարումները կարելի է այսպես գրել

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha} = \frac{y-y_1}{\cos\beta} = \frac{z-z_1}{\cos\gamma} \qquad (5)$$

Որեմն, երբ տրված է ուղիղ գծի կետերից մեկը (x_1, y_1, z_1) և այն անկյունները, որ նա կազմում է առանցքների հետ, այդ գծի հավասարումները կլինեն (5) հավասարումները:

3. Այժմ ապացուցենք, որ երկու առաջին աստիճանի հավասարումները միասին վերցրած մի ներկայացնում ուղիղ գիծ:

Ենթադրենք տրված են երկու հավասարումները

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \qquad (6)$$

Այն կետերը, որոնց կոորդինատները բավարարում են այս երկու հավասարումներին, միաժամանակ գտնվում են երկու հարթությունների վրա, հետևաբար գտնվում են մի ուղիղ գծի վրա:

Որեմն յուրաքանչյուր երկու հավասարում (որոնց կոորդինատների նկատմամբ առաջին աստիճանի) ներկայացնում են ուղիղ գիծ:

(6) հավասարումները կարելի է այս ձևով գրել՝

իբրև $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 - K_1 (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$

և $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 - K_2 (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0 \quad (7)$

հարթությունները անցնում են (6) հարթությունների հատման գծով. հետևաբար նրանք միասին նույն ուղիղ գիծն են ներկայացնում, ինչ որ (6) հավասարումները:

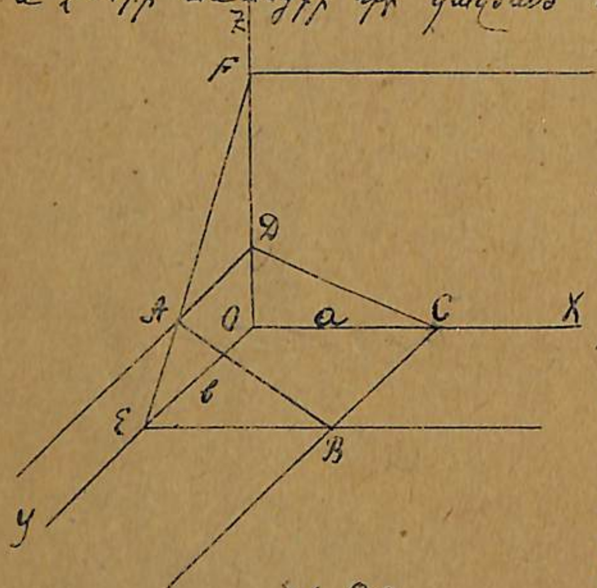
Բայց ընդունելով $K_1 = \frac{B_1}{B_2}$ և $K_2 = \frac{A_1}{A_2}$, կարող ենք (7) հավասարումները այսպես ներկայացնել

$$x = mz + a$$
$$y = nz + b \qquad (8)$$

որտեղ $m = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}$, $a = \frac{B_1 D_2 - B_2 D_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}$,

$$n = \frac{A_1C_1 - A_2C_1}{A_2B_1 - A_2B_2}, \qquad b = \frac{A_1D_2 - A_2D_1}{A_2B_1 - A_1B_2}:$$

(8) հավասարումներից առաջինը - պարամետրային մեջ ներկայացնում է մի հարթություն, որը զուգահեռ է y-ների առանցքին, իսկ (XZ) հարթության վրա — նա ներկայացնում է մի ուղիղ գիծ (CD), որը X-երի առանցքից կտրում է a հատված (OC=a) և Z-երի առանցքի հետ կազմած անկյան tg-ը հավասար է m-ի:



նկ 20

Երկրորդ հավասարումը-պարամետրային մեջ ներկայացնում է մի հարթություն, որը զուգահեռ է X-երի առանցքին, իսկ (yZ) հարթության վրա — նա ներկայացնում է մի ուղիղ գիծ (EF), որը y-ների առանցքից կտրում է b հատված (OE = b) և Z-երի առանցքի հետ կազմած անկյան tg-ը հավասար է n-ի:

Ուրեմն, (8) հավասարումներով ներկայացրած հարթությունները նույն ուղիղ գծով են անցնում, ինչ որ (6) հարթությունները, հետևաբար և նույն ուղիղ գիծն են ներկայացնում:

(8) հավասարումները հարթության վրա (առաջինը (xZ), երկրորդը (yZ) հարթության վրա) նույնպես որոշվում են պրոյեկցիաներ են՝ (8) կամ (6) ուղիղ գծի (XZ) և (yZ) հարթությունների վրա:

(8) հավասարումները կարելի է և այսպես գրել

$$\frac{x-a}{m} = z \quad և \quad \frac{y-b}{n} = z$$

կամ

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-0}{1} \qquad (9)$$

Այս հավասարումներին բավարարում են $x=a, y=b, z=0$, հետևաբար (9) ուղիղ գիծն անցնում է $N(a, b, 0)$ կետով:

Եթե $M(x, y, z)$ այդ ուղիղ գծի կետերից մեկն է, ապա $x-a$, $y-b$, $z-0$ կլինեն MN հատվածի պրոյեկցիաներ կոորդինատային առանցքների վրա. հետևաբար՝

$$x-a = MN\cos\alpha, \quad y-b = MN\cos\beta, \quad z = MN\cos\gamma$$

կամ

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma} \qquad (10)$$

որտեղ α, β, γ այն անկյուններն են, որ MN-ը կազմում է առանցքների հետ:

(9) և (10) հավասարությունների համեմատությունից ունենք՝

$$\frac{m}{\cos\alpha} = \frac{n}{\cos\beta} = \frac{1}{\cos\gamma}$$

կամ (11)

$$m : n : 1 = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$$

Ուրեմն, (9) հավասարումների հայտարարները համեմատական են ուղիղ գծի առանցքների հետ կազմած անկյունների cosinus-ների հետ.

Եթե առաջինը կարելի է ընդհանրացնել և գրել

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{l} \qquad (12)$$

հավասարումները ներկայացնում են մի ուղիղ գիծ պարամետրային

Աղ. այդ ուղիղ գիծն անցնում է (a, b, c) կետով և առանց-ների հետ կազմած անկյունների cosinus-ների համեմատա-կան համաչափ է

$$m : n : l$$

կամ

$$\frac{m}{\cos\alpha} = \frac{n}{\cos\beta} = \frac{l}{\cos\gamma}:$$

§ 6. Խնդիրներ ուղիղ գծի վերաբերյալ։

Խնդիր 1. Ինչ անկյուններ է կազմում

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{l}$$

ուղիղ գիծը կոորդինատային առանցքների հետ։

Թող այդ անկյունները անվանենք α, β, γ, այսինքն ունենք՝

$$m : n : l = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$$

Բայց գիտենք

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

ուստի

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+l^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+l^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{l}{\sqrt{m^2+n^2+l^2}}$$

Խնդիր 2. Ինչ անկյուն են կազմում իրար հետ

$$\frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{l_1}$$

$$\frac{x-a_2}{m_2} = \frac{y-b_2}{n_2} = \frac{z-c_2}{l_2}$$

ուղիղ գծերը։

Թող տված գծերով կազմած անկյունը անվանենք φ, այդ

$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$, որ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ և $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ այն անկյուններն են, որ տված գծերը առանց-ների հետ են կազմում։

Բայց գիտենք որ՝

$$\cos\alpha_1 = \frac{m_1}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+l_1^2}}, \quad \cos\beta_1 = \frac{n_1}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+l_1^2}}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{m_2}{\sqrt{m_2^2+n_2^2+l_2^2}}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{l_1}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+l_1^2}}$$

$$\cos\beta_2 = \frac{n_2}{\sqrt{m_2^2+n_2^2+l_2^2}}, \quad \cos\gamma_2 = \frac{l_2}{\sqrt{m_2^2+n_2^2+l_2^2}}:$$

Հետևաբար՝

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + l_1 l_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+l_1^2}\,\sqrt{m_2^2+n_2^2+l_2^2}} \qquad (13)$$

Ծանոթություն. — Թող ուղիղ գծերի հավասարումները տված են ոչ (12) ձևով, այդ պետք է նախ այդ ձևին բերել, որի համար (6) և (8) հավասարումներից ստանում ենք (12) հավասարումները։

Յերկու ուղիղ գծերի ուղղահայաց լինելու պայմանը:

Յեթե գծերը իրար նկատմամբ ուղղահայաց են, ապա $\cos\varphi = 0$, հետևաբար (13) հավասարությունից ստացվում է

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + l_1 l_2 = 0 \qquad (14)$$

Փոխադարձաբար միայն այս դեպքում $\cos\varphi$ կարող է հավասար լինել զրոյի ((13) արտահայտության մեջ հայտարարը անվերջության չի կարող լինել):

Յեվ հակադարձ, յեթե տեղի ունի (14) հավասարությունը, տված գծերը ուղղահայաց են:

Յերկու ուղիղ գծերի զուգահեռ լինելու պայմանը:

Յեթե տված ուղիղ գծերը զուգահեռ են, ապա $\cos\varphi = 1$: Հետևաբար (13) հավասարությունից ունենք

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + l_1 l_2 = \sqrt{m_1^2 + n_1^2 + l_1^2}\ \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + l_2^2},$$

որից հետո ստացվում է

$$(m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2 + (l_1 m_2 - l_2 m_1)^2 = 0$$

ապա

$$m_1 n_2 - m_2 n_1 = 0, \quad n_1 l_2 - n_2 l_1 = 0, \quad l_1 m_2 - l_2 m_1 = 0$$

կամ

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{l_1}{l_2} \qquad (15)$$

Ընդհակառակը, յեթե տեղի ունեն (15) հավասարությունները, տված ուղիղ գծերը զուգահեռ են, այսինքն (15) հավասարությունները ներկայացնում են զուգահեռության պայմանը:

Խնդիր 3. Տված կետով տանել զուգահեռ տված ուղիղ գծին:

Դիցուք տված կետն է (x', y', z'), իսկ տված ուղիղ գիծը՝

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{l}$$

Տված կետից անցնող կամայական ուղիղ գծի հավասարումը կլինի

$$\frac{x-x'}{m'} = \frac{y-y'}{n'} = \frac{z-z'}{l'}$$

Բայց որպեսզի այս գիծը զուգահեռ լինի տվածին, անհրաժեշտ է, որ

$$\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{l}{l'}$$

Փոխարինելով նախորդ հավասարման մեջ անհայտ գործակիցները (m', n', l') նրանց համեմատական մեծություններով, կստանանք փնտրված ուղիղ գծի հավասարումը

$$\frac{x-x'}{m} = \frac{y-y'}{n} = \frac{z-z'}{l} \qquad (16)$$

Յեթե ուղիղ գծի հավասարումը ընդհանուր ձևով է տված

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

ապա $(x' y' z')$ կետից անցնող զուգահեռի (տված գծին) հավասարումը գտնելու համար, բավական է ի նկատի ունենալ, որ այդ զուգահեռը գտնվելու է հարթությունների վրա, որոնք անցնում են տված կետով և զուգահեռ են տված գիծը որոշող հարթություններին

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

և

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

իսկ այդ հարթությունների հավասարումները ինչպես գրեցինք (տես 37) կլինեն՝

$$A_1(x-x')+B_1(y-y')+C_1(z-z')=0$$
$$A_2(x-x')+B_2(y-y')+C_2(z-z')=0 \qquad (17)$$

Որոնց (17) հավասարումներով արտահայտված է փնտրված ուղղությունը:

<u>Խնդիր 4.</u> Գտնել ուղիղ գծի և հարթության հատման կետը:

Դիցուք ուղիղ գծի հավասարումներն են՝

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \qquad (18)$$

իսկ տրված հարթությանն է՝

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (19)$$

Տված ուղիղ գծի և հարթության հատման կետը կլինի անշուշտ այն կետը, որի կոորդինատները բավարարում են միաժամանակ ուղիղ գծի և հարթության հավասարումներին, այսինքն (18) և (19) հավասարումներին: Հետևաբար հատման կետը գտնելու համար պետք է լուծել (18) և (19) հավասարումների սիստեմը:

Հատման կետի համար ստանում ենք

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta} \qquad (20)$$

ուր

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{vmatrix} \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 & D_1 \\ B_2 & C_2 & D_2 \\ B & C & D \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} A_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & C_2 & D_2 \\ A & C & D \end{vmatrix} \qquad \Delta_z=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A & B & D \end{vmatrix} \qquad (21)$$

Եթե ուղիղ գծի հավասարումը տված է կանոնական ձևով՝

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{l} \qquad (22)$$

ապա հատման կետի կոորդինատները գտնելու համար նպատակահարմար կլինի մտցնել օժանդակ փոփոխական t, որը հավասար է

$$t=\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{l}.$$

Այդ հավասարումներից ստանում ենք՝

$$x=mt+a, \quad y=nt+b, \quad z=lt+c \qquad (23)$$

Տեղադրելով x, y և z արժեքները (19) հավասարման մեջ, t-ի համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$t=\frac{Aa+Bb+Cc+D}{Am+Bn+Cl} \qquad (24)$$

Այդ տեղադրելով t-ի արժեքը (22) հավասարումների մեջ, կստանանք հատման կետի կոորդինատները:

<u>Ուղիղ գծի և հարթության զուգահեռ լինելու պայմանը:</u>

Եթե ուղիղ գիծը և հարթությունը զուգահեռ են, ապա

Նրանց հատման կետը անվերջ հեռու է, այսինքն՝

$$x = y = z = \infty$$

իսկ սա տեղի կունենա, երբ

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

կամ, երբ ուղիղ գծի հավասարումը տված է (22) ձևով, ապա տեղի կունենա հավասարությունը՝

$$Am + Bn + Cl = 0,$$

որովհետև t-ն հավասար կլինի անվերջության, և ուրեմն հատման կետը անվերջ հեռու կլինի:

Ուրեմն, ուղիղ գիծն ու հարթությունը զուգահեռ են, երբ բավարարված է հետևյալ պայմանը՝

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

կամ

$$Am + Bn + Cl = 0,$$

նայած թե ինչ ձևով է տված ուղիղ գծի հավասարումը:

Որպեսզի տված ուղիղ գիծը գտնվի տված հարթության վրա, անհրաժեշտ է, որ ուղիղ գիծը ոչ միայն զուգահեռ լինի տված հարթությանը, այլ և գծի կետերից մեկը գտնվի հարթության վրա:

Հետևաբար (22) ուղիղ գիծը՝ $Ax + By + Cz + D = 0$ հարթության վրա կգտնվի այն դեպքում, երբ բավարարված են հետևյալ հավասարությունները՝

$$Aa + Bb + Cc + D = 0$$

$$Am + Bn + Cl = 0 \qquad (25)$$

Այս հավասարություններից առաջինը նշանակում է, որ ուղիղ գծի (a, b, c) կետը գտնվում է տված հարթության վրա, իսկ երկրորդը, որ ուղիղ գիծը և հարթությունը զուգահեռ են:

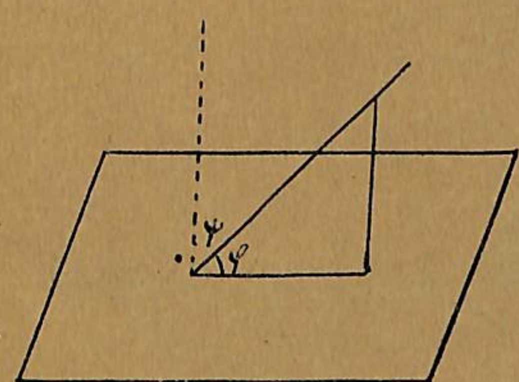
Խնդիր 5. Գտնել ուղիղ գծի և հարթության անկյունը:

Դիցուք ուղիղ գծի հավասարումներն են

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{l}$$

իսկ հարթությանը

$$Ax + By + Cz + D = 0$$



Նկ. 21

Հարթության և ուղիղ գծի անկյուն, կոչվում է այն անկյունը, որ ուղիղ գիծն իր պրոյեկցիայի հետ է կազմում՝ վերցնելով պրոյեկցիան տված հարթության վրա: Եթե այդ անկյունը անվանենք φ, իսկ հարթության նորմալի հետ [illegible] ψ, [illegible] $\varphi+\psi=\frac{\pi}{2}$

[illegible]

$\cos\psi=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'$, [illegible] α,β,γ-[illegible] α',β',γ'-[illegible]

[illegible] 31 [illegible] 32 [illegible]

$$\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ [illegible],

[illegible]

$$\cos\alpha'=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+l^2}},\quad \cos\beta'=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+l^2}}$$ [illegible]:

[illegible]

$$\cos\psi=\frac{Am+Bn+Cl}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{m^2+n^2+l^2}}$$

[illegible] $\cos\psi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi$:

[illegible]

$$\sin\varphi=\frac{Am+Bn+Cl}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{m^2+n^2+l^2}} \qquad (26)$$

(26) [illegible]

[illegible] $\varphi=0$, [illegible]

$$\sin\varphi=\frac{Am+Bn+Cl}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{m^2+n^2+l^2}}=0$$

[illegible]

$$Am+Bn+Cl=0$$

[illegible]

[illegible] $\sin\varphi=1$, [illegible]

$$Am+Bn+Cl=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{m^2+n^2+l^2}:$$

[illegible]

$$(Al-Cm)^2+(An-Bm)^2+(Bl-Cn)^2=0$$

[illegible] $Al-Cm=An-Bm=Bl-Cn=0$

[illegible] $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{l}$.

[illegible] 6. [illegible]

[illegible]

$$Ax+By+Cz+D=0$$

[illegible] (x',y',z') [illegible]

$$\frac{x-x'}{m}=\frac{y-y'}{n}=\frac{z-z'}{l}$$

[illegible]

$Ax+By+Cz+D=0$ [illegible]

հետևյալ հավասարությունները՝

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{l}$$

Հետևաբար փոխարինելով կանոնական հավասարումների մեջ m, n, l՝ նրանց համեմատական A, B, C-ով, կստանանք փնտրած ուղիղ գծի հավասարումը՝

$$\frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}=\frac{z-z'}{C}$$

Խնդիր 7. Գտնել այն հարթությունը, որն անցնում է տրված կետով և ուղղահայաց է տրված ուղիղ գծին:

Տրված ուղիղ գիծն է դրված՝

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{l}$$

իսկ տրված կետը, որով պիտի անցնի փնտրած հարթությունը, դրանք (x', y', z') է:

Այդ կետով անցնող կամայական հարթությունը կլինի

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0$$

Որպեսզի այս հարթությունը ուղղահայաց լինի տրված ուղիղ գծին, անհրաժեշտ է, որ A, B, C համեմատական լինեն m, n, l-ին:

Հետևաբար փնտրած հարթության հավասարումը կլինի

$$m(x-x')+n(y-y')+l(z-z')=0$$

Խնդիր 8. Տրված կետով տանել մի հարթություն, որը լինի երկու տրված ուղիղ գծերին զուգահեռական:

Տրված կետն է (a, b, c), իսկ ուղիղ գծերը՝

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{l_1}$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{l_2}$$

Տրված կետով անցնող հարթության հավասարումը կլինի

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0 \quad (27)$$

Որպեսզի այս հարթությունը զուգահեռ լինի տրված ուղիղ գծերին, պետք է որ տեղի ունենան հետևյալ հավասարությունները՝

$$\begin{aligned} Am_1+Bn_1+Cl_1&=0\\ Am_2+Bn_2+Cl_2&=0 \end{aligned} \quad (28)$$

(28) համասեռ հավասարումներից որոշելով A, B և C հարաբերությունները և տեղադրելով (27) հավասարման մեջ, կստանանք փնտրած հարթության հավասարումը:

Նույն արդյունքը կարելի է ստանալ որոշիչների միջոցով:

Իրոք, (27) և (28) համասեռ հավասարումներից ստանում ենք՝

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ m_1 & n_1 & l_1 \\ m_2 & n_2 & l_2 \end{vmatrix}=0$$

որը և կլինի փնտրված հարթության հավասարումը:

Խնդիր 9. Գտնել այն հարթությունը, որը տրված երկու ուղիղ գծերից մեկով անցնում է, իսկ մյուսին զուգահեռ է:

Դիցուք տրված ուղիղ գծերն են՝

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{l_1}$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{l_2}$$

Փնտրվող հարթությունը այս գծերից մեկով անցնի, իսկ մյուսին զուգահեռ լինի, բավական է, որ նա անցնի (x_1, y_1, z_1) կամ (x_2, y_2, z_2) կետով և երկուսին էլ զուգահեռ լինի:

Այդպիսով ստանում ենք նախորդ խնդիրը և փնտրված հարթության հավասարումը կլինի՝

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & l_1 \\ m_2 & n_2 & l_2 \end{vmatrix}=0$$

Եթե ուղիղ գծերը տրվեն, կամ երկուսի հավասարումներն էլ տրված լինեն համեմատության ձևով, ապա նախ պետք է բերել այդ ձևին, որից հետո արդեն լուծել վերոհիշյալ եղանակով:

Խնդիր 10. Գտնել այն հարթությունը, որն անցնում է տրված ուղիղ գծով և ուղղահայաց է տրված

հարթությանը:

Դիցուք տրված ուղիղ գիծը և հարթության հավասարումը լինեն՝

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{l}$$

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Դժվար չէ նկատել, որ փնտրված հարթությունն անցնելու է (a, b, c) կետով, միևնույն է զուգահեռ տրված ուղիղ գծին և ուղղահայաց տրված հարթությանը: Ուրեմն նրա հավասարումը կլինի՝

$$A'(x-a)+B'(y-b)+C'(z-c)=0,$$

ուր A', B' և C' գործակիցները պետք է բավարարեն հետևյալ հավասարումներին՝

$$A'm+B'n+C'l=0$$

և

$$A'A+B'B+C'C=0:$$

Ուրեմն, փնտրված հարթության հավասարումը կլինի՝

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ m & n & l \\ A & B & C \end{vmatrix}=0$$

Խնդիր 11. Տրված կետից տանել այն ուղիղ գիծը, որն ուղղահայաց է տրված երկու ուղիղ գծերի նկատմամբ:

Դիցուք տրված կետն է (a, b, c), իսկ տրված ուղիղ գծերը

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{l_1}$$

$$\frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{l_2}\,.$$

Այժմ կերպով որոնելի ուղիղ գծի հավասարումը կլինի

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{l}\,,$$

որտեղ m, n և l անհայտ են: Որպեսզի այս գիծը ուղղահայաց լինի տրվածների նկատմամբ, պետք է բավարարվեն հետևյալ հավասարումները՝

$$m m_1+n n_1+l l_1=0$$

$$m m_2+n n_2+l l_2=0\,.$$

լուծելով այս համասեռ հավասարումները $\frac{m}{l}$ և $\frac{n}{l}$ նկատմամբ, կստանանք՝

$$\frac{m}{l}=\frac{\Delta_m}{\Delta_l}\,,\quad \frac{n}{l}=\frac{\Delta_n}{\Delta_l}$$

կամ

$$m:n:l=\Delta_m:\Delta_n:\Delta_l\,,$$

որտեղ

$$\Delta_m=\begin{vmatrix} n_1 & l_1\\ n_2 & l_2\end{vmatrix};\quad \Delta_n=\begin{vmatrix} l_1 & m_1\\ l_2 & m_2\end{vmatrix};\quad \Delta_l=\begin{vmatrix} m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}$$

Հետևաբար, որոնելի ուղիղ գծի հավասարումը կլինի

$$\frac{x-a}{\Delta_m}=\frac{y-b}{\Delta_n}=\frac{z-c}{\Delta_l}$$

Խնդիր 12. Գտնել այն ուղիղ գիծը, որը հատում է տրված երկու ուղիղ գծերը և ուղղահայաց է նրանց նկատմամբ:

Այդ գիծը երկրաչափորեն կարելի է այսպես կառուցել: Մի կամայական կետից տանում ենք մի երրորդ գիծ, որը ուղղահայաց լինի տրվածների նկատմամբ: Այդ տրված գծերից յուրաքանչյուրով տանում ենք այդ երրորդ գծին զուգահեռ հարթություններ:

Այդ հարթությունների հատման գիծը կլինի որոնելի ուղիղ գիծը:

Իրոք, հատման գիծը կլինի զուգահեռ երրորդ գծին և հետևաբար այդ վերջինը ուղղահայաց է տրվածների նկատմամբ, ուրեմն հատման գիծը էլ կլինի ուղղահայաց: Բացի այդ հատման գիծը տրված գծերից յուրաքանչյուրի հետ միևնույն հարթության վրա է գտնվում. հետևաբար նա հատում է տրված ուղիղ գծերը:

Կառուցման վերլուծությունից կազմում ենք որոնած գծի հավասարումը:

Դիցուք տրված գծերի հավասարումներն են

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{l_1}\qquad(29)$$

$$\frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{l_2}\,,\qquad(30)$$

այդ երկու նկատմամբ ուղղահայաց գծի հավասարումը, ինչպես տեսանք (Խնդիր 11) կլինի

$$\frac{x-a}{\Delta_m} = \frac{y-b}{\Delta_n} = \frac{z-c}{\Delta_l} \qquad (31)$$

որը (a, b, c) կամայական կետ է, իսկ $\Delta_m, \Delta_n, \Delta_l$ նախորդ նշանակությունն ունեն։

Գտնենք այժմ այն հարթությունը, որն անցնում է (29) ուղիղ գծով և զուգահեռ է (31) ուղիղ գծին։

Ինչպես գիտենք (խնդիր 9) այդ հարթության հավասարումը կլինի՝

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ m_1 & n_1 & l_1 \\ \Delta_m & \Delta_n & \Delta_l \end{vmatrix} = 0 \qquad (32)$$

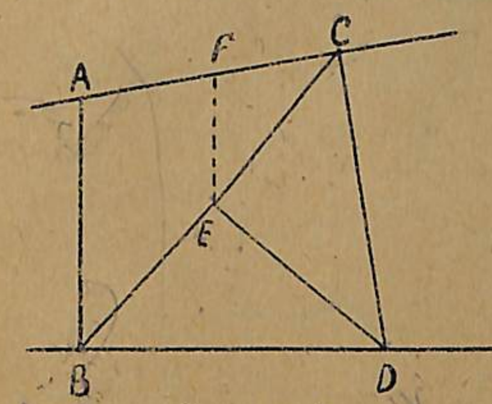
Գտնում ենք նաև այն հարթությունը, որն անցնում՝ (30) ուղիղ գծով և զուգահեռ է (31) ուղիղ գծին։ Նրա հավասարումը կլինի՝

$$\begin{vmatrix} x-a_2 & y-b_2 & z-c_2 \\ m_2 & n_2 & l_2 \\ \Delta_m & \Delta_n & \Delta_l \end{vmatrix} = 0 \qquad (33)$$

(32) և (33) հարթությունների հատման գիծը կլինի հենց այն ուղիղ գիծը, որը հատում է (29) և (30) գծերը և նրանց ընդհանուր ուղղահայաց է։

Ուրեմն (29) հավասարումները ներկայացնում են AC ուղիղ գիծը (նկար 22), (30) հավասարումները — BD ուղիղ գիծը, իսկ (32) և (33) հավասարումները

ներկայացնում են AB ուղիղ գիծը։



Նկ 22

Որտեղ $\angle CAB = \angle ABD = 90°$

Ապացուցենք, որ AB հատվածը AC և BD գծերի միջև ամենակարճ ճանապարհն է։

Իրոք, ապացուցենք, որ $DC > AB$, որ D և C կամայական կետեր են գրված ուղիղ գծերի վրա։

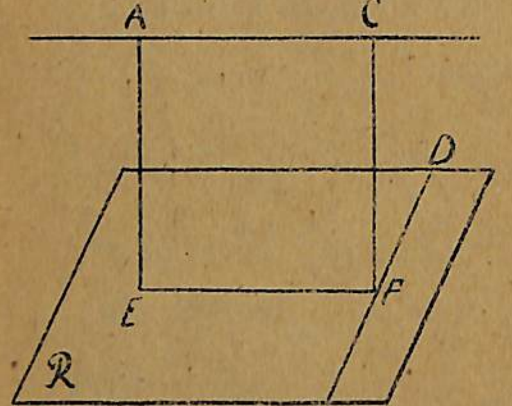
Դիտարկենք մի հարթություն, որն անցնում է C, A և B կետերով։ Այդ հարթության վրա D կետից իջեցնում ենք ուղղահայաց DE։ BE, CE գծերը գտնվում են նույն հարթության վրա և որովհետև DE-ն նրանց բոլորի հետ ուղիղ անկյուններ է կազմում, իսկ DB նույն հարթության նկատմամբ թեք գիծ է, որի պրոյեկցիան BE-ն է. AB-ն BD-ի հետ ուղիղ անկյուն է կազմում հետևաբար, AB-ն BE-ի հետ էլ ուղիղ անկյուն է կազմում, և եթե E-ից տանենք BA-ին զուգահեռ EF, կստանանք ուղղանկյուն $ABEF$, որ $BA = EF$։ Բայց $EF < EC$ (որովհետև EF-ը ուղղահայաց է, իսկ EC-ն թեք գիծ է) և $EC < DC$, որովհետև DEC ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի $\angle DEC = 90°$։

Որտեղ $AB = EF < EC < DC$

Այսպիսով ապացուցեցինք, որ այն հատվածը, որը ուղիղ անկյունները է կազմած զույգ ուղիղ գծերի հետ, ամենակարճ հեռավորությունն է նույնը միջև և (32) և (33) հավասարումները այդ հեռավորության հավասարումներն են։

Խնդիր 13. Գտնել երկու ուղիղ գծերի ամենակարճ հեռավորությունը։

Ենթադրենք թե ամենակարճ հատվածը կլինի այն, որը ուղղահայաց է երկու գծերին միաժամանակ։ Այդ հատվածը կարելի է գտնել հետևյալ կերպով. երկու ուղիղ գծերից մեկով (օրինակ BD-ով) տանենք R հարթությունը, որը կլինի մյուս գծին (AC-ին) զուգահեռ։ Այժմ AC-ի կամայական կետից (A) իջեցնենք ուղղահայաց (AE) R հարթության վրա և E կետից տանենք AC-ին զուգահեռ EF։ Այս վերջինս կհատի BD-ն որևէ F կետում։



Նկ 23

F կետից իջեցնենք ուղղահայաց AC-ի վրա։ Կստացվի մի ուղղանկյուն AEFC, որի AE կողմը հավասար է CF-ին, որն ամենակարճ հեռավորությունն է երկու գծերի միջև։

Այսպիսով, CF-ը ամենակարճ հեռավորությունն է երկու գծերի միջև և AE-ն, այսինքն AC-ի կամայական կետից իջեցրած ուղղահայացը R հարթության վրա, հավասար է ամենակարճ

հեռավորությանը։ Հետևաբար, երկու ուղիղ գծերի ամենակարճ հեռավորությունը գտնելու համար, մենք պետք է գտնենք AC-ի կամայական կետի հեռավորությունը R-ից։

Դիցուք AC-ի և BD-ի հավասարումներն են՝

$$\frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{l_1}$$

$$\frac{x-a_2}{m_2} = \frac{y-b_2}{n_2} = \frac{z-c_2}{l_2}.$$

Այն դեպքում R հարթության հավասարումը կլինի՝

$$\Pi = \begin{vmatrix} x-a_2 & y-b_2 & z-c_2 \\ m_1 & n_1 & l_1 \\ m_2 & n_2 & l_2 \end{vmatrix} = 0$$

Այժմ մնում է AC-ի կամայական կետի հեռավորությունը գտնել R-ից։ Մենք ընտրում ենք (a_1, b_1, c_1) կետը, որն անշուշտ գտնվում է AC-ի վրա։ Այդ կետի հեռավորությունը (d) R-ից հավասար է[*]

$$d = \frac{\begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ m_1 & n_1 & l_1 \\ m_2 & n_2 & l_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_m^2 + \Delta_n^2 + \Delta_l^2}},$$

[*] Տրված կետի հեռավորությունը տրված հարթությունից $(\Pi = 0)$ գտնելու համար, պետք է հավասարման մեջ ընթացիկ կոորդինատների փոխարեն դնել կետի կոորդինատները և բաժանել նորմալ բաժանարարի վրա։

որ

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_l = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}$$

Խնդիր 14. Գտնել երկու ուղիղ գծերի հատվելու պայմանը:

Յուրաքանչյուր ուղիղ գիծ արտահայտված է երկու հավասարումներով. երկու ուղիղ գծերը կարտահայտվեն չորս հավասարումներով:

Ընդհանրապես երկու ուղիղ գծերի հատման կետի կոորդինատները պետք է բավարարեն չորս հավասարման. որոնք միշտ իրար համատեղ չեն լինում: Այդ կետը կլինի միայն այն դեպքում, երբ երեքից վերցրած անհայտների արժեքները բավարարում են և չորրորդ հավասարմանը, որից բխում է՝ որոշելով երեք անհայտների արժեքը, (որոնք գտնված են երեք հավասարումներից) չորրորդ հավասարման մեջ-կդառնա նույնություն:

Բայց այս գործողությունը, ինչպես հայտնի է, հանգում է՝ արտաքսել — չորս հավասարումներից երեք անհայտ:

Ուրեմն, երբ արտաքսելով չորս հավասարումներից երեք անհայտները, մենք ստանանք նույնություն, այդ դեպքում տված ուղիղ գծերն իրար հանդիպում են:

Դիցուք ուղիղ գծերի հավասարումները տված են ընդհանուր ձևով

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$
և
$$A_1' x + B_1' y + C_1' z + D_1' = 0$$
$$A_2' x + B_2' y + C_2' z + D_2' = 0$$

Այս գծերի հատվելու պայմանը գտնելու համար կարելի է վարվել վերոհիշյալ եղանակով. բայց կարելի է և դետերմինանտների օգնությամբ խնդիրը լուծել[x]:

Ինչպես հայտնի է n անհայտներով $(n+1)$ հավասարումների սիստեմը համատեղ լինում է այն դեպքում, երբ նրա գործակիցներից կազմված դետերմինանտը հավասար է զերոյի: Հետևաբար, տված գծերի հատվելու պայմանն է՝

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_1' & B_1' & C_1' & D_1' \\ A_2' & B_2' & C_2' & D_2' \end{vmatrix} = 0$$

Վարժություններ.

1.- Գտնել այն ուղիղ գիծը, որն անցնում է (x', y', z') կետով, x-երի առանցքի հետ կազմում է 30° անկյուն, իսկ y-ների առանցքի հետ 60°-ի անկյուն:

Ի՞նչ անկյուն է կազմում z-երի առանցքի հետ:

x) Տե՛ս Հակ. Նահապետյան — Դետերմինանտներ: Երևան 1922 թ. երես 46 և 47.

2. — Գտնել այն ուղիղ գիծը, որն անցնում է $(2, 1, -1)$ կետով և կոորդինատային առանցքների հետ հավասար անկյուններ է կազմում։

Ինչ՞ է հավասար այդ անկյունը։

3. — Ինչ անկյուն են կազմում հետևյալ ուղիղ գծերը միմյանց հետ՝

1) $x = 3z - 2$, $y = 2z + 1$ 2) $2x - y + z = 0$, $2z + 3y - 2 = 0$ 3) $2z - y = 5$, $z + 3z = 1$

4. — Գտնել այն հարթությունը, որն անցնում է $(2, 0, 1)$ կետով և այս ուղիղ գծով՝

$$2x - 3y + z - 4 = 0, \quad x + 3z - 1 = 0$$

Ցուցմունք. Այդ ուղիղ գծով անցնող որևէ հարթության հավասարումը կլինի

$$2x - 3y + z - 4 + k(x + 3z - 1) = 0$$

Մնում է k-ն այնպես ընտրել, որ այս հարթությունը անցնի $(2, 0, 1)$ կետով։

5. — Գտնել այն հարթությունը, որն անցնում է

$$x + 2y - 2z + 1 = 0; \quad 2x - y + 3z - 1 = 0$$

ուղիղ գծով և ուղղահայաց է

$$3x - 5y + z - \ldots = 0$$

հարթությանը։

Ցուցմունք. Նախ գրել տված ուղիղ գծով անցնող որևէ հարթության հավասարումը, ապա k-ն ընտրել այնպես, որ

նա լինի ուղղահայաց տված հարթությանը։

6 — Գտնել ուղիղ գծի հավասարումը, որը զուգահեռ է՝

ա). (xy) հարթությանը

բ) (yz) հարթությանը

գ) (zx) հարթությանը

7. — Գտնել այն ուղիղ գծերի հավասարումները, որոնք ուղղահայաց են՝

ա) x-երի առանցքին

բ) y-ների առանցքին

գ) z-երի առանցքին

8 — Գտնել այն ուղիղ գծի հավասարումը, որը

ա) ուղղահայաց է x-երի առանցքին և զուգահեռ է (xy) հարթությանը.

բ) ուղղահայաց է y-ների առանցքին և զուգահեռ է (xz) հարթությանը.

գ) ուղղահայաց է z-երի առանցքին և զուգահեռ է (yx) հարթությանը։

Ցուցմունք. ա) Փնտրվող ուղիղ գիծը գտնվելու է մի այնպիսի հարթության վրա, որը միևնույն ժամանակ զուգահեռ է (zy) հարթությանը, որը անցնում է x-երի առանցքով։

9 — Գտնել այն ուղիղ գծի հավասարումը, որը զուգահեռ է

[illegible]

ա) x-երի առանցքին

բ) y-ների առանցքին

գ) z-երի առանցքին

Ցուցմունք. Փնտրած գիծը գտնվում է պրոյեկտող հարթությունների վրա՝ որոնցից մեկը զուգահեռ է (yx) հարթության, մյուսը – (xz) հարթության:

10 – Անցած կետով (3.1, −1) գտնել զուգահեռ տված գծի հավասարումը՝

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{3-z}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{4}$$

Ցուցմունք – (3, 1 −1) կետով անցնող ուղիղ գծի հավասարումն է լինելու

$$\frac{x-3}{m} = \frac{y-1}{n} = \frac{z-1}{l}$$

որպեսզի այս ուղիղը զուգահեռ լինի տված գծերին, անհրաժեշտ է՝

$$3m+2n-2l=0$$

$$2m+3n-4l=0$$

11. $\frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{4} = \frac{2z-1}{2}$ ուղիղ գծով տանել այն հարթությունը, որը զուգահեռ է՝

ա) (yx) հարթության

բ) $2x-y+z-4=0$ հարթության:

12. (2, −2, 1) կետով տանել այն ուղիղ գիծը, որը

ուղղահայաց է $3x-2y-z+1=0$ հարթության:

13 – Գտնել ուղիղ գծի պրոյեկցիաները կոորդինատային հարթությունների վրա, հետևյալ հավասարումներով տված ուղիղ գծի՝

$$4x-2y+3z-5=0$$

$$x-3y+2z+1=0$$

Ցուցմունք. $4x-2y+3z-5+K(x+3y+2z+1)=0$ հարթությունն անցնում է տված ուղիղ գծով. այդ հավասարումը կլինի ուղիղ գծի պրոյեկցիան (zy) հարթության վրա, եթե հավասարման մեջ բացակայում է x կոորդինատը: Պետք է K-ն այնպես ընտրել, որ նախորդ հավասարման մեջ x-ը վերանա:

14. – Գտնել նախորդ ուղիղ գծի հատման կետերը կոորդինատային հարթությունների հետ:

15. – Արդյոք հատվո՞ւմ են իրար հետևյալ ուղիղ գծերը՝

$$4x-y+2z-1=0, \quad x+2y-z+1=0$$

և

$$x+4y-4=0, \quad 3x-y+z=0$$

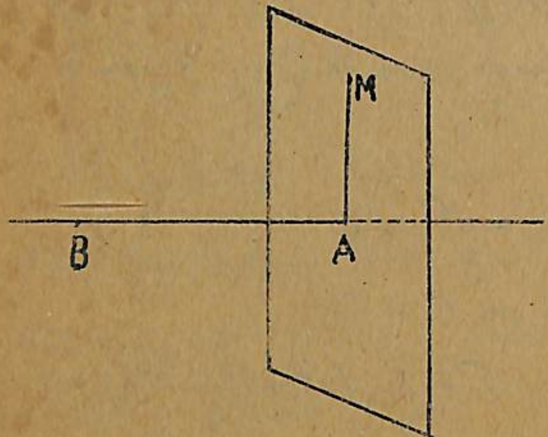
16 – Գտնել (3, 1, −2) կետի հեռավորությունը

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{\sqrt{3}} = \frac{z-2}{2}$$

ուղիղ գծից:

Ցուցմունք. Անցած կետից (M) տանել ուղղահայաց (MA) հարթությունը տված ուղիղ գծին (նկ. 24). Այդ հարթության հավասարումը կլինի՝

$$3(x-3)+\sqrt{3}(y-1)+2(z+2)=0$$



Նկար 24

Այս գտած ուղիղ գծի վրա վերցնենք մի որևէ մի կետ, օրինակ $B(1,-2,2)$ կետը և հաշվենք նրա հեռավորությունը (BA) հարթությունից: Հաշվենք նույնպես և BM հեռավորությունը՝

$$BM^2=(3-3)^2+(\sqrt{3}-1)^2+(2+2)^2$$

Որոնելի հեռավորությունը MA հավասար է

$$MA=\sqrt{BM^2-BA^2}$$

17.— Գտնել այն հարթությունը, որն անցնում է

$$x+3y+5z=0$$
$$2x-y+z+1=0$$

ուղիղ գծով և ուղղահայաց է

$$2x-y+4z-4=0$$

հարթությանը:

18. Արդյոք հետևյալ ուղիղ գծերը գտնվում են միևնույն հարթության վրա, թե ոչ՝

ա) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{2-2y}{3}=\dfrac{z-2}{4}$

$\dfrac{x}{2}=y+1=\dfrac{z-1}{2}$

Եթե այո, ապա գտնել այդ հարթության հավասարումը:

19.— Գտնել այն ուղիղ գծի հավասարումը, որն ուղղահայաց է տված ուղիղ գծերին՝

$$\left.\begin{aligned} y&=2x-1\\ z&=x+2 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} y&=x+3\\ z&=5-2x \end{aligned}\right\}$$

20.— Գտնել հետևյալ ուղիղ գծերի ամենակարճ հեռավորությունը՝

$$\frac{x}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{2-z}{3}$$
$$\frac{x-5}{2}=[illegible]+3=\frac{1+z}{3}$$

Գլուխ Բ.

Կոորդինատների ձևափոխումը

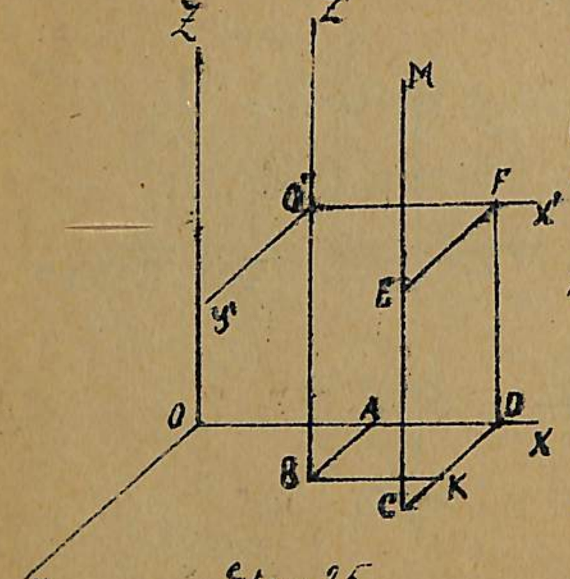
§7. 1. Կոորդինատային առանցքների սկզբնակետը փոխվել է, իսկ առանցքները զուգահեռ.

Այս դեպքում նոր առանցքները որոշելու համար տված է նրա սկզբնակետի կոորդինատները հին առանցքների նկատմամբ:

Դիցուք նոր սկզբնակետն է $O'(a,b,c)$, որի կոորդինատները տված են հին առանցքների նկատմամբ:

Վերցնենք տարածության մի կամավոր կետ M և նշանակենք նրա կոորդինատները հին և նոր կոորդինատային առանցքների նկատմամբ (նկ. 25):

M կետի կոորդինատները նոր (XYZ) սիստեմի նկատմամբ անվանենք x, y, z, իսկ նորի ($X'Y'Z'$) նկատմամբ անվանենք x', y', z':



Նկար 25

Ենթադրենք նկարից երևում է

$a = OA,\ b = AB,\ c = BO'$

$x = OD,\ y = DC,\ z = CM$

$x' = O'F,\ y' = FE,\ z' = EM$

AD և $O'F$ հատվածները, նույնպես և BO' և CE հատվածները – զուգահեռ են և գտնվում են զուգահեռ հարթությունների միջև, ուստի հավասար են՝

$$AD = O'F, \quad BO' = CE$$

Բացի այդ ունենք

$AB = DK$ և $FE = KC$, որովհետև նրանք զուգահեռագծերի հանդիպակաց կողմերն են:

Այս հավասարությունների շնորհիվ ստանում ենք հետևյալը՝

$$OD = AD + OA$$
$$DC = KC + AB$$
$$CM = EM + CE$$

կամ

$$x = x' + a$$
$$y = y' + b \qquad (1)$$
$$z = z' + c$$

Այսպիսով գտնում ենք, որ կետի նոր կոորդինատները ստանալու համար, պետք է նույն կետի հին կոորդինատների վրա ավելացնել նոր սկզբնակետի կոորդինատները, երբ հին կոորդինատային առանցքները զուգահեռ են:

Բ. Կոորդինատային սիստեմները ունեն ընդհանուր սկզբնակետ:

Փոփոխենք նոր սիստեմը որևէ ձևով լինի, բավական է որ հայտնի լինեն նոր առանցքների կազմած անկյունները հների հետ:

Դիցուք նոր առանցքները X', Y', Z' հին առանցքների հետ կազմում են հետևյալ անկյունները՝

X-ը կազմում է X, Y, Z-ի հետ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ անկյունները,

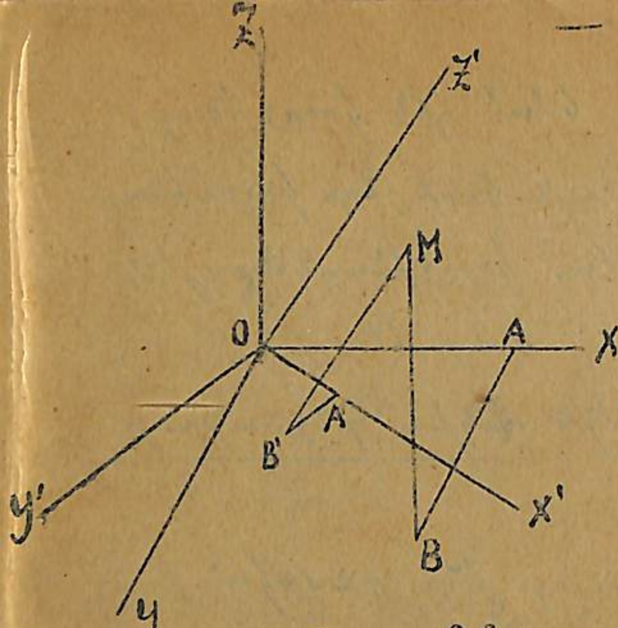
Y-ը կազմում է $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$

և Z-ը կազմում է $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ անկյունները:

Այս դրվածները ներկայացնենք հետևյալ աղյուսակի մեջ՝

	X	Y	Z
X'	α_1	β_1	γ_1
Y'	α_2	β_2	γ_2
Z'	α_3	β_3	γ_3

Որոշենք այժմ մի կամայական կետի (M) դիրքը տարածության մեջ և գտնենք նրա կոորդինատները հին և նոր սիստեմների նկատմամբ (նկար 26): Դիցուք՝



Նկար 26

$x = OA,\ y = AB,\ z = BM$

$x' = OA',\ y' = A'B',\ z' = B'M$

Հիշեցնենք որ մեկ կետի հին կոորդինատները արտահայտենք նույն կետի նոր կոորդինատներով և դրանց անկյունների միջոցով, որի հետևանքով հետևյալ պրոյեկցիայի հավասարությունը:

Վերցնենք $ABMB'A'O$ բեկյալ գծի պրոյեկցիան OX առանցքի վրա: Ինչպես հայտնի է, այդ պրոյեկցիան հավասար է OA-ի պրոյեկցիային նույն առանցքի վրա:

Բայց $ABMB'A'O$-ի պրոյեկցիան OX առանցքի վրա հավասար է՝

$$AB \cdot \cos(Y,Z) + BM\cos(Z,X) + MB'\cos(Z',X) + B'A'\cos(Y',X) + A'O\cos(X',X)$$

որ (Y,X), (Z',X) և այլն սիմվոլներով նշանակված են՝ Y և X առանցքներով, Z և X առանցքներով և այլն կազմած անկյունները: Ի նկատի առնելով, որ (Y,X) և (Z,X) անկյունները ուղիղ են և վերցնելով նոր անկյունների նշանակումները այսպիսին, կստանանք որ բոլոր այդ արտահայտությունը

$$z'\cos\alpha_3 + y'\cos\alpha_2 + x'\cos\alpha_1$$

OA հատվածի պրոյեկցիան նույն OX առանցքի վրա հավասար

է x-ի:

Հետևաբար

$$x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 \qquad (2)$$

Նման դատողությամբ կստանանք և մյուս երկու հին կոորդինատների արտահայտությունը՝

$$y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3$$

$$z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 \qquad (2)$$

Այսպիսով (2) հավասարություններով հին երեք կոորդինատները արտահայտված են նորերի միջոցով, երբ կոորդինատային սիստեմները ընդհանուր սկզբնակետ ունեն, իսկ նոր առանցքները հների հետ կազմում են այսպիսի որոշված անկյունները:

(2) բանաձևերը դուրս բերելիս մենք ենթադրեցինք միայն, որ կոորդինատների հին սիստեմը ուղղանկյուն է: Հետևապես (2 բանաձևերը ճիշտ են և այն դեպքում, երբ կոորդինատների նոր սիստեմը շեղանկյուն է:

Կոորդինատների նոր սիստեմի դիրքը հին նկատմամբ որոշվում է ինը անկյունների միջոցով: Ցույց տանք, որ բոլոր այդ անկյունները միմյանցից անկախ չեն:

Իրոք, մեր դեպքում համար, ենթադրենք, որ կոորդինատների սիստեմները ուղղանկյուն են, ապա § 2 (4) հավասարության հիման վրա ունենք՝

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1$$
$$\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1 \qquad (3)$$
$$\cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_3 + \cos^2\gamma_3 = 1$$

Իսկ §2. (5) հավասարության հիման վրա ունենք

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = \cos(x', y') = 0$$
$$\cos\alpha_1\cos\alpha_3 + \cos\beta_1\cos\beta_3 + \cos\gamma_1\cos\gamma_3 = \cos(x', z') = 0 \qquad (4)$$
$$\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + \cos\beta_2\cos\beta_3 + \cos\gamma_2\cos\gamma_3 = \cos(y', z') = 0$$

Այսպիսով աղյուսակում գրված ինը անկյունները անկախ չեն, այլ նրանք բավարարում են (3) և (4) հավասարություններին:

3. Ընդհանուր դեպք – կոորդինատային սիստեմները ունեն տարբեր սկզբնակետեր և առանցքների ուղղությունները տարբեր են:

Դիցուք նոր սիստեմի սկզբնակետը հին նկատմամբ ունի հետևյալ կոորդինատները՝ a, b, c, իսկ նոր առանցքները հների հետ կազմում են հետևյալ անկյունները՝

	X	Y	Z
X'	α_1	β_1	γ_1
Y'	α_2	β_2	γ_2
Z'	α_3	β_3	γ_3

Ընդունենք մի օժանդակ սիստեմ՝ x'', y'', z'', որի սկզբնակետը գտնվում է (a, b, c) կետում, իսկ առանցքները զուգահեռ

են հին առանցքներին:

Միևնույն կետի կոորդինատները հին, նոր և օժանդակ սիստեմների նկատմամբ նշանակենք (x, y, z), (x', y', z') և (x'', y'', z''), այդ դեպքում բանաձևերի համաձայն ունենք

$$x = x'' + a$$
$$y = y'' + b \qquad (1')$$
$$z = z'' + c$$

և

$$x'' = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3$$
$$y'' = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \qquad (2')$$
$$z'' = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3$$

Տեղադրելով x'', y'' և z'' արժեքները (2') հավասարություններից (1')-ի մեջ, կստանանք

$$x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 + a$$
$$y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 + b \qquad (5')$$
$$z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 + c$$

Այս բանաձևերով արտահայտվում են հին կոորդինատները նորերի միջոցով, երբ փոխվում են թե առանցքների ուղղությունները և թե սկզբնակետը:

Ինչպես տեսանք, այն ինը անկյունները, որոնք որոշում են նոր կոորդինատային սիստեմի դիրքը հին նկատմամբ, իրարից անկախ չեն, այլ նրանք կապված են վեց հավասարումներով: Հետևաբար, այդ անկյուններից կամա- [illegible] նոր կոորդինատային սիսորևէ դիրքը նոյն նշանակով, որից յետոյ, նշած ինը անկյուններից մեկը (այսինքն միայն նրանց cosinus-ները) կարելի է արտահայտել միայն երեքի օգնությամբ: Առհասարակ ինչպես այդ երևում է (3) և (4) հավասարություններից սրանց այդ պայմանները բավական չեն լինի:

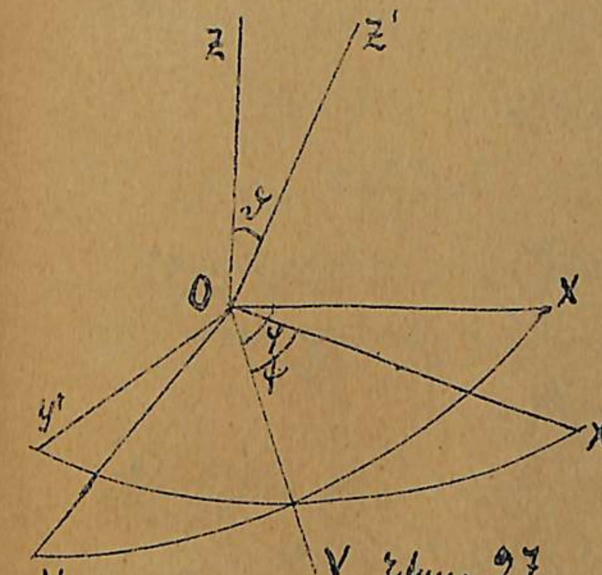
Մեր երկու կոորդինատային սիստեմներ ընդհանուր սկզբնակետ ունեն, այն ժամանակ նոր սիստեմի դիրքը կարելի է որոշել նույն նշանակով և այնպիսի երեք անկյունների միջոցով, որ նշած ինը cosinus-ները բոլորը արտահայտվեն այդ երեք անկյունների յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների օգնությամբ:

Դիցուք, XYZ և X'Y'Z' ուղղանկյուն կոորդինատային սիստեմները ունեն ընդհանուր սկզբնակետ (նկար 27).
XY և X'Y' հարթությունների հատման գիծը անվանենք OV:
Դժվար չէ նկատել, որ $ZOZ' = \vartheta$, $XOV = \varphi$ և $X'OV = \psi$ անկյունների օգնությամբ միանգամայն որոշվում է սիստեմների մեկի դիրքը մյուսի նկատմամբ:

Իրոք, φ անկյունը հնարավորություն է տալիս գծել XY հարթության վրա OV գիծը, ապա այդ գծով տանում ենք մի հարթություն, որը XY հարթության հետ ϑ անկյուն է կազմում (XY և X'Y' հարթություններով կազմված անկյունը հավասար է նրանց ուղղահայացներով՝ OZ և OZ' կազմված անկյան):

Այդ հարթության վրա O կետից տանում ենք OX', որը OV-ի հետ կազմում է ψ անկյուն, և OY'-ը՝ նրան ուղղահայաց է, իսկ O կետում կանգնեցնում ենք X'Y' հարթության ուղղահայաց (OZ'):

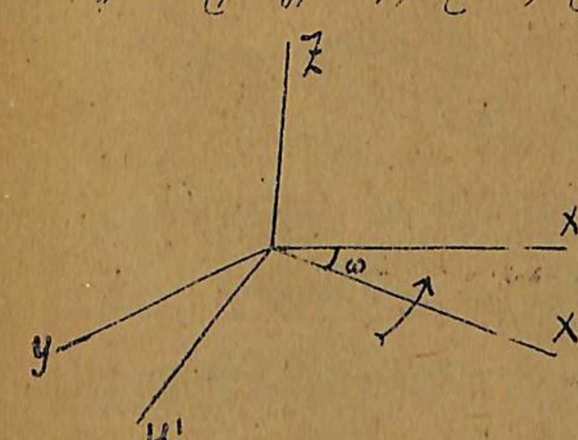
Ուրեմն φ, ψ, ϑ անկյուններից որոշվում է նոր սիստեմի դիրքը, երբ հինը տված է:



Նկար 27

Մտնենք այժմ, թե ինչպես են արտահայտվում ինը cosinus-ները այդ անկյունների միջոցով: Նախ վերցնենք հետևյալ մասնավոր դեպքը:

Դիցուք ունենք երկու ուղղանկյուն սիստեմներ XYZ և X'Y'Z', որոնք մի ընդհանուր առանցք ունեն (Z և Z'). (Հետևաբար միւս առանցքները մի հարթության վրա են գտնվում) (նկար 28) և դիցուք OX' առանցքը OX-ի հետ ω անկյուն է կազմում. Ինչպես նկարից երևում է, հին սիստեմը կստանայինք նորի հետ, եթե հինը պտտեինք OZ-ի շուրջը՝ ω անկյունով:



Նկար 28

Առանցքներով կազմված անկյունների համար կունենք հավասարուիսկ աղյուսակը՝

	x	y	z
x'	ω	$\frac{\pi}{2}-\omega$	$\frac{\pi}{2}$
y'	$\frac{\pi}{2}+\omega$	ω	$\frac{\pi}{2}$
z'	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0

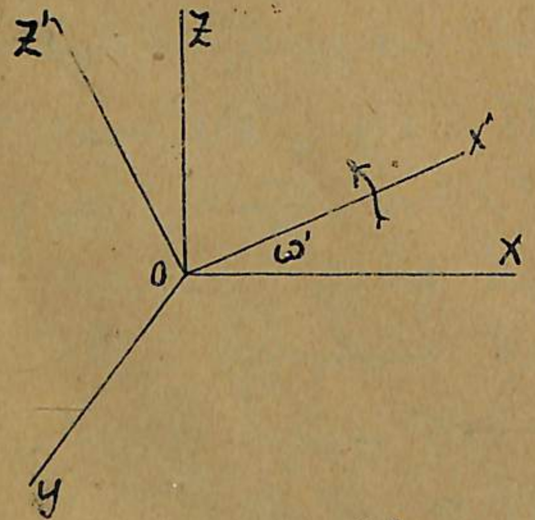
Եթե նշանակենք կետի կոորդինատները հին և նոր կոորդինատային սիստեմների նկատմամբ համապատասխանաբար՝ (x, y, z) և (x', y', z'), ապա (2) բանաձևերի համաձայն ունենք՝

$$x = x'\cos\omega + y'\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+\omega\right) + z'\cos\tfrac{\pi}{2} = x'\cos\omega - y'\sin\omega$$

$$y = x'\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\omega\right) + y'\cos\omega + z'\cos\tfrac{\pi}{2} = x'\sin\omega + y'\cos\omega \quad (6)$$

$$z = x'\cos\tfrac{\pi}{2} + y'\cos\tfrac{\pi}{2} + z'\cos 0 = z'$$

Եթե կոորդինատային սիստեմի շրջման առանցքը y-ների առանցքն է և OX'-ը OX-ի հետ ω' անկյուն է կազմում, այսինքն սիստեմները համընկնելու համար պետք է հին սիստեմը պտտել OY-ի շուրջը ω' անկյունով ժամի սլաքի շարժման ուղղությամբ, ապա կոորդինատների ձևափոխության համար հետևյալ բանաձևերը կստանանք՝



Նկար 29

$$x = x'\cos\omega' - z'\sin\omega'$$

$$y = y' \quad (6')$$

$$z = x'\sin\omega' + z'\cos\omega'$$

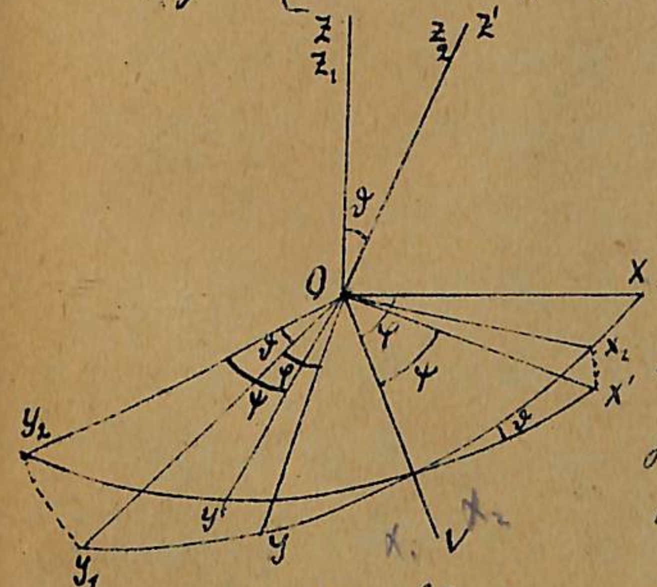
Նման բանաձևերը ստացվում են և այն դեպքի համար, երբ սիստեմները համընկնելու համար հին սիստեմը պետք է պտտել x-երի առանցքի շուրջը՝ ω'' անկյունով:

$$x = x'$$

$$y = y'\cos\omega'' - z'\sin\omega'' \quad (6'')$$

$$z = z'\sin\omega'' + z'\cos\omega''$$

Այժմ քննարկենք ընդհանուր դեպքը (նկար 30):



Նկար 30

Դիցուք, որ սիստեմի դիրքը հինի նկատմամբ որոշվում է երկրային անկյունների միջոցով՝ $XOV = \varphi$, $X'OV = \psi$ և $ZOZ' = \theta$: ընդունենք ևս երկու օժանդակ ուղղանկյուն սիստեմներ $X_1 Y_1 Z_1$ և $X_2 Y_2 Z_2$, որոնցից X_1 առանցքը համընկնում է OV-ի հետ, Y_1-ը գտնվում է XOY հարթության վրա և $\angle Y_1OV = \frac{\pi}{2}$ (հետևաբար $\angle Y_1OY = \varphi$) և Z_1-ը համընկնում է Z-ի հետ: X_2-ը համընկնում է նույնպես OV-ի հետ, Y_2-ը գտնվում է $X'OY'$ հարթության վրա և $\angle Y_2OV = \frac{\pi}{2}$ (հետևաբար $\angle Y_2OY' = \psi$)

և Z_{2} համընկնում է Z'-ի հետ։

Դժվար չէ հիմա նկարագրված սիստեմների հերթական դարձումները՝

ա) պտտելով (XYZ) սիստեմը Z առանցքի շուրջը φ անկյամբ, կարելի է համընկնել նրան $(X_1Y_1Z_1)$ սիստեմի հետ, որից խուսափել այս սիստեմներն ունեն մի ընդհանուր առանցք (Z կամ Z_1) իսկ մյուս առանցքները, գտնվելով մի հարթության (XOY) վրա, կազմում են φ անկյուն $(\angle XOV = \angle YOY_1 = \varphi)$։ Հետևաբար (6) բանաձևերի հիման վրա, կարող ենք գրել՝

$$
\begin{aligned}
x &= x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi \\
y &= x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi \qquad (7) \\
z &= z_1
\end{aligned}
$$

բ) Պտտելով $(X_1Y_1Z_1)$ սիստեմը X_1 (կամ OV) առանցքի շուրջը ϑ անկյամբ, կարելի է համընկնել նրան $(X_2Y_2Z_2)$ սիստեմի հետ. այսինքն այս սիստեմներն ունեն մի ընդհանուր առանցք (X_1). իսկ մյուս առանցքները, գտնվելով մի հարթության (ZOZ') վրա, կազմում են ϑ անկյուն $(\angle ZOZ' = \angle Y_1OY_2 = \vartheta)$։ Հետևաբար, (6'') բանաձևերի համաձայն ունենք՝

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_2 \\
y_1 &= y_2\cos\vartheta - z_2\sin\vartheta \qquad (7') \\
z_1 &= y_2\sin\vartheta + z_2\cos\vartheta
\end{aligned}
$$

գ) Պտտելով, վերջապես, $(X_2Y_2Z_2)$ սիստեմը Z_2 (կամ Z') առանցքի շուրջը ψ անկյան չափ, մենք կհամընկնենք $X_2Y_2Z_2$ սիստեմը $(X'Y'Z')$-ի հետ. այսինքն այս սիստեմներն ունեն մի ընդհանուր առանցք (Z_2). իսկ մյուս առանցքները, գտնվելով մի հարթության $(X'OY')$ վրա, կազմում են ψ անկյուն $(\angle X'OX_2 = \angle Y'OY_2 = \psi)$։

Հետևաբար, (6) բանաձևերի համաձայն ունենք՝

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x'\cos\psi - y'\sin\psi \\
y_2 &= x'\sin\psi + y'\cos\psi \qquad (7'') \\
z_2 &= z'
\end{aligned}
$$

Արտաքսելով (7') և (7'') բանաձևերից կոորդինատները (x_2, y_2, z_2), կստանանք՝

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x'\cos\psi - y'\sin\psi \\
y_1 &= x'\sin\psi\cos\vartheta + y'\cos\psi\cos\vartheta - z'\sin\vartheta \\
z_1 &= x'\sin\psi\sin\vartheta + y'\cos\psi\sin\vartheta + z'\cos\vartheta
\end{aligned}
$$

Տեղադրելով x_1, y_1 և z_1 արժեքները (7) հավասարումների մեջ, կստանանք՝

$$
\begin{aligned}
x &= x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta) - \\
&\quad - y'(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta) + z'\sin\varphi\sin\vartheta \\
y &= x'(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta) - y'(\sin\varphi\sin\psi - \\
&\quad - \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta) - z'\cos\varphi\sin\vartheta \qquad (8) \\
z &= x'\sin\psi\sin\vartheta + y'\cos\psi\sin\vartheta + z'\cos\vartheta
\end{aligned}
$$

(8) հավասարումները ներկայացնում են այն կապը,

Որը գտանք արդեն մեր և նոր կոորդինատների և φ, ψ և ϑ անկյունների միջև:

Համեմատելով այս բանաձևերը (2) բանաձևերի հետ, մենք կգտնենք ինը cosinus-ների արտահայտություն-ները φ, ψ և ϑ անկյունների միջոցով:

$$\cos\alpha_1 = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta$$
$$\cos\alpha_2 = -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta$$
$$\cos\alpha_3 = \sin\varphi\sin\vartheta$$
$$\cos\beta_1 = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta$$
$$\cos\beta_2 = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta \qquad (9)$$
$$\cos\beta_3 = -\cos\varphi\sin\vartheta$$
$$\cos\gamma_1 = \sin\psi\sin\vartheta$$
$$\cos\gamma_2 = \cos\psi\sin\vartheta$$
$$\cos\gamma_3 = \cos\vartheta$$

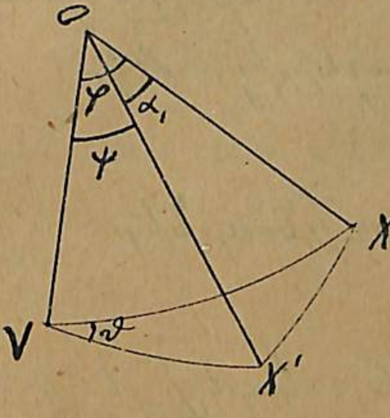
Ինչպես տեսնում ենք, ինը cosinus-ները բոլորն էլ են արտահայտված φ, ψ և ϑ անկյունների եռանկյու-նաչափական ֆունկցիաների միջոցով:

(9) հավասարությունները կոչվում են Euler-ի բանա-ձևեր:

Այս բանաձևերը միանգամից տալիս են սֆերիկ եռան-կյունաչափության հիմնական բանաձևը:

Իրոք, դիտենք այն եռանիստ անկյունը, որը կազ-մված է OX, OX' և OV կողերով (նկար 31):

Այդ հարթ անկյուններն են՝ $\angle XOV = \varphi$, $\angle X'OV = \psi$ և $\angle XOX' = \alpha_1$, իսկ երկնիստ անկյուններից հարկավոր է միայն OV կողի անկյունը:



Նկար 31

Այդ անկյունը հավասար է ϑ, որովհետև OZ ուղղահայաց է XOV հարթությանը, OZ'-ը՝ X'OV հարթությանը, իսկ $\angle ZOZ' = \vartheta$. Հետևաբար OV կողի երկնիստ անկյունը հավասար է ϑ-ի:

Եթե երևակայենք մեր եռանիստ անկյան O(XX'V) գագաթը մի գնդի կենտրոնում, ապա նրա մակերևույթի վրա կստանանք սֆերիկ եռանկյուն XX'V, (X, X' և V կողերի հատման կետերն են գնդի հետ) որի կողմերն են՝ $XV = \varphi$, $X'V = \psi$, $X'X = \alpha_1$ և անկյուններից հարկավոր է $XVX' = \vartheta$ անկյունը:

(9) բանաձևերից առաջինը տալիս է անկյան հանդիպակաց կողմի cosinus-ը՝

$$\cos\alpha_1 = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta$$

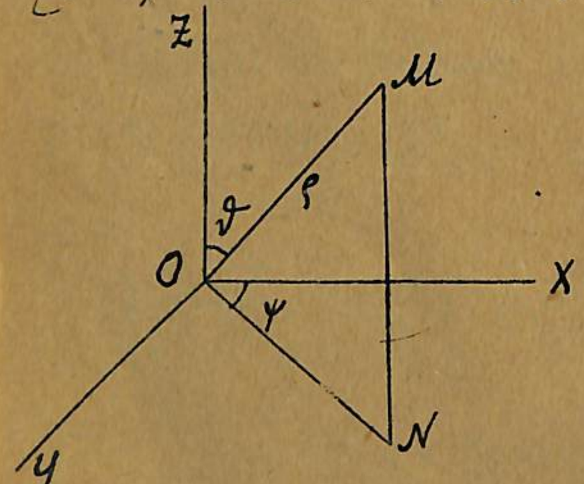
այսինքն, եթե սֆերիկ եռանկյան մեջ հայտնի են երկու կողմերը (φ և ψ) և նրանցով կազմված անկյունը (ϑ), ապա այդ անկյան հանդիպակաց կողմի cosinus-ը հավասար է այդ կողմերի cosinus-ների արտադրյալին հանած նրանց կողմերի sinus-ների արտադրյալը՝ բազմապատկած դրած անկյան cosinus-ով:

Այսպես բանաձևը ներկայացնում է սֆերիկ յեռանկյունաչափության հիմնական բանաձևերից մեկը:

§ 8. Բևեռային կոորդինատներ

Կետի դիրքը տարածության մեջ կարելի յե որոշել և մի այլ կոորդինատների միջոցով:

Վերցնենք տարածության մեջ մի ուղիղ անկյուն ZOX և OX առանցքով տանենք OZ-ին ուղղահայաց հարթություն XOY (նկ. 32): Դժվար չէ նկատել, որ կամայական կետի (M) դիրքը տարածության մեջ կարելի յե որոշել հետևյալ յերեք մեծությունների օգնությամբ՝ $OM = \rho$, որը ներկայացնում է դրած կետի հեռավորությունը մի հաստատուն կետից-բևեռից, $\angle MOZ = \vartheta$ և $\angle NOX = \psi$, ուր ON-ը ներկայացնում է OM-ի պրոյեկցիան XOY հարթության վրա:



Նկար 32

Իրոք, առաջին կոորդինատը առանցքին որոշում է մի

գնդի (սֆեր), որի կենտրոնը գտնվում է բևեռում, իսկ շառավիղը հավասար է ρ-ի: Յերկրորդ կոորդինատը (ϑ) որոշում է մի կոն, որի գագաթը գտնվում է բևեռում, իսկ ծնիչը (образующая, generatrice) OM կոնի առանցքի (OZ) հետ ϑ անկյուն է կազմում:

Յերրորդ կոորդինատը առանցքին (ψ) որոշում է մի հարթություն, որը դրած (NOZ) հարթության հետ ψ անկյուն է կազմում:

ρ և ϑ մեծություններով որոշվում են բոլոր այն կետերը, որոնք գտնվում են համաձայն վերտիկալ գնդի և կոնի վրա, հետևապես նրանց հատման գծի վրա: Այդ գիծը — շրջանագիծ է: Յեթե ρ և ϑ կոորդինատներին ավելացնում ենք և ψ կոորդինատը, այն ժամանակ նրանց միջոցով որոշվում է մի կետ. այդ կետն է — շրջանագծի և MON հարթության հատման կետը: Այսպիսով տեսնում ենք, որ ρ, ϑ և ψ կոորդինատները որոշում են մի կետ և միայն մեկը:

Այս կոորդինատները կոչվում են բևեռային կոորդինատներ:

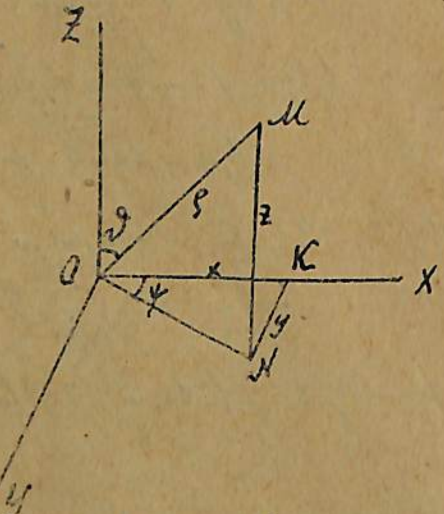
Որպեսզի նշած կոորդինատների օգնությամբ հնարավոր լինի որոշել տարածության յուրաքանչյուր կետի դիրքը, բավական է, որ ρ-ի փոփոխման սահմանները լինեն 0 և ∞, ϑ-ինը՝ $+\frac{\pi}{2}$ և $-\frac{\pi}{2}$, (դրական արժե-

Ները փոփոխվում են այն դեպքի համար երբ OM գտնվում է ZOY հարթության, որից, այս դեպքում. իսկ բացասական երը՝ հակառակ դեպքի համար). իսկ φ անկյան սահմանները լինեն 0 և 2π:

Արտահայտենք փոխել կետի ուղղանկյուն կոորդինատները բևեռային կոորդինատների միջոցով:

Ընդունենք բևեռը իբրև սկզբնակետ ուղղանկյուն կոորդինատների սիստեմի համար, OZ և OX առանցքները ընդունենք իբրև Z-երի և X-երի առանցքներ և դրանից OX-ից դեպի OY ուղղահայաց XOZ հարթությանը՝ ընդունենք այդ (OY) իբրև Y-ների առանցք:

Այժմ փոփոխելով մի կամավոր կետ M, կառուցենք նրա ուղղանկյուն և բևեռային կոորդինատները (նկ. 33):



Նկար 33

Ինչպես նկարից երևում է, ունենք՝

$x = OK$, $y = KN$, $z = NM$

$\rho = OM$, $\vartheta = \angle MOZ$, $\varphi = \angle KON$:

OMN ուղղանկյուն եռանկյունից ունենք՝

$z = NM = OM \cdot \cos O\hat{M}N = \rho \cdot \cos\vartheta$

$ON = OM \sin O\hat{M}N = \rho \sin\vartheta$

իսկ OKN եռանկյունից ունենք՝

$$x = OK = ON\cos\varphi = \rho\sin\vartheta\cos\varphi \qquad (1)$$

$$y = KN = ON\sin\varphi = \rho\sin\vartheta\sin\varphi:$$

(1) հավասարումներում ուղղանկյուն կոորդինատները արտահայտված են բևեռային կոորդինատների միջոցով:

Լուծենք և հակադարձ խնդիրը:

Բարձրացնենք (1) հավասարումները քառակուսի և գումարենք, կստանանք՝

$$x^2+y^2+z^2 = \rho^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\vartheta =$$

$$= \rho^2\sin^2\vartheta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) + \rho^2\cos^2\vartheta =$$

$$= \rho^2\sin^2\vartheta + \rho^2\cos^2\vartheta = \rho^2 \quad \text{կամ}$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (2')$$

Գումարելով x^2 և y^2 արտահայտությունները, ունենք՝

$$x^2+y^2 = \rho^2\sin^2\vartheta \quad \text{կամ}$$

$$\rho\sin\vartheta = \sqrt{x^2+y^2}$$

Բաժանելով z արտահայտության վրա, կստանանք

$$\frac{\rho\sin\vartheta}{\rho\cos\vartheta} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \quad \text{կամ} \quad tg\vartheta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \qquad (2'')$$

Վերջապես բաժանելով y-ի արտահայտությունը x-ի վրա, կստանանք՝

$$tg\varphi = \frac{y}{x} \qquad (2''')$$

(2'), (2'') և (2''') հավասարությունները բևեռային կոորդինատներն արտահայտում են ուղղանկյուն կոորդինատների միջոցով:

Խնդիր. [illegible] են լինելու [illegible] ուղղանկյուն հարթությունները՝

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$
$$A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0$$

ընդունենք այս հարթությունները իբրև նոր կոորդինատային հարթություններ, որոնցից կամավոր կետի նոր կոորդինատները հետևյալ ձևով:

Դիցուք դրանց հարթություններից առաջինն ընդունված է իբրև $(z'y')$ կոորդինատային հարթություն, երկրորդը՝ իբրև $(x'z')$ հարթություն, և վերջապես երրորդը իբրև $(x'y')$ հարթություն: Անհրաժեշտ է մի կետի (որի հին կոորդինատներն են x, y, z) նոր կոորդինատները x', y' և z', դժվար չէ, որ x' կոորդինատը հավասար է (x, y, z) կետի հեռավորությանը $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ հարթությունից, y' կոորդինատը հավասար է (x, y, z) կետի հեռավորության $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ և այլն:

Հետևապես կետի նոր կոորդինատների համար ստացվում են հետևյալ արտահայտությունները (տես խնդիր 3. եջ 39):

$$x' = \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

$$y' = \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$z' = \frac{A_3x + B_3y + C_3z + D_3}{\pm\sqrt{A_3^2 + B_3^2 + C_3^2}}$$

Այս արտահայտությունների նշանները պետք է ընտրել նոր կոորդինատային առանցքների ուղղությունների համաձայն:

Գլուխ Ե

Երկրորդ կարգի մակերևույթներ:

§ 9. Գնդի մակերևույթը:

1. Գնդի մակերևույթի հավասարումը ուղղանկյուն համար, օգտված է գնդի երկրաչափական սահմանումից: Ինչպես գիտենք, գնդի մակերևույթը ներկայացնում է երկրաչափական տեղ այն կետերի, որոնց միջնակետ հեռավորությունը մի հաստատուն կետից, որը կոչվում է կենտրոն: Գնդի դիրքը և մեծությունը որոշվում են նրա կենտրոնը և շառավիղը: Դիցուք կենտրոնը գտնված է (a, b, c) կետում և շառավիղը հավասար է R: Ընտրելով գնդի մակերևույթի վրա մի կամավոր կետ (x, y, z), հաշվենք նրա հեռավորությունը (a, b, c) կետից, այսինքն կենտրոնից: Այդ հեռավորությունը հավասար է ընդունել R-ի: Այսպիսով գնդի մակերևույթի համար ստանում ենք հետևյալ հավասարումը

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2 \qquad (1)$$

Ստանալով, երբ գնդի կենտրոնը գտնվում է

ենթադրելով, որ հավասարումը լինի՝

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \qquad (1')$$

ինչպես տեսանք մեկ գնդի (մակերևույթի) հավասարումը երկրորդ աստիճանի հավասարում է:

Հեշտ չէ ապացուցել, որ յուրաքանչյուր երկրորդ աստիճանի հավասարում (x, y և z փոփոխականների նկատմամբ) ներկայացնում է գունդ, եթե գործակիցները բավարարում են որոշ պայմանների: Ուշադրությամբ դիտելով (1) և (1') հավասարումները, նկատում ենք, որ x^2, y^2 և z^2 գործակիցները հավասար են և xy, xz և yz գործակիցները հավասար են զերոյի: Արդեն ապացուցենք, որ եթե նշված պայմանները բավարարված են, այդ երկրորդ աստիճանի հավասարումը ներկայացնում է մակերևույթ գնդի:

Դիցուք տված հավասարումն է

$$ax^2+ay^2+az^2+bx+cy+dz+e=0 \qquad (2)$$

բաժանենք այս հավասարումը a-ի, և երկու մասերին ավելացնենք՝ $\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{2a}\right)^2+\left(\frac{d}{2a}\right)^2$, կստանանք՝

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+y^2+\frac{c}{a}y+\left(\frac{c}{2a}\right)^2+z^2+\frac{d}{a}z+\left(\frac{d}{2a}\right)^2=$$
$$=\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{2a}\right)^2+\left(\frac{d}{2a}\right)^2-\frac{e}{a}$$

կամ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(y+\frac{c}{2a}\right)^2+\left(z+\frac{d}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{2a}\right)^2+\left(\frac{d}{2a}\right)^2-\frac{e}{a}$

Համեմատելով այս հավասարումը (1)-ի հետ, տեսնում ենք, որ ներկայացնում է մի գունդ, որի կենտրոնը գտնվում է $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{c}{2a}, -\frac{d}{2a}\right)$ կետում և շառավիղի քառակուսին

հավասար է՝ $\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{2a}\right)^2+\left(\frac{d}{2a}\right)^2-\frac{e}{a}$

Այսպիսով ապացուցված է, որ յուրաքանչյուր երկրորդ աստիճանի հավասարում x, y և z-ի նկատմամբ ներկայացնում է գնդի մակերևույթ, եթե x^2-ի, y^2-ի և z^2-ի գործակիցները հավասար են, իսկ xy-ի, yz-ի և zx-ի գործակիցները հավասար են զերոյի:

2. Գտնենք (2) գնդի հատման գիծը կոորդինատային հարթությունների հետ: Տեղադրելով (2) հավասարման մեջ $x=0$, գտնում ենք հատման գիծը (yz) հարթության հետ՝

$$ay^2+az^2+cy+dz+e=0 \qquad (3)$$

Սա ներկայացնում է մի շրջանագիծ (yz) հարթության վրա:

Նման ձևով կապացուցենք, որ գնդի և $x=h$ հարթության հատման գիծը նույնպես շրջանագիծ է՝

$$ay^2+az^2+cy+dz+(ah^2+bh+e)=0,$$

որը գտնվում է $x=h$ հարթության վրա:

Հարմարեցնելով յուրաքանչյուր հարթություն կարող ենք ընդունել իբրև (yz) հարթությանը կամ $x=h$ հարթությանը, ապա կարող ենք ասել, որ գնդի և կամայական հարթության հատման գիծը շրջանագիծ է. սակայն այդ շրջանագծի շառավիղը կարող է և կեղծ լինել (երբ հարթությունը չի հանդիպում շրջանագծին) և հավասար լինել զերոյի:

3. Վերցնենք երկու գունդ՝

$$S_1 = x^2+y^2+z^2+a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$S_2 = x^2+y^2+z^2+a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \qquad (4)$$

կազմենք հետևյալ հավասարումը՝

$$S_1 - kS_2 = 0 \qquad (5)$$

որը k փոխել կամայական մեծություն է: Այս հավասարումն էլ նույնպես գունդ է ներկայացնում, որովհետև նրա գործակիցները բավարարում են վերոհիշյալ պայմաններին:

Այն բոլոր կետերը, որոնք միաժամանակ գտնվում են $S_1=0$ և $S_2=0$ գնդերի վրա, գտնվում են և $S_1-kS_2=0$ գնդի վրա, ինչ թիվ էլ հավասար լինի k-ն:

Ուրեմն երբ k-ն փոփոխական է, այս (5) հավասարումը ներկայացնում է գնդերի փունջ, որոնք անցնում են $S_1=0$ և $S_2=0$ գնդերի հատման գծով:

Վերցնենք այն մասնավոր դեպքը, երբ $k=1$. ստանում ենք

$$S_1-S_2=(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)z+(d_1-d_2)=0 \qquad (6)$$

Այս հավասարումը ներկայացնում է մի հարթություն, որը նույնպես անցնում է $S_1=0$ և $S_2=0$ գնդերի հատման գծով. որից հետևում, (6) հարթությունը S_1 և S_2 գնդերը մի ընդհանուր գիծ ունեն. բայց որովհետև գնդի և հարթության հատման գիծը – շրջանագիծ է, ուստի S_1 և S_2

հատման գիծը նույնպես շրջանագիծ է:

Ուրեմն, երբ երկու գունդ (S_1 և S_2) հատվում են, ապա նրանց հատման գիծը գտնվում է մի հարթության վրա ($S_1-S_2=0$) և ներկայացնում է շրջանագիծ:

4. Գնդի շոշափող հարթությունը.

Վերցնենք

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0 \qquad (1)$$

Գնդի վրա երկու կետ՝ (x_1,y_1,z_1) և (x_2,y_2,z_2):

Այս կետերի կոորդինատները հետևաբար բավարարում են (1) հավասարմանը՝

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+ax_1+by_1+cz_1+d=0 \qquad (2')$$
$$x_2^2+y_2^2+z_2^2+ax_2+by_2+cz_2+d=0 \qquad (2'')$$

Հանելով (2')-ից (2'') հավասարումը, կստանանք՝

$$(x_1-x_2)(x_1+x_2+a)+(y_1-y_2)(y_1+y_2+b)+$$
$$+(z_1-z_2)(z_1+z_2+c)=0 \qquad (3)$$

Այժմ գրած երկու կետերով անցնենք ուղիղ գիծ. նրա հավասարումը կլինի

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{z-z_1}{z_1-z_2} \qquad (4)$$

Երբ (3) հավասարության մեջ x_1-x_2, y_1-y_2 և z_1-z_2 տարբերությունները փոխարինենք նրանց համեմատականներով՝ $x-x_1$, $y-y_1$, $z-z_1$, որը x, y, z ներկայացնում են (4) գծի կամայական կետի կոորդինատները, ապա կստանանք մի հարթություն, որին անհրաժեշտ պատկանում է (4) ուղիղ գիծը։ Այդ հարթության հավասարումն է ուրեմն՝

$$(x - x_1)(x_1 + x_2 + a) + (y - y_1)(y_1 + y_2 + b) + \\ + (z - z_1)(z_1 + z_2 + c) = 0^{x)} \qquad (5)$$

Անցնելով այս հավասարման մեջ $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ և $z_2 = z_1$, կստանանք՝

$$(x - x_1)(2x_1 + a) + (y - y_1)(2y_1 + b) + \\ + (z - z_1)(2z_1 + c) = 0, \qquad (6)$$

որը ներկայացնում է գնդի շոշափող հարթության հավասարումը

---

x) Կարելի է և ուրիշ ձևով ապացուցել, որ (4) ուղիղ գիծը գտնվում է (5) հարթության վրա։ Իրոք, նախ և առաջ նրանք ունեն մի ընդհանուր կետ՝ (x_1, y_1, z_1)։ Բացի այդ, եթե մի կամավոր կետ՝ (x', y', z') գտնվում է (4) ուղիղ գծի վրա, ապա կունենք

$$\frac{x' - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y' - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z' - z_1}{z_1 - z_2}, \qquad (4)$$

այս նույն կետի կոորդինատները կբավարարեն և (5) հավասարման։ Իրոք, (3) և (4) հավասարություններից հետևում է՝

$$(x' - x_1)(x_1 + x_2 + a) + (y' - y_1)(y_1 + y_2 + b) + (z' - z_1)(z_1 + z_2 + c) = 0$$

Իսկ սա նշանակում է, որ (x', y', z') կետը (5) հարթության վրա է գտնվում։ Ուրեմն (4) ուղիղ գիծը (5) հարթության վրա է գտնվում։

(x_1, y_1, z_1) կետում։

Հիրավի, այս դեպքում (երբ $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$) (4) հավասարումը ներկայացնի շոշափող, և փոխանակ (5) հարթության մեջ գտնվելու է (4) ուղիղ գիծը, ապա (6) հավասարումը ներկայացնում է գնդի շոշափող հարթությունը $(x_1\ y_1\ z_1)$ կետում։ Նույն կետում անցնող գնդի նորմալը կլինի՝

$$\frac{x - x_1}{2x_1 + a} = \frac{y - y_1}{2y_1 + b} = \frac{z - z_1}{2z_1 + c}$$

§ 10. Երկրորդ կարգի մակերևույթների կենտրոնը, տրամագծային հարթությունները և տրամագծերը։

1. Ինչպես գիտենք, գնդի մակերևույթի հավասարումը երկրորդ աստիճանի է, որի գործակիցները բավարարում են որոշ պայմանների։

Այժմ վերցնենք մի հավասարում նույնպես երկրորդ աստիճանի (x, y և z նկատմամբ), որի գործակիցները որևէ առանձնահատկություն չեն ներկայացնում և ուսումնասիրենք նման հավասարումներով արտահայտված մակերևույթների ընդհանուր հատկությունները։

Երկրորդ աստիճանի հավասարումը ընդհանուր ձևով կարելի է այսպես ներկայացնել՝

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + Axy + Byz + Czx + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

կամ

$$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz +$$
$$+ 2a_{13}zx + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (1)$$

Մեր հետագա նպատակների համար ավելի հարմար է գրել նույն ձևը:

2. Դիցուք ունենք այն մասնավոր դեպքը, երբ $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$. Դժվար չէ նկատել, որ այս դեպքում մակերևույթը կենտրոնի հատկություններ ունի, այսինքն կոորդինատների սկզբնակետը, որ անվանում է մակերևույթով, կենտրոն կոչվում է:

Իրոք, եթե (x', y', z') կետը գտնված է այդ մակերևույթի վրա, ապա $(-x', -y', -z')$ կետը նույնպես գտնված է նույն մակերևույթի վրա, որովհետև եթե x', y' և z' թվերը բավարարում են մակերևույթի հավասարմանը, ապա $-x', -y'$ և $-z'$ նույնպես կբավարարեն այդ հավասարմանը:

3. Դիցուք հիմա (1) մակերևույթը ունի կենտրոն և նա գտնված է (a, b, c) կետում: Տեղափոխենք կոորդինատների սկզբնակետը (a, b, c) կետը, թողնելով առանցքների ուղղությունը անփոփոխ: Ինչպես հայտնի է, այս դեպքում նոր կոորդինատները (x', y', z') հետևյալ ձևով են արտահայտված.

$$x = x' + a$$
$$y = y' + b$$
$$z = z' + c$$

Արտահայտենք (1) մակերևույթը նոր կոորդինատներով. կստանանք

$$a_{11}(x'+a)^2 + a_{22}(y'+b)^2 + a_{33}(z'+c)^2 + 2a_{12}(x'+a)(y'+b) +$$
$$+ 2a_{23}(y'+b)(z'+c) + 2a_{13}(z'+c)(x'+a) + 2a_{14}(x'+a) +$$
$$+ 2a_{24}(y'+b) + 2a_{34}(z'+c) + a_{44} = 0$$

կամ

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{23}y'z' + 2a_{13}z'x' +$$
$$+ \Big[2(a_{11}a + a_{12}b + a_{13}c + a_{14})x' + 2(a_{21}a + a_{22}b + a_{23}c + a_{24})y'\,{}^{*)} +$$
$$+ 2(a_{31}a + a_{32}b + a_{33}c + a_{34})z'\Big] +$$
$$+ (a_{11}a^2 + a_{22}b^2 + a_{33}c^2 + 2a_{12}ab + 2a_{23}bc + 2a_{13}ac +$$
$$+ 2a_{14}a + 2a_{24}b + 2a_{34}c + a_{44}) = 0$$

և կամ

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{23}y'z' + 2a_{13}z'x' +$$
$$+ 2f'_a x' + 2f'_b y' + 2f'_c z' + f(a,b,c) = 0 \quad (2)$$

ուր

$$f'_x = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad f'_y = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad f'_z = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z},$$

իսկ f'_a, f'_b, f'_c և $f(a,b,c)$ արտահայտությունները f'_x, f'_y, f'_z և $f(x,y,z)$-ն են, որոնց մեջ x, y և z-ը փոխարինված են a, b և c-ով:

(2) հավասարումը, որտեղ արտահայտված է նույն (1) մակերևույթը, բայց այլ կոորդինատների սիստեմի նկատմամբ...

---

*) ուր $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$ և այլն:

ճամբ, որի սկզբնակետը գտնվում է համակարգի կենտրոնում:

Հետևաբար (2) հավասարումից մեզ x', y' և z' գործակիցները հավասար պիտի լինեն զրոյի, այսինքն՝

$$
\begin{aligned}
f'_a &= a_{11}a + a_{12}b + a_{13}c + a_{14} = 0 \\
f'_b &= a_{21}a + a_{22}b + a_{23}c + a_{24} = 0 \qquad (3)\\
f'_c &= a_{31}a + a_{32}b + a_{33}c + a_{34} = 0
\end{aligned}
$$

Այս հավասարումներից երևում է, որ (1) համակարգի կենտրոնի կոորդինատները բավարարում են հետևյալ հավասարումներին, այսինքն՝

$$f'_x = 0 \quad f'_y = 0 \quad f'_z = 0 \qquad (3')$$

կամ

$$
\begin{aligned}
a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} &= 0 \\
a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} &= 0 \qquad (3'')\\
a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} &= 0
\end{aligned}
$$

Այս հավասարումներից յուրաքանչյուրը ներկայացնում է հարթություն, և կենտրոնը որոշվում է իբրև երեք հարթությունների հատման կետ: Բայց երեք հարթություն միշտ մի կետում չեն հատվում: Ինչպես 41 և 42 էջերում տեսանք, կարող են լինել միայն հետևյալ ձևական դեպքերը՝

ա) հարթությունները զուգահեռ են. հետևաբար հատման կետը անվերջ հեռու է:

բ) հարթությունները մի ընդհանուր գիծ ունեն:

Ուրեմն, երկրորդ կարգի համակարգը կամ ունի մի կենտրոն, կամ ոչ մի կենտրոն չունի, կամ ունի անվերջ թվով կենտրոններ, որոնք մի ուղիղ գծի վրա են գտնվում:

Ինչպես (3″) հավասարումներից երևում է, կենտրոնը կլինի վերջավոր հեռավորության վրա, եթե

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

և կենտրոնը կլինի անվերջ, եթե բացի $D = 0$, բավարարում են նաև հետևյալ հավասարումները՝

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{13} \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} \\ a_{34} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{13} \\ a_{21} & a_{24} & a_{23} \\ a_{31} & a_{34} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} = 0$$

Ուրեմն, եթե $D \neq 0$, համակարգն ունի մի կենտրոն. այս դեպքում համակարգը կոչվում է <u>կենտրոնական</u>:

Եթե $D = 0$ և D_1, D_2 և D_3 դետերմինանտներից գոնե մեկը հավասար չէ զրոյի, այս կենտրոնը կլինի անվերջ հեռու:

3. <u>Տրամագծային հարթություն.</u>

Նախ գտնենք, թե ինչպես գտնել ուղիղ գծի և երկրորդ կարգի համակարգի հատման կետերը:

Դիցուք տված ուղիղ գիծն է

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} = t \qquad (4)$$

Թող երկրորդ կարգի մակերևույթը՝

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (1)$$

Ուղիղ գծի ընթացիկ կոորդինատները արտահայտենք t-ի միջոցով, օգտվելով (4) հավասարումներից:

Այսպիսով՝

$$x = a + lt,\ y = b + mt,\ z = c + nt \qquad (5)$$

Տալով t-ին կամայական արժեքներ, մենք ստանում ենք ուղիղ գծի կետերի կոորդինատները, այսինքն, t-ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է մի կետ ուղիղ գծի վրա:

Եթե (x, y, z) կետը գտնվելու է նաև ուղիղ մակերևույթի վրա, ապա այդ կետի կոորդինատների արժեքները բավարարելու են մակերևույթի հավասարմանը: Ուրեմն $f(a+lt, b+mt, c+nt)$ պիտի հավասար լինի զրոյի:

Կատարելով անհրաժեշտ ձևափոխությունները, կստանանք՝

$$f(a+lt, b+mt, c+nt) = Mt^2 + 2Nt + P = 0 \qquad (6)$$

որտեղ $M = a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{23}mn + 2a_{31}nl$

$$N = lf'_a + mf'_b + nf'_c$$

$$P = f(a, b, c)^{x)}$$

---

x) Տե՛ս էջ 113, (2) հավասարությունը, որտեղ $x' = lt,\ y' = mt,\ z' = nt$.

Լուծելով (6) հավասարումը t-ի նկատմամբ, կստանանք նրա երկու արմատները t_1 և t_2, որոնք համապատասխանում են հատման երկու կետերին: Տեղադրելով t_1 և t_2 արժեքները (5) հավասարումների մեջ, կգտնենք հատման կետերը ուղիղ գծի և մակերևույթի՝

$$x_1 = a + lt_1,\ y_1 = b + mt_1,\ z_1 = c + nt_1$$

և

$$x_2 = a + lt_2,\ y_2 = b + mt_2,\ z_2 = c + nt_2 \qquad (7)$$

Ուղիղ գծի այն հատվածը, որը գտնվում է (x_1, y_1, z_1) և (x_2, y_2, z_2) կետերի միջև մակերևույթի նկատմամբ կոչվում է լար:

Դիցուք (a, b, c) կետը այդ լարի միջնակետն է և գտնենք, թե ինչ հավասարման են բավարարում այդ կետի կոորդինատները, երբ լարը տեղափոխվում է, մնալով իրեն զուգահեռ:

Եթե (a, b, c) կետը լարի միջնակետն է, ապա՝

$$a = \frac{x_1 + x_2}{2},\ b = \frac{y_1 + y_2}{2},\ c = \frac{z_1 + z_2}{2} \qquad (8)$$

Իսկ գումարելով (7) հավասարությունները, կստանանք՝

$$x_1 + x_2 = 2a + l(t_1 + t_2),\ y_1 + y_2 = 2b + m(t_1 + t_2),$$

$$z_1 + z_2 = 2c + n(t_1 + t_2)$$

Բաժանելով 2-ի, կստանանք՝

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = a + \frac{l(t_1 + t_2)}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2} = b + \frac{m(t_1 + t_2)}{2},$$

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = c + \frac{n(t_1 + t_2)}{2}$$

Այս հավասարությունները (8) հավասարությունների շնորհիվ պայման է՝

$$t_1 + t_2 = 0$$

(կորագծերի միաժամանակ l, m և n չեն կարող զրո լինել)։

Իսկ երբ (6) քառակուսի հավասարման արմատների գումարը հավասար է զրոյի, այսպես որ՝

$$N = l f'_a + m f'_b + n f'_c = 0 \quad \text{կամ}$$

$$l(a_{11}a + a_{12}b + a_{13}c + a_{14}) + m(a_{21}a + a_{22}b + a_{23}c + a_{24}) + n(a_{31}a + a_{32}b + a_{33}c + a_{34}) = 0$$

Որից հետևում, երբ մակերևույթի լարերին ունեն l, m, n ուղղության գործակիցները (որոնք լարերի հետ կապված են), այդ դեպքում լարի միջնակետերի կոորդինատները բավարարում են հետևյալ հավասարման

$$l f'_x + m f'_y + n f'_z = 0 \qquad (9)$$

կամ $$l(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + m(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) + n(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}) = 0 \qquad (9')$$

Հետևաբար այդ լարերի միջնակետերը գտնվում են (9) կամ (9') հարթության վրա։

(9) հարթությունը կոչվում է (l, m, n) ուղղության համապատասխան <u>տրամագծային հարթություն</u>։

Տրամագծային հարթությունը, ինչպես այդ իր (9) հավասարումից երևում է, անցնում է մակերևույթի կենտրոնով, երբ մակերևույթը կենտրոն ունի։

4. <u>Համալուծ տրամագծային հարթություններ</u>։

Դիցուք ունենք երկու լար. Մեկի ուղղության գործակիցներն են l, m, n, իսկ մյուսինը՝ l', m', n'։ Առաջինի համապատասխան տրամագծային հարթությունը կլինի

$$l f'_x + m f'_y + n f'_z = 0 \qquad (10)$$

կամ $$l(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + m(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) + n(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}) = 0 \qquad (10')$$

և կամ $$(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n)x + (a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n)y + (a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n) + (a_{41}l + a_{42}m + a_{43}n) = 0 \qquad (10'')$$

Իսկ երկրորդի համապատասխան տրամագծային հարթությունը կլինի

$$(a_{11}l' + a_{12}m' + a_{13}n')x + (a_{21}l' + a_{22}m' + a_{23}n')y + (a_{31}l' + a_{32}m' + a_{33}n') + (a_{41}l' + a_{42}m' + a_{43}n') = 0 \qquad (11)$$

Որպեսզի առաջին լարը (l, m, n ուղղության գործակիցներ ունեցող) զուգահեռ լինի երկրորդ տրամագծային հարթությանը, պետք է որ տեղի ունենա հետևյալ հավասարությունը՝

$$(a_{11}l' + a_{12}m' + a_{13}n')l + (a_{21}l' + a_{22}m' + a_{23}n')m + (a_{31}l' + a_{32}m' + a_{33}n')n = 0$$

Բայց այս հավասարությունը կարելի է և այսպես արտագրել՝

$$(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n)l' + (a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n)m' + (a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n)n' = 0,$$

որից հետևում է, երկրորդ լարը և առաջին տրամագծային հարթության զուգահեռ լինենք:

Այսպիսով ստանում ենք երկու տրամագծային հարթությունները (10) և (11), որոնցից յուրաքանչյուրը կիսում է մյուսին զուգահեռ լարերը:

Այսպիսի տրամագծային հարթությունները կոչվում են համալուծ տրամագծային հարթություններ:

Երկու համալուծ տրամագծային հարթությունների վրա կարելի է գծել մի-մի տրամագծեր, որոնք լինեն զուգահեռ այդ տրամագծային հարթությունների կիսող լարերին:

Տրամագծերը այս դեպքում կոչվում են համալուծ տրամագծեր: Համալուծ տրամագծերին զուգահեռ լարերը կիսվում են այդ տրամագծերով անցնող համալուծ տրամագծային հարթություններով:

5. Գլխավոր տրամագծային հարթություններ

Ենթադրենք, l, m, n անկյունային գործակիցներով ուղիղ լարերը կիսվում են մի տրամագծային հարթությամբ, որի հավասարումն է՝

$$l f'_x + m f'_y + n f'_z = 0$$

կամ

$$(a_{11} l + a_{12} m + a_{13} n)x + (a_{21} l + a_{22} m + a_{23} n)y +$$
$$+ (a_{31} l + a_{32} m + a_{33} n)z + (a_{41} l + a_{42} m + a_{43} n) = 0 \quad (12)$$

Այս հարթության անկյունային գործակիցներն են՝

$$a_{11} l + a_{12} m + a_{13} n, \quad a_{21} l + a_{22} m + a_{23} n,$$
$$a_{31} l + a_{32} m + a_{33} n$$

Այն տրամագծային հարթությունը, որն ուղղահայաց է իր համապատասխան լարերին, կոչվում է գլխավոր տրամագծային հարթություն:

Որոշենք մակերևույթի գլխավոր տրամագծային հարթությունները: Դիցուք գլխավոր տրամագծային հարթությանը համապատասխանում են l, m, n անկյունային գործակիցներով ուղիղ լարերը: Քանի որ այդ լարերը ուղղահայաց են, համապատասխան տրամագծային հարթության անկյունային գործակիցները պետք է համեմատական լինեն, ապա պետք է տեղի ունենան հավասարությունները՝

$$\frac{a_{11} l + a_{12} m + a_{13} n}{l} = \frac{a_{21} l + a_{22} m + a_{23} n}{m} = \frac{a_{31} l + a_{32} m + a_{33} n}{n} \quad (13)$$

Այս հավասարություններից պետք է որոշել l, m, n անհայտները: Նշանակելով $\frac{a_{11} l + a_{12} m + a_{13} n}{l} = s$, ստանում ենք հետևյալ երեք համասեռ հավասարումները՝

$$(a_{11} - s) l + a_{12} m + a_{13} n = 0$$
$$a_{21} l + (a_{22} - s) m + a_{23} n = 0 \quad (14)$$
$$a_{31} l + a_{32} m + (a_{33} - s) n = 0$$

Քանի որ այս հավասարումների ընդհանուր լուծման համար անհրաժեշտ է.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - s & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - s \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

Այս հավասարումը համարվում է s-ի նկատմամբ լուծելով կախումն է ցերեք արմատ Տ-ի համար՝ S_1, S_2 և S_3:

Յուրաքանչյուր որոշիչի կարելի է ապացուցել, որ նրա արմատները բոլորն էլ իրական են, անկախ a_{11}, a_{12}, a_{13} և այլ գործակիցների արժեքներից:

Տեղադրելով Տ արժեքները (14) հավասարումների մեջ, մենք կգտնենք ստացվեն l, m և n. Նշանակում է այդ կախումն է գլխավոր ուղղությունների հարթությունների հավասարումները ((12) հավասարումը):

Երբ համակարգը Տ-ի համար ապացուցած է ցերեք արմատ, ապա երկրորդ կարգի մակերևույթները առհասարակ ունեն ցերեք գլխավոր ուղղությունների հարթություններ:

Գլխավոր ուղղությունների հարթություններից մեկը կլինի անվերջ հեռու, եթե $S = 0$: Իրոք այս դեպքում, ինչպես այդ երևում է (13) հավասարություններից, հարթության անվերջանալի գործակիցները ($a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n$, $a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n$ և այլն) հավասար կլինեն զերոյի. հետևաբար (12) հավասարումը ներկայացնում է անվերջ հեռու հարթություն:

Բայց եթե $S = 0$, (15) դետերմինանտը դառնում է

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

այսինքն մակերևույթի կենտրոնը անվերջ հեռու է:

Հետազոտությունները ցույց են տալիս, որ (15) հավասա—

րումը առնվազն մի արմատ ունի զերոյից տարբեր:

Հետևաբար երկրորդ կարգի մակերևույթը առնվազն մի գլխավոր ուղղության հարթություն ունի:

§ 11. Երկրորդ կարգի մակերևույթի շոշափող հարթությունը և նորմալը:

1. Երկրորդ կարգի մակերևույթի վրա վերցնենք երկու կետ (x_1, y_1, z_1) և (x_2, y_2, z_2):

Այս կետերով անցնող ուղիղ գծի հավասարումը կլինի

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2} \qquad (1)$$

Երբ (x_2, y_2, z_2) կետը անվերջ մոտենում է (x_1, y_1, z_1) կետին համընկնելով նրա հետ, այդ դեպքում (1) հավասարումը կներկայացնի մակերևույթի շոշափողը:

(x_1, y_1, z_1) և (x_2, y_2, z_2) կետերը գտնվում են մակերևույթի վրա, ապա նրանց կոորդինատները բավարարում են մակերևույթի հավասարմանը, այսինքն՝

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}y_1^2 + a_{33}z_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + 2a_{23}y_1z_1 + 2a_{13}x_1z_1 + 2a_{14}x_1 + 2a_{24}y_1 + 2a_{34}z_1 + a_{44} = 0$$

$$(2)$$

և

$$a_{11}x_2^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}z_2^2 + 2a_{12}x_2y_2 + 2a_{23}y_2z_2 + 2a_{13}x_2z_2 + 2a_{14}x_2 + 2a_{24}y_2 + 2a_{34}z_2 + a_{44} = 0$$

Հանելով առաջին հավասարումից երկրորդը, կստանանք

$$a_{11}(x_1^2 - x_2^2) + a_{22}(y_1^2 - y_2^2) + a_{33}(z_1^2 - z_2^2) +$$

$$+2a_{12}(x_1y_1-x_2y_2)+2a_{23}(y_1z_1-y_2z_2)+2a_{13}(x_1z_1-x_2z_2)+$$
$$+2a_{14}(x_1-x_2)+2a_{24}(y_1-y_2)+2a_{34}(z_1-z_2)=0$$

Բայց փոխելով $x_1y_1-x_2y_2=x_1y_1-x_1y_2+x_1y_2-x_2y_2=$ $=x_1(y_1-y_2)+y_2(x_1-x_2)$, այդ նախորդ հավասարությունը կարելի է այսպես գրել՝

$$(x_1-x_2)\left[a_{11}(x_1+x_2)+2a_{12}y_2+2a_{13}z_1+2a_{14}\right]+$$
$$+(y_1-y_2)\left[2a_{21}x_1+a_{22}(y_1+y_2)+2a_{23}z_2+2a_{24}\right]+ \quad (3)$$
$$+(z_1-z_2)\left[2a_{31}x_1+2a_{32}y_1+a_{33}(z_1+z_2)+2a_{34}\right]=0$$

Այս հավասարության մեջ x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2 փոխարինենք (1) հավասարման կետի համեմատական կոորդինատները՝ $x-x_1$, $y-y_1$, $z-z_1$, որ (x,y,z) կետը (1) այլ մի ընթացիկ կետն է. այնժամ կգա՝

$$(x-x_1)\left[a_{11}(x_1+x_2)+2a_{12}y_2+2a_{13}z_1+2a_{14}\right]+$$
$$+(y-y_1)\left[2a_{21}x_1+a_{22}(y_1+y_2)+2a_{23}z_2+2a_{24}\right]+ \quad (4)$$
$$+(z-z_1)\left[2a_{31}x_2+2a_{32}y_1+a_{33}(z_1+z_2)+2a_{34}\right]=0$$

(4) հավասարումը ներկայացնում է հարթություն, որը անցնում է (1) մակերևույթի վրա և փոխվելով մոտենալով (x_2,y_2,z_2) կետը համընկնում է (x_1,y_1,z_1) կետին և սահմանային դեպքում (4) հավասարումը կդառնա, (որ x_2, y_2, z_2 փոխվում են x_1, y_1, z_1-ով), այս տեսքը՝

$$(x-x_1)(2a_{11}x_1+2a_{12}y_1+2a_{13}z_1+2a_{14})+$$
$$+(y-y_1)(2a_{21}x_1+2a_{22}y_1+2a_{23}z_1+2a_{24})+ \quad (5)$$

$$+(z-z_1)(2a_{31}x_1+2a_{32}y_1+2a_{33}z_1+2a_{34})=0$$

Հարթությունը կոչվում է շոշափող հարթություն մակերևույթին, որը անցնում է (x_1,y_1,z_1) կետով:

(5) հավասարումը կարելի է այսպես գրել՝

$$(x-x_1)(a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}z_1+a_{14})+$$
$$+(y-y_1)(a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23}z_1+a_{24})+ \quad (5')$$
$$+(z-z_1)(a_{31}x_1+a_{32}y_1+a_{33}z_1+a_{34})=0$$

կամ

$$(x-x_1)f'_{x_1}+(y-y_1)f'_{y_1}+(z-z_1)f'_{z_1}=0 \quad (5'')$$

որ $f'_x=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}$, $f'_y=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}$, $f'_z=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}$, իսկ f'_{x_1} նույնն է f'_x-ը, երբ մեջ x, y, z փոխարինված են x_1, y_1 և z_1-ով:

(5), (5') կամ (5'') յուրաքանչյուրը կարող է շոշափող հարթության հավասարումն է:

2. Նույն կետով անցնող նորմալի հավասարումը կլինի

$$\frac{x-x_1}{f'_{x_1}}=\frac{y-y_1}{f'_{y_1}}=\frac{z-z_1}{f'_{z_1}} \quad (6)$$

կամ

$$\frac{x-x_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}=\frac{y-y_1}{\frac{\partial f}{\partial y_1}}=\frac{z-z_1}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} \quad (6')$$

§ 12. Երկրորդ կարգի մակերևույթների պարզ հավասարումները.

Եթե երկրորդ կարգի մակերևույթի հավասարումը գրված է ընդհանուր ձևով, որևէ կոորդինատային սիստեմի նկատմամբ՝

$$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz +$$
$$+ 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (1)$$

ապա ընտրելով նպատակահարմար կոորդինատային առանցքներ, կարելի է այդ հավասարումը պարզել (1) մակերևույթի գլխավոր տրամագծային հարթությունների մեջ ընտրած լինելով որևէ նոր (YZ) հարթությունը. այս հարթությունը կլինի ուղղահայաց լարերին, որոնք զուգահեռ են x-երի առանցքին: Եթե նոր լարերի մասերի կոորդինատները կարելի լինեն x կոորդինատի նշանով, և փոխվեն մակերևույթի վրա, ապա մակերևույթի հավասարումը այնպես պետք լինի, որ x-ի նշանը փոխելիս հավասարումը չը փոխվի. իսկ այդ նշանակում է միայն այն դեպքում, երբ հավասարման մեջ բացակայում է x-ի առաջին աստիճանը: Նոր մակերևույթի հավասարումը այժմ կունենա

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33}z^2 + 2a'_{23}yz + 2a'_{24}y +$$
$$+ 2a'_{34}z + a'_{44} = 0 \qquad (2)$$

Այս հավասարումը ներկայացնենք հետևյալ ձևով

$$a'_{11}x^2 + \varphi(y,z) = 0 \qquad (2')$$

որտեղ $\varphi(y,z) = a''_{22}y^2 + a'_{33}z^2 + 2a'_{23}yz + 2a'_{24}y +$
$$+ 2a'_{34}z + a'_{44} = 0 \qquad (3)$$

Բայց (3) հավասարումը y և z առանցքների համապատասխան ընտրությամբ, կարելի է ձևափոխել այնպես, որ նա ունենա հետևյալ երեք ձևերից մեկը

$$Ay^2 + Bz$$
$$Ay^2 + Bz^2 + C$$
$$Ay^2 + C$$

Առաջին դեպքը տեղի է ունենում, երբ $\varphi(y,z)=0$ կոր գիծը չունի կենտրոն, երկրորդը՝ երբ նա ունի կենտրոն, իսկ երրորդ դեպքում՝ կոր գիծը ներկայացնում է երկու ուղիղ գիծ:

Ուրեմն, ձևափոխելով y և z կոորդինատները, կարելի է մակերևույթի (երկրորդ կարգի) հավասարումը հետևյալ պարզ ձևերից մեկով արտահայտել

$$Kx^2 + Ay^2 + Bz = 0 \qquad (4)$$
$$Kx^2 + Ay^2 + Bz^2 + C = 0 \qquad (5)$$
$$Kx^2 + Ay^2 + C = 0 \qquad (6)$$

Հիշյալ դեպքերը արտաքսված են, երբ $\varphi(y,z)=0$ ներկայացնում է երկրորդ կարգի կոր գիծ, այսինքն՝ երբ a'_{22}, a'_{33} և a'_{23} գործակիցներից գոնե մեկը հավասար չէ զերոյի:

Երբոր այժմ $a'_{22} = a'_{33} = a'_{23} = 0$, այս դեպքում (3) հավասարությունից ստանում ենք՝

$$\varphi(x,y) = 2a'_{24}y + 2a'_{34}z + a'_{44} = 0 \qquad (7)$$

որը ներկայացնում է մի հարթություն: Զուգահեռական գլանի կորագծերը, կարելի է (7) հարթությունը ներկայացնել $Dy'=0$ ձևով. դա նշանակում է $2a'_{24}y + 2a'_{34}z + a'_{44} = 0$ հարթությունը ընդունում ենք իբրև նոր (XZ) հարթություն:

Այդպիսով (2) հավասարումը կստանա հետևյալ ձևը՝

$$Kx^2 + Dy = 0 \qquad (8)$$

Վերջապես եթե (2) հավասարման մեջ բոլոր գործակիցները, բացի a'_{11} և a'_{44} հավասար են զրոյի, այդ հավասարումը կստանա հետևյալ ձևը՝

$$a'_{11}x^2 + a'_{44} = 0 \qquad (9)$$

Այդպիսով ստացանք, որ զուգահեռական կորագծերը [illegible] կարգի մակերևույթի հավասարումը կարելի է ներկայացնել հետևյալ ձևերից մեկով՝ (4), (5), (6), (8), (9):

§13 Գլանային մակերևույթներ

1. Առաջին հավասարումներից (9) ձևը՝

$$a'_{11}x^2 + a'_{44} = 0 \qquad (9)$$

ներկայացնում է զույգ հարթություն:

$$x = +\sqrt{-\frac{a'_{44}}{a'_{11}}}$$

և

$$x = -\sqrt{-\frac{a'_{44}}{a'_{11}}}$$

որոնք զուգահեռ են (YZ) հարթությանը:

Այս հարթությունները կարող են լինել և իրական և [illegible]: Առաջին դեպքը տեղի ունի, երբ a'_{44} և a'_{11} գործակիցները [illegible] նշաններ ունեն, իսկ երբ միևնույն նշաններն ունեն՝ տեղի ունի երկրորդ դեպքը:

Եթե $a'_{44} = 0$, այս դեպքում հարթությունները համընկնում են $x = 0$ հարթության հետ:

2. Անցնենք (6) և (8) ձևերին:

Այդ հավասարումների մեջ մի կոորդինատը (Z) բացակայում է:

Դժվար չէ նկատել, որ [illegible]

$$Kx^2 + Ay^2 + C = 0 \qquad (6)$$

կամ

$$Kx^2 + Dy = 0 \qquad (8)$$

մակերևույթի հետ և զուգահեռ է Z առանցքին, [illegible] ընկած է այդ մակերևույթի վրա: Ուրեմն, Z-երի առանցքին զուգահեռ [illegible] հավասարումները

$$\frac{x-a}{0} = \frac{y-b}{0} = \frac{z-c}{1} \qquad (10)$$

(կորագծերն այդպիսի ափին գիծը առանցքների հետ կազմում է հետևյալ անկյունները՝ $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ և 0)

Երբ այս գծի, որոնակ (a, b, c) կետը գտնվում է — (6) կամ (8) մակերևույթի վրա, ապա նրա համաչափ կետը նույնպես գտնվում է նույն մակերևույթի վրա.x)

Պարզ է, կարելի է ասել, որ (6) և (8) մակերևույթները ստացված են մի գծի շարժումից, որը շարունակ զուգահեռ է մնում Z-երի առանցքին:

Նման մակերևույթները կոչված են գլանային մակերևույթներ, իսկ այն ափին գիծը, որը իր շարժման առաջացնում է գլանային մակերևույթ, կոչվում է ծնիչ (կամ ծնիչներ): Ծնիչը շարժելիս (հետևում իրան զուգահեռ), շարունակ հանդիպում է մի որոշ գծի:

Օրինակ, (6) մակերևույթի ծնիչը հանդիպում է

$$Kx^2 + Ay^2 + C = 0 \qquad (6')$$

կոր գծին, որ գտնվում է (XY) հարթության վրա, իսկ

x) (10) գծ. համաչափ կետի կոորդինատները միայն Z-ի առանցքով են տարբերվում (a, b, c) կետի կոորդինատներից. բայց որովհետև (6) և (8) հավասարումները չեն պարունակում Z կոորդինատը, հետևաբար համաչափ կետի կոորդինատները նույնպես կբավարարեն, երբ a, b, c բավարարում են:

(8) մակերևույթի ծնիչը հանդիպում է՝

$$Kx^2 + Dy = 0 \qquad (8')$$

կոր գծին, նույն հարթության վրա վերցրած:

Իրոք, ինչպես երևում է ծնիչի համաչափ կետի կոորդինատները բավարարում են (6) կամ (8) հավասարումին, հետևաբար բավարար են և (XY) հարթության հետ հատման կետի կոորդինատները.

(6') և (8') կոր գծերը ($z = 0$ հարթության վրա) կոչված են ուղիղ կամ դիրեկտրիս:

Այսպիսով, (6) և (8) հավասարումները տարածության մեջ ներկայացնում են գլանային մակերևույթներ, որոնց ծնիչները (ծնիչներիցները) զուգահեռ են Z-երի առանցքին (որը կոչվում կոորդինատների համապատասխան առանցքին): իսկ նույն հավասարումները $z = 0$ հարթության վրա ներկայացնում են նույն գլանների ուղիղները (վերցրած $z = 0$ հարթության վրա):

Դիտարկենք ուղիղ գծերը: Երբ (6) հավասարման մեջ K, A և C միևնույն նշանն ունեն, ապա ոչ մի իրական արժեքներով x և y համար, որ կարելի բավարարել այն հավասարմանը. հետևաբար (6') կներկայացնի կեղծ գլ. համապատասխան գլանը նույնպես կլինի կեղծ:

Թող K և A միևնույն նշանն ունեն, իսկ C-ն հակառակ: Ուրեմն կարող ենք ընդունել, որ K և A նշանները դրական են. իսկ C-ինը՝ բացասական:

Ինչպես գիտենք, այս դեպքում (6') հավասարումը $z=0$ հարթության վրա ներկայացնում է էլիպս:

Համապատասխան գլանը կոչվում է էլիպսական գլան:

Եթե K և A-ի նշանները տարբեր են և $C \neq 0$, ապա (6') հավասարումը ներկայացնում է հիպերբոլ. հետևաբար համապատասխան գլանը կլինի հիպերբոլական գլան:

Եթե K և A-ի նշանները տարբեր են բայց $C=0$, ապա (6') հավասարումը ներկայացնում է երկու ուղիղ գիծ

$$x\sqrt{K} + y\sqrt{A} = 0$$

$$x\sqrt{K} - y\sqrt{A} = 0,$$

իսկ համապատասխան գլանը կլինի երկու հարթություն, որոնց հատման գիծը $+z$-երի առանցքն է:

Վերջապես եթե $C=0$, իսկ K և A-ի նշանները նույնն են (6') հավասարումը ներկայացնում է երկու կեղծ հարթություններ, որոնց հատման գիծը z-երի առանցքը իրական գիծ է:

Անցնենք այժմ (8') հավասարմանը: (XY) հարթության վրա սա ներկայացնում է պարաբոլ. հետևաբար այն գլանը, որի ուղիղ գիծն է (8')-ը, կոչվում է պարաբոլական գլան:

Էլիպսական գլանի հավասարումը կարելի է այս ձևով ներկայացնել

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (6'')$$

որտեղ $a^2 = -\frac{C}{K}$, $b^2 = -\frac{C}{A}$

Հիպերբոլական գլանի հավասարումը կլինի

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (6''')$$

իսկ պարաբոլական գլանինը

$$x^2 = 2py \qquad (8'')$$

որտեղ $2p = -\frac{D}{K}$.

§14. Կենտրոնավոր մակերևույթներ:

1. Անցնենք այժմ (5) հավասարմանը

$$Kx^2 + Ay^2 + Bz^2 + C = 0 \qquad (5)$$

Ա.) Դիցուք C տարբեր է զերոյից. Մենք կարող ենք ընդհանրությունը չխախտելով նրան միշտ դրական դարձնել:

Մնացած գործակիցների վերաբերմամբ կարող են ներկայանալ հետևյալ դեպքերը.

ա) K, A, B գործակիցները միաժամանակ դրական են:

բ) K, A, B միաժամանակ բացասական են:

գ) Նրանցից մեկը բացասական է, իսկ մյուսները դրական, օրինակ $K<0$, $A>0$, $B>0$:

դ) Երկուսը բացասական են, մեկը դրական. օրինակ

$K<0$, $A<0$, $B>0$:

1. ա) դեպքում (5) հավասարմանը չի կարելի բավարարել իրական արժեքներով. հավասարումը իրական մակերևույթ չի ներկայացնում:

2. բ) դեպքում, նշանակելով $-\frac{C}{K} = a^2$, $-\frac{C}{A} = b^2$ և $-\frac{C}{B} = c^2$ ...

(5) հավասարումը կընդունի այսպես՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (10)$$

Այն մակերևույթը, որի կոորդինատները բավարարում են (10) հավասարմանը կոչվում են էլիպսոիդ (տես նկար 34):

Հետազոտենք էլիպսոիդի ձևը:

Տեղադրելով (10) հավասարման մեջ $x=0$, ապա $y=0$ և $z=0$ կստանանք (10) մակերևույթի հատման գծերը (yz) (xz) և (xy) կոորդինատային հարթությունների հետ:

Հատման գծերը կլինեն էլիպսներ՝

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ (yz) հարթության վրա}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ (zx) հարթության վրա}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (xy) հարթության վրա:}$$

Այս գծերը ներկայացնում են էլիպսներ: Ուրեմն էլիպսոիդի հատման գծերը կոորդինատային հարթությունների հետ էլիպսներ են:

Հատենք հիմա էլիպսոիդը որևէ հարթությամբ, որը զուգահեռ է կոորդինատային հարթություններից մեկին, օրինակ, $x=h$ հարթությամբ: Տեղադրելով (10) հավասարման մեջ $x=h$, ունենք՝

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2} \qquad (11)$$

կամ

$$\frac{\frac{y^2}{b^2}}{1-\frac{h^2}{a^2}}+\frac{\frac{z^2}{c^2}}{1-\frac{h^2}{a^2}}=1 \qquad (11')$$

Այս հավասարումը $x=h$ հարթության վրա ներկայացնում է էլիպս, եթե $|h|<a$: Եթե $|h|=a$, ապա (11) հավասարումից ունենք՝

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

որին բավարարում են միայն $y=0$ և $z=0$ իրական արժեքները, որից հետևում $(a,0,0)$ և $(-a,0,0)$ կետերն են, որ գտնվում են էլիպսոիդի և $x=\pm a$ հարթությունների վրա:

Եթե $|h|>a$, ապա (11) հավասարումը ներկայացնում է կեղծ էլիպս:

Այսպիսով, էլիպսոիդի իրական կետերը գտնվում են $x=a$ և $x=-a$ հարթությունների միջև:

Նման ձևով կապացուցենք, որ էլիպսոիդի հատվածները այն հարթություններով, որոնք զուգահեռ են (zx) և (xy) հարթություններին, նույնպես էլիպսներ են և էլիպսոիդի կետերը գտնվում են $y=+b$, $y=-b$, $z=c$ և $z=-c$ հարթությունների միջև:

Այնուհետև ներկայացնում է էլիպսոիդի մասնավոր դեպքը: Եթե $a=b=c=R$, ապա էլիպսոիդի հավասարումը կստանա հետևյալ ձևը

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

որը ներկայացնում է գունդ:

Եթե երեք կիսաառանցքները a, b, c

մեզ ... ... տեղավոր է ... ... ,

(10) հավասարումից ստանում ենք՝

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (12)$$

Այս մակերևույթի հատույթները $z = h$ հարթությամբ կլինեն շրջանագծեր, որոնց պրոյեկցիայի հավասարումն է $x^2 + y^2 = a^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)$: Այս շրջանի շառավիղը հավասար է $a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$:

Հատույթները մյուս կոորդինատային հարթություններին զուգահեռ հարթություններով կլինեն էլիպսներ: Հատույթները $x = 0$ և $y = 0$ հարթություններով կլինեն հետևյալ էլիպսները՝

(yz) հարթության վրա $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (13)$

(zx) հարթության վրա $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (13')$

Ապացուցենք, որ (12) հավասարումը ներկայացնում է մի մակերևույթ, որը առաջացած է (13) կամ (13') էլիպսի պտտվելով z-երի առանցքի շուրջը:

Իրոք, պտտելով AMB էլիպսը z-երի առանցքի շուրջը, նա կընկնի որևէ մի դիրք AMB': (Գծ. 35)

$M'(x', y', z')$ կետը կընկնի $M(x, y, z)$ կետի դիրքի կառուցելով M կոորդինատները, կունենանք, որ

$$x^2 + y^2 = x'^2$$
$$z = z'$$

Իսկ որովհետև $M'(x', y', z')$ կետը գտնվում է AMB

էլիպսի վրա, հետևաբար նրա կոորդինատները բավարարում են էլիպսի հավասարմանը, այսինքն՝

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

Տեղադրելով x'-ը և z'-ի արժեքները, կստանանք՝

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

որը նույն (12) հավասարումն է: Այսինքն, երբ պտտվում ենք (13) [կամ (13')] էլիպսը z-առանցքի շուրջը, ապա առաջացած մակերևույթի հավասարումը կլինի (12)-ը:

(12) մակերևույթը կոչվում է <u>պտտման էլիպսոիդ</u>:

3. Գ) դիտենք մակերևույթի հավասարումը կանոնական ներկայացման ձևով՝

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (14)$$

որտեղ $a^2 = -\frac{C}{K}$, $b^2 = \frac{C}{A}$, $c^2 = \frac{C}{B}$:

Այս մակերևույթը կոչվում է <u>երկխոռոչ հիպերբոլոիդ</u> (տես նկար 36): Նրա հատման գիծը $y = 0$ հարթության հետ կլինի հիպերբոլ, որի հավասարումն է

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (zx) \text{ հարթության վրա:}$$

Հատենք այժմ երկխոռոչ հիպերբոլոիդը $y = h$ հարթությամբ: Հատման գծի հավասարումը $y = h$ հարթության վրա կլինի՝

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{h^2}{b^2}$$

կամ

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 + \frac{h^2}{b^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(1 + \frac{h^2}{b^2}\right)} = 1 \qquad (15)$$

Այս ներկայացնում է նույնպես մի հիպերբոլ, որի կիսա-
առանցքներն են $a\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}$ և $c\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}$ իրական
առանցքը, նա զուգահեռ է x-երի առանցքին, իսկ կեղծը
զուգահեռ է z-երի առանցքին:

Հետևաբար, հատելով (14) մակերևույթը (xz) հարթու-
թյան զուգահեռ հարթություններով ($y=h$), իբրև հատ-
ման գիծ, ստացվում են հիպերբոլներ: Բոլորի (15)
հավասարումից երևում է, հիպերբոլի առանցքները աճում
են, երբ հատող հարթությունը հեռանում է (xz) հար-
թությունից:

Նման ձևով կարելի է ցույց տալ, որ երկխոռոչ հիպեր-
բոլոիդի հատման գիծը (xy) հարթության զուգահեռ
հարթություններով ($z=h$) նույնպես կլինեն հիպերբոլ-
ներ, որոնց իրական առանցքները զուգահեռ են x-երի
առանցքին, իսկ կեղծ առանցքները y-երի առանցքին:

Հատենք այժմ երկխոռոչ հիպերբոլոիդը (yz) հար-
թության զուգահեռ հարթություններով, այսինքն $x=h$
հարթություններով: (14) հավասարումից ունենք

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{h^2}{a^2}-1$$

կամ

$$\frac{y^2}{b^2(\frac{h^2}{a^2}-1)}+\frac{z^2}{c^2(\frac{h^2}{a^2}-1)}=1 \qquad (16)$$

Այս հավասարումը (yz) հարթության վրա ներկայացնում է

մի էլիպս, որի կիսաառանցքները հավասար են $b\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}$
և $c\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}$: (16) հավասարումից երևում է, որ էլիպսը
իրական է, երբ $|h|>a$:

Երբ $-a<h<+a$, այս $x=h$ հարթությունը չի
մի իրական կետ չունի երկխոռոչ հիպերբոլոիդի հետ, այ-
սինքն նրան չի հատում: Իրոք, $x=a$ և $x=-a$
հարթությունները միայն երկխոռոչ հիպերբոլոիդից մեկ մի
կետ ունեն: Իսկ $x=a$ և $x=-a$ հարթությունները
ունեն մի-մի իրական կետ երկխոռոչ հիպերբոլոիդի հետ:

Իրոք, $(a,0,0)$ և $(-a,0,0)$ կետերը գտնվում
են հիպերբոլոիդի վրա: (16) էլիպսի առանցքները
աճում են, երբ $x=h$ հարթությունը հեռա-
նում է (yz) հարթությունից:

Այսպիսով տեսնում ենք, որ երկխոռոչ հիպերբոլոիդը
բաղկացած է երկու խոռոչներից, որոնց գագաթները
գտնվում են $(a,0,0)$ և $(-a,0,0)$ կետերում: Խոռոչ-
ները անվերջ են, որից խոռոչ x կոորդինատը կարող
է անվերջ աճել, թե դրական և թե բացասական ուղղու-
թյամբ: Խոռոչների հատվածները (xy) և (zx) հար-
թյան զուգահեռ հարթություններով ներկայա-
ցնում են հիպերբոլներ, որոնք անսահման աճում են,
երբ հատող հարթությունը հեռանում է կոորդինատային
հարթություններից. իսկ հատվածները (yz) հարթության

զուգահեռ հարթություններով հատվածները էլիպսներ:

a, b, c մեծությունները կոչվում են երկխոռոչ հիպերբոլոիդի կիսաառանցքներ. a-ն իրական կիսաառանցքն է, b և c-ն կեղծ կիսաառանցքներն են:

Եթե b և c կիսաառանցքները հավասար են, ապա երկխոռոչ հիպերբոլոիդի հավասարումը կարող է ստացվել $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ հիպերբոլի պտտելով x-երի առանցքի շուրջը և այդ դեպքում նա կոչվում է երկխոռոչ պտտման հիպերբոլոիդ. այս դեպքում հիպերբոլոիդի հատվածները $x=h$ հարթություններով կլինեն շրջանագծեր:

4. դ) Դիցուք երբ $K<0$, $A<0$ և $B>0$ մակերևույթի հավասարումը կարելի է ներկայացնել հետևյալ ձևով՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (17)$$

որտեղ $-\frac{C}{K}=a^2$, $-\frac{C}{A}=b^2$ և $\frac{C}{B}=c^2$

(17) հավասարումը ներկայացնում է միախոռոչ հիպերբոլոիդ (տես նկար 27): Հետազոտենք նրա հատվածները կոորդինատային հարթությունների զուգահեռ հարթություններով: Հատվածը $x=0$ հարթությունով ներկայացնում է հիպերբոլ՝

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (yz) \text{ հարթության վրա}$$

որի իրական առանցքն է y-ների առանցքը, իսկ կեղծ առանցքն է

z-երի առանցքը:

Հատելով միախոռոչ հիպերբոլոիդը $x=h$ հարթությունով, ստանում ենք մի գիծ, որի պրոյեկցիան (yz) հարթության վրա արտահայտված է հետևյալ հավասարումով՝

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}. \qquad (18)$$

կամ

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}=1 \qquad (18')$$

(18) հավասարումը $x=h$ հարթության վրա ներկայացնում է հիպերբոլ. և քանի $-a<h<+a$ այդ հիպերբոլի իրական առանցքը կլինի y-ների զուգահեռ առանցքը. երբ $h=\pm a$, (18) հավասարումը ներկայացնում է մի զույգ ուղիղ գծեր՝

$$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0 \quad \text{և} \quad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$$

Երբ $|h|$ աճում է 0-ից մինչև a, հիպերբոլի առանցքները (գագաթները) փոքրանում են:

Եթե $h^2>a^2$, ապա (18) կամ (18') հավասարումը ($x=h$ հարթության վրա) դարձյալ ներկայացնում է հիպերբոլ, սակայն նրա իրական առանցքը (գագաթները) այժմ կլինի z-երի զուգահեռ առանցքը և երբ աճում է h-ը, հիպերբոլի առանցքները նույնպես աճում են:

Նման ձևով կգտնենք, որ միախոռոչ հիպերբոլոիդի հատույթները (xz)-ին զուգահեռ հարթություններով, ներկայացնում են նույնպես հիպերբոլներ, որոնց իրական առանցքը զուգահեռ է x-երի առանցքին քանի $|k|<b$, և զուգահեռ է z-երի առանցքին երբ $|k|>b$:

Երբ $|k|=b$ ստացվում է մի զույգ ուղիղ գծեր:

Նույնը $x=h$ և $y=h$ հարթությունները շարունակ հատում են միախոռոչ հիպերբոլոիդը, երբ h-ը փոփոխվում է $-\infty$ և $+\infty$ սահմաններում. հատման գծերը կլինեն կամ իրական հիպերբոլներ կամ մի զույգ ուղիղ գծեր:

Հատենք այժմ $z=0$ հարթությամբ և նրան զուգահեռ հարթություններով՝ $z=h$:

Միախոռոչ հիպերբոլոիդի հատվածը (xy) հարթությամբ ներկայացնում է էլիպս, որի հավասարումն է (xy) հարթության վրա $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Այս էլիպսը կոչվում է կոկորդի էլիպս. նրա կիսաառանցքներն են a և b: Հատելով հիպերբոլոիդը $z=h$ հարթություններով ստանում ենք մի նոր գիծ, որի պրոյեկցիան (xy) հարթության վրա ունի հետևյալ հավասարումը՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}.$$

կամ

$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=1$$

Այս ներկայացնում է էլիպս $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ և $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ կիսաառանցքներով: Այս առանցքները աճում են, երբ աճում է $|h|$-ը: Ամենափոքր էլիպսը համապատասխանում է $h=0$ արժեքին. ուրեմն կոկորդի միախոռոչ հիպերբոլոիդի կտրվածքի էլիպսը ամենափոքրն է:

Այսպիսով, միախոռոչ հիպերբոլոիդն ունի երկու տեսակ գծեր. (zy)-ին և (xz)-ին զուգահեռ հարթություններով հատվածները հիպերբոլներ են, իսկ (xy)-ին զուգահեռ հարթություններով հատվածները՝ էլիպսներ են:

a, b և c մեծությունները հիպերբոլոիդի կիսաառանցքներ են կոչվում, առաջին երկուսը՝ իրական, իսկ c-ն կեղծ:

Երբ իրական առանցքները հավասար են $(a=b)$ այդ հիպերբոլոիդը կոչվում է միախոռոչ պտտման հիպերբոլոիդ, որովհետև այնտեղ նույնպես կարելի է ստանալ, եթե պտտենք (xz) հարթության վրա գտնվող հիպերբոլը՝

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

z-երի առանցքի շուրջը. կազմելով միախոռոչ հիպերբոլոիդի ծնիչները:

բ). C հավասար է զրոյի:

(5) հավասարումը այս դեպքում կընդունի այսպես

$$Kx^2+Ay^2+Bz^2=0 \qquad (19)$$

Այստեղ կարելի է երեք դեպք տարբերել՝

ա) գործակիցներից երկուսը միևնույն նշանն ունեն, իսկ մյուսը՝ տարբեր:

բ) բոլոր գործակիցները միևնույն նշանն ունեն:

ա) դեպքը: Դիցուք $K>0$, $A>0$, իսկ $B<0$ նշանակելով $K=\frac{1}{a^2}$, $A=\frac{1}{b^2}$ և $-B=\frac{1}{c^2}$, (19) հավասարումը կներկայացնենք այսպես՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (19')$$

Կոորդինատների սկզբնակետը գտնվում է այս մակերևույթի վրա: Հատենք $z=h$ հարթությամբ (19') մակերևույթը. ստացված գծի հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2} \text{ և } z=h \qquad (20)$$

Այժմ ապացուցենք, որ յուրաքանչյուր ուղիղ գիծ, որն անցնում է սկզբնակետով և (20) էլիպսի կետերից մեկով, ամբողջովին գտնվում է (19) մակերևույթի վրա:

(20) էլիպսի վրա վերցրած կամայական կետի կոորդինատը կլինի հավասար h-ի. դիցուք այդ կետի x կոորդինատը $=\alpha$, $y=\beta$. այն ժամանակ, այդ և սկզբնակետով անցնող ուղիղ գծի հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{h} \qquad (21)$$

Բնական պահանջ է այս գծի ընթացիկ կոորդինատները համեմատական են α, β և h-ին. ապա

$$x=k\alpha,\quad y=k\beta,\quad z=kh$$

Այս արժեքները տեղադրելով (19') հավասարման մեջ. ստանում ենք՝

$\frac{k^2\alpha^2}{a^2}+\frac{k^2\beta^2}{b^2}-\frac{k^2h^2}{c^2}$ պետք է հավասար լինի 0-ի:

Այս արտահայտությունը իրոք հավասար է զերոյի, որովհետև α և β բավարարում են (20) հավասարմանը:

Այսպիսով կարող ենք ասել, որ յուրաքանչյուր ուղիղ գիծ, որն անցնում է սկզբնակետով և մի որևէ կետով, որը գտնվում է (20) էլիպսի, ամբողջովին գտնվում է (19') մակերևույթի վրա. ուրիշ խոսքով (19) կամ (19') մակերևույթը կազմված է մի ուղիղ գծով, որն անցնում է մի կետով (սկզբնակետով) և շարժվում է միևնույն փակ գծի վրա: Նման մակերևույթները կոչվում են կոնական մակերևույթներ:

Նման ձևով կարելի է ապացուցել, որ յուրաքանչյուր երկրորդ աստիճանի համասեռ հավասարում երեք փոփոխականների (x, y և z նկատմամբ) ներկայացնում է կոնական մակերևույթ:

Բնական պետք է (19') կոնի հատվածը $z=h$ հարթությամբ ներկայացնում է էլիպս:

Հատենք կոնը $x=0$ հարթությամբ. հատվածի հավասարումը ($x=0$ հարթության վրա) կլինի՝

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

կամ $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$ և $\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0$.

Սրանք՝ սկզբնակետով անցնող ուղիղ գծեր են։

Հատենք հիմա $x = h$ հարթությամբ, կստանանք մեր հիպերբոլը, որի հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{a^2} \text{ և } x = h$$

այս հիպերբոլի իրական առանցքը զուգահեռ է z-երի առանցքին և աճում է h-ի աճի հետ միասին։

Նման ձևով կապացուցենք, որ կոնի հատման գիծը $y = h$ հարթությամբ ներկայացնում է նույնպես հիպերբոլ։

Հաշվելով ընդհանուր քառակուսիների համաձայն (§10) կոնի կենտրոնը, կգտնենք, որ կոնի կենտրոնը գտնվում է իր մակերևույթի վրա՝ (0, 0, 0) կետում։

Առանձնակի դեպքում, երբ $a = b$, կոնի հավասարումը կլինի՝

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

և կլինի պտտման կոն։

Այս կոնի հատումները $z = h$ հարթություններով կլինեն շրջանագծեր, որոնց կենտրոնները գտնվում են z առանցքի վրա։ Մակերևույթը այս պտտման կոնի կարող ենք ստանալ պտտելով մի ուղիղ գիծ, (որն անցնում է սկզբնակետով) z-երի առանցքի շուրջը։

բ) դեպք։ Գործակիցները միևնույն նշանն ունեն. այդպես՝ քանի որ h դրական է (նախորդ դեպքում կարող

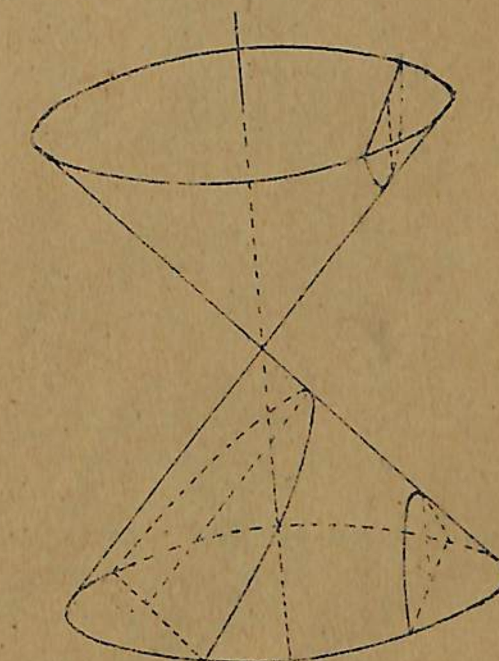
ենք առաջին հավասարումը -1-ով բազմապատկել)։

Այս դեպքում պետք չէ նկատել, որ (19) հավասարումը մի իրական արժեքներով չի կարելի բավարարել, բացի

$x = 0$, $y = 0$ և $z = 0$.

Ուրեմն նշված դեպքում (19) հավասարումը ներկայացնում է կեղծ մակերևույթ, որն ունի միայն մի իրական կետ՝ (0, 0, 0) այս մակերևույթը կոչվում է կեղծ կոն, որովհետև նրա հավասարումը համանման է։

§15. Անկենտրոն մակերևույթներ.



Նկար 38

1. Վերցնենք (4) հավասարումը (§ երես)

$$Kx^2 + Ay^2 + Bz = 0 \quad (4)$$

Այս հավասարման գործակիցների նշանները կարող են լինել՝

ա) K և A միևնույն նշանն ունեն

բ) K և A տարբեր նշաններ ունեն։

Ինչ վերաբերում է B-ին, միշտ կարող ենք նրան համարել մեծ բացասական, փոխելով հարկավոր դեպքում նշանը z առանցքի ուղղության, որի ուղղությամբ ն՝ կոորդինատի [illegible]

Զ) ավելորդ Դիցուք $K > 0$ և $A > 0$ (նույնպես կը ստացվեր այն դեպքում, երբ $K < 0$ և $A < 0$), և դիցուք $B > 0$, ապա (4) հավասարումը կարելի է գրել այս ձևով՝

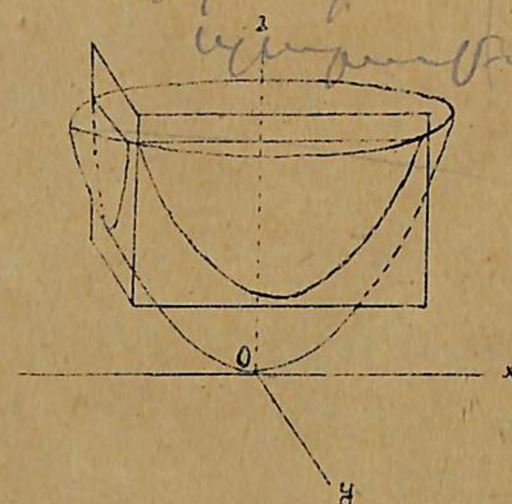
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c} \qquad (22)$$

որ

$$K = \frac{1}{a^2}, \quad A = \frac{1}{b^2}, \quad B = -\frac{2}{c}$$

Այն մակերևույթը, որը ներկայացված է (22) հավասարումով, կոչված է էլիպսական պարաբոլոիդ (տես նկար 39):

Էլիպսական պարաբոլոիդը ընկած է միայն (xy) հարթությունից վեր (z առանցքի դրական կողմը), որովհետև ինչ արժեքներ էլ ընդունեն x և y-ը, z կլինի միշտ դրական:



Նկար 39

(22) մակերևույթի հատման գիծը (xy) հարթության հետ տալիս է հետևյալ հավասարումը:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad [(xy) \text{ հարթության վրա}]$$

որին բավարարում են միայն արժեքները՝

$$x = 0, \quad y = 0:$$

Ուրեմն, էլիպսական պարաբոլոիդը (xy) հարթության հետ մի ընդհանուր կետ ունի՝ $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$:

Հատենք այժմ (xy) հարթությունը զուգահեռ հարթությամբ, $z = h$ հարթությամբ, որ h-ը դրական է:

Հատման գծի հավասարումը կլինի

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2h}{c}, \quad z = h$$

Այս հավասարումներից առաջինը տարածության մեջ ներկայացնում է էլիպսական գլան, իսկ (xy) հարթության վրա ներկայացնում է այդ հատման գծի պրոյեկցիան: Ինչպես տեսնում ենք հավասարումից, այդ պրոյեկցիան, հետևաբար և ինքը՝ հատման գիծը, էլիպս է, որի կիսաառանցքները հավասար են $a\sqrt{\frac{2h}{c}}$ և $b\sqrt{\frac{2h}{c}}$:

Ինչպես տեսնում ենք, այդ հատման էլիպսը մեծանում է, երբ հատող հարթությունը հեռանում է (xy) հարթությունից:

Հատման գիծը $y = 0$ հարթությամբ պարաբոլ է, որի հավասարումը (zx) հարթության վրա կլինի

$$x^2 = \frac{2a^2}{c} z$$

Այս պարաբոլի առանցքը z-երի առանցքն է, պարամետրը հավասար է $\frac{a^2}{c}$:

Նման ձևով գտնում ենք էլիպսական պարաբոլոիդի հատման գիծը $x = 0$ հարթության հետ: Այդ հատման գիծը նույնպես պարաբոլ է, որի առանցքը նույն z-երի առանցքն է:

հատենք այժմ $y=h$ հարթությամբ: Հատման գծի հավասարումը [illegible] կլինի՝

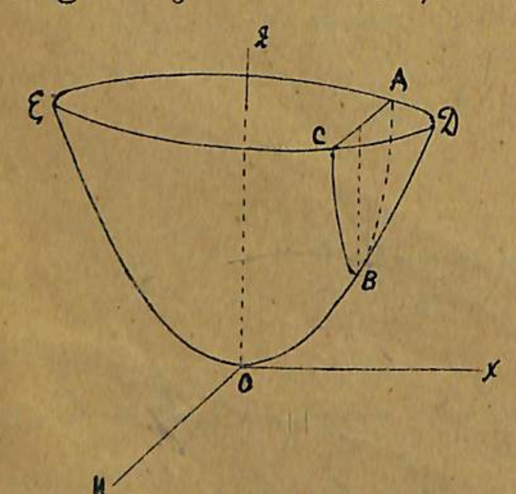
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} = \frac{2z}{c} \quad \text{և} \quad y=h$$

կամ

$$x^2 = \frac{2a^2}{c}\left(z - \frac{ch^2}{2b^2}\right) \quad \text{և} \quad y=h$$

Ինչպես տեսնում ենք հատման գիծը ներկայացնում է պարաբոլ, որի պարամետրը կրկին հավասար է $\frac{a^2}{c}$, գագաթը գտնվում է՝ $x=0, y=h, z=\frac{ch^2}{2b^2}$, իսկ առանցքը զուգահեռ է z-ի առանցքին: Գագաթի z կոորդինատը աճում է, երբ h-ը աճում է. իսկ x կոորդինատը շարունակ մնում է հավասար. այսինքն գագաթը միշտ (yz) հարթության վրա է գտնվում: Քանի որ այդ պարամետրը անփոփոխ է $(= a^2/c)$, այդ բոլոր պարաբոլները միևնույն մեծության են:

Միևնույն կերպ բանը է ցույց տալիս, երբ էլիպսական պարաբոլոիդը հատում ենք $x=h$ հարթություններով:



Նկար 40

Արանից կարելի է եզրակացնել, որ շարժելով միևնույն պարաբոլը ABC (նկար 40) մյուս պարաբոլի $(DBOE)$ վրայով, այնպես, որ շարժվողի գագաթը շարունակ գտնվի շարժման վրա, նրանց հարթությունները լինեն իրար

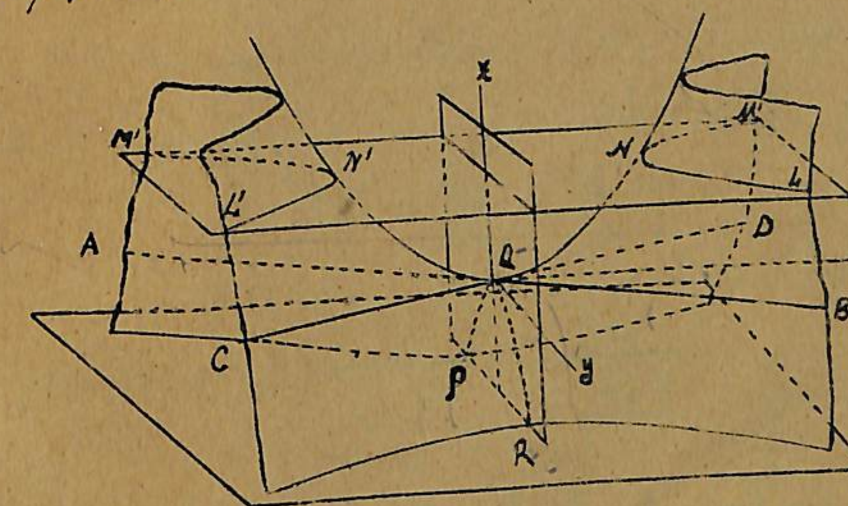
ուղղահայաց և պարաբոլների առանցքները միևնույն ուղղությունն ունենան, ապա կստացվի, և շարժվողի առանցքը շարունակ գտնվի միևնույն հարթության վրա, կստացվի էլիպսական պարաբոլոիդը (շարժվող պարաբոլի հարթությունը հաստատուն է իրեն զուգահեռ):

3. Դեպք: Երբ $K>0$, $A<0$ և միաժամանակ $B\neq0$, ապա (4) հավասարումը կարելի է այսպես ներկայացնել

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c} \qquad (23)$$

որտեղ $K=\frac{1}{a^2}$, $A=-\frac{1}{b^2}$, $B=-\frac{2}{c}$

Այս մակերևույթը կոչվում է հիպերբոլական պարաբոլոիդ (նկար 41)



Նկար 41

Հատման գիծը այս մակերևույթի և $y=0$ հարթության ներկայացնում է մի պարաբոլ, որի գագաթը գտնվում է $(0,0,0)$ կետում, պարամետրը հավասար է $\frac{a^2}{c}$, իսկ առանցքը (դրական մասը) z-երի առանցքն է (նրա դրական ուղղությամբ):

Այս պարաբոլի հավասարումն է՝ $x^2 = \frac{2a^2}{c} z$ (24)

Հատման գիծը $y = h$ հարթությամբ ներկայացնում է նույնպես պարաբոլ, որի գագաթը սակայն գտնվում է $\left(0, h, -\frac{ch^2}{2b^2}\right)$ կետում, պարամետրը նրանից հավասար է $\frac{a^2}{c}$, որոմնացքը զուգահեռ է z-երի առանցքին և ունի նույն ուղղությունը:

Հիպերբոլական պարաբոլոիդի հատման գիծը (xy) հարթության հետ ներկայացնում է զույգ ուղիղ գիծ, որոնց հավասարումն է (xy) հարթության վրա

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Նկարի վրա այդ գծերն են AB և CD:

Հատենք այժմ $z = h$ հարթությամբ, որ $h > 0$: Հատման գիծը կլինի հիպերբոլ, որի պրոյեկցիայի հավասարումն է

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2h}{c}$$

կամ

$$\frac{x^2}{\frac{2ha^2}{c}} - \frac{y^2}{\frac{2hb^2}{c}} = 1$$

Այս հիպերբոլի իրական առանցքը զուգահեռ է x-երի առանցքին, իսկ կեղծ առանցքը զուգահեռ է y-ների առանցքին: (տես նկար 41 $MN4$ և $M'N'4'$ գծերը): Բնական հավասարումից երևում է, հիպերբոլի առանցքները աճում են h-ի հետ միասին:

Եթե $h > 0$, ապա հատման գիծը կլինի կլինի հիպերբոլ,

որի իրական առանցքը, սակայն, զուգահեռ է y-ների առանցքին:

Հիպերբոլական պարաբոլոիդի հատման գիծը (yz) հարթության հետ ներկայացնում է պարաբոլ, որի հավասարումն է

$$y^2 = -\frac{2b^2}{c} z$$

Այս պարաբոլի գագաթը գտնվում է սկզբնակետում, առանցքը — (որոմնացքը) z առանցքի բացասական ուղղությունն ունի, իսկ պարամետրը հավասար է $\frac{b^2}{c}$;

Նկարի վրա PQR-ն է այդ պարաբոլը:

Հատենք $x = h$ հարթությամբ ներկայացնում է նույնպես պարաբոլ, որի պրոյեկցիայի հավասարումն է

$$y^2 = -\frac{2b^2}{c} z + \frac{h^2 b^2}{a^2}$$

կամ

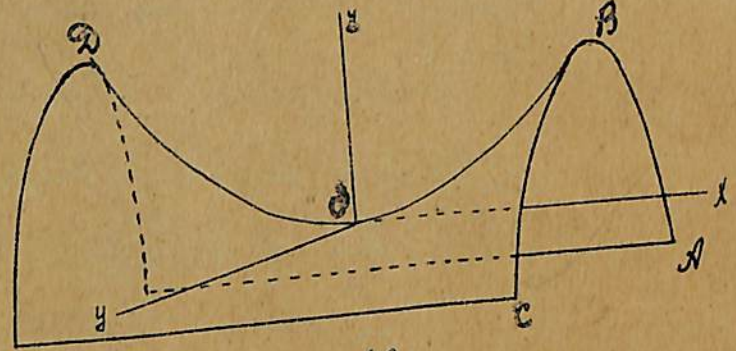
$$y^2 = -\frac{2b^2}{c}\left(z - \frac{ch^2}{2a^2}\right)$$

Այս պարաբոլի գագաթը գտնվում է $x = h$, $y = 0$ $z = \frac{ch^2}{2a^2}$ կետում, որոմնացքը զուգահեռ է z-երի առանցքին և ուղղված է դեպի բացասական կողմը, իսկ պարամետրը անփոփոխ է (կախված չէ h-ից) և հավասար $\frac{b^2}{c}$:

Այսպիսով ստացվում է, որ հատման գծի (պարաբոլի) առանցքը շարժվում է (zx) հարթության վրա, իսկ գագաթը կմնա (24) պարաբոլի վրա:

Հետևաբար կարող ենք ասել, որ հիպերբոլական պարաբոլոիդը կարելի է առաջացնել շարժվող մի պարաբոլը

Դրանք փոխում են, որ (ABC) շարժական պարաբոլի B գագաթը շարժվում է դրանի անշարժ (BOD) վրա. շարժական պարաբոլի հարթությունը միշտ է իրան զուգահեռ և ուղղահայաց անշարժ պարաբոլի հարթության նկատմամբ. շարժական պարաբոլի առանցքը դրված է (XZ) հարթության վրա, զուգահեռ է Z առանցքին, բայց ուղղված է դեպի բացասական կողմը (Նկար 42)



Նկար 42

Մակերևույթն էլիպտական պարաբոլոիդից միայն նրանով է տարբեր, որ շարժական և անշարժ պարաբոլների առանցքների ուղղությունները տարբեր են։

Ինչպես տեսնում ենք հիպերբոլական պարաբոլոիդը թամբի ձև ու առանձին պատկերված է դարձեր ուղղությամբ։

§ 16. Երկրորդ կարգի բոլոր մակերևույթների և նրանց հավասարումների ցուցակը։

Գլանային մակերևույթներ

1. Էլիպսական գլան

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (§13.\ (6'))$$

2. Հիպերբոլական գլան

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (§13.\ (6''))$$

3. Պարաբոլական գլան

$$x^2 = 2py \qquad (§13.\ (8''))$$

Կենտրոնավոր մակերևույթներ

4. Էլիպսոիդ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (§14,\ (10))$$

5. Երկխոռոչ հիպերբոլոիդ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (§14,\ (14))$$

6. Միախոռոչ հիպերբոլոիդ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (§14,\ (17))$$

7. Երկրորդ կարգի կոն

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (§14,\ (19))$$

Անկենտրոն մակերևույթներ

8. Էլիպտական պարաբոլոիդ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c} \qquad (§15,\ (22))$$

9. Հիպերբոլական պարաբոլոիդ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c} \qquad (§15,\ (23))$$

§17. Ռոտացիոն մակերևույթներ.

1. Այն մակերևույթը, որը կազմվում է առանցքի շուրջ մի շարժումով, կոչվում է ռոտացիոն մակերևույթ։

Բայց կոնը և գլանը, որոնք կարող են համարվել ուղղագիծ ծնիչ-
ների շարժած են և չունեն այլ ուղղագիծ ծնիչներ, միա-
խոռոչ հիպերբոլոիդը և հիպերբոլական պարաբոլոիդը:

2. Միախոռոչ հիպերբոլոիդի հավասարումը

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

կարելի է ներկայացնել հետևյալ ձևով

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

կամ

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

Դժվար չէ նկատել, որ այս հավասարումը բավարա-
րում են x, y և z-ի այն արժեքները, որոնք միաժա-
մանակ բավարարում են հետևյալ երկու հավասարում-
ներին՝

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=k\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

և

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right) \qquad (1)$$

որ k կամայական, բայց հաստատուն մեծություն է և հակա-
դարձ այս՝ x, y և z-ի այն արժեքները, որոնք բավա-
րարում են վերջին երկու հավասարումներին, բա-
վարարում են և միախոռոչ հիպերբոլոիդի հավասարմանը:
Բայց այդ երկու հավասարումները ներկայացնում են մի
ուղիղ գիծ: Տալով k-ին զանազան արժեքներ, կստա-
նանք անվերջ թվով ուղիղ գծեր, որոնք գտնվում են միա-
խոռոչ հիպերբոլոիդի վրա: Բայց այդ ուղիղ գծերից,

միախոռոչ հիպերբոլոիդի վրա կան նաև ուրիշ ուղիղ
գծեր: Իրոք, միախոռոչ հիպերբոլոիդի հավասա-
րումը կարելի է փոխարինել և հետևյալ երկու
հավասարումներով՝

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=h\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

և

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{h}\left(1+\frac{y}{b}\right) \qquad (2)$$

որ h-ը կամայական մեծություն է:

Այս երկու հավասարումները նույնպես ներկայացնում են
մի ուղիղ գիծ, որը գտնվում է միախոռոչ հիպերբոլոիդի
վրա: Տալով h-ին զանազան արժեքներ, կստանանք ան-
վերջ թվով ուղիղ գծեր, որոնք գտնվում են միախոռոչ
հիպերբոլոիդի վրա:

Այսպիսով ցույց տվինք, որ միախոռոչ հիպերբոլոիդի
մակերևույթը կարելի է առաջացնել շարժելով (1) կամ
(2) ուղիղ գիծը: (Այս գծերը շարժվում են դրանցից
մեկը, փոփոխելով k և h-ը) Նկար մեջ միախոռոչ հիպեր-
բոլոիդի երկու սիստեմի ուղիղ գծերն էլ ցույց են տված (նկ. 43)[1]

3. Հիպերբոլական պարաբոլոիդի հավասարումը

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$$

կարելի է ներկայացնել այսպես՝

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\frac{2z}{c}$$

Այս հավասարումը կարելի է փոխարինել հետևյալ երկու
գծերով՝

1) Նկարը տես 160 եր.

$$\left|\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= \frac{2kz}{c} \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= \frac{1}{k} \end{aligned}\right. \qquad (3)$$

կարելի է նմանապես փոխարինել և այս սիստեմով՝

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= h \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= \frac{2z}{hc} \end{aligned} \qquad (4)$$

(k և h կամայական մեծություններ են).

Երբ x, y, z-ի այն արժեքները, որոնք բավարարում են (3) կամ (4) հավասարումների սիստեմին, բավարարում են նաև հիպերբոլական պարաբոլոիդի հավասարմանը:

Սիստեմ (3)-ալի գծերը, նույնպես և (4) գծերը գտնվում են հիպերբոլական պարաբոլոիդի վրա. այդ պատճառով (3)-ալի գծերը, նույնպես և (4)-ալի գծերը շարժվելով առաջացնում են հիպերբոլական պարաբոլոիդի մակերևույթը:

4. Ապացուցել, որ տարբեր սիստեմների պատկանող ուղիղ գծերը իրար հատվում են, իսկ միևնույն սիստեմի պատկանող գծերը չեն հատվում:

Եթե (3) և (4)-ալի գծերը հատման կետ ունեն, այդ դեպքում կետի ունեցած կոորդինատների արժեքները x, y և z-ի համար, պետք է միաժամանակ բավարարեն (3) և (4) հավասարումներին: Բայց 4 հավասարումը երեք անհայտներով կարող են մի ընդհանուր լուծում ունենալ, եթե հավասարումների գործակիցներից կազմված դետերմինանտը հավասար

զրոյի լինի[x]:

(3) և (4) հավասարումների գործակիցներից կազմված դետերմինանտը՝ բազմապատկած $\frac{abhck}{2}$-ով, կլինի

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & hk & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & hk \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(Առաջին սյունը բազմապատկված է a-ով, երկրորդը b-ով, երրորդը $-\frac{ch}{2}$-ով, իսկ չորրորդը $-k$-ով)

Հանելով երրորդ տողից առաջին տողը, այս հանելով երկրորդ տողից չորրորդը, կստանանք՝

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & hk & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & hk & hk \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Վերածելով այս դետերմինանտը երկրորդ տողի էլեմենտների նկատմամբ, կստանանք՝

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & hk \\ 1 & -1 & hk \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

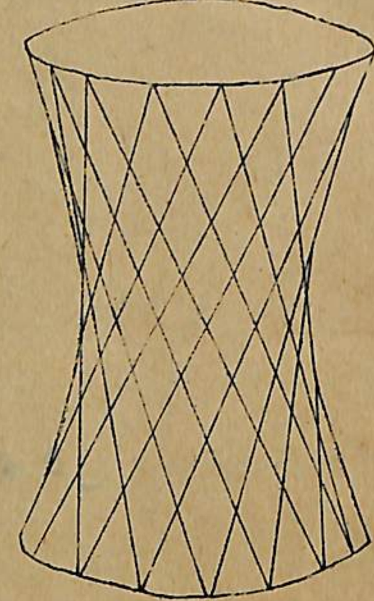
Որովհետև այդ դետերմինանտի երկու տողերը հավասար են:

---

[x] Տես՝ Հ. Նազարեթյան. Դետերմինանտներ (Երևան 1922) § 8

Ապացուցենք, որ (3) և (4) հավասարումների բոլոր զուգահեռներից կազմված դետերմինանտը հավասար է զերոյի։ Իրոք, յուրաքանչյուր գիծ (3) սիստեմից հատում է (4) սիստեմի ամեն մի գծի հետ։

Այժմ ապացուցենք, որ միևնույն սիստեմի պատկանող երկու ուղիղ գծերը չեն հատվում։ Ապացուցենք, որ K և K' արժեքների համապատասխանող (3) սիստեմի ուղիղ գծերը, իրար չեն հատվում։



Նկար 43

Այդ համար պետք է ապացուցել, որ հետևյալ հավասարումների

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{2Kz}{c}$$
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{K}$$
$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{2K'z}{c}$$
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{K'}$$

զուգահեռներից կազմված դետերմինանտը հավասար չէ զերոյի։ Այդ դետերմինանտը բազմապատկած $\frac{abcKK'}{2}$-ով, կլինի

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -K & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -K' \\ 1 & -1 & -K' & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -K \end{vmatrix}$$

Հանելով առաջին տողը մյուսներից, կստանանք

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & K'-K & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -K' \\ 1 & -1 & -K' & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -K \end{vmatrix} = (K'-K) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -K' \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -K \end{vmatrix} =$$

$$=(K'-K) \begin{vmatrix} 0 & 0 & K-K' \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -K \end{vmatrix} = -2(K-K')^2$$

Ինչպես տեսանք էջ., քանի որ $K \neq K'$, այսինքն երբ (3) սիստեմի պատկանող տարբեր գծեր, D դետերմինանտը հավասար չէ զերոյի, հետևաբար այդ գծերը չեն հատվում իրար։

Նման ձևով կապացուցվի, որ (4) սիստեմի պատկանող տարբեր գծերը իրար չեն հատվում։

Այսպիսով ապացուցվեց, որ միախոռոչ հիպերբոլոիդի երկու տարբեր սիստեմների ((1) և (2) ուղիղ գծերը) պատկանող ուղիղ գծերը իրար հատվում են, իսկ միևնույն սիստեմի պատկանող գծերը չեն հատվում։

5. Ինչպես տեսանք, միախոռոչ հիպերբոլոիդը և հիպերբոլական

պարաբոլոիդի այդ գծերի հավասարումները ստացվում են այ-
մակերևույթների հավասարումներից, վերածելով նրանց առաջին աս-
տիճանի բազմանդամների. օրինակ, միաթերթ հիպերբոլոիդի հա-
վասարումը ներկայացնենք հետևյալ ձևով՝

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

Դժվար չէ նկատել, որ եթե մակերևույթի հավասարումը կեր-
պով կարելի է վերածել առաջին աստիճանի արտադրիչ-
ների, այդ մակերևույթը ուղղագիծ է:

Իրոք, դիցուք մակերևույթի հավասարումն ունի հետևյալ ձևը՝

$$U_1 S_1 = U_2 S_2 \qquad (5)$$

որտեղ U_1, U_2, S_1 և S_2 առաջին աստիճանի արտահայտություններ
են (x, y և z փոփոխականների նկատմամբ):

Այս դեպքում մակերևույթի հավասարումը կարելի է փոխարի-
նել հետևյալ հավասարումներով՝

$$U_1 = h\,U_2,\quad S_1 = \frac{S_2}{h} \quad (6) \text{ կամ } \quad U_1 - hU_2 = 0,\quad S_1 - \frac{1}{h}S_2 = 0 \quad (6')$$

հնարավոր է նաև փոխարինել հետևյալ սիստեմով՝

$$U_1 = kS_2,\quad S_1 = \frac{U_2}{k} \quad (7) \text{ կամ } \quad U_1 - kS_2 = 0,\quad S_1 - \frac{1}{k}U_2 = 0 \quad (7')$$

Թե (6) սիստեմը, և թե (7) սիստեմը ներկայացնում է ուղիղ
գծերի մի սիստեմ, որի մեջ մի h-ի կամ մի k-ի համա-
պատասխան ուղիղ գիծը գտնվում է (5) մակերևույթի վրա, որ-
ովհետև յուրաքանչյուր կետ, որի կոորդինատները բավարարում

են (6) կամ (7) հավասարումներին, բավարարում են նաև (5)
հավասարմանը. այսինքն, (6) ուղիղ գիծը, կամ (7), յուրաքանչյուր
կետով գտնվում է (5) մակերևույթի վրա:

Այժմ նույնպես կարելի է ապացուցել, որ (6) սիստեմի որ-
ևէ գիծը անպայման հանդիպում է յուրաքանչյուր գծին (7)
սիստեմից:

Վերցնենք (6') հավասարումներից երկրորդը բազմապատկենք
kh-ով և գումարենք առաջինին, կստանանք՝

$$U_1 - hU_2 + khS_1 - kS_2 = 0 \qquad (8)$$

Այս հարթությունը անցնում է (6') ուղիղ գծով. այսինքն
(6) կամ (6') ուղիղ գիծը գտնվում է (8) հարթության վրա:

(8) հավասարումը կարելի է և այսպես արտագրել՝

$$U_1 - kS_2 + kh\left(S_1 - \frac{1}{k}U_2\right) = 0 \qquad (8')$$

բայց այսպես գրած, երևում է, որ (8) հարթությունը անց-
նում է (7') հարթությունների հատման գծով. այսինքն, (7)
ուղիղ գիծը նույնպես գտնվում է (8) հարթության վրա:

Հետևաբար (8) հարթության վրա գտնվում են թե (6) և թե
(7) ուղիղ գծերը. ուրեմն տարբեր սիստեմների պատկանող ուղիղ
գծերը հանդիպում են իրար:

6. Հիպերբոլական պարաբոլոիդի հավասարումը արտա-
գրենք այսպես՝

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\frac{2z}{c}$$

Այս հավասարումը պատկերված է (5)-ի ձևով, որ

$$U_1 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$$
$$S_1 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$$
$$U_2 = \frac{2z}{c}$$
$$S_2 = 1$$

Որովհետև, մակերևույթի հավասարումը կարող է ներկայացվել հետևյալ ձևով՝

$$U_1 \cdot S_1 = U_2$$

Այս հավասարումը կարելի է փոխարինել հետևյալ սիստեմներով՝

$$U_1 = k U_2, \quad S_1 = \frac{1}{k} \qquad (3')$$

և

$$U_1 = h, \quad S_1 = \frac{1}{h} U_2 \qquad (4')$$

(այս հավասարումները համապատասխանում են (3) և (4) սիստեմներին:

Երբ k փոփոխվում է, $S_1 = \frac{1}{k}$ հավասարումը ներկայացնում է իրար զուգահեռ հարթություններ. հետևաբար (3') սիստեմը ներկայացնում է այնպիսի ուղիղ գծեր, որոնք զուգահեռ են մի հաստատուն հարթության՝

$$S_1 = 0.$$

($S_1 = \frac{1}{k}$ զուգահեռ է $S_1 = 0$ հարթությանը, ինչ արժեք էլ որ ունենա k-ն)

Նմանապես և (4') սիստեմի գծերը զուգահեռ են $U_1 = 0$ հարթությանը:

Որովհետև, հիպերբոլական պարաբոլոիդի (3) սիստեմի ուղիղ գծերը զուգահեռ են

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

հաստատուն հարթությանը:

իսկ (4) սիստեմի ուղիղ գծերը զուգահեռ են՝

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

հաստատուն հարթությանը:

§18. Երկրորդ կարգի մակերևույթների շրջանային հատույթներ

1. Երկրորդ կարգի որոշ մակերևույթներ կարելի է այնպես հատել, որ հատման գիծը լինի շրջանագիծ:

Դիցուք տրված է մեզ մի էլիպսոիդ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (1)$$

որտեղ $a > b > c$:

Այս հավասարումը կարելի է այսպես գրել՝

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 - \frac{b^2}{c^2} z^2,$$

կամ, ավելացնելով երկու մասին էլ $x^2 + z^2$.

$$b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 - \frac{b^2 - c^2}{c^2} z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

կամ

$$x^2 + y^2 + z^2 - b^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} x - \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{c} z\right)\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} x + \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{c} z\right)$$

Այն կետերը, որոնց կոորդինատները բավարարում են հավասարումների հետևյալ սիստեմին՝

$$x^2+y^2+z^2-b^2=k\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{c}z\right)$$
$$k=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x-\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{c}z \qquad (2)$$
կամ
$$x^2+y^2+z^2-b^2=h\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{c}z\right)$$
$$h=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x+\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{c}z \qquad (3)$$

գտնված են (1) մակերևույթի վրա. հետևաբար նույն կետի կոորդինատները կբավարարեն նաև (1') կամ (1) հավասարման:

Բայց (2) հավասարումների սիստեմը, նույնպես և (3) սիստեմը, ներկայացնում է ուղղագիծ (իսկ արժեքի վերաբերմամբ k և h-ը) հետևաբար այդ սիստեմների առաջին հավասարումը ներկայացնում է գունդ, իսկ երկրորդը՝ հարթություն:

Ուրեմն, (2), նույնպես (3), ուղղագիծը գտնված է էլիպսոիդի վրա. որից բխում, այդ ուղղագիծը գտնված է միաժամանակ էլիպսոիդի, գնդի և հարթության վրա:

Այսպիսով ապացուցվեց, որ (1) էլիպսոիդի և (2) և (3) հարթությունների հատման գծերը ուղղագծեր են:

2. Էլիպսոիդի հավասարումը այնպես ձևափոխենք, որ հավասարության մի մասում ստացվի գնդի հավասարումը, իսկ երկրորդ մասը վերածվի առաջին աստիճանի բազմանդամների:

Ապացուցենք, որ բոլոր մակերևույթի հավասարումը կարելի է հետևյալ ձևով ներկայացնել՝

$$A(x^2+y^2+z^2)+Bx+Cy+Dz+E=$$
$$=(mx+ny+lz)(m'x+n'y+l'z), \qquad (6)$$

այս երկու հարթության գիծը՝

$$mx+ny+lz=h$$
$$m'x+n'y+l'z=k \qquad (7)$$

հարթությունների հատման ուղղագծեր:

Վերցնենք հետևյալ մակերևույթները՝

$$A(x^2+y^2+z^2)+Bx+Cy+Dz+E=h(m'x+n'y+l'z)$$
և
$$h=mx+ny+lz \qquad (8)$$

Այդ հատման գիծը կլինի ուղղագիծ, հետևաբար այդ մակերևույթներից մեկը ներկայացնում է գունդ, իսկ մյուսը՝ հարթություն:

Բայց x, y և z-ի այն արժեքները, որոնք բավարարում են (8) հավասարումներին, պետք է բավարարեն նաև (6) հավասարմանը. հետևաբար (8) ուղղագիծը գտնված է (6) մակերևույթի վրա. և հետևաբար նա գտնված է՝

$$mx+ny+lz=h \qquad (9)$$

հարթության վրա, հետևաբար կարող ենք ասել, որ (9) հարթության և (6) մակերևույթի հատման գիծը ուղղագիծ է:

Նման դատողությամբ կապացուցվի, որ

$$m'x+n'y+l'z=k$$

հարթության և (6) մակերևույթի հատման գիծը ուղղագիծ է:

3. Բոլոր էլիպսոիդի հավասարումից, (6) ձևին կարելի է բերել գունդ, էլիպսական գլանը, միախոռոչ հիպերբոլոիդը, երկխոռոչ հիպերբոլոիդը և էլիպսական պարաբոլոիդը

[illegible]

[illegible]

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

կամ

$$x^2 = \frac{a^2z^2}{c^2} - \frac{a^2y^2}{b^2}$$

կամ

$$x^2+y^2+z^2 = \frac{a^2+c^2}{c^2}z^2 - \frac{a^2-b^2}{b^2}y^2$$

կամ

$$x^2+y^2+z^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c}z+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y\right)\left(\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c}z-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y\right).$$

[illegible]

$$\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c}z+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y = h$$

և

$$\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c}z-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y = k$$

[illegible] (h և k [illegible]):

[illegible]

$$x^2+y^2+z^2-a^2 = \left(z+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y\right)\left(z-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y\right)$$

[illegible]

$$z+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y = h$$

և

$$z-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y = k$$

[illegible]:

[illegible]

$$x^2+y^2+z^2-a^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c}z+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y\right)\left(\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c}z-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y\right)$$

[illegible]

$$x^2+y^2+z^2+b^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{b}x-\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{c}z\right)\left(\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{b}x+\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{c}z\right)$$

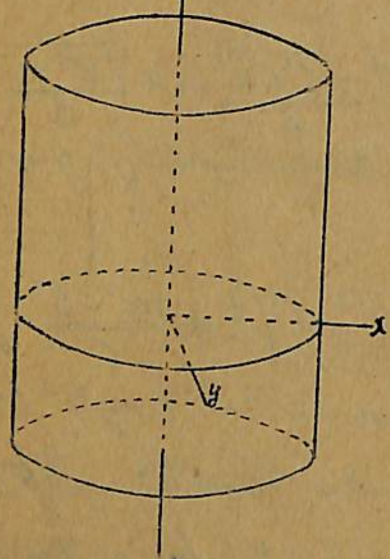
[illegible]

$$x^2+y^2+z^2-\frac{2a^2}{c}z = \left(z-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y\right)\left(z+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y\right)$$

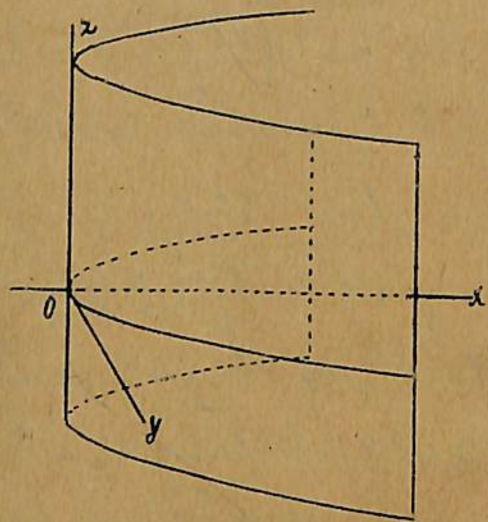
[illegible]

Վերջ

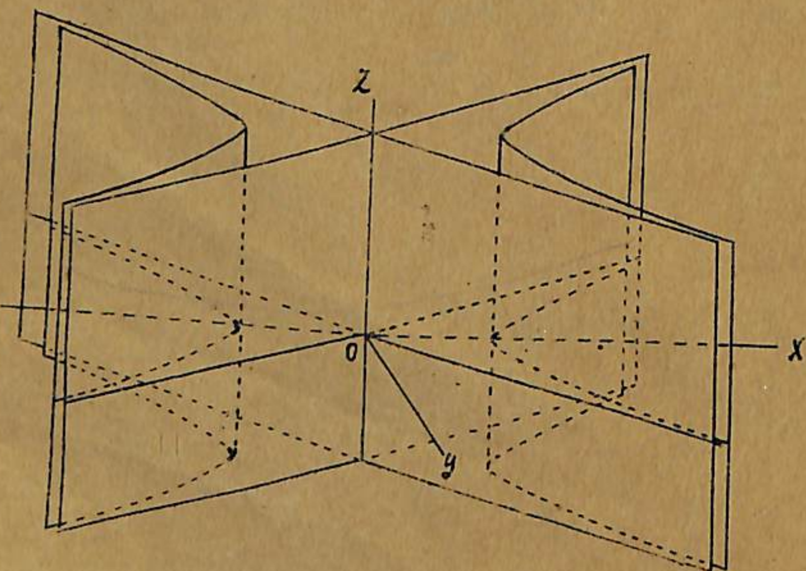
Գլանային մակերևույթներ երկրորդ կարգի



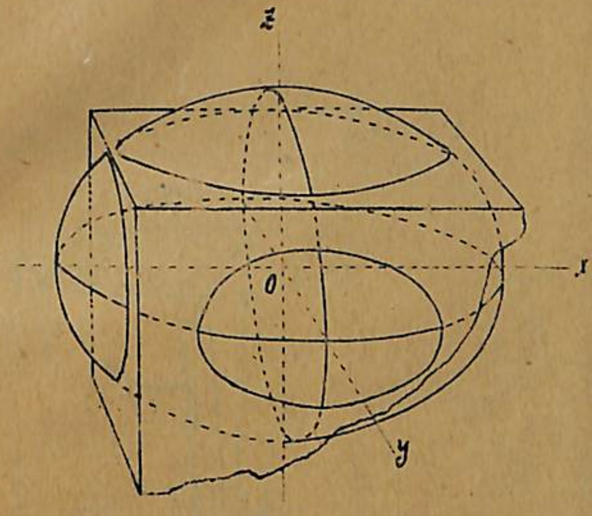
Էլիպսական գլան



Պարաբոլական գլան

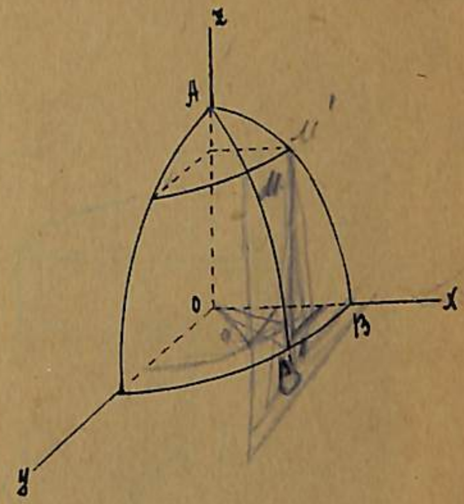


Հիպերբոլական գլան.



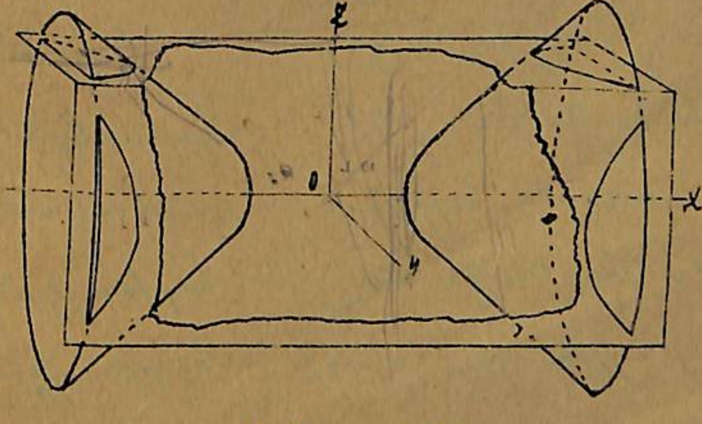
Նկար 34.

Էլիպսոիդ և նրա հատման գծերը կոորդինատային հարթությունների զուգահեռ հարթություններով:



Նկար 35

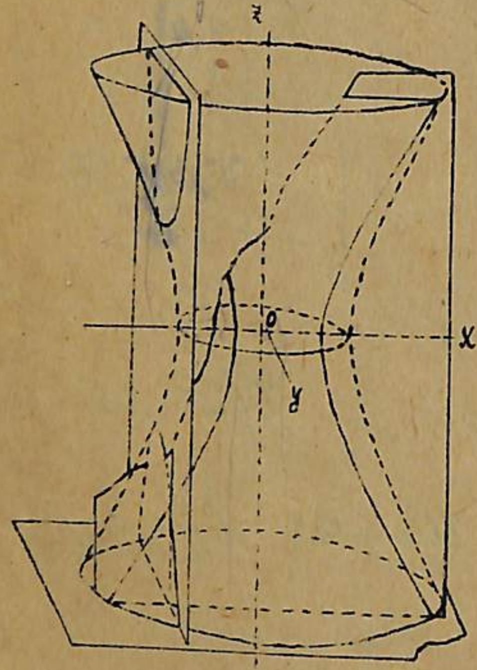
Սփռման էլիպսոիդ



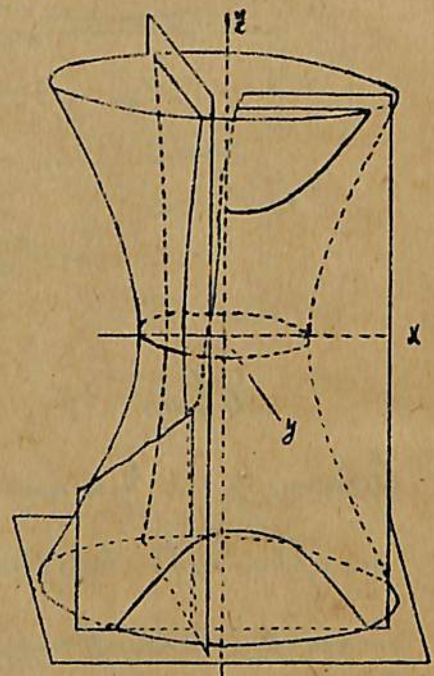
Նկար 36

Երկխոռոչ հիպերբոլոիդ և նրա հատման գծերը հարթություններով:

Միախոռոչ հիպերբոլոիդ



Նկար 37a



Նկար 37b

Հատման գծերը՝ (xy) հարթության զուգահեռ հարթությամբ, (yz) հարթության զուգահեռ հարթությամբ, (zx) հարթությամբ և (xy) հարթությամբ (կոկորդի էլիպս):

Հատման գիծը՝ (zx) հարթության զուգահեռ հարթությամբ և (yz) հարթության զուգահեռ հարթությամբ:

Վրիպակներ

Էջերը	Տող	Գրված է	Պետք է լինի
25	11	հարթությունների	[illegible]
23	13	$\frac{M_1 M}{M M_2} = \frac{m}{n}$	$\frac{M_1 M}{M M_2} = \frac{n}{m}$
26	11	$\frac{M_1 M}{M M_2} = \frac{m}{n}$	$\frac{M_1 M}{M M_2} = \frac{n}{m}$
43	3 վերջից	$m : n$	$n : m$
53	10	$m : n$	$n : m$
88	14	$\cos(YZ)$	$\cos(YX)$
119	9	$(a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n)$	$(a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n)z$
119	13	$(a_{31}l' + a_{32}m' + a_{33}n')$	$(a_{31}l' + a_{32}m' + a_{33}n')z$
120	վերջին տողը	բացակա	$a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n$
128	14	բացակա	$a'_{11}x^2 + a'_{44} = 0$

Ցանկ

Գլուխ Ա.

Գլուխ Բ.

Գլուխ Գ.

Ուղիղ գիծ

Գլուխ Դ.

Գլուխ Ե.

Յերկրորդ կարգի մակերևույթներ.