1965

51(075)
U-15

1928 г.

51(075)
Բ-55

ՊԱՍԱՊՐՐԵՐ I ՅԵՎ II ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՊՊՐՈՑՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Մ. Ֆ. ԲԵՐԳ. Մ. Ա. ԶՆԱՄԵՆՍԿԻ. Գ. Ն. ՊՈՊՈՎ.
Ի. Ֆ. ՍԼՈՒԴՍԿԻ. Ն. Պ. ԽՎՈՍՏՈՎ. Ն. Ի. ՇՋԵՏԻՆԻՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԳԻՐՔ

ԲԱԳԱՔԱՅԻՆ ԴՊՐՈՑԻ ՎԵՑԵՐՈՐԴ ՏԱՐՎԱ ԾՐԱԳՐԻՆ ՀԱՄԱՊԱՏԱՍԽԱՆ

ՅԵՐԿՐՈՐԴ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՅԵՐԿՐՈՐԴ ՏԱՐԻ

Բնագրի յերրորդ հրատարակությունից

Թարգմանեցին՝ ԲԵՆՅԱՄԻՆ ԽՈՋԱՆԵԹՅԱՆ
ՀԱԿՈԲ ՇԱՄՔՈՐՅԱՆ

ՊԵՏՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ.—ՅԵՐԵՎԱՆ. 1928

21.06.2013

20 MAY 2010
01 JUL 2005

ԴԱՍԱԳՐՔԵՐ I ՑԵՎ II ԱՍՏԻՃԱՆԻ ԴՊՐՈՑՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

51(075)
Մ-15

Մ. Ֆ. ԲԵՐԳ, Մ. Ա. ԶՆԱՄԵՆՍԿԻ, Գ. Ն. ՊՈՊՈՎ,
Ի. Ֆ. ՍԼՈՒԴՍԿԻ, Ն. Պ. ԽՎՈՍՏՈՎ, Ն. Ի. ՇՋԵՏԻՆԻՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԳԻՐՔ

ՔԱՂԱՔԱՑԻՆ ԴՊՐՈՑԻ ՎԵՑԵՐՈՐԴ ՏԱՐՎԱ ԴԱՍԸՆԹԱՑ

ՅԵՐԿՐՈՐԴ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՅԵՐԿՐՈՐԴ ՏԱՐԻ

Բնագրի յերրորդ հրատարակությունից

— 386

Թարգմանեցին՝ ԲԵՆՅԱՄԻՆ ԽՈՋԱՆԵՓՅԱՆ
ՀԱԿՈԲ ՇԱՄՔՈՐՅԱՆ

ՊԵՏԱԿԱՆ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ.—ՅԵՐԵՎԱՆ, 1928

ՀՍՍՌ ԱՄՆ ԱՐՎԱՆԻՑՅԱՆ
Անվան

1968

№ 813 Գրատեսվար № 835 (բ) Տիրաժ 4000

Պետհրատի առաջին տպարան Վաղարշապատում

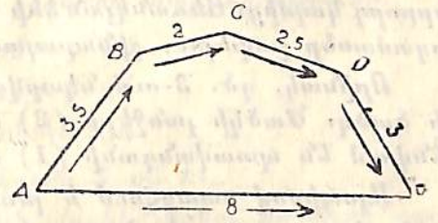
ԳԼՈՒԽ I.

ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆ ՅԵՎ ՋՈՒԳԱՇԵՌ ԳԾԵՐ.

§ 1. ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ՋԵՎԵՐԻ ՄԱՍԻՆ.

ABCDE հողամասը (գծանկար 1) պատած է ցանկապատով։ A ծայրից E ծայրը անցնել կարելի չէ ուղիղ գծով և ABCDE բեկյալ գծով, որը բաղկացած է AB, BC, CD և DE առանձին ուղիղներից և որոնք միմյանց միանում են B, C և D կետերում։ Այդ ցանկապատի կողմերը չափել են և պարզել՝ որ AE=8 մ, AB=3,5 մ, BC=2 մ, CD=2,5 մ, DE=3 մ։

Այսպիսով ABCDE բեկյալ գծի երկարությունն է (3,5+2+2,5+3) մ=11 մ։ Այսինքն՝ A կետից մինչև E կետը եղած տարածությունը բեկյալ գծով 3 մ ավելի է, քան այդ կետերի միջև եղած տարածությունը ուղիղ գծով։ Եթե AE գծով ցանկապատ չլիներ, ABCDE բեկյալ գիծը կմնար չփակված։ Եթե AE-ով ցանկապատ է անցնում, ապա ստացվում է մի փակ ձև, որը պարփակում է շրջապատող պաշտի մի մասը։ Այդ ձևը բաղկացած է հինգ կողմերից, որոնց երկարությունների գումարը կոչվում է պարագիծ։ Հարևան կողմերը հաավելով՝ ստացվում է հինգ անկյուն, որի համար էլ այդ ձևը կարող ենք անվանել հնգանկյուն։ Եթե չափենք այդ ցանկապատի կողմերը, կտանանք, տարբեր երկարություն ունեցող հատվածներ (հաշվեք յուրաքանչյուր հատվածը և համեմատեցեք ամբողջ բեկյալ գծի հետ) և կտեսնենք, որ երկու կետեր միացնող բեկյալի երկարությունն ավելի է, քան նույն կետերը միմյանց միացնող ուղիղի երկարությունը։



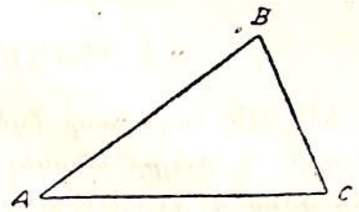
Գծ. 1

Այսպիսով, ուղիղով հաշված տարածությունը միշտ ավելի կարճ է, քան բեկյալով հաշված տարածությունը։

Այս երկրաչափական հասարակ եզրակացությունն ամեն տե-

ական կառուցումների ժամանակ ունի կարևոր տնտեսական նշանակություն, մանավանդ ճանապարհներ կառուցելու դեպքում, որովհետև նյութ և բանվորական ուժ ե խնայվում։ Գործնականում յերկաթուղագիծ անցկացնելիս, բազմաթիվ պատճառներով հնարավոր չե յերկու կայարանների միջև ուղղագիծ ճանապարհ կառուցել. բայց եժան լինելու համար աշխատում են՝ որքան հնարավոր ե՝ քիչ շեղվել ուղիղ գծից։

Յերկրաչափության մասին գաղափար չունեցող ամեն մի ճանապարհորդ ել գիտե այս ճշմարտությունը. ճանապարհորդը մի կետից մյուսն անցնելիս ժամանակ և ուժ չվատնելու համար, աշխատում ե ուղիղ գծով գնալ, յեթե բնական խոչնդոտներ չկան։ Պարզ ե, ուրեմն, որ յեթե A և C կետերի միջև գտնված բեկյալը բաղկացած ե AB+BC յերկու հատվածներից (գծ. 2), ապա այդ բեկյալի յերկարությունն ավելի չե, քան այդ յերկու կետերը միացնող AC ուղիղի յերկարությունը։



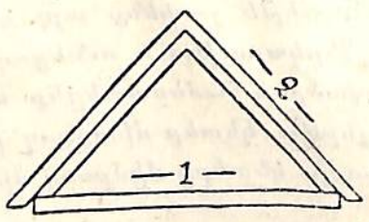
գծ. 2

ABC փակ ձևը կոչվում ե յեռանկյուն. AB, BC և AC գծերը կոչվում են յեռանկյան կողմեր. BAC, ACB և CBA անկյունները կոչվում են յեռանկյան անկյուններ, և վերջապես A, B և C կետերը կոչվում են յեռանկյան գագաթներ։

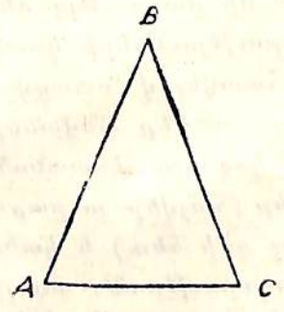
Այսպիսով, ամենից առաջ ծանոթացանք այդ ձևի հետևյալ կարևոր հատկությանը.—յեռանկյան յերկու կողմերի գումարը ավելի չե նրա յերրորդ կողմից։ Յեռանկյան ձևի հետ մենք հաճախ ենք գործ ունենում հողամասեր չափելու, շինարարության գործում և տեխնիկայում։

Որինակ, գծ. 3-ում նկարված ե այսպես կոչված յերկլանջանի մի ծածկ։ Ծածկի լանջերը (2) միանալով կազմում են անկյուն և հենվում են պատվանդանի (1) վրա։

Այսպիսով ստացվում ե յեռանկյան ձև, որի լանջերը յեռանկյան յերկու իրար հավասար կողմերն են, իսկ պատվանդանը՝ նրա յերրորդ կողմը։ ABC յեռանկյունը, որի յերկու կողմերը միմյանց հավասար են (գծ. 4) կոչվում ե հավասարասուն։ Այդ AB և BC յերկու հավասար կողմերը կոչվում են սրունքներ։ AC յերրորդ կողմը կոչվում ե հիմք։ Պատահում ե, որ յեռանկյան բոլոր կողմերն ել միմյանց հավասար են



գծ. 3



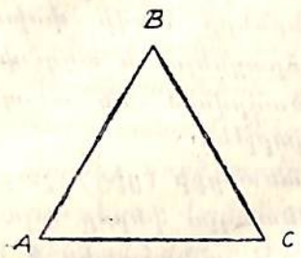
գծ. 4

լինում (գծ. 5)։ Այդ ժամանակ յեռանկյունը կոչվում ե հավասարակողմ։

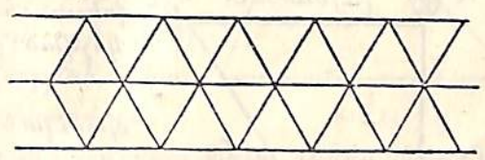
Այդպիսի յեռանկյուններ գործ են ածում, որինակ՝ սենյակի պարկետային հատակ շինելիս, գորգագործության ժամանակ և այլն։

Դուք կարող եք այդպիսի յեռանկյուն կազմել միմյանց հավասար ձողիկներից, որինակ՝ յերեք լուցկուց։

Յեթե յեռանկյան յերեք կողմերն ել տարբեր մեծություն ունեն, յեռանկյունը կոչվում ե անհավասարակողմ։



գծ. 5


գծ. 6

Յեթե վերցնենք կամավոր յերկարության յերեք հատ ձողիկ, ամեն դեպքում ել չի կարելի նրանցից յեռանկյուն պատրաստել, կամ ինչպես ասում են՝ կառուցել։

Որինակ՝ դուք ունեք 6 սմ, 8 սմ և 15 սմ յերկարության ձողիկներ։ Կարելի՞ ե դրանցից յեռանկյուն պատրաստել։ Վոչ։ Ինչո՞ւ։

Վերցրեք այժմ 5 սմ, 6 սմ և 9 սմ յերկարության ձողիկներ։ Դուք կտեսնեք, որ դրանցից յեռանկյուն պատրաստվում ե։

Կազմեք զույգ-զույգ վերցրած կողմերի տարբերությունը.

9 սմ — 5 սմ = 4 սմ
9 սմ — 6 սմ = 3 սմ
6 սմ — 5 սմ = 1 սմ

Մեր յեռանկյան ամենափոքր կողմը 5 սմ ե։

Դուրս ե գալիս, որ յեռանկյան վորևե յերկու կողմերի տարբերությունը յերրորդ կողմից փոքր ե։ Մտածեք, թե ինչպիսի յեռանկյուններում այդ տարբերությունը կարող ե հավասար լինել զերոյի։ Ստուգեք յեզրակացությունը յեթե վերցված են 6 սմ, 8 սմ և 15 սմ յերկարության ձողիկներ։

Խնդիրներ.—1. Յեռանկյան պարագիծը 27 սմ ե։ Մեկ կողմը 9 սմ ե, մյուսը 3 սմ-ով ավելի յե։ Ինչի՞ ե հավասար յերրորդ կողմը։

2. Հավասարասրուն յեռանկյան պարագիծը 38 սմ ե։ Սրունքը 5 սմ-ով փոքր ե հիմքից։ Գտնել կողմերի մեծությունը։

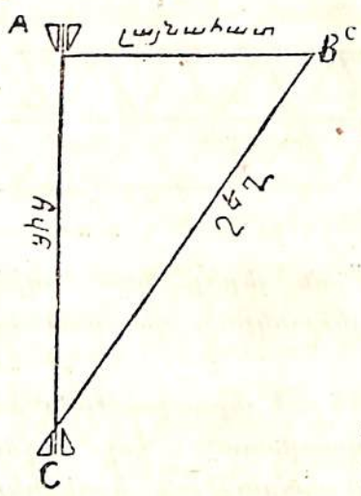
3. Բանվորանոցին հատկացված յեռանկյուն հողամասը ուզում են ցանկապատել։ Դրա համար յեռանկյան գագաթներին ցցեր են խփել և ժամանակավորապես այդ ցցերը միմյանց միացրել յերեք

պարանով, վորպեսզի դրանցով նշեն ցանկապատի ուղղությունը։ Բոլոր պարանների յերկարությունը 55 մ է, մեկ պարանը մյուսից մեծ է 4 մ-ով, իսկ յերրորդից փոքր է 2 մ-ով։ Գտնել յուրաքանչյուր պարանի յերկարությունը։

§ 2. ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԸ.

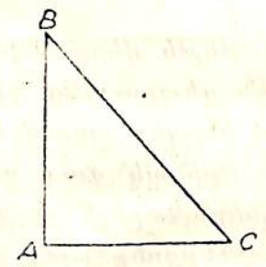
Մինչև այժմ մենք յեռանկյունները տարբերում ելինք իրենց կողմերով, բայց կարելի չե յեռանկյունները տարբերել նաև անկյուններով։

Ծանր բեռները փոքր տարածության վրա (որինակ՝ արհեստանոցի սահմաններում, նավամատույցի ապրանքները նավը փոխադրելու համար) բարձրացնելու և տեղափոխելու համար գործադրվում են այսպես կոչված շրջադարձ կաթիթեր։



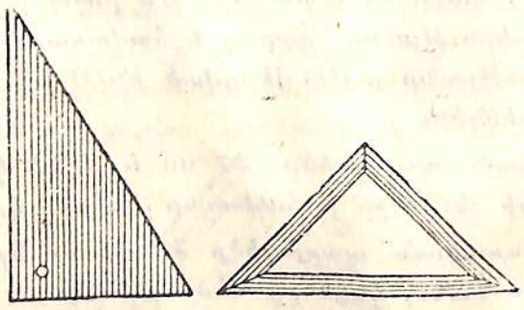
գծ. 7

AC ուղղաձիգ առանցքի (յիկ) շուրջը պտույտ և գալիս մետաղյա ֆերմը (այուն, գծ. 7) բաղկացած AB լայնահատից և BC շեղից. AB-ն AC-ի հետ կազմում է ուղիղ անկյուն։ Ստացվում է ABC յեռանկյուն, վորը կոչվում է ուղղանկյուն։

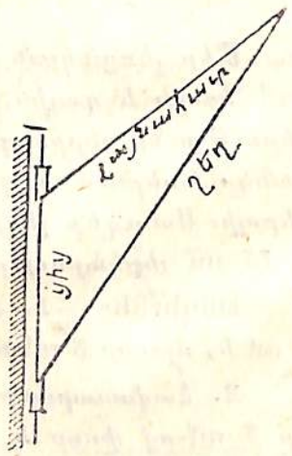


գծ. 8

Այդ յեռանկյան կողմերն են՝ յիկը, լայնահատը և շեղը։ ABC ուղղանկյուն յեռանկյան AB և AC կողմերը (գծ. 8), վորոնք կազմում են ուղիղ անկյուն, կոչվում են եզեր։ Իսկ ուղիղ անկյան դիմացն ընկնող BC կողմը կոչվում է ներքնաձիգ։ Յերեք ուղղանկյուն յեռանկյան եզերը միմյանց հավասար են, այդպիսի յեռանկյունը կոչվում է հավասարասրուն ուղղանկյուն յեռանկյուն։ Անեն



գծ. 9

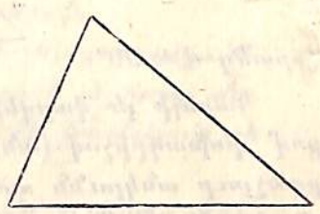


գծ. 10

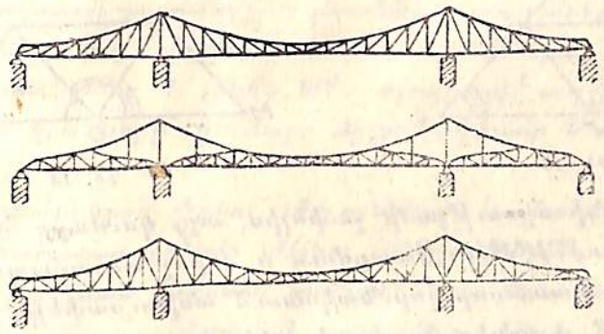
մի ուղղանկյուն յեռանկյան որինակի վրա կարելի չե ցույց տալ, վոր ներքնաձիգը յուրաքանչյուր եզից միշտ ավելի մեծ է

լինում։ Ուղղանկյուն յեռանկյունների հանդիպում ենք շատ հաճախ այսպես կոչված գծագրական յեռանկյունների մեջ [(պատրաստված փայտից, մետաղից, ապակուց կամ ցելուլոիդից (գծ. 9)]։

Լինում են և ուրիշ տեսակի շրջադարձ կաթիթեր (գծ. 10)։ Նրանցում լայնահատը թեքված է դեպի ցից բութ անկյունով. այդպիսի յեռանկյունը կոչվում է բթանկյուն։ Վերջապես կարող են լինել այնպիսի յեռանկյուններ, վորոնց յերեք անկյունները լինեն սուր. այդպիսի յեռանկյունը կոչվում է սրանկյուն (գծ. 11)։ Յեռանկյունների համագրման որինակ են հանդիպանում մետաղե ֆերմերը (գծ. 12), վորոնք գործադրվում են կամուրջներ կառուցելու ժամանակ։ Դա բացատրվում է նրանով, վոր աշխատում են՝ այդ կառուցվածքների ձևերի կայունությամբ ապահովել նրանց դիմադրությունը։ Իսկ այդ նպատակի հա-



գծ. 11



գծ. 12

մար ամենից հարմար ձևերը յեռանկյուններն են, քանի վոր ավյալ (գծ. 12) յերկարության ձողից կարելի չե միմիայն մի ձևով յեռանկյուն կառուցել, թեկուզ նրա գագաթները միացվեն շարնիրներով։

§ 3. ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐԸ.

Կարճ սավարաթղթից ABC յեռանկյունը (գծ. 13)։ Ձափեք յեռանկյան կողմերը, և նշելով նրանց միջնակետերը (D, E, F կետերը), կարեք յեռանկյունից (1), (2), (3) կտորները։ (1) կտորի A անկյան AF կողմը կցեք MN ուղիղին (գծ. 14) այնպես, վոր A գագաթը MN ուղիղի վրա ընդունի O դիրքը։ (2) կտորը կցեք (1)-ին այնպես, վոր B անկյան գագաթը ընկնի O կետի վրա, վերջապես (3) կտորը կցեք (2)-ին այնպես, վոր C անկյան գագաթը ընկնի O կետի վրա. այդպիսով C անկյան ազատ կողմը կկազմի A անկյան ազատ կողմի շարունակությունը. այլ կերպ ասած՝ յեռան-

կյան բոլոր անկյունների գումարը հավասար կլինի յերկու ուղիղ անկյան, կամ 180^0-ի։

Այդ արդյունքին կհանանենք՝ անկախ այն հանգամանքից, թե ինչ մեծություն կունենան մեր յեռանկյան անկյունները, այլ կերպ ասած՝ նրանց գումարը կայուն մեծություն է.

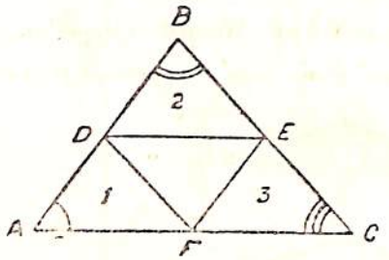
$$\angle A+\angle B+\angle C=180^0,$$

կամ

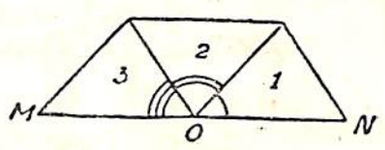
$$\angle A+\angle B+\angle C=2d,$$

վորտեղ $d=90^0$։

Կարելի յե վարվել այլ կերպ.—ոգտվել բոլորին ծանոթ գործիքով՝ վոխանդրիչով (անկյունաչափով)։ Դրա համար պետք է յուրաքանչյուր անկյունն առանձին չափվի և չափումների արդյունքները գումարվի։ Սովորաբար անկյունների գումարն այդ դեպքում վոչ թե հավասար է լինում 180^0-ի, այլ մի փոքր ավելի կամ պակաս, որինակ,



Գծ. 13



Գծ. 14

մեկ աստիճանի ճշտությամբ չափելիս, այդ գումարը հավասար կլինի 179^0-ի կամ 181^0-ի։ Առաջվում է վորոշ անհամապատասխանություն, վորի պատճառը գործնականում անխուսափելի յե. այդ կախված է, նախ՝ յեռանկյունը կոպիտ կերպով գծագրելուց, վորի անկյունները չափում ենք, յերկրորդ՝ գործիքի անկատար լինելուց, յերրորդ՝ անկյունը անկյունաչափով աչքով հաշվելուց։ Բայց յեթե չափումը կատարենք մանրակրնին և միքանի անգամ, կամ յեթե միևնույն յեռանկյան անկյունները կոլլեկտիվ կերպով չափենք (որինակ, ամբողջ դասարանով), ապա հատուկ ձևով հաշվելիս՝ արդյունքը կլինի ճշտության ավելի մոտ, քան առանձին չափումների ժամանակ։ Այդ հատուկ ձևը հետևյալն է.—գտնում եք բոլոր չափումների միջին թվաբանականը, վորով հարթվում են առանձին չափումների սխալները, վորոնցից միքանիսը ավելցուկ են տալիս, մյուսները՝ պակասորդ։ Որինակ՝ 5 անգամ չափելով յեռանկյան անկյունների գումարը ստացվել է՝

$$179^0,\ 181^0,\ 181^0,\ 182^0,\ 178^0;$$

Ընդհանուր գումարը բաժանենք չափումների թվի վրա

$$\frac{179^0+181^0+181^0+182^0+178}{5}=\frac{901^0}{5}=180^0\ 12'.$$

Ստացված հետևանքն ավելի մոտ է ճշմարտության, քան ամեն մեկն առանձին։

Յեռանկյան անկյունների գումարը գտնելու վերև հիշված գործնական յեղանակները մեզ այն յեզրակացությանն են բերում, վոր գումարը ճիշտ հավասար է 180^0-ի։ Սակայն մենք կտանք յեռանկյան անկյունների այդ կարևոր հատկության ապացուցումն, իսկ առայժմ զբաղվենք նրանից բղխող հետևանքներով։

1. Կարող է լինել այնպիսի յեռանկյուն, վորի յերկու անկյուններն էլ լինեն ուղիղ։ Վոչ, վորովհետև այդ դեպքում յերրորդ անկյունը հավասար է զերոյի, հետևապես վոչ մի յեռանկյուն չի ստացվի։

2. Կարող է յեռանկյունը յերկու բութ անկյուն ունենալ։ Վոչ, վորովհետև ամեն մի բութ անկյուն ուղիղ անկյունից ավելի մեծ է. հետևապես յերկու բութ անկյունների գումարը յերկու ուղիղ անկյունից ավելի մեծ կլինի։

3. Ինչի՞ չե հավասար ուղղանկյուն յեռանկյան սուր անկյունների գումարը։ Քանի վոր մեկ անկյունը 90^0 է, ուրեմն մյուս յերկու անկյունները միասին պետք է լինեն 90^0. այսպիսով, ուղղանկյուն յեռանկյան սուր անկյունների գումարը միշտ հավասար է մեկ ուղիղ անկյան։

4. Յեթե մի յեռանկյան յերկու անկյունները հավասար են մի ուրիշ յեռանկյան համապատասխան յերկու անկյուններին,—հավասար կլինեն արդյոք նաև յերրորդ անկյունները։ Այո, հավասար կլինեն, վորպես հավասար գումարների լրացումներ մինչև 180^0։

5. Յեթե յեռանկյան մի անկյունը բութ է. ինչ կարելի յե ասել մյուս յերկու անկյունների գումարի մասին։ Այդ գումարը 90^0-ից պակաս է, հետևապես մյուս յերկուսը կլինեն սուր անկյուններ։

Վարժություններ.—1. ABC յեռանկյան $\angle A=38^0\ 17'$, $\angle B=69^0\ 27'$։ Գտնել C անկյան մեծությունը։

2. Ուղղանկյուն յեռանկյան մեկ սուր անկյունը հավասար է $42^0\ 37'$։ Ինչի՞ չե հավասար մյուս սուր անկյունը։

3. ABC յեռանկյան $\angle A=103^0\ 08'$, $\angle B=21^0\ 54'$։ Ինչի՞ չե հավասար յերրորդ անկյունը։

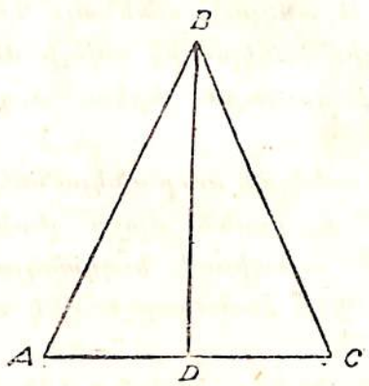
§ 4. ՀԱՎԱՍԱՐԱՍԱՐՈՒՆ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԳԱԳԱԹԻ ԱՆԿՅԱՆ ԿԻՍՈՂԸ.

Յեթե ABC յեռանկյան AC կողմի D միջնակետը (գծ. 15) միացնենք հակադիր անկյան B գագաթին, յեռանկյան ներսում կստանանք BD գիծը, վորը կոչվում է յեռանկյան միջնագիծ (մեդիան)։ Քանի վոր յեռանկյունն ունի յերեք կողմ, ուստի յուրաքան-

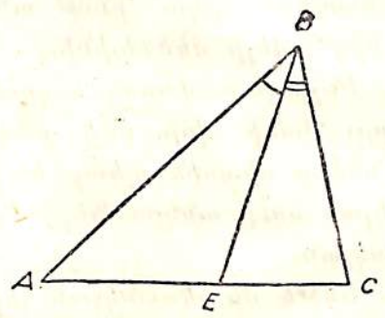
չյուր կողմին համապատասխանում է իր միջնագիծը։ ABC յեռանկյան (գծ. 16) վորևե անկյունը կիսենք, օրինակ ∠B-ն BE գծով, վորը այդ գագաթի հակադիր կողմը հատում է E կետում։ Այդ գիծը կոչվում է B անկյան կիսող։ Պարզ է, վոր յուրաքանչյուր յեռանկյան մեջ կարելի է անցկացնել յերեք կիսող։

Տանենք ABC հավասարասրուն յեռանկյան մեջ հավասար կողմերով կազմված B անկյան BD կիսողը (գծ. 17)։ Ծալենք գծանկարը BD ուղիղով։ Քանի վոր ∠1=∠2-ին, վորպես միևնույն անկյան կեսեր, BA գիծը կգնա BC-ի ուղղությամբ։ Սակայն AB=BC-ին, վորով և A կետը կնկնի C կետի վրա։

Քանի վոր գծանկարը ծալելու ժամանակ D կետը մնաց իր տեղում, դրանից յեզրակացնում ենք, վոր AD=DC, այսինքն D-ն հիմքի միջնակետն է։ Ուստի հավասարասրուն յեռանկյան B գագաթի անկյան BD կիսողը հանդիսանում է միաժամանակ իբրև նրա միջնագիծ։



Գծ. 15

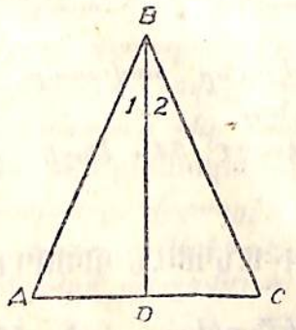


Գծ. 16

Գծանկարի ծալելը թույլ է տալիս նաև մի ուրիշ կարևոր յեզրակացություն անել։ A և C անկյունների գագաթներն համընկնում են, AB կողմը համաուղղվում է BC կողմի հետ, AD կողմը համաուղղվում է CD կողմի հետ, ապա ուրեմն ∠A=∠C, այսինքն, հավասարասրուն յեռանկյան հիմքի անկյունները միմյանց հավասար են։

Հարցեր.—*1.* Յերեք հայտնի է հավասարասրուն յեռանկյան գագաթի անկյան չափը՝ կարելի՞ է արդյոք վորոշել հիմքի անկյան չափը։

Գտեք հիմքի անկյան չափը (մեծությունը), յերեք գագաթի անկյունը հավասար է $38^0\ 40'$։



Գծ. 17

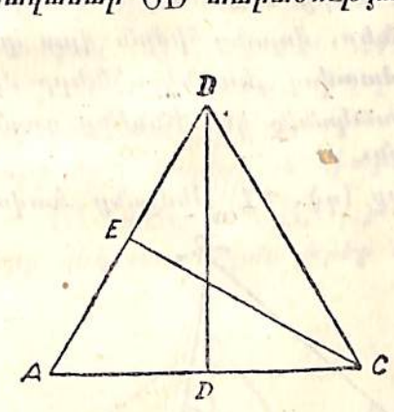
Գտեք գագաթի անկյան մեծությունը, յերեք հիմքի անկյունը հավասար է $52^0\ 18'$։

2. Ինչի՞ է հավասար հավասարասրուն ուղղանկյուն յեռանկյան սուր անկյունը։

3. Կիրառեք այդ յեզրակացությունը հավասարակողմ յեռանկյան վերաբերյալ (գծ. 18)։ Նրա բոլոր անկյունները միմյանց հավասար կլինեն։ Ինչի՞ է հավասար յուրաքանչյուր անկյունը։ Ընդունելով իբրև հիմք AC կողմը՝ կգտնենք, վոր ∠A=∠C։ Յերե՞ք AB կողմը ընդունենք իբրև հիմք, ապա ծալելով գծանկարը EC միջնագծով, կտեսնենք, վոր ∠A=∠B։ Հետևապես ∠B=∠C։ Այսինքն՝ հավասարակողմ յեռանկյան բոլոր յերեք անկյունները միմյանց հավասար են՝

$$\angle A=\angle B=\angle C.$$

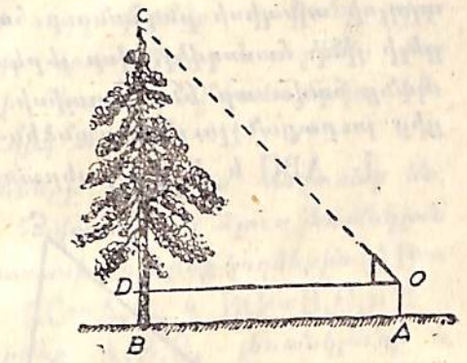
Սակայն նրանց գումարը հավասար է 180°-ի, հետևապես յուրաքանչյուր անկյունը կազմում է $\frac{2}{3}d$, այսինքն 60^0։



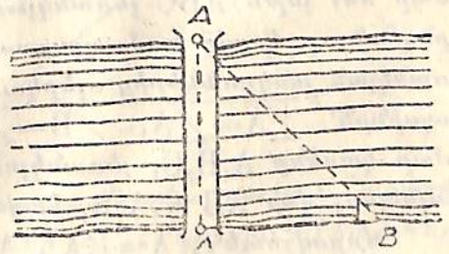
Գծ. 18

Խնդիրներ.—Վորոշեք ծառի բարձրությունը՝ ձեռքի տակ ունենալով ռուլետ և գծագրական հավասարասրուն ուղղանկյուն յեռանկյուն (գծ. 19)։

Լուծում.—Դրա համար բավական է ծառից հեռանալ AB-ին հավասար OD տարածությամբ, վորպեսզի յեռանկյան եջի հորիզոնական դրությամբ դիտողը յեռանկյան ներքնաձգի շարունակության վրա տեսնի ծառի C գագաթը։ Այդ ժամանակ △ODC նույնպես ուղղանկյուն հավասարասրուն է և CD=OD։ Հետևապես չափելով AB=OD տարածությունը և ավելացնելով նրան OA բարձրությունը, վորի վրա գտնվում եր յեռանկյունը ծառի կատարը պիտելիս, մենք կիմանանք նաև ծառի բարձրությունը։



Գծ. 19



Գծ. 20

2. Կամուրջի ծայրերում իրար հանդեպ գտնվում են A և A_1 (գծ. 20) ափերնաձև լապտերները։ Ի՞նչպես վորոշել կամուրջի յեր-

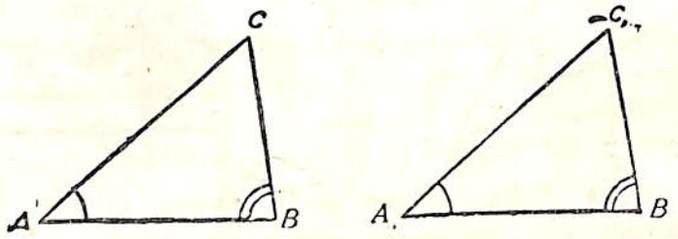
կարուրթյունը (կամ վոր միևնույնն է՝ գեսի լայնուրթյունը), առանց գեան անցնելու։

Լուծում.—կարելի չե ոգտվել միևնույն գծագրական չեռանկյունով։ A_1 լապտերի մոտ տեղավորելով չեռանկյունը, նրա մի եջն ուղղում ենք AA_1 գծով։ Յերկրորդ եջը ցույց կաս AA_1-ին ուղղահայաց այն ուղղուրթյունը, վորով գեսի չերկարուրթյամբ պետք է գնալ A_1B այնպիսի մի տարածուրթյուն, վորպեսզի այդ դիրքում կարելի լինի դիտել չեռանկյան ներքնաձիգի ուղղուրթյամբ A լապտերը։ Այդ ժամանակ $A_1B=AA_1$. չափելով A_1B տարածուրթյունը՝ կիմանանք կամուրջի չերկարուրթյունը։

§ 5. ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ.

Յեռանկյունները, ինչպես տեսանք, կարող են ունենալ տարբեր մեծուրթյան կողմեր և անկյուններ։ Նրանց մեջ կարող են լինել հավասար չեռանկյուններ, այսինքն՝ այնպիսիները, վորոնք վերադրման դեպքում համատեղվում են։ Հարց է առաջանում՝ կան արդյոք այնպիսի բնդհանուր հատկանիշներ, վորոնց հիման վրա կարելի լինի համոզվել, վոր չերկու համեմատվող չեռանկյունները միմյանց հավասար են։ Այդպիսի չերեք հատկանիշ կա։ Բննենք դրանցից յուրաքանչյուրն առանձին-առանձին։

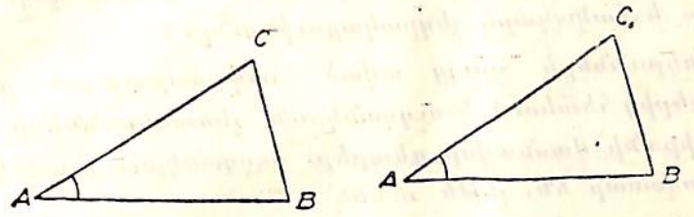
I. ABC և $A_1B_1C_1$ չեռանկյունները (գծ. 21) միմյանց հավասար են, չերեք ABC չեռանկյան անկյուններից չերկուսը և նրանց բնդհանուր կողմը համապատասխանաբար հավասար են $A_1B_1C_1$ չեռանկյան անկյուններից չերկուսին և նրանց բնդհանուր կողմին. այսինքն՝ $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$ և $AB=A_1B_1$։ Համոզվելու համար կարենք $A_1B_1C_1$ չեռանկյունը և վերադրենք ABC չեռանկյանն այնպես, վոր AB և A_1B_1 հավասար կողմերը համատեղվեն։



գծ. 21

Վորովհետև $\angle A=\angle A_1$, A_1C_1 կողմը կգնա AC կողմի ուղղուրթյամբ։ Այդպես էլ $\angle B=\angle B_1$. հետևապես B_1C_1 կողմը կգնա BC կողմի ուղղուրթյամբ։ Այդ դեպքում C_1 գագաթը անպայման կհնկնի C գագաթի վրա, քանի վոր չերկու ուղիղներ կարող են հատվել միայն մի կետում։

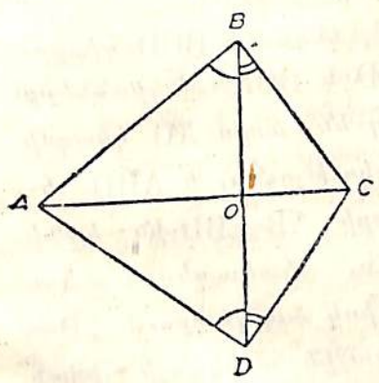
II. ABC և $A_1B_1C_1$ չեռանկյունները (գծ. 22) միմյանց հավասար են, չերեք ունեն մեկական հավասար անկյուններ ($\angle A=\angle A_1$), վորոնք գտնվում են միմյանց համապատասխան հավասար չերկու կողմերի միջև ($AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$)։ Կարենք դարձյալ $A_1B_1C_1$

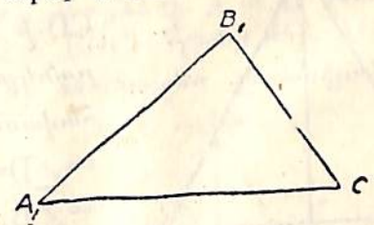


գծ. 22

չեռանկյունը և վերադրենք ABC չեռանկյանն այնպես, վոր A և A_1 հավասար անկյունների գագաթները միմյանց վրա ընկնեն։ Կարելի չե $A_1B_1C_1$ չեռանկյունը պատել այնպես, վոր A_1B_1 կողմը գնա AB կողմի ուղղուրթյամբ և, քանի վոր $A_1B_1=AB$, B_1-ն էլ կհնկնի B կետի վրա։ Սակայն A և A_1 անկյունների հավասարուրթյան հետևանքով A_1C_1 կողմը կգնա AC-ի ուղղուրթյամբ. և, քանի վոր $A_1C_1=AC$, C_1 կետը կհնկնի C կետի վրա։ Պարզ է ուրեմն, վոր այդ դեպքում C_1B_1 ձուլվում է CB-ի հետ, վորովհետև չերկու կետերի միջև կարելի չե միայն մեկ ուղիղ տանել։

III. ABC և $A_1B_1C_1$ չեռանկյունները միմյանց հավասար են, չերբ մեկ չեռանկյան չերեք կողմերը հավասար են մյուս չեռանկյան համապատասխան չերեք կողմերին ($AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ և $BC=B_1C_1$)։





գծ. 23

Կարենք $A_1B_1C_1$ չեռանկյունը և նրա A_1C_1 կողմը կգենք ABC չեռանկյան իրեն հավասար AC կողմին այնպես, ինչպես ցույց է տրված նկարում։ $A_1B_1C_1$ չեռանկյունը կհնդունի ACD դիրքը։ Միացնենք B և D գագաթները BD ուղիղով։ ABD չառանկյունը հավասարասրուն է, վորովհետև $AB=AD$, հետևապես $\angle ABO=\angle ADO$։

CBD չեռանկյունը նույնպես հավասարասրուն է, վորովհետև $BC=CD$, հետևապես $\angle CBO=\angle CDO$։ Քանի վոր $\angle ABO+\angle CBO=$

$=\angle B$, իսկ $\angle ADO+\angle CDO=\angle D=\angle B$, ուրեմն II հատկանշով ABC և ACD յեռանկյունները (կամ $A_1B_1C_1$) իրար հավասար են։

Սրանից հետևում է, որ հավասար յեռանկյունների մեջ հավասար անկյունների դիմաց գտնվում են հավասար կողմեր։ Ճիշտ է նաև հակադարձ յեղրակացությունը։

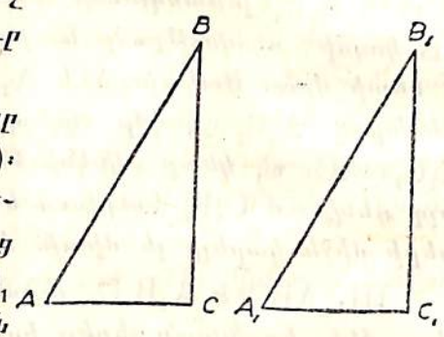
Յեռանկյունների ցույց տված հավասարության ընդհանուր հատկանիշներից հետևում է ուղղանկյուն յեռանկյունների հավասարության մի քանի մասնավոր դեպքեր. ուղղանկյուն յեռանկյունները միմյանց հավասար են, յեթե ունեն՝

1) Հավասար ներքնաձիգներ և յուրաքանչյուր ներքնաձիգի վրա մեկական հավասար սուր անկյուն։ (I հատկանիշ. ինչո՞ւ)։

2) Համապատասխան հավասար եզրեր։ (II հատկանիշ. ինչո՞ւ)։

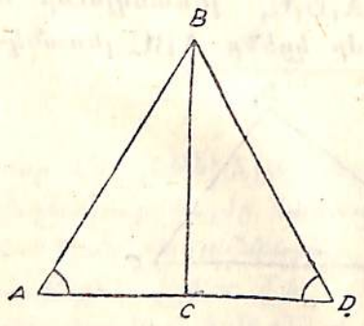
3) Համապատասխան մեկական եզր և յուրաքանչյուր եզրի վրա մեկ սուր անկյուն (I հատկանիշ. ինչո՞ւ)։

4) Համապատասխան հավասար ներքնաձիգներ և մեկական եզր (գծ. 24)։



գծ. 24

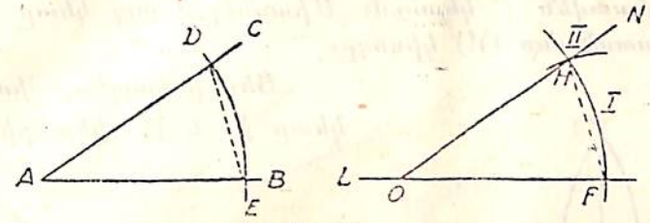
Տրված են յերկու ուղղանկյուն յեռանկյուններ՝ ABC *և* $A_1B_1C_1$, *որոնց մեջ* $AB=A_1B_1$ *և* $BC=B_1C_1$։ $A_1B_1C_1$ *յեռանկյունը կդնենք* ABC *յեռանկյանն այնպես, որ* BC *և* B_1C_1 *հավասար եզրերը համապատեղվեն։ Այդ դեպքում* $A_1B_1C_1$ *կնդունի* BCD *դիրքը։ Քանի որ* BCD *և* BCA *անկյունները* (գծ. 25) *ուղիղ են, ապա* AC *կկազմի* CD-*ի շարունակությունը, և* ABD *յեռանկյունը, որի* AB=BD-*ին կլինի հավասարասրուն. հետևապես,* $\angle A=\angle D=\angle A_1$; *իսկ այդ դեպքում* $\angle B=\angle B_1$, *և առաջին հատկանշի հիման վրա,* ABC *յեռանկյունը հավասար է* $A_1B_1C_1$ *յեռանկյանը։*



գծ. 25

§ 6. ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ ՔԱՆՈՆԻ ՅԵՎ ԿԱՐԿՆԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ.

Խնդիրներ.—*1. Կառուցել տվյալ անկյանը հավասար անկյուն։ Տրված է* BAC *անկյունը և պահանջվում է* LM *ուղիղի* O *կետում կառուցել մի անկյուն, որը հավասար լինի* BAC *անկյանը* (գծ. 26)։



գծ. 26

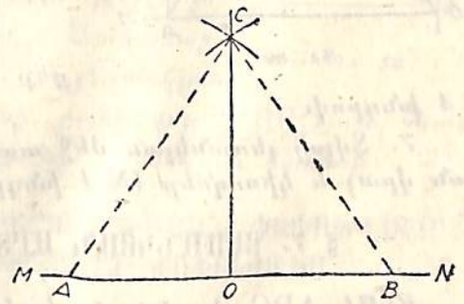
Դրա համար A *կետից, որպես կենտրոնից, գծենք (կամավոր շառավիղով) մի աղեղ, որը հատի տվյալ անկյան կողմերը* D *և* E *կետերում։ Միևնույն շառավիղով* O *կետից գծենք* I *աղեղը, որը հատի* LM *գիծը* F *կետում։ Վերցնենք* DE-*ին հավասար կարկինի բացվածքը և* F *կետից, որպես կենտրոնից,* DE *շառավիղով գծենք* II *աղեղը։* I *և* II *աղեղները միմյանց կհատեն* H *կետում։ Միացնելով այդ կետը* O *կետին՝ կստանանք որոնելի անկյունը։*

Որպեսզի ստուգենք կառուցման ճշտությունը, H *կետը միացնենք* F *կետի հետ և* D *կետը՝* E *կետի հետ ու համեմատենք* ADE *և* OHF *յեռանկյունները։ Այդ յեռանկյունների մեջ* AE=OF, AD=O*H*. DE=HF. *հետևապես այդ յեռանկյունները միմյանց հավասար են. ուրեմն՝* $\angle A=\angle O$-*ին, որպես հավասար կողմերի դիմաց ընկնող անկյուններ։*

2. Կառուցել ուղիղ անկյուն։

MN *ուղիղի վրա* O *կետից դեպի ա՛յ և դեպի ձախ վերցնենք* AO *և* OB *իրար հավասար հատվածներ* (գծ. 27) *և* A *ու* B *կետերից, որպես կենտրոններից, գծենք կամավոր, բայց հավասար շառավիղներով աղեղներ, որոնք կհատվեն* C *կետում։* C *կետը միացնենք* O *կետին։* CON *անկյունը կլինի ուղիղ։*

Այդ ստուգելու համար C *կետը միացնենք* A *և* B *կետերին։ Կստանանք յերկու յեռանկյուն՝* AOC *և* BOC։ *Դրանց մեջ,* AO=OB AC=BC *և* CO *կողմը ընդհանուր է. հետևապես յեռանկյունները հավասար են. իսկ այդ դեպքում* $\angle AOC=\angle BOC$ *(ինչո՞ւ)։ Սակայն նրանք կից են և հետևապես՝ ուղիղ։*



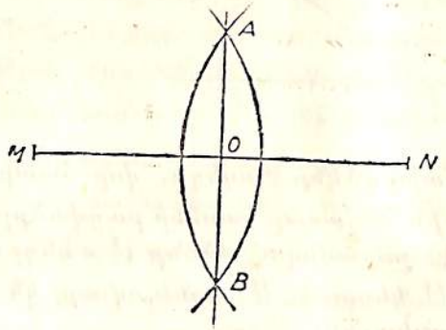
գծ. 27

3. Կիսել տվյալ MN *հատվածը։* MN-*ի կեսից ավելի շառավիղով* M *և* N *կետերից գծենք յերկու աղեղ* (գծ. 28)։ *Այդ աղեղների* A *և* B *հատման կետերը միացնենք։* AB *ուղիղը և տվյալ* MN *հատվածի հանդիպման* O *կետը կլինի վերջինիս միջնակետը։*

Ապացուցե՛ք ինքներդ, որ կառուցումը ճիշտ է կատարված։

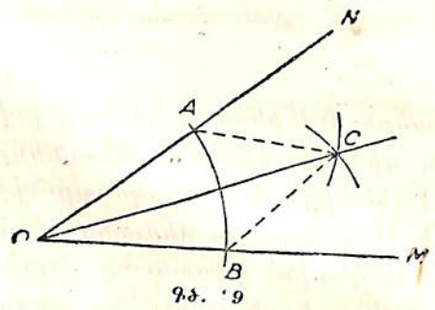
4. Կիսել MON անկյունը (գծ. 29)։

Տվյալ անկյան O գագաթից գծենք մի աղեղ, որը կհատի անկյան կողմերը A և B կետերում։ Այդ կետերից, իբրև կենտրոններից, գծենք կամավոր, բայց հավասար շառավիղներով աղեղներ։ Այդ աղեղները կհատվեն C կետում։ Միացնելով այդ կետը անկյան O գագաթին՝ կստանանք OC կիսողը։



գծ. 28

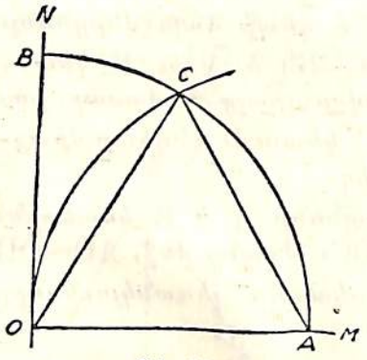
Յեվ իսկապես, միացնելով C կետը A և B կետերին՝ կստանանք յերկու յեռանկյուն՝ AOC և BOC, որոնց մեջ OC ընդհանուր կողմ է, OA=OB, AC=BC. հետևապես այդ յեռանկյունները հավասար են և ∠AOC=∠BOC (ինչո՞ւ)։



գծ. 29

5. Կառուցել 60°-ի անկյուն (գծ. 30)։

Վերցնենք MON ուղիղ անկյունը և որևե OA շառավիղով գծենք մի աղեղ, որը կհատի ուղիղ անկյան կողմերը A և B կետերում։ Ապա A կետից մինուճար շառավիղով գծենք մի աղեղ, որը կհանդիպի առաջին աղեղին C կետում և կանցնի ուղիղ անկյան O գագաթով։ Միացնենք C կետը O և A կետերին։ OAC յեռանկյունը կլինի հավասարակողմ. հետևապես ∠COA=60°։ Պարզ է, որ այդ դեպքում ∠BOC=30°։



գծ. 30

6. Ինքնուրույն կերպով կառուցեք 45°-ի անկյուն՝ առաջնորդվելով № 4 խնդրով։

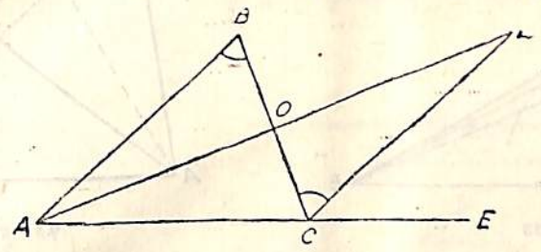
7. Տվյալ յեռանկյան մեջ տարեք միջնագծեր (№ 3 խնդրի հիման վրա) և կիսողներ (№ 4 խնդրի հիման վրա)։

§ 7. ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԱՐՏԱՔԻՆ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԸ.

Յեթե ABC յեռանկյան վրևե մի կողմը, որինակ AC, (գծ 31) շարունակենք, ապա յեռանկյան BC կողմի և AC կողմի շարունակությունը կազմող CE-ի միջև գոյացած անկյունը կոչվում է արտաքին:

(1007)
6807

Յուրաքանչյուր արտաքին անկյունը մեծ է ներքին վոչ կից յուրաքանչյուր անկյունից։ Դրա համար կիսենք BC կողմը O կետում և միացնելով O կետը A կետին՝ AO հատվածը շարունակենք AO-ին հավասար OD տարածությամբ։



գծ. 31

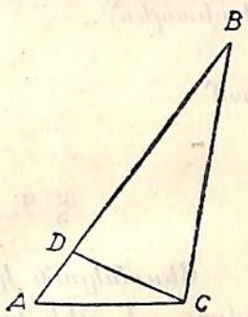
Գրանից հետո միացնենք D և C կետերը։

Կստանանք յերկու յեռանկյուններ՝ AOB և COD, որոնց մեջ BO=OC, AO=OD և ∠AOB=∠COD (վորպես հակադիր անկյուններ). հետևաբար այդ յեռանկյունները հավասար են, և դրա համար ել ∠ABO=∠BCD (ինչո՞ւ)։ Սակայն ∠BCD կազմում է արտաքին անկյան մասը. հետևապես ∠BCE > ∠BCD, կամ վոր նույնն է ∠BCE > ∠ABC։

Հարցեր. 1. Կարող է արտաքին անկյունն իրեն կից ներքին անկյունից փոքր լինել։ Ինչպիսի՞ յեռանկյուններում։

2. Կարող է արտաքին անկյունն իրեն կից ներքին անկյանը հավասար լինել։ Ի՞նչպիսի յեռանկյուններում։

Ամեն մի յեռանկյան մեջ մեծ կողմի դիմաց դտնվում է մեծ անկյունը (գծ. 32)։ Յեվ իրոք, △ABC-ի մեջ դիցուք AB>BC։ AB կողմի վրա B կետից վերցնենք BC-ին հավասար BD հատվածը և միացնենք D և C կետերը։ BDC յեռանկյունը կլինի հավասարասրուն, հետևաբար ∠BDC=∠BCD։ Սակայն ∠BDC-ն ADC յեռանկյան նկատմամբ արտաքին է. հետևաբար, ∠BDC > ∠A։ Այդ դեպքում՝ ABC յեռանկյան ∠C-ն ∠A-ից անշուշտ մեծ կլինի, քանի վոր ∠BCD, և հետևաբար նրան հավասար BDC անկյունը, C անկյան մասն է։



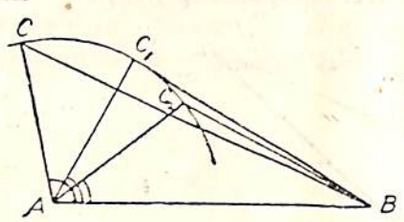
գծ. 32

§ 8. ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԻ ՅԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ՓՈՓՈԽՎԵԼԸ ԱՆԿՅԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ՓՈՓՈԽԵԼԻՍ.

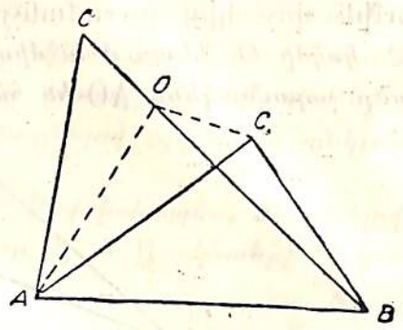
Տրված է ABC յեռանկյունը (գծ. 33), A կետից գծենք AC կողմին հավասար շառավիղով մի աղեղ և վերցնենք այդ աղեղի վրա վորևե յերկու կետ՝ C_1 և C_2։ Միացնելով այդ կետերը AB

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
Ա. ՄԱՍՈՒՆՅԱՆ
Անվան

կողմի ծայրերին՝ կստանանք AC_1B և AC_2B չեռանկյունները։ ACB, AC_1B և AC_2B չեռանկյունների մեջ մեկ կողմը՝ AB-ն ընդհանուր է, AC, AC_1 և AC_2 կողմերը մի-



գծ. 33



գծ. 34

մյանց հավասար են։ Սակայն $\angle CAB$, $\angle C_1AB$ և $\angle C_2AB$, ինչպես չերևում է գծանկարից, հավասար չեն։ Ի՞նչ կարելի չե ասել այդ չեռանկյունների չերրորդ կողմերի չերկարության մասին։

Հեշտությամբ կարելի չե ցույց տալ, որ հավասար չեն և միշտ մեծ անկյան դիմաց գտնվում է մեծ կողմը։ Բավական է համեմատել ABC և ABC_1 չեռանկյունները։ 34 գծանկարից չերևում է, որ $\angle CAB > \angle C_1AB$։ CAC_1 անկյունը AO գծով կիսենք և O կետը միացնենք C_1-ին։ COA և C_1OA չեռանկյունները միմյանց հավասար են (ինչ հատկանշով)։ Հետևապես՝ $CO = C_1O$։ Սակայն C_1OB չեռանկյան մեջ ունենք՝

$$C_1O + OB > C_1B \text{ (ինչու)}.$$

հետևապես՝

$$CO + OB > C_1B$$

կամ՝

$$CB > C_1B:$$

§ 9. ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՅՈՒՄԸ.

Յեռանկյուն կառուցելու համար բավական է ունենալ չերեք տվյալ.—1. մեկ կողմ և չերկու անկյուն,

2. մեկ անկյուն և չերկու կողմ,

3. չերեք կողմ։

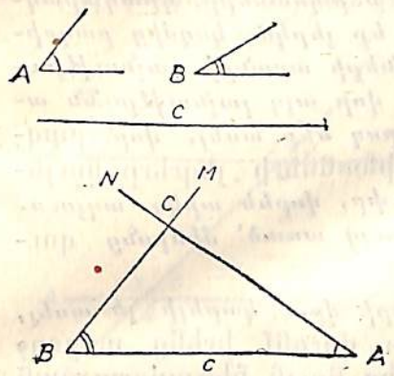
Յերեք անկյունների դեպքը նկատի չի առնվում, որովհետև չեռանկյունը չի վորոշվում անկյունների մեծությամբ։ Պայմանավորվենք չեռանկյան անկյունները նշանակել A, B և C մեծատառերով, իսկ անկյունների դիմացի կողմերը՝ a, b և c փոքրատառերով։

Խնդիրներ.—1. Կառուցել չեռանկյուն c կողմով և նրան ծայրի A և B անկյուններով (գծ. 35). c կողմի ծայրերում կառուցենք A և B անկյուններին համապատասխան հավասար անկյուններ։ Այդ

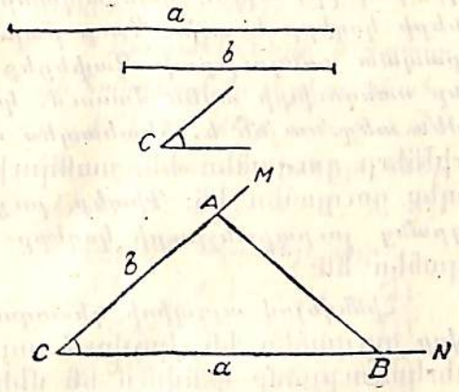
անկյունների BM և AN կողմերի C հատման կետը կլինի վորոնելի չեռանկյան չերրորդ գագաթը։

Կառուցենք չեռանկյուն, չերբ $c=8$ սմ. $\angle A=22^0\ 30'$ և $\angle B=60^0$։

2. Կառուցել չեռանկյուն a և b կողմերով և նրանց միջև չեղած C անկյունով (գծ. 36)։



գծ. 35

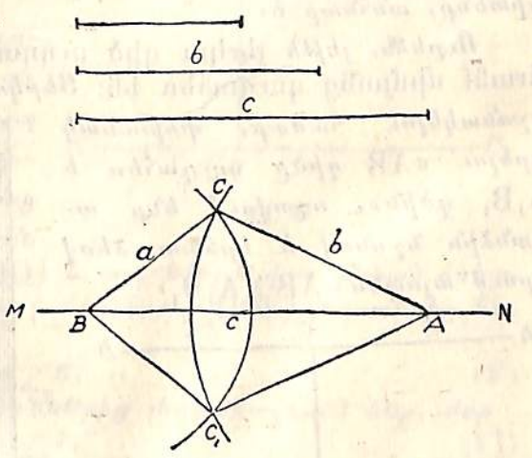


գծ. 36

Կառուցենք այդ անկյանը հավասար MCN անկյունը, և այդ անկյան կողմերի վրա վերցնենք հատվածներ՝ $AC=b$, $BC=a$. B և A կետերը միացնենք։ ABC չեռանկյունը կլինի մեր վորոնածը։

Կառուցեք չեռանկյուն, չերբ $a=6$ սմ, $b=9$ սմ, $\angle C=67^0\ 30'$։

3. Կառուցել ABC չեռանկյունը a, b, c չերեք կողմերով (գծ. 37)։ MN ուղիղի վրա վերցնենք c-ին հավասար AB հատված և նրա A և B ծայրերից՝ վորպես կենտրոններից, գծենք աղեղներ այնպիսի շառավիղներով, վորոնք հավասար լինեն մյուս չերկու a և b կողմերին։ Աղեղների հատման C և C_1 կետերը միացնենք A և B կետերին. կստանանք չերկու չեռանկյուններ՝ ABC և ABC_1, վորոնք բավարարում են խնդրի պայմաններին։



գծ. 37

Կառուցեք չեռանկյուն, չերբ $a=4$ սմ, $b=7$ սմ, $c=8{,}5$ սմ։

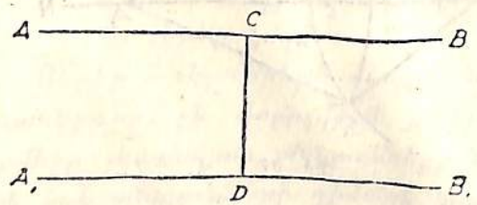
§ 10. ՉՈՒԳԱՀԵՌ ԳԾԵՐԻ ՄԱՍԻՆ.

Ամեն վոք գիտե, թե ինչ բան է յերկաթուղագիծը։ Յերկաթուղու ռելսերի արանքի տարածութիւնը վորտեղ էլ չափեք, կտեսնեք, վոր այդ յայնութիւնն ամեն տեղ էլ նույնն է։ Այդ դեպքում ասում են, վոր ռելսերը դրված են զուգահեռ։ Մեզ շրջապատող պայմաններում ուղղութիւնների զուգահեռութեան որինակները շատ ու շատ կան։ Դրա համար բավական է թեկուզ դիտել հեռագրաթելերը, այգու ցանկապատի յերկաթաճիպոտները, գրադարակների կողերը և այլն։ Դուք բարձրանում եք յերկու կողմից բազրիքապատ սանդուխքով։ Չափեցեք բազրիքների արանքի յայնութիւնը սանդուխքի ամեն մասում, կտեսնեք, վոր այդ յայնութիւնն ամեն տեղ նույնն է. հետևապես մենք կարող ենք ասել, վոր բազրիքները զուգահեռ են, սանդուխի աստիճանների յեզրերը նույնպես զուգահեռ են։ Դիտեք լուցկու տուփը, վորևէ արկղ, պղյուս. դրանց յուրաքանչյուրի կողերը զույգ-զույգ առած՝ միմյանց զուգահեռ են։

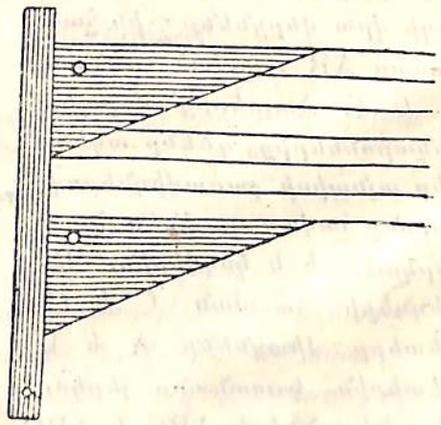
Հիմնվելով այդպիսի դիտողութիւնների վրա՝ կարելի չէ ասել, վոր զուգահեռ են կոչվում այն գծերը, վորոնք իրենց ամբողջ յերկարութեամբ գտնվում են մեկը մյուսից նույն հեռավորութեան վրա։ *Այլ կերպ ասած, զուգահեռ գծերը միմյանց չեն հատում։*

CD հատվածի C և D կետերից անցկացնենք AB և A_1B_1 *գծերը, վորոնք CD-ին լինեն ուղղահայաց (գծ. 38)։ Այդ գծերը կլինեն միմյանց զուգահեռ, այսինքն՝ իրար չեն հատի, վորքան էլ շարունակվեն։ Յեվ իրոք, յեթե* AB և A_1B_1 *մի վորևէ տեղ միմյանց հանդիպելին, այդ դեպքում նրանց հատման կետից* CD*-ի վրա կարելի կլիներ իջեցնել յերկու ուղղահայաց, վորն, իհարկե, ինչպես գիտեք, անհնար է։*

Ուրեմն, յեթե յերկու գիծ ուղղահայաց են մի յերրորդ գծի՝ նրանք միմյանց զուգահեռ են։ Յերկու գծերի զուգահեռութիւնը նշանակելու համար, փոխանակ գրելու՝ «AB գիծը զուգահեռ է A_1B_1 գծին», ոգտվում ենք առանձին նշանով և կրճատ ձևով գրում այսպես՝ $AB \parallel A_1B_1$*։*



գծ. 38



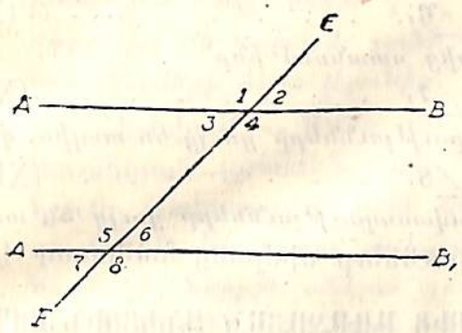
գծ. 39

Զուգահեռ գծեր քաշելը (գծ. 39).—Գծագրական յերանկյուններ իր մի եջով քանոնին կպկրած շարժում են քանոնի յերկարութեամբ

Յերանկյան մյուս եջով, վորն ուղղահայաց է քանոնին, քաշում են քանոնին ուղղահայաց գծեր, վորոնք և միմյանց զուգահեռ են։

§ 11. ՉՈՒԳԱՀԵՌՆԵՐԻՆ ՈՒՂԻՂՈՎ ՀԱՏԵԼՈՒՑ ԱՌԱՋԱՑԱԾ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ.

Ամեն մի գիծ (որինակ EF գիծը), վորը ուղղահայաց չէ AB *և* A_1B_1 *զուգահեռներին, կոչվում է հատող (գծ. 40)։*



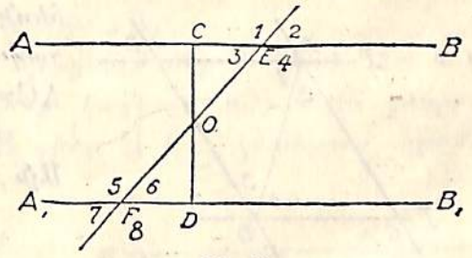
գծ. 40

Զուգահեռների և հատողի հանդիպման յերկու կետերում (գծ. 40) առաջանում են չորսական անկյունները (1, 2, 3, 4 և 5, 6, 7, 8)։ Դժվար չէ նկատել, վոր՝

$$\angle 1 = \angle 4 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$
$$\angle 2 = \angle 3 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$
$$\angle 5 = \angle 8 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$
$$\angle 6 = \angle 7 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IV)},$$

իբրև հակադիր անկյուններ։

(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8) զույգ անկյունները կոչվում են համապատասխան անկյուններ, *(3, 6) և (4, 5) զույգ անկյուններ՝* ներքին խաչադիր անկյուններ, *(1, 8) և (2, 7) զույգ անկյունները՝* արտաքին խաչադիր անկյուններ։



գծ. 41

Յերկու զուգահեռներին ուղղահայաց CD գծի միջտեղից տանենք այդ զուգահեռները հատող EF գիծը։ OCE և ODF ուղղանկյուն յեռանկյունները միմյանց հավասար են, վորովհետև ունեն մեկական հավասար եջ (OC=OD) և այդ եջերի վրա ընկած մեկական հավասար սուր անկյուններ (∠COE=∠DOF), այստեղից հետևում է, վոր

$$\angle 3 = \angle 6, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(V)}$$

իսկ (II) և (IV) հավասարութիւններից յեզրակացնում ենք, վոր

$$\angle 2 = \angle 7, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VI)}$$

քանի վոր, բացի դրանից $\angle 3 + \angle 4 = 2d$ *և* $\angle 5 + \angle 6 = 2d$*, (V) հավասարութեան հիման վրա ունենք՝*

$$\angle 4 = \angle 5, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VII)}$$

իսկ (I) և (III) հավասարութիւնները (VII) հավասարութեան հետ միասին տալիս են՝

$$\angle 1 = \angle 8, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VIII)}$$

(V) և (VII) հավասարությունները ցույց են տալիս, որ ներքին խաչադիր անկյուններ միմյանց հավասար են, (VI) և (VIII) հավասարությունները մեզ ասում են, որ արտաքին խաչադիր անկյուններ միմյանց հավասար են:

Այնուհետև (I) և (VII) հավասարությունները ցույց են տալիս, որ

$$\angle 1=\angle 5, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IX)$$

(II) և (V) հավասարությունները ցույց են տալիս, որ

$$\angle 2=\angle 6. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (X)$$

(IV) և (V) հավասարություններից ստանում ենք՝

$$\angle 3=\angle 7. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XI)$$

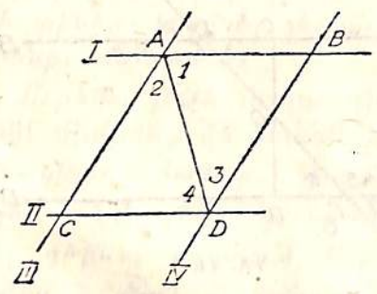
Վերջապես (I) և (VII) հավասարությունները ցույց են տալիս, որ

$$\angle 4=\angle 8. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XII)$$

(IX), (X), (XI) և (XII) հավասարությունները ցույց են տալիս, որ համապատասխան անկյուններ միմյանց հավասար են:

§ 12. ՋՈՒԳԱՀԵՌՆԵՐԸ ՀԱՏԵԼՈՒՅ ԱՌԱՋԱՅԱԾ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԿԱՐԵՎՈՐ ԱՌԱՋԱԴՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՍՏԱՆԱԼՈՒ ՀԱՄԱՐ

Առաջադրություններ.—*1. Յեթե մի ուղիղ զուգահեռները* (I, II) *հատում են մի ուրիշ ուղիղ զուգահեռների* (III, IV) *ապա զուգահեռների միջև եղած հատվածները հավասար են միմյանց՝* AB=CD և AC=BD (*գծ. 42*):



Գծ. 42

Յեվ իրոք, տանենք AD *հատողը: Այն ժամանակ՝*

$$\angle 1=\angle 4, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$
$$\angle 2=\angle 3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

վորպես ներքին խաչադիր անկյուններ: Հետևապես ACD և ABD *յեռանկյուններում* AD *կողմն ընդհանուր է, իսկ այդ կողմի վրա ընկած անկյունները (1, 3 և 2, 4), ինչպես ցույց են տալիս (a) և (b) հավասարությունները, զույգ-զույգ հավասար են միմյանց:*

Հետևապես, $\triangle ACD=\triangle ABD$, *վորից*

AC=BD

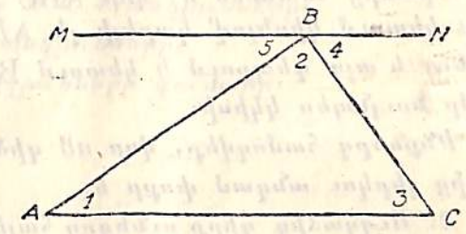
և

AB=CD:

2. Ամեն մի յեռանկյան անկյունների գումարը հավասար է յերկու ուղիղ անկյան (գծ. 43):

ABC *յեռանկյան անկյուններն ըստ կարգի անվանենք 1, 2, 3: B գագաթից տանենք* AC *հիմքին զուգահեռ* MN *գիծը: B կետում ունենք յերեք անկյուն (5, 2, 4), վորոնց գումարը հավասար է* 180^0, *այսինքն՝* $\angle 5+\angle 2+\angle 4=2d$: *Սակայն* $\angle 5=\angle 1$ (*ինչու*) *և* $\angle 4=\angle 3$ (*ինչու*). *Հետևապես, վոխարինում կատարելով՝ ունենք*

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3=2d:$$



Գծ. 43

Ուշադրություն դարձրեք այն հանգամանքի վրա, որ յեռանկյան անկյունների գումարը վոչ մի կախում չունի նրա կողմերի մեծությունից:

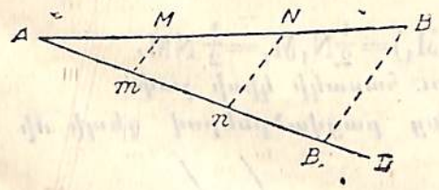
Հետևանք. — Ամեն մի յեռանկյան արտաքին անկյունը հավասար է իրեն վոչ կից ներքին յերկու անկյունների գումարին: *Այդ պարզ յերևում է նրանից, որ արտաքին անկյան և նրան կից ներքին անկյան գումարը հավասար է* 180^0:

Խնդիրներ.— *1. Տվյալ հատվածը բաժանել կամավոր թվով հավասար մասերի:*

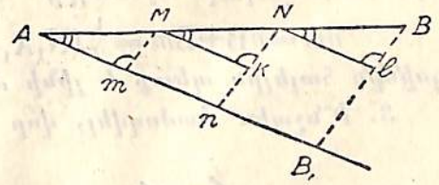
Դիցուք, AB *հատվածը (գծ. 44) հարկավոր է բաժանել յերեք հավասար մասերի:* AB *հատվածի* A *ծայրում կառուցենք մի անկյուն, վորի* AD *կողմի վրա վերցնենք հավասար, սակայն կամավոր յերկարության հատվածներ՝*

$Am=mn=nB_1$:

Յերրորդ հատվածի B_1 *ծայրը միացնում ենք* B *կետի հետ և* m *ու* n *բաժանման կետերից անց ենք կացնում* mM *և* nN *գծերը, վորոնք զուգահեռ են* BB_1: AB *գիծը* M *և* N *կետերում կբաժանվի այնպես, որ* AM=MN=NB:



Գծ. 44



Գծ. 45

Վորպեսզի համոզվենք, որ այդ ճիշտ է, M *և* N *կետերից (գծ. 45) տանենք* AB_1-*ին զուգահեռ* Mk *և* Nl *գծերը: Ամենից առաջ,* Mk=mn (*ինչու*), Nl=nB_1 (*ինչու*): *Հետևաբար,* AMm, MkN, NlB *յեռանկյուններում՝*

$Am=Mk=Nl$:

Բացի դրանից՝

$$\angle MAm=\angle NMk=\angle BNl \text{ (ինչու)}$$
$$\angle AmM=\angle MkN=\angle NlB \text{ (ինչու)}:$$

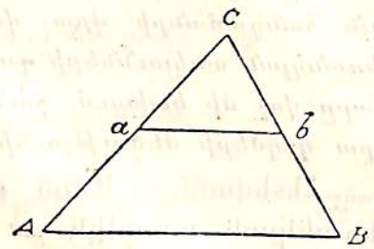
Համաձայն յեռանկյունների հավասարության առաջին հատկանշի՝

$$\triangle AMm=\triangle MkN=\triangle NlB,$$

Հետևապես,

$$AM=MN=NB \text{ (ինչու)}:$$

Սրանից հետևում է, որ ABC *(գծ. 46) յեռանկյան* AC *կողմը* a *կետում կիսելով՝ կարելի չէ* AB *կողմին տանել* ab *միջը զուգահեռ, և այդ դեպքում* b *կետում* BC *կողմը նույնպես կկիսի:*

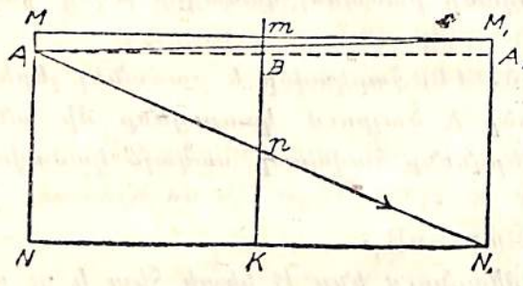


Գծ 46

Ինքներդ համոզվեք, որ ab *միջը* AB*-ից յերկու անգամ փոքր է:*

2. Ուղղաձիգ միրք ունեցող հայելին ինչ չափ պիտի ունենա, որպեսզի մարդ կարողանա իրեն ամբողջովին տեսնել նրա մեջ:

Թող mk *լինի հայելին,* MN *— մարդը,* M_1N_1*-ը իր պատկերը հայելում: Ֆիզիկայից հայտնի է, որ առարկայի պատկերը հայելում՝ ինչ նույն հեռավորության վրա է գտնվում, ինչ հեռավորության վրա գտնվում է անդրադարձվող առարկան: Թող* A *լինի մարդու աչքը,* A_1 *— աչքի պատկերը: Այդ դեպքում* $AB=A_1B$*:* AA_1N_1 *յեռանկյան մեջ* N_1A_1*-ին զուգահեռ և* AA_1*-ի միջնակետով անցնող* nB *միջը հավասար է* $\frac{1}{2}N_1A_1$*: Ճիշտ այդպես էլ* $\triangle AA_1M_1$ *մեջ* $Bm \parallel A_1M_1$ *և անցնում է* AA_1 *միջնակետով. հետևաբար,* $Bm=\frac{1}{2}A_1M_1$*: Այստեղից՝*

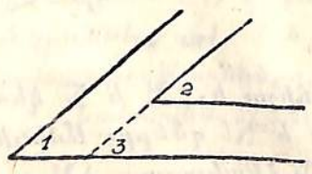


Գծ. 47

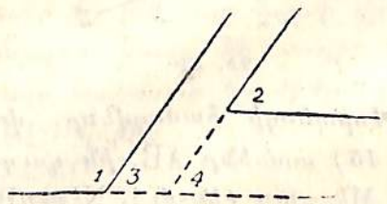
$$nm=nB+Bm=\frac{1}{2}(N_1A_1+A_1M_1)=\frac{1}{2}N_1M_1=\frac{1}{2}NM,$$

այսինքն հայելին պետք է լինի մարդու հասակի կիսի չափ:

3. Ինչպես համոզվել, որ իրենց բացվածքներով դեպի մի



Գծ. 48



Գծ. 49

կողմ ուղղված 1 և 2 անկյունները միմյանց հավասար են, եթե այդ անկյունների կողմերը զուգահեռ են (գծ. 48):

Հավասար են արդյոք միմյանց 1 և 3 անկյունները: Հավասար են արդյոք 2 և 3 անկյունները: Ի՞նչ է հետևում դրանից:

Ինչպես համոզվել, որ իրենց բացվածքներով հակառակ կողմեր ունեցող 1 և 2 անկյունների գումարը հավասար է յերկու ուղիղ անկյան, եթե այդ կողմերը միմյանց զուգահեռ են (գծ 49):

Հավասար են արդյոք միմյանց 2 և 4 անկյունները:

Հավասար են արդյոք 4 և 3 անկյունները:

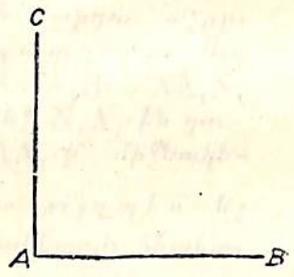
Ինչի է հավասար 1 և 2 անկյունների գումարը:

ԳԼՈՒԽ II.

ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑ ՅԵՎ ՍԻՄՄԵՏՐԻԱ (ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ).

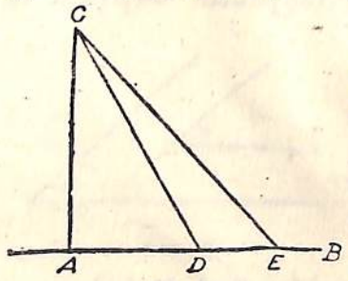
§ 13. ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑ ՅԵՎ ԹԵՔ.

Յերբ մենք դիտում ենք տնային պիտույքների յերկրաչափական ձևերը կամ կառուցվածքների մասերն, ականջից աչքի յե ընկնում ուղիղ անկյան հաճախակի գործադրությունը: Դռները, պատուհանների վեղկերը, պահարանների պատերը, սեղանի յերեսը, տաբուրետների նստոցները, վառարանների կորավածքներն, արկղների և տուփերի կողերը, պատկերների և հայելիների շրջանակներն,—ահա առարկաների օրինակներ, որոնց պատրաստելու ժամանակ անխուսափելիորեն ոգտվում են ուղիղ անկյան հատկություններից: Յերբ շրջանակի կամ սեղանի յերկու հարևան յեզրերն ուղիղ անկյունով իրար են միանում, մենք ասում ենք, որ նրանք փոխադարձաբար ուղղահայաց են:



գծ. 50

Այսպիսով, յերբ AB և AC յերկու գծերը կազմում են BAC ուղիղ անկյուն (գծ. 50), կարելի յե ասել, որ AB գիծը AC գծին ուղղահայաց է, և ընդհակառակը, որ AC գիծը ուղղահայաց է AB գծին: Վորևե յերկու գծերի ուղղահայացությունը կրճատ կերպով նշանակվում է $\perp$ հատուկ նշանով, որը դրվում է գծերի անունների միջև, և փոխանակ գրելու՝ «AB գիծն ուղղահայաց է AC գծին», գրում են՝ $AB \perp AC$:



գծ. 51

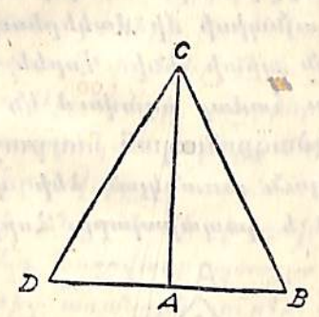
Յուրաքանչյուր CD գիծը (կամ որևնակ CE), որը մի ուրիշ AB գծի հետ կազմում է վոչ թե ուղիղ անկյուն, այլ սուր կամ բութ, կոչվում է AB գծին թեք գիծ: Յեթե միևնույն C կետից AB գծին տարվի AC ուղղահայաց և DC թեք գիծը (գծ. 51), նրանք AB-ի CD հատ-

վածի հետ կկազմեն ABC ուղղանկյուն յեռանկյունը, որի մեջ AC ուղղահայացը կլինի ել, իսկ DC թեքը—ներքնաձիգ: Հետևաբար, DC-ն AC-ից մեծ կլինի, այլ կերպ ասած՝ ուղղահայացը յուրաքանչյուր թեքից կարճ է, որը կարելի յե նշանակել այսպես՝

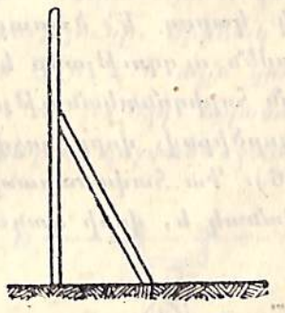
$$AC < DC:$$

AC ուղղահայացի և CD թեքի AB ուղիղի հանդիպման կետերն ունեն առանձին անուններ՝ A կետը կոչվում է ուղղահայացի հիմք, D կետը թեքի հիմք:

Յեթե C կետից տարված են յերկու թեքեր՝ CD և CE, ապա ստացվում են յերկու ուղղանկյուն յեռանկյուններ՝ ACD և ACE, որոնց համար թեքերը հանդիսանում են իրրև ներքնաձիգներ: Այդ վերջիններիը AB գծի DE հատվածի հետ միասին թեքերի հիմքերի արանքում կազմում են CDE բթանկյուն յեռանկյունը, որի մեջ $\angle CDE$ բութ է, իսկ $\angle CED$ սուր: Քանի որ $\angle CDE > \angle CED$, ուստի, ինչպես հայտնի յե, CE>CD, այլ կերպ ասած՝ յերկու թեքերից ավելի յերկարն այն թեքն է, որի հիմքն ավելի յե հեռացած ուղղահայացի հիմքից: Իսկ յեթե CB և CD թեքերի B և D



գծ. 52


գծ. 53

հիմքերը AC ուղղահայացի A հիմքից նույն հեռավորության վրա գտնվեն, թեքերը միմյանց հավասար կլինեն, այսինքն՝ CB=CD (գծ. 52): Այդ հետևում է նրանից, որ ACB և ACD ուղղանկյուն յեռանկյունները միմյանց հավասար են, քանի որ AC ընդհանուր է, իսկ AB և AD ել իրար հավասար են:

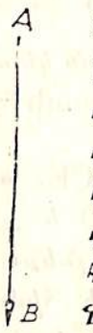
Ուղղահայացի և թեքի գուգակցման օրինակ կարող են լինել հեռագրասյունն ու նրան պահող հենարանը (գծ. 53):

Հարց.—Հենարանի հիմքը գտնվում է այդ հիմքից 0,75 մ հեռավորության վրա: Հենարանը այդը ամրացած է 30^0 անկյունով: Վորքան է հենարանի յերկարությունը:

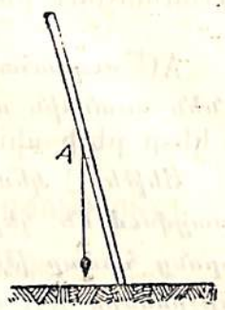
§ 14. ՈՒՂՂԱՁԻԳ ՅԵՎ ՀՈՐԻԶՈՆԱԿԱՆ ԳԾԵՐ.

Յեթե մեր ձեռքի քարը պատշգամբից բաց թողնենք, ապա

հնազանդվելով ծանրության ուժին՝ քարը վար կնկնի։ Այն գիծը, որի ուղղությամբ քարը վար է ընկնում, կոչվում է կախ կամ ուղղաձիգ գիծ։ Ուղղաձիգ ուղղությունը որոշվում է թելով, որի մի ծայրին ամրացված է B ծանրոցը (գծ. 54)։



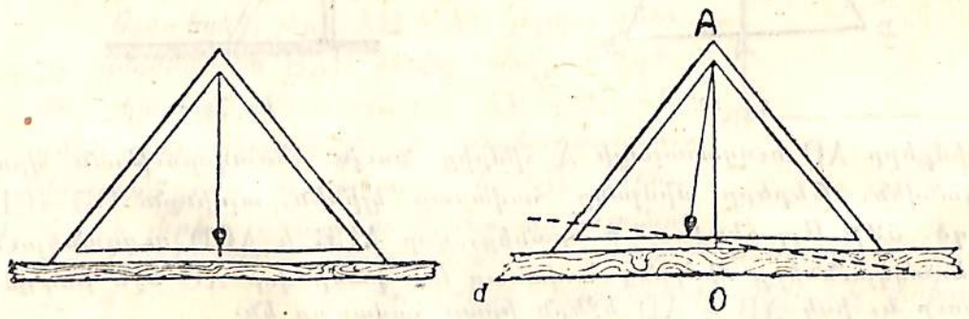
գծ. 54



գծ. 55

Եթե բռնենք թելի A ազատ ծայրից, B ծանրոցը թելը կձգի AB ուղղաձիգ ուղղությամբ։ Այդ հարմարանքը կոչվում է կապարաթար։ Եթե մենք ցանկանում ենք ստուգել, ուղղաձիգ է հողում անկված ձողը (գծ. 55) թե ոչ, հարկավոր է ձողի վրևե կետում բռնել կապարաթարի A ազատ ծայրից։ Եթե կապարաթարի ուղղությունը ձողի ուղղության հետ վրևե անկյուն կազմի, կնշանակի ձողը թեք է անկված։

Ուղղաձիգին ուղղահայաց յուրաքանչյուր գիծը կոչվում է հորիզոնական։ Հատակի հարթությունը հորիզոնական մակերևույթի օրինակ կարող է ծառայել, այսինքն՝ այնպիսի մի մակերևույթի, որն ամեն ուղղությամբ էլ հորիզոնական գիծ կլինի։ Վրևե ուղղության հորիզոնականությունը ստուգելու համար ոգտվում են հատուկ գործիքով, որը կոչվում է ատաղձագործական հարթաչափ (գծ. 56)։ Դա հավասարաթեր ուղղանկյուն յեռանկյան ձևի փայտե շրջանակ է, որի գագաթից կախված է կապարաթարը։ Հորիզո-



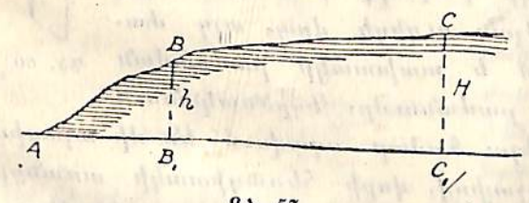
գծ. 56

նական տախտակի վրա դրած կապարաթարը՝ այդ տախտակի հետ կկազմի ուղիղ անկյուն։ Իսկ եթե տախտակը հորիզոնական չէ, կապարաթարը տախտակին ուղղահայաց OA ուղղությունից կթեքվի՝ կազմելով նրա հետ մի անկյուն։

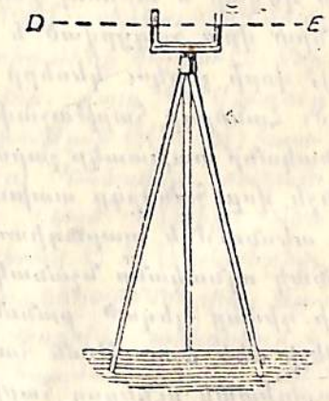
Ուղղաձիգ և հորիզոնական գծերի փոխադարձ հարաբերությունն առանձնապես նկատելի է շենքերում։ Յուրաքանչյուր կառուցման հիմքը պետք է լինի հորիզոնական, իսկ շենքերի պատերը և հիմքը միմյանց հետ ուղիղ անկյուն են կազմում, այսինքն՝ պատերը հիմքին ուղղաձիգ են։ Վորպեսզի շարժիչը կանոնավոր աշխատի, այսինքն՝ վոչ մի բան նրա մասերի ազատ շարժմանը չխանգարի, նրան դնում են այնպիսի մի ցոկոլի վրա, որի հորիզոնականությունն ամենաուշադիր կերպով ստուգված պիտի լինի։ Որինակ՝ շինարարական արվեստի պայմանները պահանջում են, վորպեսզի գործարանների ծխնելույզները կանգնած լինեն ուղղաձիգ. և ընդհակառակը, նավակառուցման մեջ նավի կայմերը նավի ընթացքի հակառակ կողմից քիչ թեքված են տախտակամածին։

Շենքերի հատակներն ու առաստաղները, փուտբոլի և լաուն-տենիսի հրապարակները, պատուհանների գոգերը, սեղանների մակերևույթները, պահարանների դարակները—պետք է լինեն հորիզոնական. ընդհակառակը, շենքերի պատերը, սեղանների և աթոռների վոտները, հեռագրի և հեռախոսի սյուները—միշտ ուղղաձիգ են։

Հորիզոնական և ուղղաձիգ ուղղությունների փոխհարաբերությունները գործնական կիրառում են ստանում հարթաչափման (նիվելիրովկա) մեջ, որով ոգտվում են, եթե անհրաժեշտ է որոշել զանազան տեղերի համեմատական բարձրությունը։ Որինակ՝ յերբ հարկավոր է վորոշել՝ B և A, C և B կամ C և A և այլն կետերի բարձրությունների տարբերությունը (գծ. 57)։ Այդ նպատակին իբրև տարրական գործիք ծառայում է այսպես կոչված «տրահարթայափը», որը յեռոտանու վրա դրած Ջրով լի ծնկաձև մի խողովակ է (գծ. 58)։ Այդ խողովակը պտույտ է գալիս ուղղաձիգ առանցքի շուրջը։ Համաձայն հաղորդվող անոթներում գտնվող հեղուկների հատկության, DE ուղիղը—



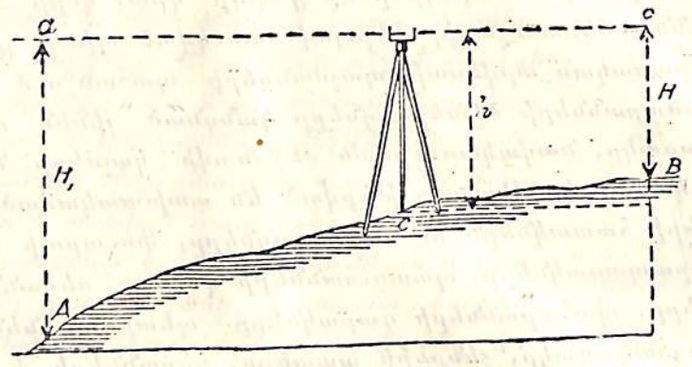
գծ. 57



գծ. 58

վորն անցնում է խողովակի ուղղաձիգ սյուների Ջրի մակերևույթով—հորիզոնական է. դրա հետևանքով, եթե B կետում գնենք քանոնը (ըելկա, վորն ուղղաձիգ մի ձող է՝ բաժանված հավասար մասերի, բաժանման միավորը սահմանն է կամ մետրը), իսկ C կետում—հարթաչափը (գծ. 59) և a կետից նայենք այնպես, վոր յերկու սյուների Ջրի մակերևույթն էլ կարելի լինի տեսնել, ապա տարբերա-

ման (տարածութիւն պիտել) գիծը կլինի հորիզոնական։ Յեթե քանոնի բաժանման բարձրութիւնը B կետից վեր գտնվող տարափաուրթյան գծի վրա H-ն է, իսկ հարթաչափի բարձրութիւնը C կե-



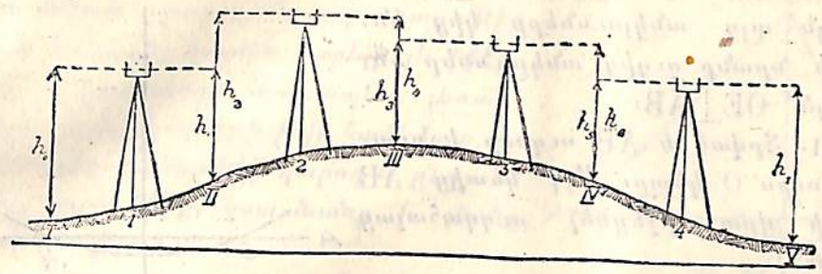
գծ. 59

տից վեր՝ h-ն, այդ դեպքում B կետը C կետից բարձր է գտնվում $h-H$-ով։ Յեթե մյուս քանոնը տեղավորված է A կետում, և b կետից նայելով a կետին քանոնի վրա տեսնենք H_1 բաժանումը, այդ դեպքում C կետը A կետից բարձր է H_1-h-ով. հետևաբար, B կետի բարձրութիւնը A կետից հավասար է $h-H+H_1-h=H_1-H$. ուրեմն, հարթաչափի բարձրութիւնն իմանալն անհրաժեշտ չէ։ Զգալի հեռավորութիւն վրա դժվար է տեսնել քանոնի բաժանումը։ Դրա համար էլ նրա վրա հագցրված է շարժական մի տախտակ (գծ. 60), որի կերկու կեսերը տարբեր գույներով են ներկված։ Հանորդը հարթաչափի միջոցով դիտում է, իսկ նրա ոգնականը տախտակը շարժում է քանոնի կերկարութիւնով, մինչև որ հանորդը տախտակի գույների բաժանման գիծը տեսնում է տարափաուրթյան ուղիղ վրա, այդ ժամանակ ոգնականը նշանակում է տախտակի բաժանման գծի դիմաց կեղած քանոնի բաժանումը։ Գործնականում ավելի մեծ ճշտութիւն հասնելու համար ոգտվում են մի այնպիսի հեռադիտակ ունեցող հարթաչափով, որի հեռադիտակի առանցքի հորիզոնականութիւնն ստուգվում է նրա վրա գտնվող հարթաչափիկով։

գծ. 60

Նկարագրված կեղանակը հնարավորութիւն է տալիս վորոշել մոտիկ կետերի բարձրութիւնների տարբերութիւնը։ Զգալի կերկարութիւն (գծ. 61) ունեցող գծերը հարթաչափվում են մաս-մաս՝ (I, II), (II, III), (III, IV) և այլն։

Հարթաչափը գնում են (1) (քանոն I, II) դրութիւնը. (II, I) բարձրութիւնների տարբերութիւնը հավասար է h_0-h_1։ Այնուհետև հարթաչափը գնում են (2) դրութիւնը, իսկ առաջին քանոնը



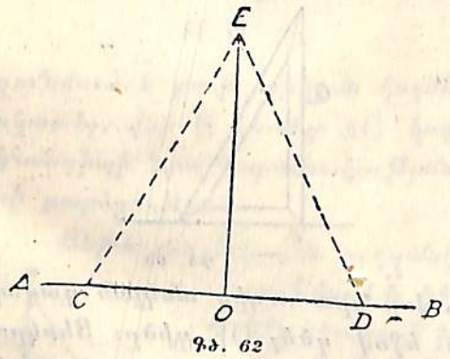
գծ. 61

III դրութիւնը։ Քանի վոր (III, II) բարձրութիւնների տարբերութիւնը հավասար է h_2-h_3, ապա ուրեմն III-ի բարձրութիւնը I-ից հավասար է $h_0-h_1+h_2-h_3$ և այլն։

§ 15. ԻՆՉՊԵՍ Ե ՀԱՐԿԱՎՈՐ ՈՒՂԻՂԻ ՏՎՅԱԼ ԿԵՏՈՒՄ ԿԱՆԳՆԵՑՆԵԼ, ՈՒՂՂԱՀԱՅՅԱՑ ՅԵՎ ԻՆՉՊԵՍ ՈՒՂԻՂԻՑ ԴՈՒՐՍ ԳՏՆՎՈՂ ԿԵՏԻՑ ԻՋԵՑՆԵԼ ՈՒՂՂԱՀԱՅՅԱՑ.

Այդ յերկու խնդիրները լուծենք կառուցման միջոցով։

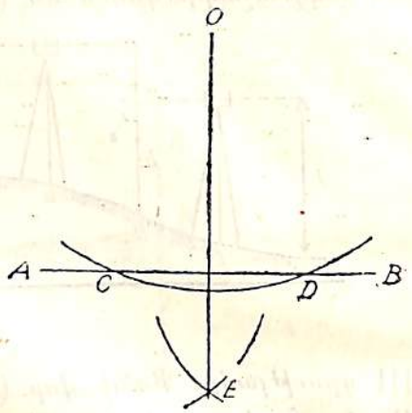
Խնդիր I. Տրված է AB ուղիղը և նրա վրա O կետը։ Այդ կետում AB ուղիղին կանգնեցնել ուղղահայաց (գծ. 62)։



գծ. 62

Լուծում.—AB ուղիղի վրա, O կետից մենք վերցնում ենք կամավոր, բայց հավասար յերկարութիւն OC=OD հատվածներ։ Կամավոր, սակայն OC-ից (կամ OD-ից) մեծ շառավիղով C և D կետերից, վորպես կենտրոններից, գըծենք փոքրիկ աղեղներ և նրանց հատման E կետը միացնենք O կետի հետ։ OE գիծը կլինի վորոնելի ուղղահայացը, և դժվար չի հասկանալ, թե ինչու։ Յեթե E կետը CE և DE ուղիղներով միացնենք C և D կետերին, կստանանք OCE և ODE յերանկյունները։ Այդ յերանկյունների մեջ CO և OD միմյանց հավասար են ըստ կառուցման, իսկ CE=DE վորպես աղեղնալին հատումների շառավիղներ, OE կողմն էլ ընդհանուր է. հետևաբար, յերեք կողմերի հավասարութիւնից յեզրակացնում ենք, վոր

$\triangle OCE=\triangle ODE$: Սակայն հավասար յեռանկյուններում հավասար կողմերի դիմաց գտնվում են հավասար անկյուններ: Ինչ-որ $CE=DE$, ուրեմն $\angle COE=\angle DOE$: Սակայն այդ անկյունները կից են, ուրեմն նրանք ուղիղ անկյուններ են, այսինքն՝ $OE \perp AB$:

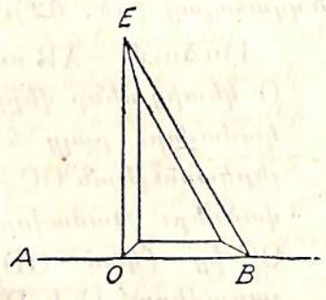


գծ. 63

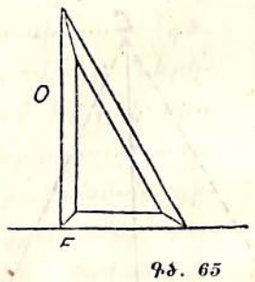
11. Տրված է AB ուղիղը և նրանից դուրս O կետը: Այդ կետից AB ուղիղի վրա իջեցնել ուղղահայաց (գծ. 63):

Լուծում.—Տվյալ O կետից արտագծենք մի ազեղ այնպես, որ նա AB ուղիղին հատի C և D կետերում: Այդ կետերից, որպես կենտրոններից, գծենք հավասար միևնույն բայց շառավիղներով փոքրիկ ազեղներ, որոնք հատվեն E կետում: Այդ կետը միացնենք տվյալ O կետին: OE հատվածը կլինի AB գծին ուղղահայաց: Փորձեք ինքներդ համոզվել դրա ճշմարտության մեջ:

Յերբե ձեռքի տակ ունեք սահուկված գծագրական յեռանկյուն, այդ դեպքում յերկու խնդիրն էլ լուծվում են հատարակ կերպով: Առաջին դեպքում (գծ. 64) բավական է յեռանկյունն իր մեկ ևջով



գծ. 64



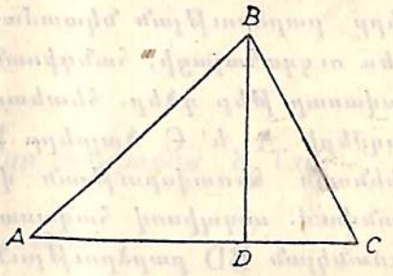
գծ. 65

դնել տվյալ ուղիղի վրա այնպես, որ նրա ուղիղ անկյան գագաթն ընկնի O կետի վրա, իսկ մյուս ևջով գծել OE գիծը: Յերկրորդ դեպքում (գծ. 65) պետք է յեռանկյունն իր մի ևջով դարձյալ դնել տվյալ ուղիղի վրա և յեռանկյունը շարժել այնքան, մինչև որ ուղղից դուրս գտնվող O կետն ընկնի մյուս ևջի գծի վրա, և այդ ժամանակ այդ ևջով գծել OE ուղիղը:

§ 16. ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԲԱՐՁՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ.

Յեռանկյան յուրաքանչյուր կողմը կարելի յե ընդունել իբրև հիմք: Այն կողմը, որը ծառայում է իբրև հիմք, որինակ, AC, սո-

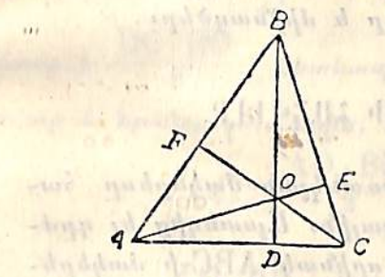
վորաբար գծվում է հորիզոնական (գծ. 66): Հակադիր B գագաթից հիմքին իջեցնենք BD ուղղահայացը: Այդ ուղղահայացը կոչվում է յեռանկյան բարձրություն: Պարզ է, որ յեռանկյան յուրաքանչյուր գագաթից նրա հակադիր կողմին կարելի յե իջեցնել ուղղահայաց. հետևապես, յեռանկյան յերեք կողմերի թվի համեմատ էլ, որոնցից ամեն մեկը կարող է ընդունվել իբրև հիմք, կատանանք և յերեք բարձրություն:



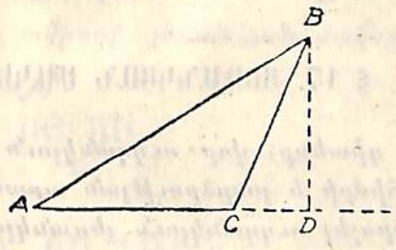
գծ. 66

Նկատողություն. — Յեթե բոլոր յերեք բարձրությունների կառուցումը կատարենք ճշտորեն, նրանք միմյանց հետ կհատվեն մի կետում: 67 գծանկարում BD, AE և CF բարձրությունները ունեն հատման ընդհանուր O կետը:

Յեթե յեռանկյունը բթանկյուն է (գծ. 68) և իբրև հիմք ընդունվում է նրա բութ անկյան կողմերից մեկը՝ այդ դեպքում հեշտ է նկատել, որ B կետից AC կողմի վրա իջեցրած ուղղահայացը կհանդիպի նրա շարունակությանը D կետում, և BD հատվածը կլինի բարձրություն:

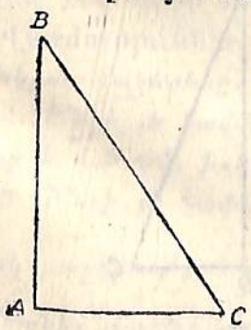


գծ. 67

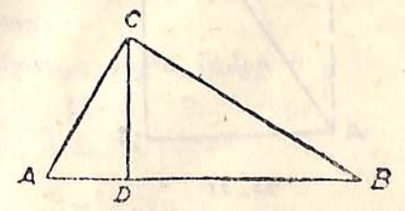


գծ. 68

Յեթե յեռանկյունն ուղղանկյուն է (գծ. 69¹) և իբրև հիմք ընդունվում է ևջերից մեկը, պարզ է, որ յերկրորդ ևջը կծառայի իբրև բարձրություն: Յեթե իբրև հիմք վերցված է ներքնաձիգը, բարձրությունը կլինի CD ուղղահայացը (գծ. 69²), որը իջեցրած է ներքնաձիգի վրա ուղիղ անկյան գագաթից:



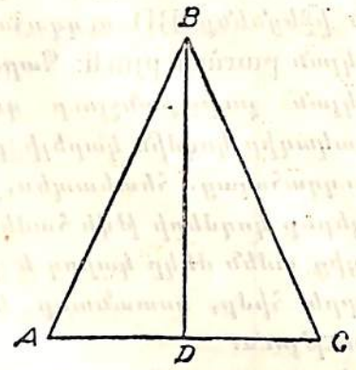
գծ 69¹



գծ. 69²

Հավասարասրուն յեռանկյան մեջ, անհավասար կողմին հա-

մասամասխանող բարձրությունը բաժանում է այդ կողմը յերկու հավասար մասի (գծ. 70)։



Գծ. 70

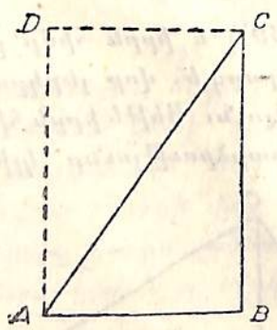
Յեվ իրոք, այդ դեպքում սրունքները բարձրության նկատմամբ, որպես ուղղահայացի, հանդիսանում են հավասար թեք գծեր. հետևապես, այդ կողմերի A և C ծայրերը D կետից միևնույն հեռավորության վրա յեն գտնվում. այդպիսով հավասարասրունք յեռանկյան BD բարձրությունը կլինի միաժամանակ և կիսող։

Հարցեր.—1. Ինչպես համոզվել, որ հավասարասրուն յեռանկյան մեջ բարձրությունները, որոնք համապատասխանում են կողմնային կողերին, հավասար են։

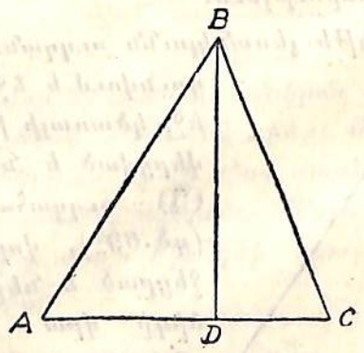
2. Ինչպես համոզվել, որ հավասարակողմ յեռանկյան մեջ բոլոր յերեք բարձրությունները միմյանց հավասար են և միևնույն ժամանակ հանդիսանում են իբրև կիսողներ և միջնագծեր։

§ 17. ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ՄԱԿԵՐԵՍԻ ՀԱՇՎԵԼԸ.

Մենք գիտենք, որ ուղղանկյուն քառանկյան մակերեսը հավասար է հիմքի և բարձրության արտադրյալին։ Այստեղից էլ դժվար չե վորոշել ուղղանկյուն յեռանկյան, որինակ՝ ABC-ի մակերեսը (գծ. 71)։ Դրա համար բավական է այդ յեռանկյունը լրացնել ABCD ուղղանկյուն քառանկյունն, վորի AC անկյունագիծը նրա ամբողջ մակերեսը կիսում է։ Սակայն այդ մակերեսը ինչպես մենք գիտենք, հավասար է AB և BC-ի արտադրյալին, և հետևապես հավասար է ABC յեռանկյան մակերեսի կրկնապատկին։



Գծ. 71



Գծ. 72

Յեթե այդ վերջինը, այսինքն՝ յեռանկյան մակերեսը, նշանակենք △ նշանով, այդ դեպքում մենք կունենանք՝

$$2\triangle = AB \cdot BC$$

վորից

$$\triangle = \frac{AB \cdot BC}{2},$$

այսինքն՝ ուղղանկյուն յեռանկյան մակերեսը հավասար է նրա եջերի արտադրյալի կեսին։

Որինակ՝ AB=5 մ, CB=8 մ, ապա ուրեմն

$$\triangle = \frac{5 \cdot 8}{2} = 20 \text{ ք. մ։}$$

Այժմ դիցուք տրված է վորևե ABC (գծ. 72) յեռանկյուն։ BD բարձրությունը բաժանում է նրան ABD և BCD յերկու ուղղանկյուն յեռանկյունների։ Ինչ առաջ ասածի հիման վրա ABD յեռանկյան մակերեսը հավասար է $\frac{AD \cdot BD}{2}$, BCD յեռանկյան մակերեսը հավասար է $\frac{DC \cdot BD}{2}$։ Հետևապես, ամբողջ յեռանկյան մակերեսը հավասար է նրանց գումարին, այսինքն՝

$$\triangle = \frac{AD \cdot BD}{2} + \frac{DC \cdot BD}{2}$$

կամ

$$\triangle = \frac{AD \cdot BD + DC \cdot BD}{2} = \frac{BD \cdot (AD + DC)}{2},$$

սակայն AD+DC=AC, հետևապես,

$$\triangle = \frac{BD \cdot AC}{2}.$$

Այսպիսով, վորևե յեռանկյան մակերեսը հավասար է նրա բարձրության յեվ հիմքի արտադրյալի կեսին։

Վարժություններ. — 1. Գտնել հավասարասրուն ուղղանկյուն յեռանկյան մակերեսը, վորի եջը հավասար է 5 սմ։

2. Ինչի՞ է հավասար յեռանկյան մակերեսը, յեթե հիմքը հավասար է 4,8 սմ, իսկ բարձրությունը 3,6 սմ։

3. Ինչի՞ է հավասար յեռանկյան մակերեսը, յեթե հիմքը b մ է, իսկ բարձրությունը h մ։ Պատասխան՝ $\triangle = \frac{bh}{2}$ մ։

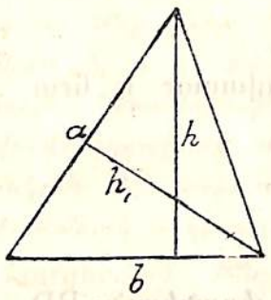
Գտնել յեռանկյան մակերեսը, յեթե՝

b=11 մ, h=6,8 մ,

b=17 սմ, h=11,4 սմ։

4. Յեռանկյան յերկու կողմերն են a և b, իսկ նրանց համապատասխան բարձրությունները՝ h և h_1 (գծ. 73)։ Ի՞նչպես գտնել h_1, յեթե հայտնի յեն a, b և h։

Լուծում.– Յեթե a կողմն ընդունենք իբրև հիմք, յեռանկյան մակերեսը հավասար կլինի $\frac{a \cdot h_1}{2}$։ Յեթե b կողմն ընդունենք իբրև հիմք, միևնույն յեռանկյան մակերեսը հավասար կլինի $\frac{b \cdot h}{2}$. հետևապես, $\frac{a \cdot h_1}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$, կամ $a \cdot h_1 = b \cdot h$, վորից $h_1 = \frac{b \cdot h}{a}$։

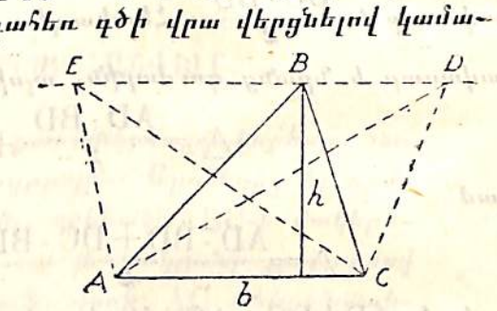


գծ. 73

Հաշվել h_1, յեթե $b=7$ սմ, $h=4$ սմ, $a=8$ սմ։

5. Զրուցարանի տանիքը բաղկացած է չորս հավասարասրուն յեռանկյուններից։ Յուրաքանչյուրի հիմքը 4 սմ է, բարձրությունը՝ 2 սմ։ Ի՞նչի յե հավասար ամբողջ տանիքի մակերեսը։

6. ABC յեռանկյան B գագաթից տարեք AC հիմքին զուգահեռ մի գիծ (գծ. 74) և այդ զուգահեռ գծի վրա վերցնելով կամավոր E և D կետերը՝ միացրեք նրանց հիմքի A և C ծայրերին։ Ի՞նչի յեն հավասար AEC և ADC յեռանկյունների մակերեսները։



գծ. 74

Կփոխվի արդյոք AC հիմք ունեցող յեռանկյան մակերեսը, յեթե նրան իբրև գագաթ ընդունենք զուգահեռի վորևե այլ կետը։ Այստեղից ի՞նչ յեզրակացություն կարելի յե հանել։

7. Յեռանկյան մակերեսը հավասար է 84 f սմ, հիմքը հավասար է 24 սմ. ի՞նչի յե հավասար բարձրությունը։

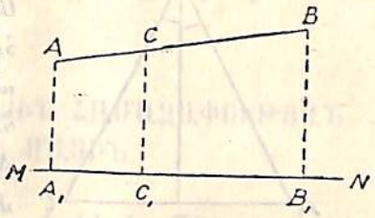
8. Յեռանկյան մակերեսը հավասար է 56 f մ, բարձրությունը հավասար է 14 մ։ Ի՞նչի յե հավասար հիմքը։

§ 18. ԿԵՏԻ ՅԵՎ ՀԱՏՎԱԾԻ ԱՌԱՋԱԳՈՒԹՅՈՒՆԸ (ՊՐՈԵԿՑԻԱ) ՈՒՂԻՂԻ ՎՐԱ.

Յեթե MN ուղիղից դուրս գտնվող A կետից այդ ուղիղի վրա իջեցնենք AA_1 ուղղահայացը (գծ. 75), ապա A_1 կետը կամ AA_1 ուղղահայացի հիմքը կկոչվի A կետի առաջագուբյունը MN ուղիղի վրա։ MN ուղիղին պատկանող B կետը ծառայում է ինքնիրեն իբրև առաջագուբյուն։

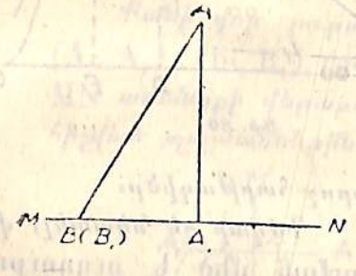
Յեթե MN ուղիղից դուրս վերցնենք A և B յերկու կետերը, ապա նրանց առաջագուբյունները MN ուղիղի վրա (գծ. 76) կլինեն A_1 և B_1՝ AA_1 և BB_1 ուղղահայացների հիմքերը։ A և B յերկու կետերը միանգամայն վորոշում են նրանց վրայով անցնող ուղիղը և ծառայում այդ ուղիղի AB հատվածի համար իբրև ծայրեր։ Յեթե վերցնենք այդ հատվածի վրա կամավոր C կետը, նրա առաջագուբյունը MN ուղիղի վրա կլինի C_1 կետը, վորը գտնվում է հատվածի ծայրերի A_1 և B_1 առաջագուբյունների միջև։

գծ. 75



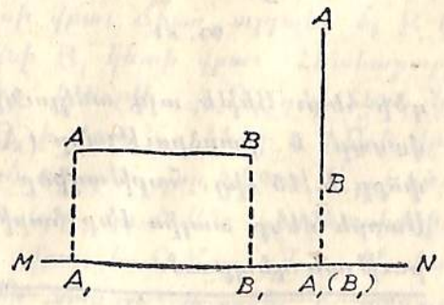
գծ. 76

AB հատվածի յուրաքանչյուր կետին կհամապատասխանի առաջագուբյուն MN ուղիղի A_1B_1 հատվածի վրա, և դրա համար ել A_1B_1-ը կոչվում է AB ուղիղի առաջագուբյուն MN գծի վրա։ Յեթե վերցնենք AB հատվածը (գծ. 77), վորը միացնում է A առաջին կետը MN ուղիղի B կետի հետ, վերև ապած հիման վրա A_1B հատվածը կլինի AB հատվածի առաջագուբյունը MN ուղիղի վրա։



գծ. 77

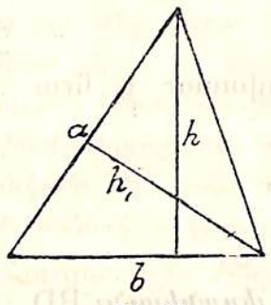
Այսպիսով, յեթե արտաքին կետից տանենք ուղիղին AA_1 ուղղահայացը և AB թեքը, A_1B-ն կլինի թեքի առաջագուբյունը։ Այդ յերեք ուղիղները կազմում են AA_1B ուղղանկյուն յեռանկյունը, վորի մեջ AB թեքը ծառայում է իբրև ներքնաձիգ, իսկ նրա A_1B առաջագուբյունը իբրև էջ։ Այստեղից հետևում է, վոր թեքի առաջագուբյունը ուղիղի վրա՝ թեքից միշտ կարճ է։ Միայն այն դեպքում, յերբ AB ուղիղի հատվածը զուգահեռ է MN-ին, AB-ն իր բնական մեծությամբ առաջագծվում է MN ուղիղի վրա իբրև A_1B_1 հատված (գծ. 78)։ Իսկ յեթե AB հատվածը ուղղահայաց է MN-ին, հատվածի A և B ծայրերը MN ուղիղի վրա առաջագծվում են



գծ. 78

4. Եռանկյան կերկու կողմերն են a և b, իսկ նրանց համապատասխան բարձրությունները՝ h և h_1 (գծ. 73)։ Ինչպես գտնել h_1, եթե հայտնի են a, b և h։

Լուծում.– Եթե a կողմն ընդունենք իբրև հիմք, եռանկյան մակերեսը հավասար կլինի $\frac{a \cdot h_1}{2}$։ Եթե b կողմն ընդունենք իբրև հիմք, միևնույն եռանկյան մակերեսը հավասար կլինի $\frac{b \cdot h}{2}$. հետևաբար, $\frac{a \cdot h_1}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$, կամ $a \cdot h_1 = b \cdot h$, որից $h_1 = \frac{b \cdot h}{a}$։

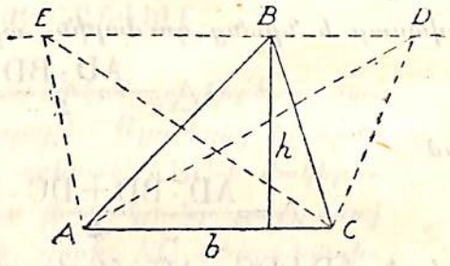


գծ. 73

Հաշվել h_1, եթե $b=7$ սմ, $h=4$ սմ, $a=8$ սմ։

5. Զրուցարանի տանիքը բաղկացած է չորս հավասարասրուն եռանկյուններից։ Յուրաքանչյուրի հիմքը 4 սմ է, բարձրությունը՝ 2 սմ։ Ինչի է հավասար ամբողջ տանիքի մակերեսը։

6. ABC եռանկյան B գագաթից տարեք AC հիմքին զուգահեռ մի գիծ (գծ. 74) և այդ զուգահեռ գծի վրա վերցնելով կամայսր E և D կետերը՝ միացրեք նրանց հիմքի A և C ծայրերին։ Ինչի են հավասար AEC և ADC եռանկյունների մակերեսները։



գծ. 74

Կփոխվի արդյոք AC հիմք ունեցող եռանկյան մակերեսը, եթե նրան իբրև գագաթ ընդունենք զուգահեռի որևէ այլ կետը։ Այստեղից ինչ եզրակացություն կարելի է հանել։

7. Եռանկյան մակերեսը հավասար է 84 f սմ, հիմքը հավասար է 24 սմ. ինչի է հավասար բարձրությունը։

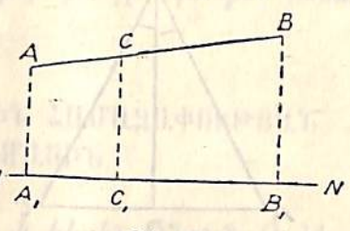
8. Եռանկյան մակերեսը հավասար է 56 f մ, բարձրությունը հավասար է 14 մ։ Ինչի է հավասար հիմքը։

§ 18. ԿԵՏԻ ՅԵՎ. ՀԱՏՎԱԾԻ ԱՌԱՋԱԶԳՈՒԹՅՈՒՆԸ (ՊՐՈԵԿՑԻԱ) ՈՒՂԻՂԻ ՎՐԱ.

Եթե MN ուղիղից դուրս գտնվող A կետից այդ ուղիղի վրա իջեցնենք AA_1 ուղղահայացը (գծ. 75), ապա A_1 կետը կամ AA_1 ուղղահայացի հիմքը կկոչվի A կետի առաջաձգությունը MN ուղիղի վրա։ MN ուղիղին պատկանող B կետը ծառայում է ինքնին իբրև առաջաձգություն։

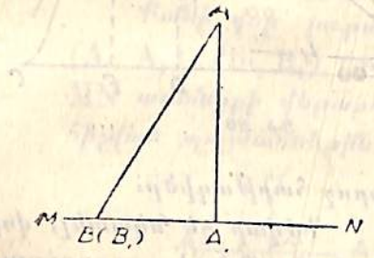
գծ. 75

Եթե MN ուղիղից դուրս վերցնենք A և B կետերը, ապա նրանց առաջաձգությունները MN ուղիղի վրա (գծ. 76) կլինեն A_1 և B_1՝ AA_1 և BB_1 ուղղահայացների հիմքերը։ A և B կետերը միանգամայն վորոշում են նրանց վրայով անցնող ուղիղը և ծառայում այդ ուղիղի AB հատվածի համար իբրև ծայրեր։ Եթե վերցնենք այդ հատվածի վրա կամավոր C կետը, նրա առաջաձգությունը MN ուղիղի վրա կլինի C_1 կետը, վորը գտնվում է հատվածի ծայրերի A_1 և B_1 առաջաձգությունների միջև։



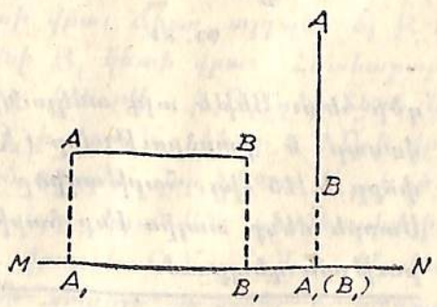
գծ. 76

AB հատվածի յուրաքանչյուր կետին կհամապատասխանի առաջաձգությունն MN ուղիղի A_1B_1 հատվածի վրա, և դրա համար էլ A_1B_1-ը կոչվում է AB ուղիղի առաջաձգություն MN գծի վրա։ Եթե վերցնենք AB հատվածը (գծ. 77), վորը միացնում է A արտաքին կետը MN ուղիղի B կետի հետ, վերև ասածի հիման վրա A_1B հատվածը կլինի AB հատվածի առաջաձգությունը MN ուղիղի վրա։



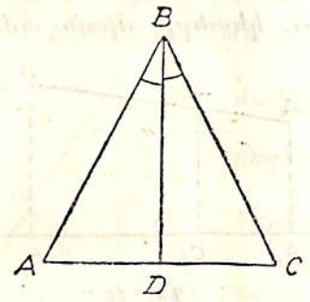
գծ. 77

Այսպիսով, եթե արտաքին կետից տանենք ուղիղին AA_1 ուղղահայացը և AB թեքը, A_1B-ն կլինի թեքի առաջաձգությունը։ Այդ երեք ուղիղները կազմում են AA_1B ուղղանկյուն եռանկյունը, վորի մեջ AB թեքը ծառայում է իբրև ներքնաձիգ, իսկ նրա A_1B առաջաձգությունը իբրև եջ։ Այստեղից հետևում է, վոր թեքի առաջաձգությունը ուղիղի վրա՝ թեքից միշտ կարճ է։ Միայն այն դեպքում, երբ AB ուղիղի հատվածը զուգահեռ է MN-ին, AB-ն իր բնական մեծությամբ առաջաձգվում է MN ուղիղի վրա իբրև A_1B_1 հատված (գծ. 78)։ Իսկ եթե AB հատվածը ուղղահայաց է MN-ին, հատվածի A և B ծայրերը MN ուղիղի վրա առաջաձգվում են



գծ. 78

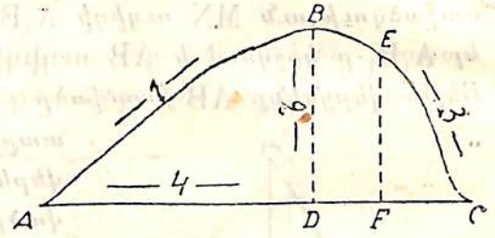
$A_1(B_1)$ մեկ կետում, և հետևաբար AB-ի առաջաձգությունն այս դեպքում հավասար է զերոյի։



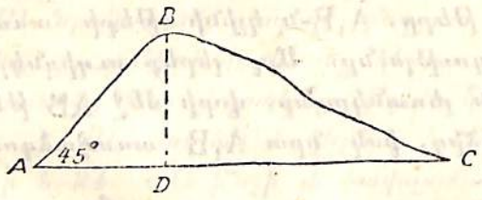
գծ. 79

Կիրառենք վերև ասածը ABC հավասարասրուն չեռանկյան նկատմամբ (գծ. 79)։ Այդ չեռանկյան AB և BC կողմերը միմյանց հավասար թեքեր են, նրանց AD և DC առաջաձգությունները նույնպես միմյանց հավասար են։ Այստեղից հետևում է, որ ABD և CBD ուղղանկյուն չեռանկյունները միմյանց հավասար են. ուրեմն $\angle ABD = \angle CBD$, այսինքն՝ հավասարասրուն չեռանկյան բարձրությունը միաժամանակ և գագաթի անկյան կիսողն է։

Առաջաձգության գաղափարը կարևոր դեր ունի տեղագրության մեջ, երբ հարկավոր է որոշել բարձրությունների լանջերի թեքությունը (գծ. 80)։ AB լանջի AD առաջաձգությունը այլ կերպ կոչվում է նրա «հարթագիծ» (BC լանջի հարթագիծը կլինի DC՝ այդ լանջի առաջաձգությունը)։ Բարձրության յուրաքանչյուր կետին, օրինակ, BC լանջի E կետին, պիտի համապատասխանի FC հորիզոնի հարթագիծը։



գծ. 80



գծ. 81

Դժվար չե նկատել, որ վորքան մեծ է ուղղությունը, այնքան փոքր է հարթագիծը (և ընդհակառակը)։

Ուղղորդությունը վորոշվում է այն անկյունով, որը կազմում է լանջը հորիզոնի դծի հետ։ Եթե այդ անկյունը հավասար է 45°, հարթագիծը հավասար է բարձրությանը (AD=BD) (գծ. 81)։ Եթե անկյունը փոքր է 45°-ից, հարթագիծը բարձրությունից մեծ է (DC>BD)։ Ստորև մենք տալիս ենք հարթագծերի աղյուսակը 1 մետր բարձրության դեպքում։

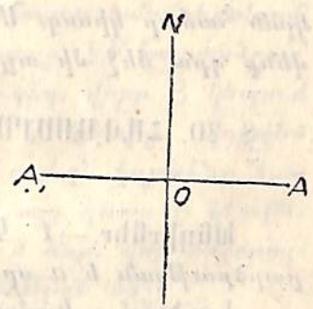
Ուղղորդությունները	1°	2°	3°	4°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
Հարթագծեր	57_3	28_6	19_1	14_3	11_4	5_7	3_7	2_8	2_1	1_7	1_4	1_2	1

Ինչ է նշանակում՝ 1° ուղղորդության դեպքում հարթագիծը հավասար է 57,3 մ։

Այդ նշանակում է, որ յերբ լանջը կազմում է հորիզոնի դծի հետ 1°, հորիզոնից 1 մ բարձր գտնվող լանջի կետին համապատասխանում է 57,3 մ հարթագիծ։

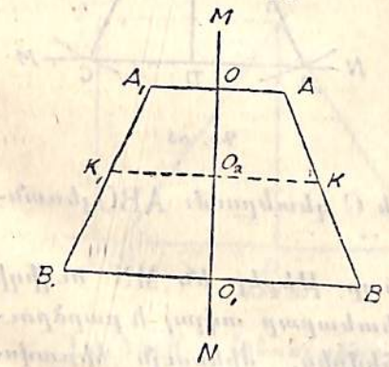
§ 19. ԳԱՂԱՓԱՐ ԱՌԱՆՑՔԱՅԻՆ ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ (ՍԻՄՄԵՏՐԻԱՅԻ) ՄԱՍԻՆ.

Վերցնենք AA_1 (գծ. 82) ուղիղը, և կիսելով նրան O կետում՝ O կետից անցկացնենք AA_1-ին ուղղահայաց MN գիծը։ Հետևաբար A և A_1 կետերն ընկնում են MN ուղիղին ուղղահայացի վրա և այդ ուղիղի O կետից հավասար հեռավորության վրա յեն գտնվում։ Ընդունված է ասել, որ A և A_1 կետերը համաչափ են MN ուղիղի վերաբերմամբ, որը կոչվում է սիմետրիայի առանցք։



գծ. 82

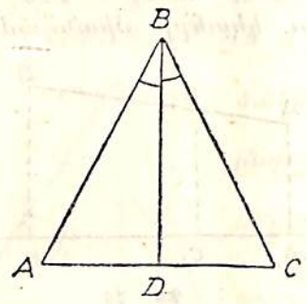
Բանի որ յուրաքանչյուր զույգ կետ (A, A_1), (B, B_1) (գծ. 83), որոնք իրենց MN առանցքի վերաբերմամբ ունեցած դրությամբ բավարարում են հիշված պայմաններին, ներկայացնում են իրենցից մի զույգ համաչափ կետեր, ուստի (A, B) և (A_1, B_1) կետերով անցնող ուղիղները նույնպես MN առանցքի վերաբերմամբ կլինեն համաչափ։ Յեվ իրոք, գծանկարը ծալենք MN գծով, քանի որ AO=A_1O, ծալելու դեպքում A կետը կընկնի A_1 կետի վրա։ Ճիշտ այդպես էլ B կետը կընկնի B_1 կետի վրա։ Հետևաբար AB գիծը կձուլվի A_1B_1 գծի հետ։ Նշենք A_1B_1-ի վրա K_1 կետը և AB-ի վրա K կետն այնպես, որ AK=A_1K_1, և գծանկարը բաց անենք։ K և K_1 կետերը կգտնվեն սիմետրիայի MN առանցքին ուղղահայաց KK_1-ի վրա, և $O_2K=O_2K_1$։ Հետևաբար նրանք կլինեն համաչափ։ Նույնը կարելի յե ասել և յուրաքանչյուր զույգ կետի մասին, որ պատկանում է AB-ին և A_1B_1-ին ու գտնվում MN-ին ուղղահայաց ուղիղի վրա։



գծ. 83

Դժվար չե նկատել, որ ABC հավասարասրուն չեռանկյան

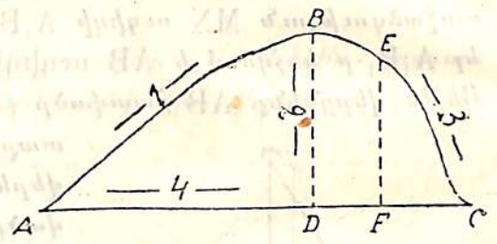
$A_1(B_1)$ մեկ կետում, և հետևաբար AB-ի առաջագուբէյունն այս դեպքում հավասար է զերոյի։



Գծ. 79

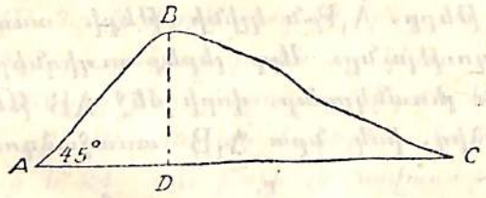
Կիրառենք վերև ասածը ABC հավասարասրուն յեռանկյան նկատմամբ (գծ. 79)։ Այդ յեռանկյան AB և BC կողմերը միմյանց հավասար թեքեր են, նրանց AD և DC առաջագուբէյունները նույնպես միմյանց հավասար են։ Այստեղից հետևում է, որ ABD և CBD ուղղանկյուն յեռանկյունները միմյանց հավասար են. ուրեմն $\angle ABD = \angle CBD$, այսինքն՝ հավասարասրուն յեռանկյան բարձրությունը միաժամանակ և զագաթի անկյան կիսողն է։

Առաջագուբէյան զաղափարը կարևոր զեր ունի տեղագրության մեջ, յերբ հարկավոր է վորոշել բարձրությունների լանջերի թեքությունը (գծ. 80)։ AB լանջի AD առաջագուբէյունը այլ կերպ կոչվում է նրա «հարթագիծ» (BC լանջի հարթագիծը կլինի DC՝ այդ լանջի առաջագուբէյունը)։ Բարձրության յուրաքանչյուր կետին, որինակ, BC լանջի E կետին, պիտի համապատասխանի FC վորոշ հարթագիծը։



Գծ. 80

Դժվար չե նկատել, որ վորքան մեծ է ուղղությունը, այնքան փոքր է հարթագիծը (և ընդհակառակը)։



Գծ. 81

Ուղղորդությունը վորոշվում է այն անկյունով, որը կազմում է լանջը հորիզոնի զծի հետ։ Յեթե այդ անկյունը հավասար է 45°, հարթագիծը հավասար է բարձրությանը (AD=BD) (գծ. 81)։ Յեթե անկյունը փոքր է 45°-ից, հարթագիծը բարձրությունից մեծ է (DC>BD)։ Սովոր մենք տալիս ենք հարթագծերի պղպատակը 1 մետր բարձրության դեպքում։

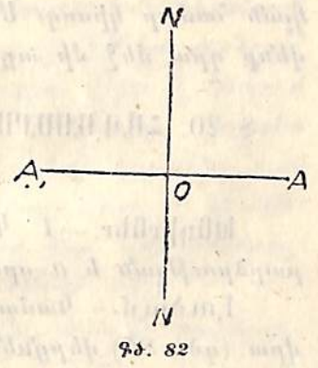
Ուղղորդություններ	1°	2°	3°	4°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
Հարթագծեր	57_3	28_6	19_1	14_3	11_4	5_7	3_7	2_8	2_1	1_7	1_4	1_2	1

Ինչ է նշանակում՝ 1° ուղղորդության դեպքում հարթագիծը հավասար է 57,3 մ։

Այդ նշանակում է, վոր յերբ լանջը կազմում է հորիզոնի զծի հետ 1°, հորիզոնից 1 մ բարձր գտնվող լանջի կետին համապատասխանում է 57,3 մ հարթագիծ։

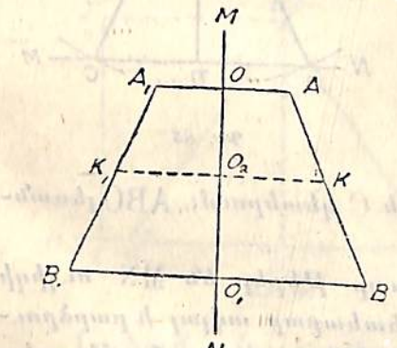
§ 19. ԳԱՂԱՓԱՐ ԱՌԱՆՑՔԱՅԻՆ ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ (ՍԻՄՄԵՏՐԻԱՅԻ) ՄԱՍԻՆ.

Վերցնենք AA_1 (գծ. 82) ուղիղը, և կիսելով նրան O կետում՝ O կետից անցկացնենք AA_1-ին ուղղահայաց MN զիծը։ Հետևաբար A և A_1 կետերն ընկնում են MN ուղիղին ուղղահայացի վրա և այդ ուղիղի O կետից հավասար հեռավորության վրա յեն գտնվում։ Ընդունված է ասել, վոր A և A_1 կետերը համաչափ են MN ուղիղի վերաբերմամբ, վորը կոչվում է սիմմետրիայի առանցք։



Գծ. 82

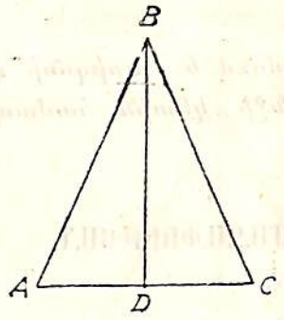
Բանի վոր յուրաքանչյուր զույգ կետ (A, A_1), (B, B_1) (գծ. 83), վորոնք իրենց MN առանցքի վերաբերմամբ ունեցած զրությամբ բավարարում են հիշված պայմաններին, ներկայացնում են իրենցից մի զույգ համաչափ կետեր, ուստի (A, B) և (A_1, B_1) կետերով անցնող ուղիղները նույնպես MN առանցքի վերաբերմամբ կլինեն համաչափ։ Յեվ իրոք, գծանկարը ծալենք MN գծով, քանի վոր AO=A_1O, ծալելու դեպքում A կետը կընկնի A_1 կետի վրա։ Ճիշտ այդպես էլ B կետը կընկնի B_1 կետի վրա։ Հետևաբար AB զիծը կձուլվի A_1B_1 գծի հետ։ Նշենք A_1B_1-ի վրա K_1 կետը և AB-ի վրա K կետն այնպես, վոր AK=A_1K_1, և գծանկարը բաց անենք։ K և K_1 կետերը կգտնվեն սիմմետրիայի MN առանցքին ուղղահայաց KK_1-ի վրա, և $O_2K=O_2K_1$. հետևաբար նրանք կլինեն համաչափ։ Նույնը կարելի յե ասել և յուրաքանչյուր զույգ կետի մասին, վոր պատկանում է AB-ին և A_1B_1-ին ու գտնվում MN-ին ուղղահայաց ուղիղի վրա։



Գծ. 83

Դժվար չե նկատել, վոր ABC հավասարասրուն յեռանկյան

(գծ. 84) մեջ սիմմետրիայի առանցքը կլինի BD բարձրությունը, և համաչափության առանցքի վրա B (գագաթի) ընդհանուր կետ ունեցող AB և BC կողմնային կողմերը, այդ համաչափության առանցքի վերաբերմամբ կլինեն համաչափ։ Ծալենք գծանկարը BD բարձրությամբ։ Քանի որ AD=DC, A կհամընկնի C-ին. հետևաբար AB և BC կողմերը կհամատեղվեն։ Այստեղից հետևում է, որ ∠ABD=∠CBD, այսինքն՝ հավասարասրուն եռանկյան բարձրությունը հանդիսանում է գագաթի անկյան համար կիսող։ Մենք այդ դիտեինք, բայց այժմ նորից համոզվենք դրա մեջ մի այլ ճանապարհով։

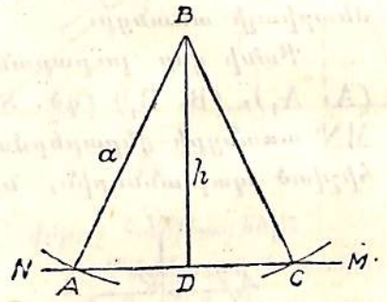


գծ. 84

§ 20. ՀԱՎԱՍԱՐԱՍՐՈՒՆ ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ ՆՐԱ ՏՎՅԱԼ ՏԱՐՐԵՐՈՎ.

Խնդիրներ.—*1* Կառուցել հավասարասրուն եռանկյուն ըստ h բարձրության և a սրունքի։

Լուծում.—Կամավոր MN ուղիղի վրա (գծ. 85) վերցնենք D կետը և այդ կետից ուղղահայաց կանգնեցնելով MN ուղիղին, վերցնենք վերջինիս վրա BD հատվածը, որը հավասար է տվյալ h բարձրությանը։



գծ. 85

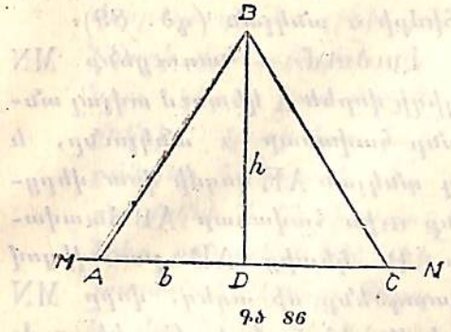
B կետից, որպես կենտրոնից, արտադծենք աղեղ մի այնպիսի շառավիղով, որը հավասար է տվյալ a սրունքին։ Աղեղը MN ուղիղին կհանդիպի A և C կետերում։ ABC եռանկյունը կլինի որոնելի եռանկյունը։

Յեվ իրոք, AB-ն և BC-ն հավասար թեքեր են MN ուղիղի նկատմամբ (որպես շառավիղներ) և, հետևաբար տվյալ h բարձրությանը հավասար BD ուղղահայացի հիմքից, միևնույն հեռավորության վրա չեն գտնվում։

2 Կառուցել հավասարասրուն եռանկյուն ըստ h բարձրության և b հիմքի։

Լուծում.—Կամավոր MN ուղիղի վրա (գծ. 86) վերցնենք b-ին հավասար AC հատվածը. վերջինս կիսելով D կետում՝ այդ կետից MN ուղիղին կանգնեցնենք ուղղահայաց և այդ ուղղահայացի վրա D կետից վերցնենք h-ին հավասար BD հատվածը։ Միացնելով

B կետը հիմքի ծայրերին՝ կստանանք որոնելի եռանկյունը։ Յեվ իսկապես, AB և BC թեքերը BD ուղղահայացի D հիմքից միևնույն հեռավորության վրա չեն գտնվում. հետևաբար և նրանք իրար հավասար են։

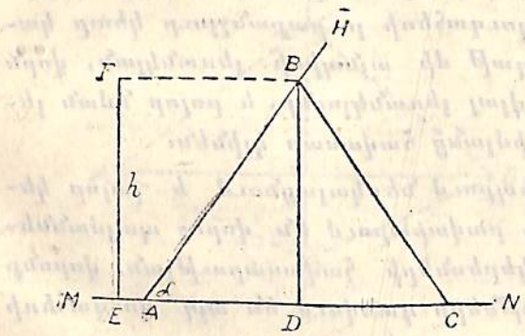


գծ 86

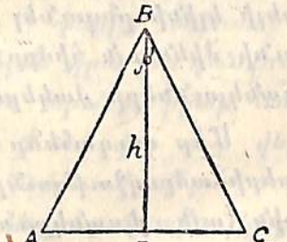
3. Կառուցել հավասարասրուն եռանկյուն ըստ h բարձրության և հիմքի a անկյան։

Լուծում.—Կառուցենք MN ուղիղի վրա A կետում (գծ. 87) տվյալ անկյանը հավասար a անկյունը և նույն ուղիղին վրևե E կետից ուղղահայաց կանգնեցնելով վերցնենք այդ ուղղահայացի վրա h-ին հավասար EF հատվածը։ F կետով անցկացնենք MN-ին զուգահեռ մի ուղիղ, որը B կետում կհանդիպի a անկյան AH կողմին։ Տանելով B կետից, որպես կենտրոնից, AB-ին հավասար շառավիղով մի աղեղ՝ կգտնենք նրա և MN ուղիղի հատման C կետը։ Միացնելով այդ կետը B կետին, կստանանք որոնելի եռանկյունը։ Առաջարկում ենք, որ սովորողներն իրենք համոզվեն այդ կառուցման ճշտության մեջ։

4. Կառուցել հավասարասրուն եռանկյուն ըստ h բարձրության և գագաթի β անկյան (գծ. 88)։



գծ. 87

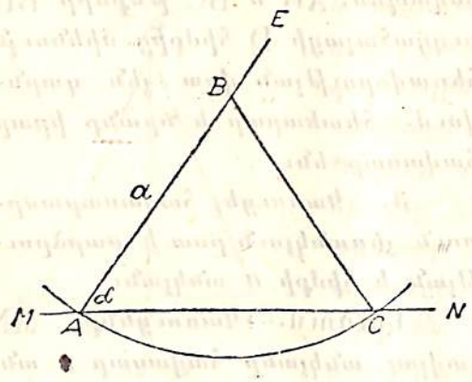


գծ. 88

Լուծում.—Կառուցենք որևե B կետում տվյալ անկյանը հավասար β անկյունը, և նրա կիսողի վրա՝ վերցնենք տվյալ h բարձրությանը հավասար BD հատվածը։ D կետից անցկացնենք BD-ին ուղղահայաց մի գիծ, որը տվյալ անկյան կողմերին կհանդիպի A և C կետերում։ ABC եռանկյունը կլինի որոնելին։

Յեվ իրոք. կառուցած եռանկյան գագաթի անկյունը հավասար է տվյալ անկյանը, և նրա h բարձրությունը միաժամանակ գագաթի անկյան կիսողն է. հետևաբար այդ եռանկյունը հավասարասրուն է։

5. Կառուցել հավասարասրուն եռանկյուն ըստ α սրունքի և հիմքի α անկյան (գծ. 89)։



Գծ. 89

Լուծում. — Կառուցենք MN ուղիղի վրանե A կետում ավյալ անկյանը հավասար α անկյունը, և այդ անկյան AE կողմի վրա վերցնենք α-ին հավասար AB հատվածը։ B կետից AB շառավիղով արտագծենք մի աղեղ, որը MN ուղիղին կհանդիպի C կետում։ Միացնելով C և B կետերը կստանանք ABC որոնելի եռանկյունը։

Դժվար չե համոզվել, որ այդ եռանկյունը պայմաններին բավարարում է։ Եռանկյան AB և BC կողմերը միմյանց հավասար են իբրև շառավիղներ. հետևաբար եռանկյունը հավասարասրուն է և հիմքի անկյուններն էլ ունեն ավյալ մեծությունը։

§ 21. ԳԱՂԱՓԱՐ ԿԵՏԵՐԻ ՅԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՏԵՂԻ ՄԱՍԻՆ ՅԵՎ ԱՅԴՊԻՍԻ ՏԵՂԵՐԻ ՈՐԻՆԱԿՆԵՐ.

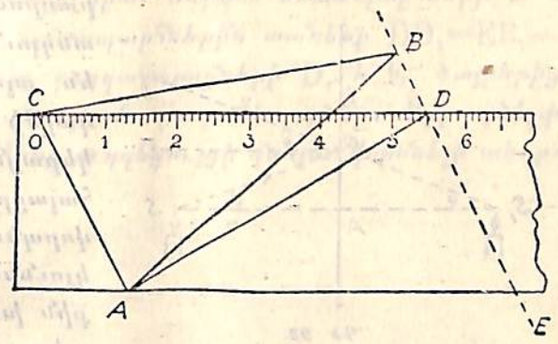
Մենք արդեն տեսանք, որ յերեք եռանկյան գագաթից հիմքին դուգահեռ գիծ տանենք, այդ դուգահեռի յուրաքանչյուր կետը կարելի կլինի ընդունել իբրև գագաթ մի այնպիսի եռանկյան, որն ունի միևնույն հիմքը, ինչ և ավյալ եռանկյունը, և բոլոր նման եռանկյունների մակերեսները միմյանց հավասար կլինեն։

Մեր դուգահեռը ավյալ դեպքում ներկայացնում է բոլոր կետերի ամբողջությունը, որոնք բավարարում են վորոշ պայմաններին (այն եռանկյունների մակերեսների հավասարության, որոնք ունեն ավյալ հիմքը, իսկ գագաթները գտնվում են այդ դուգահեռի վրա։

Այդպիսի բոլոր կետերի ամբողջությունը կոչվում է «կետերի յերկրաչափական տեղ», այս հասկությունն ոգտագործվում է եռանկյունների մակերեսները գործնականորեն վորոշելու համար— հատարակ գործիքի ոգնությամբ. վոր կոչվում է պրոտեատոր (հոգաչափ) Բիբիկովի, վորպիսին ամեն մարդ կարող է ինքը շինել։

Վերցրեք թափանցիկ թղթի մի շերտ (ծախու գործիքն իրենից ներկայացնում է ցելուլոյիդից մի քանոն) 2,5-ից մինչև 5 սմ լայնության և նրա վրա կատարեք սանտիմետրերով և միլիմետրով բաժանումնքները (գծ. 90)։ Յենթադրենք, թե պետք է գտնել

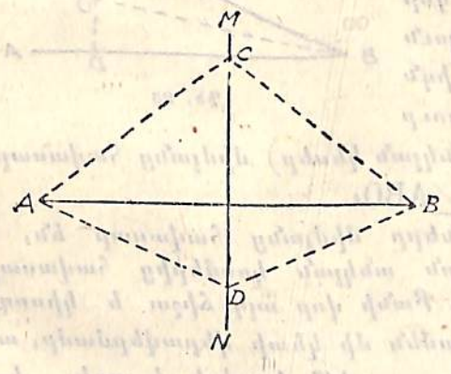
ABC եռանկյան մակերեսը։ Անցկացնենք B գագաթով BE գիծը, որը զուգահեռ լինի AC հիմքին։ Դրեք քանոնը եռանկյան գծանկարի վրա այնպես, որ նրա վերջ բաժանումն ընկնի C կետի վրա, իսկ քանոնի հակառակ եզրն ընկնի A կետի վրա։ Նշեք քանոնի և BE գծի հատման D կետը։ Պարզ է, որ ACD եռանկյունը կունենա նույն մակերեսը, ինչ և ավյալ եռանկյունը։ Հիմքը հավասար է CD-ին (կարդացվում է ուղղակի քանոնով), իսկ բարձրությունը կլինի քանոնի լայնությունը։ Հետևաբար եռանկյան մակերեսը կարելի է հաշվել։



Գծ. 90

Վերցնենք կետերի յերկրաչափական տեղերի յերկու ուրիշ որինակ։

Որինակներ.—1. Վերցնենք MN առանցքին համաչափ A և B յերկու կետերը (գծ. 91), և միացնենք համաչափության առանցքի C կամավոր կետը (կամ D) A և B կետերի հետ։ AC և CB կլինեն թեքեր, որոնք MN ուղղահայացի O հիմքից հավասար հեռավորության վրա չեն գտնվում. հետևապես նրանք իրար հավասար կլինեն։ Քանի որ այդ վերաբերում է համաչափության առանցքի յուրաքանչյուր կետին, կարելի է ասել, որ այդ առանցքը տվյալ յերկու կետերից հավասար հեռավորության վրա գտնվող կետերի յերկրաչափական տեղն է։ Հետևապես, այդպիսի կետերի ընդհանուր հատկությունն այն է, որ նրանք գտնվում են ավյալ կետերը միացնող ուղիղ գծի միջնուղղահայացի վրա։

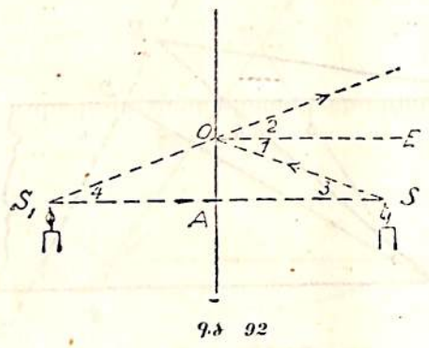


Գծ. 91

Հայելու առջև (գծ. 92) դրեք վորոշ հեռավորության վրա (AS) S մոմը։ Հայելում հեռվում նույն հեռավորության վրա (AS_1=AS) դուք կտեսնեք մոմի S_1 պատկերը (հայելու համաչափություն)։

SO ճառագայթն ընկնելով հայելու վրա O կետում, հայելուց անդրադառնում է, և անդրադարձած ճառագայթի շարունակության

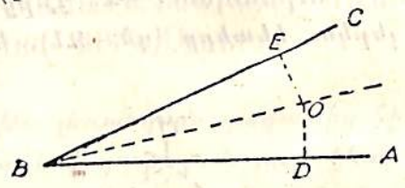
վրա մենք տեսնում ենք պատկերը: O կետը S-ից և S_1-ից հավասար հեռավորության վրա չէ գտնվում, այսինքն՝ $\triangle OSS_1$ հավասարասրուն է. հետևաբար նրա հիմքի անկյունները միմյանց հավասար են, այսինքն $\angle 3=\angle 4$: Ճառագայթի անկման O կետում պատկերացնենք հայելուն OE ուղղահայացը: Այդ դեպքում $\angle 4=\angle 2$ որպես համապատասխան անկյուններ, $\angle 3=\angle 1$ որպես ներքին խաչադիր անկյուններ. հետևաբար, $\angle 1=\angle 2$:



գծ. 92

Սակայն $\angle 1$-ը կազմված է հայելու վրա ընկնող SO ճառագայթով և անկման կետից կանդնեցրած ուղղահայացով (այսպես կոչված անկման անկյուն), իսկ $\angle 2$-ը՝ նույն ուղղահայացով և անդրադարձած ճառագայթի ուղղությամբ (այսպես կոչված անդրադարձման անկյուն): Այսպիսով ստացվում է ֆիզիկայից հայտնի օրենքը՝ անկման անկյունը հավասար է անդրադարձման անկյանը:

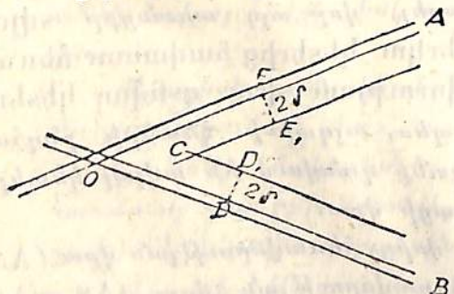
2. Կառուցենք ABC անկյունը (գծ. 93) և նրան կիսելով՝ վերցնենք կիսողի վրա վորևե O կետ: Իջեցնելով անկյան կողմերի վրա OD և OE ուղղահայացները, կտեսնենք, որ առաջացած OBE և OBD ուղղանկյուն եռանկյուններում OB ներքնաձիգն ընդհանուր է, և նրա վրա ընկած սուր անկյունները (որպես վերցրած անկյան կեսեր) միմյանց հավասար.



գծ. 93

$$\angle CBD=\angle ABO:$$

Հետևաբար այդ եռանկյունները միմյանց հավասար են, և OD=OE. այսինքն կիսողի O կետն անկյան կողմերից հավասար հեռավորության վրա չե գտնվում: Քանի որ այդ ճիշտ է կիսողի ամեն մի կետի վերաբերմամբ, ապա ուրեմն կարելի չե ասել, որ կիսողը տվյալ անկյան կողմերից հավասար հեռավորության վրա գտնվող կետերի երկրաչափական տեղն է:



գծ. 94

Խնդիր.—OA և OB երկու հատվող ճանապարհների անկյան բացվածքում, յուրաքանչյուր ճանապարհից 2 մ հեռավորության վրա, հարկավոր է գնել ուղեցույց (գծ. 94): Ի՞նչպես այդ անել:

Լուծում.—Նախորդից պարզ է, որ ուղեցույցը պետք է գտնվի AOB երեռանկյան կիսողի վրա: Ցերկու ճանապարհների D և E կամավոր կետերում այդ ճանապարհներին տանենք $DD_1=EE_1=2$ մ ուղղահայացներ և այդ ուղղահայացների D_1 և E_1 ծայրերից տանենք ճանապարհների ուղղության զուգահեռ գծեր: Այդ գծերի C հանդիպման կետը կլինի հենց ուղեցույցի դնելու վորոնելի տեղը:

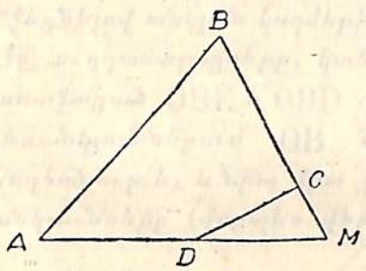
ԳԼՈՒԽ III.

ԱՄԵՆԱՊԱՐԶ ՔԱՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԸ.

§ 22. ՔԱՌԱՆԿՅԱՆ ՄԱՍԻՆ ԸՆԴՀԱՆՐԱՊԵՍ

Ամենապարզ փակ ձևը չեռանկյունն է. ամենապարզ այն իմաստով, որ չեռանկյունը սահմանափակված է կողմերի նվազագույն հնարավոր թվով։

Վերցնենք որևե ABM չեռանկյուն (գծ. 95) և այդ չեռանկյան չերկու կողմերի վրա՝ C և D կետերը։ Այդ կետերը միմյանց հետ միացնելով՝ մենք ավյալ չեռանկյունը բաժանում ենք չերկու փակ ձևերի՝ CMD չեռանկյան և ABCD ձևվի, որը սահմանափակված է չորս կողմերով, այսինքն՝ քառանկյուն է։



գծ. 95

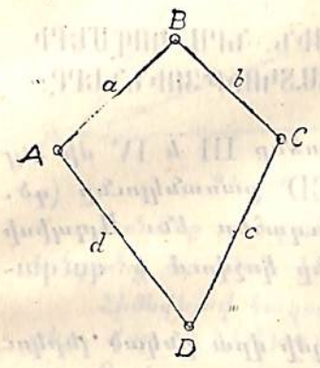
Յեթե չեռանկյան մեջ յուրաքանչյուր կողմի դիմաց ընկնում է մեկ գագաթ, քառանկյան մեջ մենք ունենք չերկու զույգ հակադիր կողմեր և չերկու զույգ հակադիր գագաթներ՝ AD և BC, AB և CD, A և C, B և D։

Յեթե չեռանկյան կողմերը արված են, այդ դեպքում չեռանկյան ձևը վորոշ է և անփոփոխ, այսինքն՝ չեռանկյունը ավյալ կողմերով հանդիսանում է իրրև հաստատուն ձև։

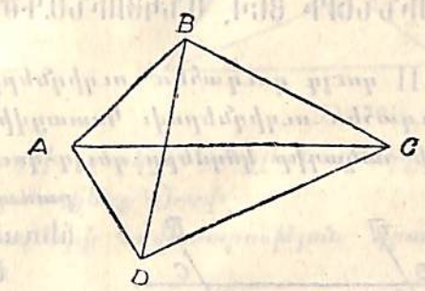
Այդ պատճառով է, որ փայտե կամ մետաղե շերտերի միացումը չեռանկյան ձևով կոչվում է «կոշտ» միացում։ Ուշադրություն դարձրեք կամուրջների ֆերմերին, մետաղե ցանկապատավոր կայմերին և այլն։

Քառանկյունը, որի կողմերը արված են, հաստատուն ձև չի ներկայացնում իրենից. ունենալով a b, c և d ավյալ կողմերով մի քառանկյուն, կարելի չե չերկու հարևան կողմերի միջև չեղած անկյան մեծությունը փոփոխել, որով կփոփոխվի նաև քառանկյան ձևը։ Կարելի չե քառանկյան մոդել պատրաստել մետաղե կամ փայտե ճիպոտներից, որոնք միմյանց հետ ամրացվում են շարնիրնեերով։ Յեթե a և b ճիպոտները մի փոքր միմյանցից հեռացնենք, այսինքն՝ B անկյունը (գծ. 96) մեծացնենք, կմեծանա նուլնպես նրան հակադիր D անկյունը, իսկ A և C անկյունները կփոքրանան։ Շնորհիվ քառանկյան շարժողության, մեքենաներում նրանով ոգտագործում են իրրև հաղորդիչ մեխանիզմ։

Յուրաքանչյուր քառանկյան մեջ կարելի չե հակադիր գագաթները միացնել ուղիղ հատվածներով, որոնք կոչվում են անկյունագիծ։ AC անկյունագիծը (գծ. 97) քառանկյունը բաժանում է ABC և ADC չերկու չեռանկյունների, իսկ BD անկյունագիծը՝ ABD և CBD չեռանկյուն-



գծ. 96

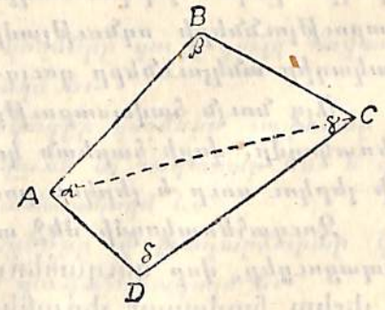


գծ. 97

ներով։ Յեթե բացի չորս կողմերից, արված է նաև անկյունագծերից մեկը, որինակ, AC, այդ դեպքում քառանկյունն ընդունում է վորոշակի ձև, այսինքն՝ դառնում է հաստատուն։

Վարժություն.—*Կառուցեք քառանկյուն հետևյալ ավյալներով՝* AB=*6 սմ,* BC=*7 սմ,* CD=*10 սմ,* DA=*8,5 սմ և* AC=*9 սմ։*

Զանազան տեսակի քառանկյուններում, ինչպես և զանազան չեռանկյուններում, անկյունների մեծությունները կարող են լինել տարբեր (գծ. 98) Սակայն, ինչպես չեռանկյան անկյունների գումարը հավասար է վորոշ մեծության՝ 2d-ի, այնպես էլ, քառանկյան անկյունների գումարը հավասար է 4d-ի կամ 360°-ի։



գծ. 98

Ապացուցեք այդ՝ տանելով անկյունագծերից մեկը։

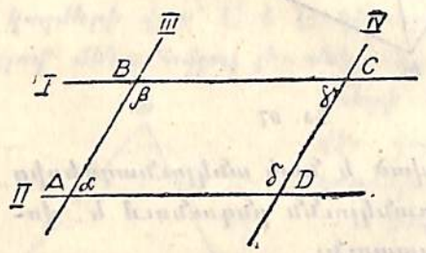
Խնդիրներ.—*1. Քառանկյան առաջին անկյունը հավասար է* $\frac{3}{4}d$*-ի, չերկրորդը* $\frac{1}{8}d$*-ով մեծ և առաջինից, չերրորդը* $\frac{1}{4}d$*-ով մեծ և չերկրորդ անկյունից։ Վորոշել չորրորդ անկյունը։*

2. Վորոշել ABCD քառանկյան անկյունները, յեթե B անկյունը $1\frac{3}{4}$ անգամ մեծ է A-ից, C-ն $1\frac{1}{2}$ անգամ մեծ է B-ից, իսկ D-ն կազմում է C-ի $\frac{5}{6}$ մասը։ Կառուցել մի այդպիսի քառանկյուն, յեթե A անկյունը կազմող կողմերը 6 սմ և 8 սմ են։

3. Վորոշել ABCD քառանկյան անկյունները, յեթե B անկյունը յերկու անգամ մեծ է A-ից, C անկյունը 30°-ով մեծ է B-ից և D անկյունը 15°-ով փոքր C-ից։

§ 23. ԳԱՂԱՓԱՐ ՉՈՒԳԱՀԵՒԱԿՈՂՄԻ ՄԱՍԻՆ. ՆՐԱ ԿՈՂՄԵՐԻ, ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՑԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆԱԳԾԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ.

I և II զույգ զուգահեռ ուղիղները հատենք III և IV մի այլ զույգ զուգահեռ ուղիղներով։ Կստացվի ABCD քառանկյունը (գծ. 99), վորի հակադիր կողմերը զույգ-զույգ զուգահեռ են։ Այդպիսի քառանկյունը կոչվում է զուգահեռակողմ։



գծ. 99

Մի կողմի վրա ընկած յերկու անկյունները, յերկու զուգահեռի և նրանց հատողի նկատմամբ ներքին միակողմանի անկյուններ են, հետևապես և նրանց գումարը հավասար է 2d-ի։

Կազմենք յուրաքանչյուր կողմի վրա ընկած յերկու անկյունների գումարը և ստացված հավասարությունների ոգնությամբ ապացուցենք, վոր զուգահեռակողմի հակադիր անկյունները զույգ-զույգ հավասար են։

Այդ նույն հավասարություններից հետևում է, վոր այն զուգահեռակողմը, վորի հարևան կողմերը միմյանց ուղղահայաց չեն, ունի յերկու սուր և յերկու բութ անկյուններ։

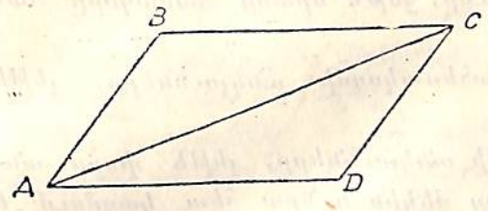
Զուգահեռակողմի մեջ տարեք յերկու անկյունագծերից մեկը և ապացուցեք, վոր զուգահեռակողմը անկյունագծով բաժանվում է յերկու հավասար յեռանկյան։

Գտեք այդ յեռանկյուններում համապատասխան կողմերը և ապացուցեք, վոր զուգահեռակողմի հակադիր կողմերը զույգ-զույգ հավասար են։

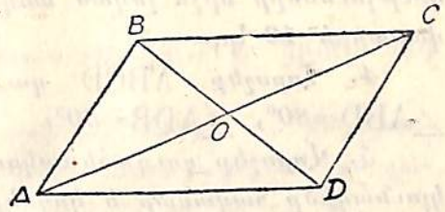
Զուգահեռակողմի հարևան կողմերն առհասարակ միմյանց հավասար չեն։ Այսպես, զուգահեռակողմի (գծ. 100) AD և BC կողմերը AB և CD կողմերից մեծ են։

Այդ անհավասարության հիման վրա ապացուցեք, վոր անհավասարակողմ զուգահեռակողմի անկյուններն անկյունագծերով չեն կիսվում (ոգտվել անհավասարակողմ յեռանկյան անկյունների հատկությունից)։

Այդ անհավասարություններից հետևում է, վոր անկյունագիծը զուգահեռակողմի համար համաչափության (սիմմետրիայի) առանցք չե։ Հակադիր գագաթները մյուս գագաթները միացնող անկյունագծի վերաբերմամբ համաչափ չեն։ անհավասարակողմ զուգահեռակողմը համաչափության (սիմմետրիայի) առանցք չունի։



գծ. 100



գծ. 101

Տանենք զուգահեռակողմի յերկու անկյունագծերը (գծ. 101) և նրանց հատման կետը նշանակենք O-ով։

Հիմնվելով հակադիր կողմերի հավասարության վրա՝ ապացուցեք, վոր $\triangle AOD = \triangle BOC$։

Գտեք այդ յեռանկյունների համապատասխան կողմերը և ապացուցեք, վոր՝

$$AO = OC,\quad BO = OD,$$

այսինքն՝ վոր զուգահեռակողմի անկյունագծերը փոխադարձաբար կիսվում են։

Ապացուցեք հետևյալ հակադարձ թեորեմները (ոգտվելով յեռանկյունների հավասարության և ուղիղ գծերի զուգահեռության պայմաններից)։

1. Յեթե քառանկյան հակադիր կողմերը զույգ-զույգ հավասար են, ապա քառանկյունը զուգահեռակողմ է։

2. Յեթե քառանկյան յերկու հակադիր կողմերը հավասար են և զուգահեռ, ապա ուրեմն մյուս յերկուսն էլ հավասար են և զուգահեռ, այսինքն՝ քառանկյունը զուգահեռակողմ է։

3. Յեթե քառանկյան անկյունագծերը փոխադարձաբար կիսվում են, ապա ուրեմն քառանկյունը զուգահեռակողմ է։

Պարզ է, վոր զուգահեռակողմը կատարելապես վորոշ է դառնում այն դեպքում, յեթե տրված են յերկու կողմերն ու նրանց միջ յեղած անկյունը, այսինքն՝ զուգահեռակողմը (յեռանկյան նման) վորոշվում է յերեք տվյալներով։

Վարժություններ. — *1. Կառուցեք զուգահեռակողմ՝ 1) ըստ տվյալ յերկու կողմի և անկյան (a, b, α).*

2) ըստ երկու կողմի և մեկ անկյունագծի (a, b, m).

3) ըստ մեկ կողմի և երկու անկյունագծի (a, m, n).

4) ըստ երկու անկյունագծի և նրանց միջև եղած անկյան (m, n, γ):

2. Կառուցեք 5 կգ և 8 կգ երկու ուժերի համազորը, եթե բազդրիչ ուժերի ուղղութիւններով կազմված անկյունը հավասար է՝ 1) 45^0, 2) 60^0, 3) 120^0, 4) 135^0:

3. Կառուցմամբ վորոշեք 5 կգ և 9 կգ երկու ուժերի ուղղութիւնների միջև եղած անկյունը, եթե նրանց համազորը հավասար է 12 կգ:

4. Վորոշեք ABCD զուգահեռակողմի անկյունները, եթե $\angle ABD=80^0$, $\angle ADB=30^0$:

5. Վորոշեք զուգահեռակողմի անկյունները, եթե փոքր անկյունագիծը հավասար է կողմերից մեկին և նրա հետ կազմում է 30^0 անկյուն: Կառուցեք այդպիսի մի զուգահեռակողմ, վերցնելով անկյունագծի համար կամավոր երկարութիւն:

6. Զուգահեռակողմի բութ անկյունը սուր անկյունից $1^1/_2$ անգամ մեծ է: Վորոշեք այդ անկյունները:

7. Զուգահեռակողմի պարագիծը հավասար է 42,2 սմ: Կողմերից մեկը 4,1 սմ-ով մյուսից մեծ է: Վորոշեք զուգահեռակողմի կողմերը:

Ապացուցեք, վոր՝

1) Զուգահեռակողմի սուր անկյունների գագաթները միացնող անկյունագիծը բութ անկյունների գագաթները միացնող անկյունագծից մեծ է (զուտ չեռանկյունների համեմատութիւնից, վորոնց մեջ են մտնում այդ անկյունագծերը):

2) Զուգահեռակողմի մեծ անկյունագիծը մեծ է յուրաքանչյուր կողմից:

3) Կողմի և մեծ անկյունագծի միջև եղած անկյունը փոքր է նույն կողմի և փոքր անկյունագծի միջև եղած անկյունից (կողմով և անկյունագծի կեսերով կազմվող չեռանկյունուց):

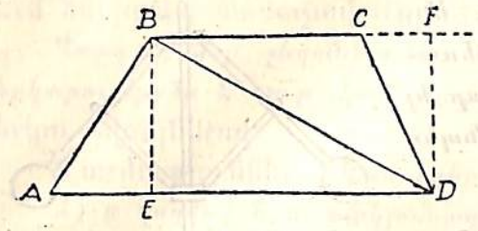
§ 24. ԶՈՒԳԱՀԵՌԱԿՈՂՄԻ ՄԱԿԵՐԵՍԸ.

Տրված է ABCD զուգահեռակողմը (գծ. 102): Իջեցնենք գագաթից AD կողմի վրա BE և FD ուղղահայացները, վորոնք կոչվում են բարձրութիւններ: Ապացուցեք, վոր՝

$$\triangle ABE=\triangle DCF:$$

Համեմատենք ABCD զուգահեռակողմի մակերեսը EBFD ուղղանկյան մակերեսի հետ. նրանք բաղկացած են DCBE ընդհանուր

մասից և զուգահեռակողմ հավասար չեռանկյուններից: AD կողմն այդ դեպքում ընդունված է իբրև հիմք: Հետևաբար, զուգահեռակողմը հավասարամեծ է նույն հիմքն ու բարձրութիւնն ունեցող ուղղանկյանը:



գծ. 102

Նշանակենք հիմքը և բարձրութիւնը a և h տառերով, իսկ զուգահեռակողմի մակերեսը՝ S-ով. այն ժամանակ

$$S=a\cdot h:$$

Զուգահեռակողմի մակերեսն արտահայտվում է հիմքի յեվ բարձրության արտադրյալով:

Վարժություններ.—1. Զուգահեռակողմի հիմքն ու բարձրութիւնը 12 սմ և 5 սմ են: Վորոշեք նրան հավասարամեծ զուգահեռակողմի բարձրութիւնը, եթե վերջինիս հիմքը 10 սմ է:

2. Վորոշեք չեռանկյան հիմքը, եթե նրա բարձրութիւնը 12,5 սմ է, և նրա մակերեսը հավասար է այնպիսի մի զուգահեռակողմի մակերեսի, վորի հիմքն ու բարձրութիւնը 15-ական սմ են:

3. Զուգահեռակողմի կողմերն են՝ 15 սմ և 6 սմ: Մեծ կողմին համապատասխանող բարձրութիւնը հավասար է 5 սմ-ի: Վորոշել փոքր կողմին համապատասխանող բարձրութիւնը:

4. Ապացուցեք, վոր զուգահեռակողմը չերկու անկյունագծով բաժանվում է 4 հավասարամեծ չեռանկյունների:

6. Տրված է ABC չեռանկյունը: Կառուցել նույն հիմքի վրա՝ 1) նրան հավասարամեծ ուղղանկյուն, 2) նրան հավասարամեծ զուգահեռակողմ, վորի կողմնակից կողմը ավյալ մեծութիւնն ունի:

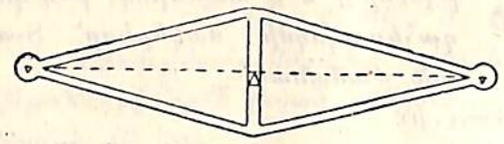
§ 25. ՇԵՂԱՆԿՅՈՒՆ.

Կամավոր մեծութիւն ունեցող անկյան գագաթից վերցրեք նրա կողմերի վրա միմյանց հավասար չերկու հատված: Յեթե այդ հատվածների ծայրերից, վորպես կենտրոններից, այդ հատվածներին հավասար շառավիղներով աղեղներ արտագծեք և աղեղների հատման կետը միացնեք վերցրած հատվածների ծայրերին, կստանաք մի քառանկյուն, վորի բոլոր կողմերը միմյանց հավասար են: Այդպիսի քառանկյունը կոչվում է շեղանկյուն:

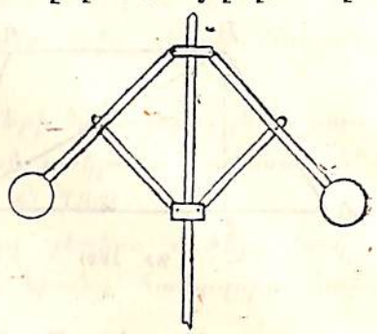
Փոփոխելով անկյան մեծութիւնը՝ դուք կստանաք զանազան ձևերի շեղանկյուններ:

Իբրև շեղանկյունների որինակ կարող են լինել՝ կշեռքի լծակի ձևը, վորը չափազանց սրանկյուն շեղանկյուն է, շոգեմեքենայի կոնտավորիչի ձևը (գծ. 103 և 104):

Առաջ մենք տեսանք, որ այն քառանկյունը, որի հակադիր կողմերը միմյանց հավասար են, զուգահեռակողմ է, այսինքն՝ նրա կողմերը զույգ-զույգ զուգահեռ են, հետևաբար շեղանկյունը զուգահեռակողմի մի տեսակն է. դրա համար էլ նրա հակադիր անկյունները նույնպես

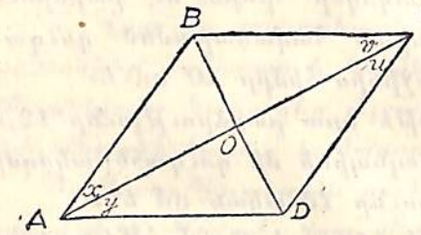


Գծ. 103



Գծ. 104

(գծ. 105) հավասար են, և անկյունագծերը փոխադարձաբար կիսում են (գծ. 105)



Գծ. 105

$$\angle A=\angle C,\quad \angle B=\angle D,$$
$$AO=OC,\quad BO=OD$$

Շեղանկյունն, ինչպես ամեն մի զուգահեռակողմ, յուրաքանչյուր անկյունագծով բաժանվում է երկու հավասար եռանկյան: Սակայն՝ եթե զուգահեռակողմն անհավասարակողմ է, այդ եռանկյունները հավասարասրուն չեն, իսկ եթե շեղանկյուն է—եռանկյունները հավասարասրուն են:

Քննենք ACD հավասարասրուն եռանկյունը: Նրա հիմք է անկյունները հավասար են, այսինքն՝

$$\angle y=\angle u:$$

Քանի որ AD և BC կողմերը զուգահեռ են, ուրեմն

$$\angle y=\angle v,$$

որից հետևում է, որ

$$\angle v=\angle u,$$

այսինքն՝ C անկյունը անկյունագծով կիսվում է:

Ապացուցեք նույնը մյուս անկյունների վերաբերմամբ:

Այսպիսով, շեղանկյան անկյունագծերը կիսում են նրա անկյուններ:

Համեմատեք AOB և AOD եռանկյունները և նրանց հավասարությամբ ապացուցեք, որ AC⊥BD-ին:

Այսպես ուրեմն շեղանկյան անկյունագծերը փոխադարձաբար ուղղահայաց են:

Այստեղից հետևում է, որ B և D գագաթները AC անկյունագծի նկատմամբ համաչափ են, իսկ A և C գագաթները համաչափ են BD-ի նկատմամբ:

Այսպես ուրեմն, անկյունագծերը շեղանկյան համար ծառայում են իրեվ համաչափության (սիմմետրիայի) առանցքներ:

Պարզ է, որ շեղանկյունն ամբողջովին որոշվում է կողմի երկարությամբ և սուր կամ բութ անկյան մեծությամբ, այսինքն յերկու տվյալներով:

Վարժություններ.—Կառուցեք շեղանկյուն՝

1) a կողմով և m անկյունագծով,
2) m և n յերկու անկյունագծերով,
3) m մեծ անկյունագծով և α սուր անկյունով,
4) n փոքր անկյունագծով և α սուր անկյունով:

Շեղանկյան մակերեսն էլ զուգահեռակողմի մակերեսի նման արտահայտվում է հիմքի և բարձրության արտադրյալով, սակայն կարող է արտահայտվել նաև հետևյալ յեղանակով:

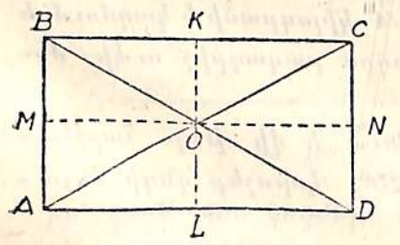
Քննենք ABC եռանկյունը: m անկյունագիծն ընդունելով իբրև հիմք, մյուս անկյունագծի կեսը՝ իբրև բարձրություն, կգտնենք, որ նրա մակերեսը հավասար է $\frac{1}{2}\cdot m\cdot\frac{n}{2}$, այսինքն՝ $\frac{m\cdot n}{4}$. նրան հավասար ADC եռանկյան մակերեսը նույն մեծությունն ունի. հետևաբար շեղանկյան մակերեսն է՝

$$S=\frac{m\cdot n}{4}\cdot 2=\frac{m\cdot n}{2};$$

Յեվ այսպես, շեղանկյան մակերեսը կարող է արտահայտվել անկյունագծերի արտադրյալների կեսով:

§ 26. ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ.

Յերբ յերկու զուգահեռ ուղիղներ հատվում են յերկու ուրիշ զուգահեռ ուղիղներով, որոնք յերկու առաջին ուղիղներին ուղղահայաց են, ստացվում է զուգահեռակողմ, որի անկյունները ուղիղ են: Այդպիսի զուգահեռակողմը կոչվում է ուղղանկյուն (գծ. 106):



Գծ. 106

Ուղղանկյան հարևան կողմերն ընդհանրապես միմյանց հավասար չեն. այդ պատճառով էլ, այն եռանկյունները, որոնք ստացվում են ուղղանկյունն անկյունագծով հատելուց, հավասարասրուն չեն, և ուղղանկյան անկյուններն անկյունագծերով չեն կիսվում. անկյունագծերը համաչափության (սիմմետրիայի) առանցքներ չեն:

Գտեք մի զույգ եռանկյուններ, որոնց կողմերից մեկը լինի ուղղանկյան անկյունագիծը, և այդ եռանկյունների հավասարու-

թյամբ ապացուցեք, որ ուղղանկյան անկյունագծերը միմյանց հավասար են:

Ապացուցեք, որ ուղղանկյունը յերկու անկյունագծերով բաժանվում է չորս հավասարասրուն յեռանկյունների, որոնք զույգ-զույգ հավասար են:

Կառուցեք ուղղանկյուն՝

1) a կողմով և m անկյունագծով,

2) m անկյունագծով և անկյունագծերի միջև յեղած α անկյունով:

3) a կողմով և անկյունագծերի միջև յեղած α անկյունով:

Վարժություններ.—*1) 5 և 7 կիլոգրամանոց յերկու ուժ ազդում են մի կետի վրա այնպիսի ուղղություններով, որոնք կազմում են 70^0 անկյուն, որոշել համազոր ուժի մեծությունը և ուղղությունը:*

Յուցմունք.—*Ինչպես այս, այնպես էլ հաջորդ խնդիրները լուծվում են գծագրական յեղանակով (գրաֆիկորեն): Դրա համար վոխադրիչի և գծագրական գործիքների ոգնությամբ՝ պետք է գծել ուժերի զուգահեռակողմը: Կիլոգրամներով գնահատվող ուժերի մեծությունները նշվում են վորոշ գծային մասշտաբի հատվածներով. որինակ՝ մեկ սանտիմետր յերկարության հատվածին համապատասխանում է մեկ կիլոգրամ ուժ:*

2) 3 և 4 կիլոգրամանոց յերկու ուժ ազդում են մեկ կետի վրա վոխադարձ ուղղահայաց ուղղություններով: Վորոշեք համազոր ուժի մեծությունն ու ուղղությունը:

3) 4, 5 և 6 կիլոգրամների հավասար յերեք ուժ ազդում են մեկ կետի վրա այնպես, որ առաջին ուժի ուղղությունը յերկրորդ ուժի ուղղության հետ կազմում է 42^0 անկյուն, իսկ յերկրորդ ուժը յերրորդ ուժի ուղղության հետ կազմում է 26^0 անկյուն: Վորոշեք համազոր ուժի մեծությունն ու ուղղությունը:

4) 5 կիլոգրամանոց մի ուժ վերլուծվում է յերկու բաղադրիչ ուժերի, որոնցից առաջինը հավասար է 4 կիլոգրամի և կազմում է ավելի հետ 35^0 անկյուն: Վորոշեք յերկրորդ բաղադրիչ ուժի մեծությունն ու ուղղությունը:

5) 2,5 կիլոգրամանոց գունդը գլորվում է մի թեք հարթությամբ, որը հորիզոնի հետ կազմում է 20^0: Վորոշեք գնդի ճնշումը հարթության վրա:

6) Վագոնեական ռելսերի վրայով շարժվում է ձիու ուժով. ձգափոկերը ռելսերի ուղղության հետ կազմում է 15^0 անկյուն. ձիու ձգելու ուժը հավասար է 10 կիլոգրամի: Վերլուծեք այդ ուժը յերկու բաղադրիչ ուժերի՝ մեկը ռելսերի յերկարությամբ, մյուսը՝ նրանց ուղղահայաց, և վորոշեք բաղադրիչ ուժերի մեծությունները:

§ 27. ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ.

Ուղիղ անկյան գագաթից նրա կողմերի վրա վերցրեք հավասար հատվածներ և նրանց ծայրերին կանգնեցրեք ուղղահայացներ: Ուղղահայացների հատման կետը միացնելով վերցրած հատվածների ծայրերին, կստանանք քառանկյուն:

Ապացուցեք, որ այդ քառանկյան կողմերը հավասար են և անկյուններն՝ ուղիղ: Այդպիսի քառանկյունը կոչվում է քառակուսի:

Քառակուսին միաժամանակ թե՛ ուղղանկյուն է յեվ թե՛ շեղանկյուն. այդ պատճառով էլ քառակուսու անկյունագծերը փոխադարձաբար կիսվում են, փոխադարձաբար ուղղահայաց են, քառակուսու անկյունների կիսվում են յեվ միմյանց հավասար են:

Ցույց տվեք, որ քառակուսին ունի համաչափության (սիմետրիայի) չորս առանցք:

Պարզ է, որ քառակուսին կատարելապես վորոշվում է կողմերի յերկարությամբ, այսինքն՝ մեկ տվյալով:

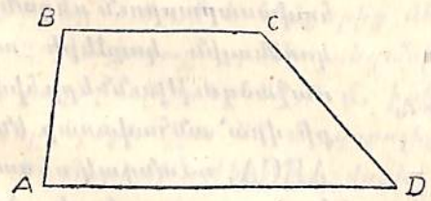
Կառուցեք տվյալ m անկյունագծով քառակուսի:

Քառակուսու մակերեսն արտահայտվում է կողմի քառակուսով, կամ թե անկյունագծի քառակուսու կիսով:

Գրեք այդ բանաձևերը, նշանակելով կողմը a-ով, անկյունագիծը m-ով, քառակուսու մակերեսը՝ S-ով:

§ 28. ՍԵՂԱՆ.

Հատենք մի զույգ զուգահեռ ուղիղներ յերկու անզուգահեռ ուղիղներով, որոնք տվյալ զուգահեռների միջև միմյանց չեն հատում. կստացվի մի քառանկյուն, որի յերկու հակադիր կողմերը զուգահեռ են, իսկ մյուս յերկու կողմերն անզուգահեռ: Այդպիսի քառանկյունը կոչվում է սեղան (գծ. 107):

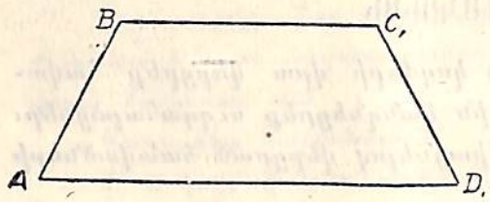


Գծ. 107

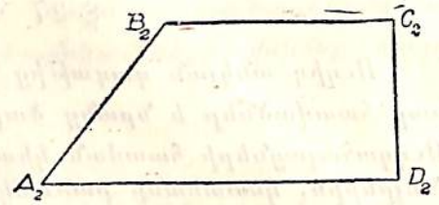
Սեղանի AD և BC զուգահեռ կողմերը կոչվում են սեղանի հիմքեր, իսկ անզուգահեռ կողմերը՝ կողմնային կողմեր: Սեղանի հիմքերը միմյանց հավասար լինել չեն կարող (ինչո՞ւ):

Յերբ սեղանի կողմնային կողմերը հավասար են, սեղանը կոչվում է հավասարասրուն (գծ. 108), հակառակ դեպքում կոչվում է անհավասարասրուն սեղան:

$A_2B_2C_2D_2$ սեղանը (գծ. 109), որի կողմնային կողմերից մեկն ուղղահայաց է հիմքին, կոչվում է ուղղանկյուն սեղան։



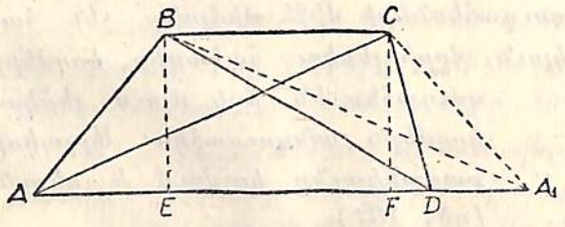
գծ. 108



գծ. 109

Վորոշեք սեղանի կողմնային վորևե կողմի վրա ընկած յերկու անկյունների կախումը միմյանցից։ Ապացուցեք, որ հավասարասրուն սեղանի հիմքի անկյունները միմյանց հավասար են (վոքը հիմքի ծայրերից բարձրություններ տանելով և ստացված յեռանկյունները միմյանց հետ համեմատելով)։ Ապացուցեք՝ 1) վոր հավասարասրուն սեղանի անկյունագծերը հավասար են և յուրաքանչյուր հիմքին թեքված են հավասար չափով. 2) վոր յերկու յեռանկյուններ, վորոնց հիմքերը հավասարասրուն սեղանի հիմքերն են, իսկ գագաթները գտնվում են անկյունագծերի հատման կետում,— հավասարասրուն են. 3) վոր հավասարասրուն սեղանի անկյունագծերի հատման կետից հիմքերին իջեցրած ուղղահայացը հիմքերը կիսում է և ծառայում հավասարասրուն սեղանի համար իբրև համաչափության (սիմմետրիայի) առանցք (գծ. 110)։

գծ. 110



գծ. 111

Ապացուցեք, որ անհավասարասրուն սեղանի կողմնային կողմերի առաջադրությունները հիմքի վրա՝ անհավասար են։

$ABCA_1$ ժամանակ սեղանի կառուցմամբ (գծ. 111) համեմատեք անհավասարասրուն սեղանի մեծ հիմքի անկյուններն ու անկյունագծերի յերկարությունները։

Ինչպես անհավասարասրուն յեռանկյունն, այնպես էլ անհավասարասրուն սեղանը համաչափության (սիմմետրիայի) առանցք չուներ։ Յեթե տրված են հիմքերը, կողմնային կողմերից մեկը և այդ կողմի ու հիմքերից մեկի միջև ընկած անկյունն, ապա սեղանը կարելի չե կառուցել այսպես. վերցնում ենք հիմքը, նրա ծայրերից

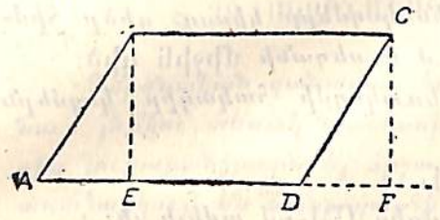
մեկում կառուցում տվյալ անկյունը, անկյան կողմերից մեկի վրա վերցնում ենք կողմնային կողմը, որի ծայրից, հիմքին զուգահեռ ուղիղի վրա, վերցնում մյուս հիմքը։ Կատարեք այդ կառուցումը։

Այսպիսով, սեղանը վորոշվում է չորս տվյալներով։

Կառուցենք սեղան՝

1) a և b հիմքերով, c կողմնային կողմով և l անկյունագծով.
2) a հիմքով, c և d կողմնային կողմերով և l անկյունագծով.
3) a և b հիմքերով և c ու d կողմնային կողմերով։

Յուցմունք.—Նշեք վորոնելի սեղանի մոտավոր տեսքը, կողմնային կողմերից մեկի ծայրով տարեք մյուս կողմնային կողմին զուգահեռ մի ուղիղ և քննեք ստացված յեռանկյունը, որի կողմերը հայտնի յեն։



գծ. 112

ABCD սեղանի (գծ. 112) մակերեսը հեշտությամբ կվորոշվի, յեթե անկյունագծով նրան բաժանեն ABD և BCD յերկու յեռանկյունների։ Սեղանի հիմքերն ընդունելով այդ յեռանկյունների համար իբրև հիմքեր, անցկացնենք նրանց BE և CF բարձրությունները։ Յուրաքանչյուր ստացված յեռանակով գտեք սեղանի մակերեսը, նշանակելով զուգահեռ կողմերն a և b տառերով, իսկ բարձրությունը՝ h-ով։

Ապացուցեք, որ սեղանի մակերեսն արտահայտվում է հիմքերի գումարի և բարձրության արտադրյալի կիսով՝

$$S = \frac{(a+b) \cdot h}{2}.$$

Վարժություններ.—1. Սեղանի մակերեսը 102 դմ է, բարձրությունը 7,5 սմ և հիմքերից մեկը 15,4 սմ։ Վորոշեք մյուս հիմքը։

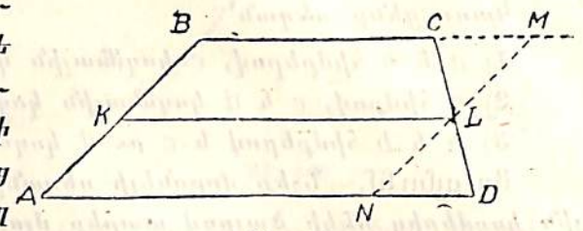
2. Հավասարասրուն սեղանի մակերեսը հավասար է 5312,5 դմ, բարձրությունը 62,5 մ, իսկ կողմնային կողմի առաջադրությունը հիմքի վրա 35 մ. վորոշեք հիմքերը։

3. Յերկաթաթերթից, որի 1 դմ կշռում է 0,5 գ, կտրված է 600 գ ծանրություն ունեցող հավասարասրուն սեղան։ Այդ սեղանի բարձրությունը 24 սմ է իսկ հիմքերի հարաբերությունը՝ 1,5։ Վորոշեք հիմքերը։

Սեղանի կողմնային կողմից մեկը կիսենք (գծ. 113), որինակ՝ AB կողմը, և նրա K միջնակետից տանենք հիմքերին զուգահեռ KL ուղիղը։ Անցկացնելով այդ գծի և մյուս կողմնային կողմի հատման կետով մի ուղիղ, որը լինի զուգահեռ առաջին կողմնային կող-

մին, և շարունակելով փոքր հիմքը՝ կստանանք LCM և LDN յերկու յեռանկյունները։ Ոգտվելով AKLN և KBML զուգահեռակողմերով, ապացուցեք, վոր LM=LN և վոր ցույց տված յեռանկյունները հավասար են (հավասարության վոր հատկանիշով)։

Յեռանկյունների հավասարությունից հետևում է LC-ի և LD-ի հավասարությունը, այսինքն՝ սեղանի յերկու կողմնային կողմերից մեկի միջնակետով անցնող գծով կիավում է և մյուս կողմը։ Ընդհակառակը, սեղանի կողմնային կողմերը կիսող գիծը հիմքերին զուգահեռ է։ Այդ գիծը կոչվում է սեղանի միջին գիծ։



Գծ. 113

KL-ը և BM-ը KBML զուգահեռակողմի հակադիր կողմերն են, հետևաբար՝

$$KL=BM,$$

վորից հետևում է, վոր KL-ը BC հիմքից CM-ով ավելի յե։

KL և AN-ը AKLN զուգահեռակողմի հակադիր կողմերն են. հետևաբար՝

$$KL=AN,$$

վորից հետևում է, վոր KL-ը AD հիմքից ND-ով փոքր է։

Սակայն CM և ND-ն հավասար են, վորպես հավասար յեռանկյունների համապատասխան կողմեր։ Այդ պատճառով սեղանի միջին գիծը փոքր հիմքից մեծ է այնքանով, վորքանով փոքր է մեծ հիմքից, այսինքն՝ սեղանի միջին գիծը հավասար է հիմքերի գումարի կիսին (միջին թվաբանականին)։

Նշանակելով միջին գիծը m-ով, ստանում ենք՝

$$m=\frac{a+b}{2}.$$

Ուստի, սեղանի մակերեսի բանաձևը կարող է արտահայտվել այսպես՝

$$S=m\cdot h.$$

Սեղանի մակերեսն արտահայտվում է միջին գծի և բարձրության արտադրյալով։ Հետևաբար սեղանը հավասարամեծ է մի ուղղանկյան, վորն ունի նույն բարձրությունը, իսկ հիմքը հավասար է միջին գծին։

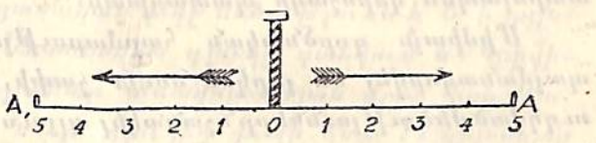
Ցույց տվեք այդ ձևերի հավասարամեծությունը, հիմքերի վրա միջին գծի ծայրերից ուղղահայաց իջեցնելով և համեմատելով հատումից առաջացած ձևերը։

ԳԼՈՒԽ IV.

ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐ.

§ 29. ՍԿԶԲՆԱԿԱՆ ՀԱՍԿԱՑՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

Գործնական զանազան հարցեր լուծելիս՝ մենք կանգ ենք առնում յերկու տեսակ պատասխանի հնարավորության առջև, վորոնցից յուրաքանչյուրն էլ ճիշտ է, սակայն վոչ լրիվ։ Որինակ, ձեզ առաջարկում են ճանապարհի վրա 5 մետր տարածություն չափել, սկսած կիլոմետրասյունից (գծ 114)։ Դուք կարող եք, չափաշղթան ձեռքներիդ դնալ սյունից դեպի այ և շղթայի ոգնությամբ 5 մետր տարածություն չափելով՝ ծայրին խփել A յիցը։ Սակայն վոչինչ չի խանգարում ձեզ դնալ դեպի հակառակ կողմը, այսինքն՝ սյունից դեպի ձախ, և նույն ձևով 5 մետր տարածություն չափելով՝ ծայրին խփել A_1 յիցը։ Ձեզ առաջարկված խնդիրը լրիվ չեր, այն է՝ աչքաթող եր արված մի պայման, վորից կախված է կատարյալ և վորոշակի պատասխանը։ Ձեզ պետք է ասելին, թե ի՞նչ ուղղությամբ պետք է չափել 5 մետր տարածությունը՝ ա՞յ, թե՞ ձախ։



Գծ. 114

Վերցնենք մի որինակ ևս։ Առավոտյան ժամը 8-ին ջերմաչափը ցույց է տվել 0°։ Յերեկվա ժամի 12-ին ջերմությունը փոփոխվել է 4 աստիճանով։ Հարց է ծագում, թե ի՞նչ ջերմություն եր այդ։ Պատասխանը նորից կարող է լինել յերկու տեսակի, քանի վոր ճիշտ կլինի և նա, վորն ասեր, թե կեսորին 4° տաք եր, ճիշտ կլինի և մի ուրիշը, վորը պնդեր, թե այդ ժամին 4° սառնամանիք եր։ Պատասխանի անորոշությունը կախված է հարցի վոչ լրիվ լինելուց։ Ձեզ պետք է ցույց տալին՝ բարձրացե՞լ է ջերմաստիճանը, թե՞ իջել, այսինքն՝ ջերմաչափի անդիկի սյունը բարձրացել է, թե ընկել։ հետևաբար այդ դեպքում պետք է հաշվի առնվի ուղղությունը։

Դարձյալ մի օրինակ։ Մեկ մետր կտորի գործարանային գինն է 78 կոպ.։ Շուկայի գինն այդ գնից տարբերվում է 6 կոպեկով։ Ի՞նչ արժե այդ կտորի մետրը։ Շուկայի գինն ինքնարժեքից կարող է լինել ցածր կամ բարձր. հեռևապես կտորի մեկ մետրը կարող է արժենալ և՛ 78 կոպ.+6 կոպ.=84 կոպ.,

և՛ 78 կոպ.—6 կոպ.=72 կոպ.։

Այդ խնդրի վորոշակի լուծման համար պետք եր ցույց տալ, թե այդ կտորն ինքնարժեքից 6 կոպ. թանդ է ծախվում, թե՞ էժան։

Այս բոլոր դեպքերում էլ լուծման վորոշ լինելը վոչ միայն թվական տվյալների մեծությունից է կախված, այլ և հաշվառման պայմանականությունից, վորը (հաշվառումը) յերկու հակադիր ուղղություններով էլ հավասարապես թույլատրելի չե։ Ուստի, յերբ խոսք է ծագում այնպիսի մեծությունների մասին, վորոնց հաշվառումը կարելի չե յերկու կերպ կատարել (աջ և ձախ, վերև և ներքև, առաջ և յետ, ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ և նրան հակառակ), անհրաժեշտ է խնդրի մեջ միաժամանակ ցույց տալ մեծության թե՛ չափը յեվ թե՛ ուղղությունը, վորով և խնդրի յերկու կերպ լուծելու հնարավորությունը վիրանում է և ստացվում է կատարելապես վորոշակի պատասխան։

Մի քանի գործնական հարմարություններ ունենալով՝ պայմանավորվել են յերկու նույն չափի, բայց հակառակ կողմեր ուղղված մեծություններընշանակել պլյուս (+) և մինուս (—) նշաններով. նշանները դրվում են տվյալ սկզբնակետից (վորը շատ հաճախ ընդունվում է զերոն) սկսվող հաշվառման հետևանքն արտահայտող թվի առջև։ Ընդունված է նշանն ու թիվը առնել փակագծի մեջ։

Այսպիսով, մեր բերած որինակներից առաջինում հաշվառման հետևանքները կարելի չե գրել այսպես՝

տարածություն $OA=(+5)$ մ,

» $OA_1=(-5)$ մ։

Կարելի չե գրել և հակառակը։ Բոլոր նման դեպքերում՝ այդ կատարելապես կախված է մեր ընտրությունից։ Սակայն, յեթե մենք պայմանավորվենք, վոր դեպի աջ կատարվող յուրաքանչյուր հաշվառումն արտահայտենք դրական նշանով, դրանով մենք սահմանած կլինենք, դեպի ձախ, այսինքն՝ հակառակ ուղղությամբ կատարվող յուրաքանչյուր հաշվառումն արտահայտել մինուս նշանով։

Որինակ՝ ջերմաչափի սանդղակների (շկալա) վրա ձյան հալման ջերմաստիճանը պայմանավորվել են ընդունել 0^0, և զրոյից բարձր ամեն մի ջերմաստիճանի դիմաց դնում են պլյուս նշան. և ընդհակառակը՝ զերոյից ցածր յեղած ջերմաստիճանները նշանակվում են

մինուս նշանով։ Ուստի մեր բերած չերկրորդ որինակում ջերմաստիճանը կլինի $+4^0$, այսինքն՝ չորս աստիճան տաք, կամ -4^0, այսինքն՝ չորս աստիճան սառնամանիք։ Յեվ չերրորդ որինակում ևս մենք շինում ենք պայմանական զերոյով, կամ մակարդակով, արհեստական սանդղակ, հաշվառման սկզբնակետ ընդունելով կտորի մետրի ինքնարժեքը։ Արժեքի այդ մակարդակի վրա +6 կոպ. ավելցուկը ցույց է տալիս, վոր կտորը վաճառվում է ինքնարժեքից բարձր, այսինքն՝ ոգուտով. —6 կոպ պակասը ցույց է տալիս, վոր կտորը վաճառվում է ինքնարժեքից ցածր գնով, այսինքն՝ վնասով։ Թվերն այդ կերպով, այսինքն՝ նշաններով զանազանելու գործնական հարմարություններն այն հետևանքն ունեցան, վոր հանրահաշվի մեջ պլյուսով նշանակված ամեն մի թիվ կոչվում է դրական, իսկ մինուսով նշանակված ամեն մի թիվ կոչվում է բացասական։ Թե մեկ և թե մյուս թվերը միասին ընդունված է անվանել հարաբերական թվեր, և թե այս և թե մյուս թվերի հաշիվը կատարվում է զերոյից այս կամ այն կողմը վորքան կամենանք հեռու։

Յեթե ուշադրություն դարձնենք վորևե թվի միայն մեծության և վոչ թե նշանի վրա, ապա այդ մեծությունը կկոչվի տվյալ թվի բացարձակ մեծություն։ Որինակ՝ (+4) դրական թվի բացարձակ մեծությունն է 4, (—5) բացասական թվի մեծությունն է 5 և այլն։

Վարժություններ.—1. Անտոնովկա գյուղը գտնվում է Կրիվչի գյուղից դեպի աջ 13 կիլոմետր հեռավորության վրա. իսկ Զլատոպոլյե գյուղը գտնվում է նույն գյուղից դեպի ձախ 11 կիլոմետր հեռավորության վրա։ Ինչպես կգրեք այդ տարածությունները, ոգտվելով հարաբերական թվերով։ Պատասխան (+13) կիլոմետր, (—11) կիլոմետր։

2. Հայտնի չե, վոր աշխարհագրական կետերի բարձրությունը չափվում է ծովի մակերևույթից։ Սարի բարձրությունը ծովի մակերևույթից 2255 մ բարձր է, իսկ հովիտի ամենացածր կետը ծովի մակերևույթից 18 մ ցածր։ Ինչպես գրել այդ։

3. Խորհանաեսության մեջ հաճարը ծախել են 18 ռուբլի ոգտով, իսկ կարտոֆիլը՝ 7 ռ. վնասով։ Գրեք այդ։

4. Կարմիր բանակում հասակի նորման համարվում է 1,6 մ. Զորակոչներին քննելու ժամանակ չորս քաղաքացու հասակի չափը գրի չե առնված այսպես՝

1) նորմայից ավելի չե 4,5 սմ,

2) նորմայից ավելի չե 3,0 սմ,

3) նորմայից պակաս է 0,8 սմ,

4) հասակը նորմալ է։

Ի՞նչպես գրել, ոգտվելով հարաբերական թվերից։

5. Մի ձեռնարկության մեջ յեղած ապրանքն ու դուքը գնահատում է 18342 ռուբլի. մի ուրիշ ձեռնարկության մեջ պարտքերը վճարելու համար աճուրդով ապրանքը ծախեցին և դարձյալ ճաց 3562 ռ. պարտք։ Գրեք յերկու ձեռնարկությունների դուքքային վիճակը։

6. Ի՞նչ իմաստով կարելի չե ասել, թե մի դեպք մյուսից տեղի չե ունեցել (−5) տարով շուտ, իսկ մի ուրիշ դեպք՝ (−7) տարով ուշ։

7. Ենթակացրեք մի ուղիղ գիծ։ Վերցրեք մեջտեղում հաշվառման կետը (գերոյով կետը) և ոգտվելով միավորների համար 1 սմ-անոց մասշտաբով՝ քաշեք ձեր ուղիղ գծի վրա կետեր, վորոնց հեռավորությունները հաշվառման կետից արտահայտվում են՝ (+0,5), (+2), (−1,5), (−3), (+3,5), (−4) թվերով։ Այդպիսի ուղիղը կոչվում է թվական առանցք։ Այդ առանցքն անսահմանորեն ձգվում է հաշվառման կետից դեպի յերկու կողմերը և հնարավորություն տալիս հարաբերական թվերը գծագրական ձևով պատկերացնելու։

8. Նորմալ պայմաններում շոգեկաթսայի (գծ. 115) ջուրը կանգնում է նրա յերկու յերրորդ մասի բարձրության վրա, իսկ մնկ յերրորդ մասը գրավում է գոլորշին։ Վորքան իջնում է ջրի մակերեվույթն, այնքան գոլորշին ավելանում է. ընդհակառակը, ջրի մակերևույթի բարձրանալը վկայում է, վոր շոգին պակսել է։ Ջրի մակերևույթը նորմալից 2 սմ բարձր է, 3 սմ նորմալից ցածր է։ Ի՞նչպես գրել այդ։

Գծ. 115

9. Մի ռազմական դպրոցում կուրսանտների նորմալ քանակը 200 մարդ եր։ 1922 թ. ընդունեցին նորմալից 14 մարդ ավելի, 1923 թ. նորմալից պակասում եր 8 մարդ, 1924 թ.՝ պակասում եր 10 մարդ, 1925 թ. նորմալից ավելի չեր 7 մարդ։ Գրեք այդ։

10. Հաստիկավոր հաճարի խոնավության ընդունելի նորմալ տոկոսը 13,5 է։ Մի դեպքում հաճարի խոնավությունը 1%-ով նորմալից ավելի չե, մյուս դեպքում $1\frac{1}{2}\%$-ով նորմալից պակաս։ Գրեք այդ։

11. Կրծքի նորմալ ծավալը հավասար է հասակի կիսին։ Ձափեք ձեր և ձեր ընկերների կրծքերը։ Ի՞նչպես կգրեք նորմալի դիմաց ավելին և պակասը։ Կազմեք աղյուսակ։

12. Աշխարհագրական յերկայնությունը հաշվում է առաջին ընդունած միջօրեականից դեպի արևելք և արևմուտք 0°-ից մինչև 180°։ Արևելյան յերկայնությունն ընդունված է նշանակել +-ով, իսկ արևմտյանը —-ով։ Իբրև առաջին միջօրեականներ ընդունվում են Ֆերրոյի, Գրինվիչի, Փարիզի և Պուլկովոի դիրքերին համապատասխան միջօրեականները։ Հաշված է միջօրեականների փոխադրման հետևյալ աղյուսակը՝

	Ֆերրո	Գրինվիչ	Փարիզ	Պուլկովո
Ֆերրո	—	+17°39′46″	+2°	+47°59′25″
Գրինվիչ . . .	−17°39′46″	—	+2°20′14″	+30°19′39″
Փարիզ . . .	−2°	−2°20′14″	—	+27°59′25″
Պուլկովո . .	−47°59′25″	−30°19′39″	−27°59′25″	—

Ուշադրություն դարձրեք այս աղյուսակին։ Ի՞նչու մյուս միջօրեականների յերկայնությունները Պուլկովոի նկատմամբ — նշանով են, իսկ Ֆերրոյի նկատմամբ՝ + նշանով։

Յերկայնություններն ըստ Գրինվիչի

Մոսկվայի համար +37°34′
Բերլինի » +13°23′
Նյու-Յորքի » −73°58′
Լիսաբոնի » −9°11′

Բացատրեցեք, ինչ են ցույց տալիս այս յերկայնությունների նշանները։

Ոգտագործեցեք աղյուսակը հարաբերական թվերի գումարման և հանման գործողությունների ժամանակ։

§ 30. ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐՈՎ։ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄ.

Հարաբերական թվերի նկատմամբ կարելի չե կատարել բոլոր գործողությունները այնպես, ինչպես թվաբանության մեջ՝ բացարձակ թվերի նկատմամբ։

Յերկու կամ մի քանի հարաբերական թիվ գումարել—այդ նշանակում է միացնել նրանց պլյուս նշանով։ Որինակ՝

$$(+5)+(-3).$$

$$(+4)+(-2)+(+3)+(-1)։$$

Ստացված գումարները տարբերվում են սովորական թվաբանական գումարից նրանով, վոր սրանց մեջ գումարելիներից մի քանիսը դրական են, մի քանիսը բացասական։

Լուծենք այսպիսի խնդիր։—Կեսորին չերմաչափը ցույց եր

տալիս 8° տաքությունն։ Ցերկու ժամվա ընթացքում անդիկը բարձրացավ 3°։ Ի՞նչի չե հավասար ջերմաստիճանը յերեկվա ժամը յերկուսին։ Պարզ ե, վոր այս խնդիրը լուծվում ե տարբական գումարումով.

$$(+8^\circ)+(+3^\circ)=(+11^\circ)։$$

Յեթե յերկու գումարելիները դրական են (յերկուսն ել հաշվում են զերոյից դեպի վերև, այսինքն՝ միևնույն ուղղությամբ), ապա նրանց գումարն ել կլինի դրական, վորը խնդրի հարցին տալիս ե հետևյալ պատասխանը. վորոնելի ջերմաստիճանը հավասար ե տաքության 11°-ի։ Յենթադրենք այժմ, վոր յերկու ժամվա ընթացքում անդիկը վոչ թե բարձրացել, այլ իջել ե 3 գիծ։ Ի՞նչի չե հավասար վերջնական ջերմաստիճանը։ Մինչև կեսոր ջերմաչափի անդիկը շարժվելով ցածից վեր (գծ. 116), այսինքն՝ բարձրանալով զերոյից հասավ 8-րդ գծին $(+8^\circ)$. յերկու ժամվա ընթացքում նա իջավ 3 գիծ, այսինքն՝ շարժվում եր հակառակ ուղղությամբ (վերից ցած). ուրեմն այս հաշիվը պետք ե արտահայտել միևնույն նշանով (-3°)։ Հաշիվների գումարը հավասար ե՝

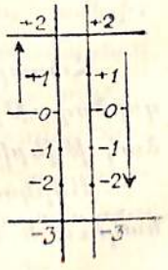
գծ. 116

$$(+8^\circ)+(-3^\circ),$$

վոր և արտահայտում ե վորոնելի ջերմաստիճանը անդիկը կիջնե 3 գիծ և հետևապես կանգ կառնե հինգերորդ գծի վրա, այսինքն՝

$$(+8^\circ)+(-3^\circ)=(+5^\circ)։$$

Գումարի համար մենք ստացանք դրական արդյունք։ Սակայն պարզ ե, վոր յերբ գումարելիներից մեկը դրական ե, իսկ մյուսը բացասական, գումարն ել կարող ե բացասական լինել։ Յենթադրենք ջերմաչափը (գծ. 117) կեսորին ցույց եր տալիս $(+2^\circ)$, իսկ յերեկոյան ժամը 8-ին ջերմաստիճանն իջավ 5°։ Ի՞նչի չե հավասար ջերմաստիճանը։ Յերկրորդ հաշիվը նախորդ որինակի պես պետք ե վերցնել միևնույն նշանով՝ (-5°), և գումարը կլինի՝



գծ. 117

$$(+2^\circ)+(-5^\circ)։$$

Սնդիկի այսօրը հինգ գիծ կիջնի, հետևապես կանգ կառնի յերրորդ գծի վրա՝ զերոյից ցածր, այսինքն՝

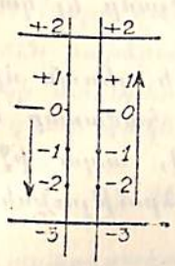
$$(+2^\circ)+(-5^\circ)=(-3^\circ)։$$

Ուրեմն, յերեկոյան ժամը 8-ին ջերմաչափը ցույց կտա 3° տաքություն։ Համեմատելով այս որինակը նախորդի հետ՝ դժվար չե համոզվել, վոր գումարի նշանը կախված ե գումարելիների բացարձակ մեծությունից։

Յեվ իրոք՝

$$1)\ (+8^\circ)+(-3^\circ)=(+5^\circ),$$
$$2)\ (+2^\circ)+(-5^\circ)=(-3^\circ)։$$

Առաջին դեպքում՝ դրական գումարելիի բացարձակ մեծությունն ե ավել, յերկրորդ դեպքում բացասական գումարելիի մեծությունը. հետևապես, յերբ գումարվում են տարբեր նշաններով յերկու հարաբերական թվեր, նրանց գումարը կունենա այն գումարելիի նշանը, վորի բացարձակ մեծությունը մեծ ե։



գծ. 118

Քննենք մի որինակ ևս։ Առավոտյան ժամը 8-ին ջերմաչափը ցույց եր ավել (գծ. 118) 3° ցուրտ, իսկ յերեկվա ժամը 3-ին ջերմաստիճանը բարձրացավ 5 աստիճան։ Վոքրքան ե ջերմաստիճանի փոփոխումը։ Առաջին գումարելին բացասական ե (-3°), յերկրորդը՝ դրական $(+5^\circ)$. հետևապես նրանց գումարը կլինի՝

$$(-3^\circ)+(+5^\circ)։$$

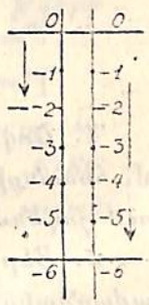
Սնդիկի այսօրը մինչ յերեկվա ժամը յերեքը զերոյից ցածր 3-րդ գծից բարձրացել և հինգ գիծ, այսինքն զտնվում և զերոյից բարձր յերկրորդ գծի վրա՝

$$(-3^\circ)+(+5^\circ)=(+2^\circ)։$$

Վերջապես քննենք այսպիսի դեպք։ Յերեկոյան ժամը 6-ին ջերմաչափը ցույց եր տալիս (գծ. 119) 2° ցուրտ, գիշերվա ժամը 12-ին յեղանակը գրաեց 4° ևս։ Վոքրքան ե ցույց տալիս ջերմաչափը։ Առաջին գումարելին բացասական ե (-2°), յերկրորդը նույնպես բացասական (-4°) (յերկու հաշիվներն ել կատարվել են մի ուղղությամբ)։ Հետևապես գումարն ել բացասական կլինի՝

$$(-2^\circ)+(-4^\circ)=(-6^\circ),$$

այսինքն՝ գիշերվա ժամը 12 ին ջերմաչափը ցույց կտա 6° զերոյից ցածր։



գծ. 119

Քննած որինակներից առաջինն ու վերջինը ցույց են տալիս, վոր միևնույն նշանով հարաբերական թվերի գումարը պահպանում է նրանց նշանը։ Դժվար չե համոզվել, վոր յերբ առաջին հաշիվն սկսում է զերոյից, ապա նրան կարելի ե չգրել՝

$$0^\circ+(+3^\circ)=(+3^\circ),$$
$$0^\circ+(-3^\circ)=(-3^\circ).$$

Յեթե ջերմաստիճանները նշանակենք ընդհանուր ձևով, այսինքն՝ տառերի ողնությամբ, ապա մեր քննած որինակները կդասավորվեն հետևյալ կերպով.

1) $(+a^0)+(+b^0)=+(a+b)^0$.

2) $(+a^0)+(-b^0)=+(a-b)^0$, եթե $a>b$

և $(+a^0)+(-b^0)=-(b-a)^0$, եթե $a<b$.

3) $(-a^0)+(+b^0)=+(b-a)^0$, եթե $a<b$.

և $(-a^0)+(+b^0)=-(a-b)^0$, եթե $a>b$.

4) $(-a^0)+(-b^0)=-(a+b)^0$։

Այս հավասարությունները մնում են ուժի մեջ այն բոլոր մեծությունների համար, որոնց հաշիվը չերկու ուղղությամբ էլ կարելի չէ կատարել։

Վարժություններ.– 1. Ճանապարհորդը գնում է լեռան մի կետում, որի բարձրությունը ծովի մակերևույթից հավասար է 1980 մ. նա բարձրանում է ևս 240 մ, հանգստանում, ապա իջնում 670 մ ու նորից հանգստանում։ Գտնել այն բարձրությունները, որտեղ հանգստացել է ճանապարհորդը։

Հայտնի չէ, որ ծանրաչափի* (բարոմետր) նորմալ ճնշումը որոշվում է սնդիկի 760 մմ բարձրության սյունով։ Յերկուշաբթի որը ծանրաչափը ցույց տվեց նորմալ ճնշում, չերեքշաբթի իջավ 4 մմ, չորեքշաբթի բարձրացավ 3 մմ, հինգշաբթի բարձրացավ 5 մմ, ուրբաթ իջավ 2 մմ, շաբաթ իջավ 3 մմ և կիրակի բարձրացավ 6 մմ։ Կազմեք այդ շաբաթվա ճնշումների աղյուսակը։

3. Ֆիզիկական փորձի սկզբում ջերմաստիճանը հավասար է 0^0։ Փորձի վերջում ջերմաստիճանը հավասար է T^0։ Գտեք պատասխան հետևյալ տվյալների համար.

$t^0=$	$+10^0$	$+12^0$	$+15^0$	-8^0	-8°	-1^0
$T^0=$	$+2^0$	-3^0	$+15^0$	$+4^0$	-3^0	$+1^0$

4. Շոգենավը նավամատույցից հոսանքի ընթացքով գնաց 18 կմ, հոսանքին հակառակ՝ 12 կմ։ Ի՞նչ տարածության վրա չէ գտնվում շոգենավը նավամատույցից։

5. Յերկրի մակերևույթից 4230 մ բարձրության վրա գտնվող սավառնակը սկզբում ցածրացավ 250 մ, ապա բարձրացավ 890 մ։ Ի՞նչ բարձրության վրա չէ գտնվում սավառնակը։

6. Գետում ջուրը բարձրացավ a մ, ապա իջավ b մ, վերջին հաշվով վճռքան բարձրացավ ջուրը։ Բացատրեք արդյունքը հետևյալ տվյալների համար.

1) $a=0,4$ մ $b=0,2$ մ 2) $a=0,5$ մ $b=0,6$ մ 3) $a=0,3$ մ $b=0,2$ մ 4) $a=0,4$ մ $b=0,1$ մ

* Ծանրաչափը մթնոլորտի ճնշումը չափող ֆիզիկական գործիք է, որը ցույց է տալիս թե չեզոնակի փոփոխությունները և թե որևէ տեղի բարձրությունը ծովի մակերևույթից։

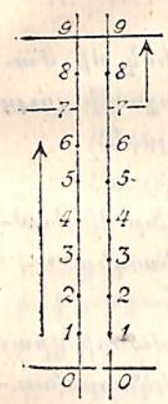
7. Ծանրություն բարձրացնող մեքենայի ոգնությամբ նավամատույցում գտնվող բեռը բարձրացրին ջրի մակերևույթից 5 մ, ապա իջեցրին նավի տրիումը* 7 մ խորության։ Ի՞նչ բարձրության վրա է գտնվում բեռը ծովի մակերևույթից։ Ի՞նչպես պետք է փոփոխել հարցը, որ ստացված պատասխանը նշան բավարարի։

8. Գնացքը կայարանից հեռացավ դեպի արևելք 16 կմ, ապա անցավ (—19) կմ։ Վերադեռ է գտնվում գնացքը։

9. Բարը գտնվում էր գետի 3 մ խորության հատակում։ Ծանրություն բարձրացնող մեքենայի ոգնությամբ նրան բարձրացրին հատակի մակերևույթից 5 մ։ Ի՞նչ բարձրության վրա չէ գտնվում բարը գետի մակերևույթից։

§ 31. ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՀԱՆՈՒՄ.

Հարաբերական թվեր հանելիս՝ նվազելին և հանելիի միջև դրվում է մինուս նշանը. սակայն այստեղ ևս հարկավոր է քննել մի քանի դեպքեր՝ որպեսզի պարզվի, ինչի չէ հավասար տարբերությունը։



Գծ. 120

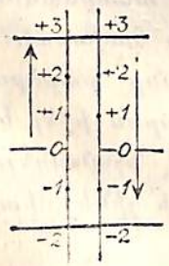
1) Յենթադրենք, չերեկվա ժամը 12-ին ջերմաչափը ցույց էր տալիս (գծ. 120) 9^0 տաքություն, իսկ չերեկոյան ժամը 6-ին՝ 7^0 տաքություն. վճռքան և ինչ է ջերմաստիճանը։ Պարզ է, որ

$$(+9^0)-(+7^0)=(+2^0)։$$

Այս դեպքը համապատասխանում է բացարձակ թվերի սովորական թվաբանական հանման՝

$$9^0-7^0=2^0։$$

2) Յերեկվա ժամը 12-ին ջերմաչափը ցույց էր տալիս (գծ. 121) $+3^0$, իսկ չերեկոյան ժամը 8-ին՝ -2^0. վճռքան և ինչ է ջերմաստիճանը։ Ջերմաչափի ցույց տված աստիճանների տարբերությունը դրվում է այսպես.

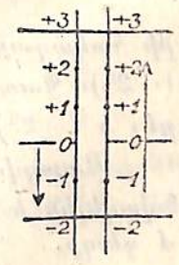


Գծ. 121

$$(+3^\circ)-(-2^0)։$$

Դժվար չէ համոզվել, որ չեթե սնդիկի սյունը չերեկոյան ժամը 8-ին գտնվում է չերկրորդ գծի վրա դերոյից ցածր, ապա նա իջել է 5 գիծ. հետևապես՝

$$(+3^0)-(-2^0)=(+5^0)։$$



Գծ. 122

3) Առավոտյան ժամը 7-ին ջերմաչափը ցույց էր տալիս (գծ.

* Նավի ստորին մասը, ուր գտնվում են բեռը, մթերքը և այլն։

122) -2^0, իսկ ցերեկվա ժամը 2-ին՝ $+3^0$։ Վիրքան և իջել ջերմասյանը։ Ջերմաչափի ցույց ված աստիճանների տարբերությունն այս է.

$$(-2^0)-(+3^0)։$$

Առավոտյան ժամը 7-ին սնդիկի սյունը գտնվում եր յերկրորդ գծի վրա՝ զերոյից ցածր, իսկ ցերեկվա ժամը 2-ին՝ յերրորդ գծի վրա՝ զերոյից բարձր, այսինքն՝ ջերմասյանը բարձրացել է 5 աստիճան, կամ, վորը միևնույն է, իջել է (խնդրում հարցն այդպես է դրված) (-5^0). հետևապես՝

$$(-2^0)-(+3^0)=(-5^0)։$$

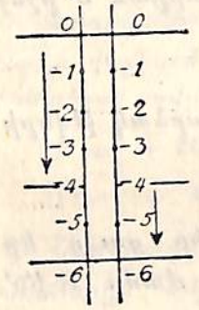
Յեթե մենք հարցնելինք, վիրքան և քարձրացել ջերմասյանը, այդ դեպքում ջերմաչափի յերկրորդ անգամ ցույց ված աստիճանից պետք է հանելինք առաջին անգամ ցույց ված աստիճանը, այսինքն՝

$$(+3^0)-(-2^0)=(+5^0),$$

վորը և կհամապատասխաներ նախորդ դեպքին, յերբ նվազելին դրական է, իսկ հանելին բացասական։

4) Ջերմաչափը ցույց եր տալիս (գծ. 123) -4^0, իսկ մի ժամից հետո՝ -6^0. վիրքան և իջել ջերմասյանը։ Ջերմաչափի ցույց ված աստիճանների տարբերությունն այս է.

$$(-4^0)-(-6^0)։$$



Գծ. 123

Դժվար չե համոզվել, վոր սնդիկի սյունը մի ժամվա ընթացքում իջել է յերկու գիծ. հետևապես՝

$$(-4^0)-(-6^0)=(+2^0)։$$

Ուշադրություն դարձրեք այն հանգամանքի վրա, վոր հանման արդյունքի այս կամ այն մեկնաբանությունը կախված է նրանից, Ձե ինչպես է դրված լինքը հարցը։ Յեթե մենք հարցնելինք, վիրքան և բարձրացել ջերմասյանը, ապա ասիլված կլինելինք վորոնել ջերմաչափի ցույց ված աստիճանների հակադարձ տարբերությունը՝ $(-6^0)-(-4^0)$, վորը հավասար է (-2^0)։ Պատասխանը մեզ ասում է, վոր ջերմասյանը բարձրացել է (-2^0), իսկ այդ նշանակում է, վոր նա փաստորեն իջել է։

Ստացված արդյունքները վերածենք պղպատակի՝ նշանակելով նվազելին և հանելին տառերով։ Պարզ է, վոր կարող է լինել միայն 4 դեպք.

1) $(+a^0)-(+b^0)=+(a-b)^0=-(b-a)^0$,
2) $(+a^0)-(-b^0)=+(a+b)^0$,
3) $(-a^0)-(+b^0)=-(a+b)^0$,
4) $(-a^0)-(-b^0)=-(a-b)^0=+(b-a)^0$։

Յերկրորդ և յերրորդ դեպքերը ցույց են տալիս, վոր յերբ նվազելին և հանելին տարբեր նշաններով են, ապա տարբերությունը միշտ ունի նվազելիի նշանը. որինակ՝

$$(+3)-(-7)=(+10).\qquad(-5)-(+6)=(-11)։$$

Առաջին և չորրորդ դեպքերում նվազելիի և հանելիի նշաններըը միևնույն են և տարբերության այս կամ այն նշանը կախված է նրա անդամների բացարձակ մեծությունից.—տարբերությունը դրական է, յերբ առաջին դեպքում նվազելին, իսկ չորրորդ դեպքում հանելին ունեն ամենամեծ բացարձակ մեծություն։ Ընդհակառակը, տարբերությունը բացասական է, յերբ առաջին դեպքում հանելին, իսկ չորրորդ դեպքում՝ նվազելին ունեն ամենամեծ բացարձակ մեծություն։ Որինակ՝

$$(+7)-(+5)=(+2)$$
$$(-5)-(-7)=(+2)$$
$$(+5)-(+7)=(-2)$$
$$(-7)-(-5)=(-2)։$$

Ամեն մի դրական թիվ մեծ է զերոյից՝ $(+a)>0$։

Ամեն մի բացասական թիվ փոքր է զերոյից՝ $(-a)<0$։

Առաջին հատատատումը պարզ է, յերկրորդը բացատրության կարիք ունի։ Հարցն այն է, վոր դրական թիվը, որինակ՝ $(+3)$-ը, ստացվում է լրիվ արդյունք՝ զերոյից ուղիղ հաշիվ կատարելիս. իսկ բացասական թիվը, որինակ՝ (-3)-ը՝ հակադարձ հաշիվ կատարելիս։ Հետևապես՝ զերո ստանալու համար պետք է (-3)-ին՝ ուղիղ հաշվելով՝ գումարել $(+3)$ դրական թիվը, այսինքն՝ $(-3)+(+3)=0$*։ Ուրիշ խոսքով, -3 թիվը զերոյից փոքր է յերեք միավորով։ Սրանից հետևում է, վոր յերկու բացասական թվերից մեծն այն է, վորի բացարձակ մեծությունը փոքր է։ Յեվ իսկապես վերցնենք յերկու բացասական թիվ՝ (-2) և (-4)։ Հիմնվելով ասածների վրա՝ կունենանք.

$$(-2)+(+2)=0$$

և

$$(-4)+(+4)=0,$$

այսինքն՝ զերո ստանալու համար (-4) թվին պետք է ավելացնել՝ ուղիղ հաշվելով՝ չորս միավոր, իսկ (-2) թվին՝ միայն յերկու միավոր. այդ պատճառով՝

$$(-2)>(-4)$$

և ընդհանրապես, յեթե $a>b$, ապա

$$(-a)<(-b)։$$

* Որինակ՝ յեթե մարմինն ունի (-3^0) ջերմաստիճան, նրան հարկավոր է տաքացնել $(+3^0)$, վոր նրա ջերմաստիճանը հասնի 0^0-ի։

Յերբ հաշիվն սկսում է զերոյից, վերջինս կարելի չէ չգրել, որինակ՝

$$0-(+3)=(-3),$$
$$0-(-3)=(+3):$$

Վարժություններ.—1. Շոգենավը նավամատույցից անցավ հոսանքի ընթացքով 18 կմ, ապա հոսանքին հակառակ՝ 24 կմ։ Քանի՞ կիլոմետր տարածություն վրա չէ գտնվում շոգենավը նավամատույցից՝ հաշվելով հոսանքով և հոսանքին հակառակ։

2. Առաջին տարվա ընթացքում ձեռնարկությունը վաստակել է a ռ., յերկրորդ տարվա ընթացքում՝ b ռ.։ Քանի՞ ռուբլով է զեբազանցում յերկրորդ տարվա վաստակն առաջին տարվա վաստակից։ Հարցի խնդասը բացատրել, յերբ

$$a=\left|\begin{array}{c|c|c|c} +400 & -200 & -100 & +500 \\ +300 & +400 & -200 & -300 \end{array}\right|$$

3. Ջրամբարում ջրի նորմալ մակերևույթը հավասար է H մ։ Ներկայումս նրա մեջ ջրի մակերևույթը հավասար է h մ. վորքա՞ն է բարձրացել ջրի մակերևույթը ջրամբարում։ Հարցի խնդասը բացատրել, յերբ

$$H=\left|\begin{array}{c|c} 2 \text{ մ} & 1{,}5 \text{ մ} \\ 2{,}3 \text{ մ} & 1{,}3 \text{ մ} \end{array}\right|$$

4. Յողի մի լուծույթի թնդությունը սպիրտի մեջ ունի $a\%$, մյուսը՝ $b\%$։ Վորքա՞ն թոնդ է յերկրորդ լուծույթն առաջինից։ Բացատրել հարցի խնդասը, յերբ $a=12\%$, $b=10\%$։

5. Հունիս ամսվա ընթացքում Սև ծովի մեջ ջերմաստիճանը 16,4° է, ամենամեծը՝ 23°, ամենափոքրը՝ 12,3°։ Ի՞նչպես նշանակել այս ջերմաստիճանների շեղումները մեջինից։

6. Հրաձգության մրցանակ ստանալու համար հարկավոր է նշանին դիպնել 25 անգամ։ Մի հրաձիգ նշանին դիպավ 22 անգամ, մյուսը՝ 27։ Ի՞նչ թվանշաններով կարելի չէ գնահատել նրանց հրաձգության հաջողությունը։

7. Կատարեք հետևյալ հաշվումները.

$(+13)-(+17)$	$(+15)-(-31)$
$(-21)-(+6)$	$(-19)-(-8)$
$(+1{,}5)-(+0{,}8)$	$(+2{,}4)-(-1{,}7)$
$(-6{,}2)-(5{,}9)$	$(-8{,}1)-(-3{,}6)$։

8. Աշխարհագրական A կետը ծովի մակերևույթից գտնվում է H մ բարձրության վրա, իսկ B կետը՝ h մ բարձրության վրա։

Վիթքան է A կետը բարձր B կետից։ Բացատրեք հարցի խնդասը, յերբ

$$H=\left|\begin{array}{c|c} 315 \text{ մ} & 654 \text{ մ} \\ 288 \text{ մ} & 793 \text{ մ} \end{array}\right|$$

§ 32. ՀԱԿԱԲԵՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ՅԵՎ ՀԱՆՄԱՆ ՊԱՐԶ ՁԵՎԵՐ.

Մի շարք որինակներում մենք տեսանք, վոր հարաբերական թվեր գումարելիս և հանելիս՝ գումարը կամ տարբերությունը մի դեպքում դրական է, մյուս դեպքում՝ բացասական։ Գործնականում այդ հաշվումներն ավելի պարզ ձև են ստանում, յերբ գործողության նշանը և ավելացվող կամ հանվող հարաբերական թվի նշանը փոխարինվում է մեկ նշանով։ Դրա համար ղեկավարվում են ընդհանուր կանոնով, վորը միանգամայն համապատասխանում է ստացվող արդյունքներին։ Այդ կանոնը կայանում է նրանում, վոր տարբեր նշանների (+, −) կամ (−, +) համակցումը (комбинация) միշտ փոխարինվում է մինուս նշանով, իսկ միատեսակ նշանների (+, +) և (−, −) համակցումը՝ պլյուս նշանով։ Որինակ՝

$$(+5)+(+3)=(+5)+3=+8:$$

Դրական թվերն իսկապես վոր «թվեր» են, այդ բուն թվաբանական իմաստով։ Այդ պատճառով գործողությունների ժամանակ դրական թվի պլյուս նշանը չեն գնում և նախորդ հավասարությունն ստանում է հետևյալ ավելի պարզ ձևը՝

1) $(+5)+(+3)=5+3=8$։

Նույնպես և

2) $(+5)-(+3)=5-3=2$
3) $(+5)+(-3)=5-3=2$
4) $(-5)+(-3)=-5-3=-8$
5) $(+5)-(-3)=5+3=8$
6) $(-5)+(+3=-5+3=-2$
7) $(-5)-(+3)=-5-3=-8$
8) $(-5)-(-3)=-5+3=-2$։

Թվաբանության մեջ մենք կանենայինք միայն յերկու դեպք.

$$5+3=8$$
$$5-3=2,$$

բայց հարաբերական թվերով գործողությունների ժամանակ 8 թիվը ստացվում է իբրև գումար՝

$$(+5)+(+3)\ (1 \text{ դեպք}),$$

և իբրև տարբերություն՝

$(+5)-(-3)$ (5-րդ դեպք)։

2 թիվը եւ ստացվում է իբրեւ գումար՝

$(+5)+(-3)$ (3-րդ »),

և իբրեւ տարբերություն՝

$(+5)-(+3)$ (2-րդ դեպք)։

Բայի գրանից (-8) բացասական թիվը կարող է ստացվել յերկու անգամ. իբրեւ գումար՝

$(-5)+(-3)$ (4-րդ դեպք),

և իբրեւ տարբերություն՝

$(-5)-(+3)$ (7-րդ »)։

Վերջապես (2) բացասական թիվը նույնպես ստացվում է յերկու անգամ. իբրեւ գումար՝

$(-5)+(+3)$ (6-րդ դեպք),

և իբրեւ տարբերություն՝

$(-5)-(-3)$ (8-րդ »)։

Ասածներից հետևում է, որ $a-(+b)$ տարբերությունը կարելի է ընդունել իբրեւ $a+(-b)$ գումար, որի յերկրորդ գումարելին բացասական է։ Այդ պատճառով, յերբ հարկավոր է գտնել մի քանի գործողությունների արդյունքը, որինակ՝

$(+5)-(+3)+(-6)+(+4)-(-1)$,

կարելի է գրել՝

$(+5)+(-3)+(-6)+(+4)+(+1)$,

այսինքն՝ ամբողջ արտահայտությանը գումարի ձև տալ, որտեղ գումարելիների մի մասը դրական են, մյուս մասը՝ բացասական։ Նման գումարը կոչվում է «հանրահաշվական» և տարբերվում է «թվաբանական» գումարից նրանով, որ վերջինիս բոլոր գումարելիները միշտ դրական են։ Արդյունքը գտնելու համար հարկավոր է հաշվել բոլոր դրական գումարելիների գումարը և բոլոր բացասական գումարելիների գումարը, ապա վերցնելով այդ գումարների բացարձակ տարբերությունը՝ գրել նրան այդ գումարներից մեծի նշանով։ Որինակ՝ վերևի գումարում՝

$$(+5)+(+4)+(+1)=5+4+1=10,$$
$$(-3)+(-6)=-9,$$

Դրական մեծությունների թիվը հավասար է 10-ի, բացասական մեծությունների թիվը՝ 9-ի. այդ պատճառով վերջնական գումարը կլինի՝

$$10+(-9)=10-9=1։$$

Մի որինակ ևս վերցնենք՝

$$(+7)-(+11)+(+13)-(-8)+(-7)+(-14).$$

հանրահաշվական գումարը կլինի՝

$(+7)+(-11)+(+13)+(+8)+(-6)+(-14.$

դրական գումարելիների գումարը՝

$$(+7)+(+13)+(+8)=7+13+8=28.$$

բացասական գումարելիների գումարը՝

$$(-11)+(-6)+(-14)=-11-6-14=-31.$$

այդ պատճառով արդյունքը կլինի՝

$$28-31=-3։$$

Վարժություններ.—1. Պարզ ձև տալ՝

$(+17)-(-11)$, $(+13)+(-15)$,
$(-7)+(+12)$, $(+8)-(+6)$։

2. Հաշվել՝ $(+4)+(-7)-(-9)-(+3)+(-12)-(+14)$։

3. Պարզ ձև տալ՝ $(+a)-(+b)-(-c)$,
$(-a)+(-b)-(+c)-(-d)$։

4. Գտնել $a+b+c+d$ գումարի նշանակությունը, յերբ

$a=$	$(+1)$	(-7)	$(-1,5)$	$(+4$
$b=$	(-3)	$(+8)$	$(-2,4)$	$(-8$
$c=$	(-5)	$(+6)$	$(+3,2)$	$(+6$
$d=$	$(+4)$	(-1)	$(-0,6)$	$(-2$

5. Տնտեսության մեջ կարևոր նշանակություն ունի որևէ ընթացքում ըստ հաշվի պիտի ստանար հետևյալ կերը. 1,8 կգ կտավատի քունջ, 6,8 կգ կարտոֆիլ, 3,75 կգ չոր առվույտ և 5 կգ գարնանացանի ծղոտ։ Պահեստում գտնված կերի քանակը թույլ է տալիս 1,6 կգ քունջ տալ, 7 կգ կարտոֆիլ, 4 կգ չոր առվույտ և 4,6 կգ ծղոտ։

Վորոշել յուրաքանչյուր տեսակ կերի շեղումը նորմայից և հաշվել շեղումների գումարը։

6. Բանվորի միջին վաստակի նորման մի ամսում հավասար է 60 ռուբլու։ Ծախսերի միջին նորման.

Բնակարան և կոմունալ ծառայություններ	8 ռ.
Սնունդ	30 »
Շոր, կոշիկ	10 »
Կուլտուրական պահանջներ . . .	5 »
Այլ ծախսեր	7 »

Բանվորն ստանում է ամիսը 54 ռ ու փաստորեն ծախսում.

Բնակարանի և կոմունալ ծառայությունն.	11 ռ.
Սննդի	26 »
Շորի և կոշիկի	12 »
Կուլտուրական պահանջների . .	2 »
Այլ ծախսեր	3 »

Վորոշեք շեղումները նորմայից և նրանց գումարը։

Լուծում. – Շեղումները ըստ կետերի բաշխվում են այսպես՝

$$(+3),\ (-4),\ (+2),\ (-3),\ (-4).$$

հետևապես նրանց գումարն է՝

$$(+3)+(-4)+(+2)+(-3)+(-4).$$

դրական շեղումների գումարը՝

$$(+3)+(+2)=3+2=5.$$

բացասական շեղումների գումարը՝

$$(-4)+(-3)+(-4)=-4-3-4=-11:$$

Ընդհանուր գումարը՝

$$5-11=-6:$$

Պարզ է, որ ստացված գումարը հավասար է ռոճկի և նորմալի տարբերությանը՝

$$54-60=-6:$$

Հարցրեք ձեր հորը, վորքան է նա ստանում և վորը պիտի լինի նրա ծախսերի նորման ըստ իր բյուջեյի: Հաշվեք և ստացած արդյունքները դրեք աղյուսակի ձևով:

Ծանոթություն.—Քննելով յերկու դրական թվերի թվաբանական հանումը, որինակ՝ $(+8)-(+10)$, վորը, ինչպես մեզ հայտնի յե, տալիս է բացասական տարբերություն (-2)՝ մենք կարող ենք ասել, վոր հարաբերական թվերի դործածությունն ընդհանրացնում է հանման գործողությունը և այն դեպքում, յերբ հանելին մեծ է նվազելիից:

Թվաբանության մեջ նման հանման դեպքերն անհնարին են համարվում, վորովհետև թվաբանական տարբերությունը միշտ պետք է դրական լինի:

Հանրահաշիվը պայմանականորեն տարբերում է թվերն ըստ իրենց նշանների: Դրա համար տարբերությունը բացասական թիվ է ամեն անգամ, յերբ փորր թվից հանում ենք մեծ թիվ: Բացասական թվերի գաղափարը պատմականորեն հենց այդպես էլ ծագել է: Սակայն սկզբներում փոքր թվից մեծ թիվ հանելու դեպքերը, իբրև անհնարին, դուրս էին ձգվում խնդիրներից, մինչև վոր կենդանի որինակների վրա համոզվեցին, վոր բացասական թվերի հասկացողությունը դործնականում ոգտակար է և շատ հարմար՝ հաշիվներ կատարելու այն մեծություններով, վորոնք ընդունակ են փոխվել իրենց թվական նշանակությունները յերկու հակադիր ուղղությամբ:

§ 33. ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄ.

Քննենք մեքանի որինակ:

1. Ֆիզիկական փորձ կատարելիս՝ ջերմաստիճանը յերեք ժամվա ընթացքում հավասարաչափ կերպով բարձրանում եր յուրաքանչյուր ժամը 4^0: Վորքան նա բարձրացավ յերեք ժամվա ընթացքում:

Այս խնդիրն ըստ էության թվաբանական է ու ոգտագործելով հարաբերական թվերը՝ կարող ե գրվել այսպես.

$$(+4^0)\cdot(+3^0)=(+12^0):$$

2. Ջերմաչափը կանգնած է զերոյի վրա: Յուրաքանչյուր ժամ ջերմաստիճանը բարձրանում եր 3^0: Ինչ եր ցույց տալիս ջերմաչափը 4 ժամ առաջ: Պարզ է, վոր մի ժամ առաջ ջերմաչափը ցույց եր տալըս (-3°), յերկու ժամ առաջ՝ (-6^0), յերեք ժամ առաջ՝ (-9^0) և չորս ժամ առաջ՝ (-12^0). հետևապես՝

$$(+3^0)\cdot(-4^0)=(-12^0)$$

այսպես գրանցումը արդարացվում է նրանով, վոր ջերմաստիճանի հաշիվն ուղիղ է, իսկ ժամանակի հաշիվը՝ հակադարձ:

3. Ջերմաստիճանը յուրաքանչյուր ժամ իջնում է 3^0, վորքան նա կիջնի չորս ժամից հետո: Ջերմաստիճանի հաշիվը հակադարձ է, իսկ ժամանակինը՝ ուղիղ. հետևապես՝

$$(-3^0)\cdot(+4^0)=-12^0:$$

4, Ջերմաչափը կանգնած է զերոյի վրա: Յուրաքանչյուր ժամվա ընթացքում ջերմաստիճանն իջնում եր 3^0: Ինչի յեր հավասար ջերմաստիճանը չորս ժամ առաջ: Այս դեպքում ջերմաստիճանի և ժամանակի հաշիվները հակադարձ են. հետևապես՝

$$(-3^0)\cdot(-4^0).$$

բայց մի ժամ առաջ ջերմաստիճանն իջել է 3^0, յերկու ժամ առաջ՝ 6^0, յերեք ժամ առաջ՝ 9^0 և չորս ժամ առաջ՝ 12^0: Քանի վոր ջերմաստիճանը ներկայումս կանգնած է զերոյի վրա, ապա ուրեմն չորս ժամ առաջ նա ցույց եր տալիս $+12^0$. հետևապես՝

$$(-3^0)\cdot(-4^0)=(+12^0):$$

Համեմատելով ստացված արդյունքները՝ տեսնում ենք, վոր արտադրյալը դրական է, յերբ յերկու բազմապատկիչները միևնույն նշանով են՝

$$(+4)\cdot(+3)=(+12),$$
$$(-3)\cdot(-4)=(+12):$$

Արտադրյալը յերկու դեպքում բացասական է, յերբ բազմապատկիչները տարբեր նշանով են՝

$$(+3)\cdot(-4)=(-12),$$
$$(-3)\cdot(+4)=(-12):$$

Քանի վոր արտադրյալի նշանը կախված է միմիայն բազմապատկիչների նշաններից, ապա միանգամայն անկախ բազմապատ-

կիշնելի բացարձակ մեծությունից կարելի է գրել՝ նշանակելով թվերը առաջով.

$$(+a)\cdot(+b)=+ab,$$
$$(-a)\cdot(-b)=+ab,$$
$$(+a)\cdot(-b)=-ab,$$
$$(-a)\cdot(+b)=-ab:$$

Այդպիսով առացվում է նշանների հետևյալ գործնական կանոնը. յերե բազմապատկիչների նշանները միատեսակ են, ապա արտադրյալը դրական է, յերե բազմապատկիչների նշանները տարբեր են. ապա արտադրյալը բացասական է: Որինակ՝

$$(+6)\cdot(+10)=+60,$$
$$(-7)\cdot(-8)=+56,$$
$$(+13)\cdot(-4)=-52,$$
$$(-17)\cdot(+3)=-51:$$

Խնդիրները լուծելիս ուշադրություն պիտի դարձնել միմիայն հաշվի կարգի վրա: Յերե յերկու բազմապատկիչների նշանակությունը հաշվվում է միմիայն ուղիղ կամ միմիայն հակադարձ ուղղությամբ, ապա արտադրյալը միշտ դրական է. իսկ յերե մի բազմապատկի հաշիվն ուղիղ է, մյուսինը՝ հակադարձ, ապա արտադրյալը միշտ բացասական է: Յուրաքանչյուր հարաբերական թվի և զերոյի արտադրյալը հավասար է զերոյի՝

$$(+a)\cdot 0=0, \qquad (-a)\cdot 0=0:$$

Վարժություններ.— 1. $(+7)\cdot(-5)$, $(+6)\cdot(-8)$, $(-7)\cdot(+5)$, $(-9)\cdot(+4)$, $(-1)\cdot(-8)$:

2. Գտնել արտադրյալները.

$$(-2)\cdot(+4)\cdot(-3$$
$$(-6)\cdot(-5)\cdot(-7)$$
$$(+3)\cdot(-10)\cdot(-2)\cdot(+4):$$

3. Գտնել արտադրյալները.

$$(+a)\cdot(-b)\cdot(+c)$$
$$(-a)\cdot(+b)\cdot(-c)$$
$$(+a)\cdot(-b)\cdot(-c)$$
$$(-a)\cdot(-b)\cdot(-c):$$

4. Գտնել abc-ի արտադրյալները, յերբ

$a=$	$+2$	-3	-4	$+5$
$b=$	-2	-4	-6	$+3$
$c=$	-3	$+5$	-2	-7

5. Յուրաքանչյուր ամիս ձեռնարկությունը ՛ի նաս է անում a ռ.: Ի՞նչպես գնահատել b ամսվա ՛ի նասը: Գտնել լուծումը, յերբ

$a=$	-210	-340	-520
$b=$	8	5	7

6. Բազաքում համաճարակից մեռնում են որվա ընթացքում միջին թվով a մարդ: Գտնել մահացողների թիվը b որվա ընթացքում: Վորոշել b որվա մահացողների թիվը, յերե

$a=$	-32	-29	-19
$b=$	5	7	12

7. Հիվանդը մի որվա ընթացքում միջին թվով կորցնում է իր քաշից 12 գ: Վիրքան եր ավել նրա քաշը մի շաբաթ առաջ: Վիրքան կլսակի նրա քաշը 5 որից հետո:

8. Առողջացող հիվանդը միջին թվով ավելանում է 100 գ ու իր նորմալին հասնում 6 ոից հետո: Ի՞նչպես կհշանակեք նորմալից պակաս քաշը:

9. Տված է արտադրյալը $(-2)\cdot(-3)\cdot(+4)\cdot(-5)\cdot(-6)$: Ի՞նչպես կփոխվի այն, յերե յուրաքանչյուր բազմապատկչին վերագրենք հակառակ նշան:

§ 34. ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԲԱԺԱՆՈՒՄ.

Քննենք միքանի որինակ:

1. Բեռնատար նավը 5 ժամում անցավ 15 կմ: Գտնել նրա շարժման արագությունը: Այս խնդիրը զուտ թվաբանական է և լուծվում է այսպես՝

$$(+15):(+5)=(+3),$$

այսինքն՝ բեռնատար նավի արագությունը հավասար է 3 կմ մի ժամում:

2. Սառչող մարմնի ջերմաստիճանը հինգ ժամվա ընթացքում հավասարաչափ իջավ 0^0-ից մինչև -15^0: Վիրքան է սառչում մարմինը մի ժամվա ընթացքում: Քանի վոր մարմինը հինգ ժամվա ընթացքում սառել է 15^0 ապա ուրեմն մի ժամվա ընթացքում նա սառել է 3^0: Գրում ենք՝

$$(-15^0):(+5^0)=(-3^0),$$

այդ ցույց է տալիս, վոր մարմնի ջերմաստիճանն իջնում է մի ժամում 3^0:

2. Ջերմաչափը ավյալ մոմենտում ցույց է տալիս 0^0. մյուս կողմից հայտնի չե, վոր յուրաքանչյուր ժամում ջերմաստիճանը

հավասարաչափ իջնում է 5^0։ Բանի ժամից հետո չի ջերմասփիճանը հասնում 15^0։ Առաջին ժամվա ընթացքում ջերմասփիճանը պետք է իջնի 5^0, երկրորդ ժամվա ընթացքում՝ 10^0, երրորդ ժամվա ընթացքում, 15^0, ներկայումս ջերմաչափը ցույց է տալիս 0^0. հետևապես 15^0 ջերմասփիճանը երեք ժամ առաջ է եղել։ Ժամանակի հաշիվը հակադարձ է և՝ համապատասխան այս լուծումին՝ գրում ենք.

$$(+15^0):(-5)=(-3^0)։$$

4. Բանի ամսվա ընթացքում է կուտակվել 15 ռ. պարտքը, եթե յուրաքանչյուր ամսվա պարտքը կազմում է 5 ռ.։ Պարտքը բացասական դրամագլուխ է, ու այդ պատճառով գրում ենք՝

$$(-15):(-5)=(+3),$$

այսինքն՝ տվյալ պարտքը կուտակվել է 3 ամսվա ընթացքում։

Համեմատելով բոլոր ստացված արդյունքները.

$$(+15):(+5)=(+3),$$
$$(-15):(+5)=(-3),$$
$$(+15):(-5)=(-3),$$
$$(-15):(-5)=(+3),$$

մենք տեսնում ենք, որ բանորդը դրական է, երբ բաժանելիի և բաժանարարի նշանները միատեսակ են ու բացասական՝ երբ բաժանելիի ու բաժանարարի նշանները տարբեր են, այսինքն՝ նշանների կանոնը բաժանման համար նույնն է, ինչ և բազմապատկման։ Սա միանգամայն հասկանալի է, որովհետև բաժանումը բազմապատկման հակադարձ գործողությունն է։ Եվ իսկապես, եթե, օրինակ, $(+15):(-5)=(-3)$, ապա բաժանարարի և քանորդի արտադրյալը հավասար է բաժանելիին $(-5)\cdot(-3)=(+15)$, իսկ մենք տեսանք, որ բազմապատկումն այդպիսի արդյունք էլ հենց տալիս է։ Նշանակելով թվերն ընդհանուր ձևով, այսինքն՝ տառերով, այս կանոնը կարող ենք արտահայտել հետևյալ կերպով.

$$\frac{+a}{+b}=+\left(\frac{a}{b}\right),$$
$$\frac{+a}{-b}=-\left(\frac{a}{b}\right),$$
$$\frac{-a}{+b}=-\left(\frac{a}{b}\right),$$
$$\frac{-a}{-b}=+\left(\frac{a}{b}\right),$$

այսինքն՝ երկու թիվ բաժանելիս՝ բաժանելիի և բաժանարարի բացարձակ նշանակությունների քանորդը վրվում է + նշանով, երբ

քանորդի երկու անդամը պլյուսով են, կամ երկուսն էլ մինուսով, ու գրվում — նշանով, երբ քանորդի մի անդամը պլյուսով է, իսկ մյուսը մինուսով։

Վարժություններ.—1. Բաժանել՝

$$(+12):(+4),\quad (+16):(-8),\quad (+18):(-6),$$
$$(\ \ 25):(-5),\quad (-24):(\ -8)։$$

2. Գտնել $\frac{a}{b}$-ի քանորդը, երբ

$a=$	$+3$	-5	-6	$+14$	-36	
$b=$	$+8$	$+7$	$+3$	$-\ 7$	$-\ 9$	

3. $\left(+\frac{3}{4}\right):\left(-\frac{5}{6}\right)$, $\left(-\frac{3}{5}\right):\left(+\frac{10}{7}\right)$, $\left(-\frac{4}{9}\right):\left(-\frac{6}{7}\right)$։

§ 35. ԳՈՂԱՓԱՐ ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԱՍՏԻՃԱՆ ԲԱՐՁՐԱՑՆԵԼՈՒ ՄԱՍԻՆ.

Հաջորդաբար աստիճան բարձրացնենք $(+2)$ դրական թիվը.

$$(+2)^1=2$$
$$(+2)^2=(+2)\ (+2)=4$$
$$(+2)^3=(+2)\ (+2)\ (+2)=(+4)\ (+2)=8$$
$$(+2)^4=(+2)\ (+2)\ (+2)\ (+2)=(+8)\ (+2)=16$$
$$(+2)^5=(+2)\ (+2)\ (+2)\ (+2)\ (+2)=(+16)\ (+2)=32 \text{ և այլն։}$$

Հիմքի համար լինչ դրական թիվ էլ վերցնենք, աստիճանը միշտ էլ դրական է լինելու, որովհետև գործողությունը կատարվում է թվաբանական իմաստով։

Կազմենք հիմա (-2) բացասական թվի հաջորդական աստիճանները.

$$(-2)^1=-2$$
$$(-2)^2=(-2)\ (-2)=+4$$
$$(-2)^3=(-2)\ (-2)\ (-2)=(+4)\ (-2)=-8$$
$$(-2)^4=(-2)\ (-2)\ (-2)\ (-2)=(-8)\ (-2)=+16$$
$$(-2)^5=(-2)\ (-2)\ (-2)\ (-2)\ (-2)=(+16)\ (-2)=-32 \text{ և այլն։}$$

Ստացված աղյուսակից երևում է, որ երբ հիմքը բացասական է՝ արդյունքի նշանը կախված է աստիճանացույցից. եթե աստիճանացույցը զույգ թիվ է (2, 4, 6...), արդյունքը միշտ դրական է, իսկ եթե աստիճանացույցը կենս է՝ արդյունքը միշտ բացասական է։ Ստացած արդյունքները կարելի է ներկայացնել տառերով.

$$(+a)^2=+a^2=a^2 \qquad (-a)^2=+a^2=a^2$$
$$(+a)^3=+a^3=a^3 \qquad (-a)^3=-a^3$$
$$(+a)^4=+a^4=a^4 \qquad (-a)^4=+a^4=a^4$$

$(+a)^5=+a^5=a^5$ և այլն. $(-a)^5=-a^5$ և այլն:

Վարժություններ.—Հաշվել.

$(+3)^4$, $(-5)^3$, $(+2)^6$, $(-3)^4$, $(-6)^3$, $(-7)^2$,

$\left(+\frac{1}{4}\right)^3$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$, $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$, $\left(+\frac{1}{5}\right)^4$, $\left(-\frac{1}{6}\right)^3$,

$(+a)^8$, $(-a)^{10}$, $(-a)^{13}$, $(-a)^{16}$, $(-a)^{19}$:

§ 36. ՊԱՏՄԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԲԱՑԱՍԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԾԱԳՄԱՆ ՄԱՍԻՆ.

Հին հույները բոլորովին չեյին ոգտվում բացասական թվերով: Հանրահաշվի իսկական ստեղծողները, հնդիկները, առաջինն եյին, որ գաղափար կազմեցին հարաբերական թվերի մասին, և ընդունելով դրական թիվը իբրև «գույք», իսկ բացասականն իբրև «պարտք», մանրամասն ուսումնասիրեցին նրանց հատկությունները: Պատմականորեն բացասական թվերի հատկացողության հետ բաղխվել են հավասարումներ լուծելիս. սակայն նրանք յերկար ժամանակ չեյին ոգտագործվում, վորովհետև, ինչպես արտահայտվում է հնդիկ մաթեմատիկոս Բասկարա-Աչարիան (XII—XII դ.) «մարդիկ հավանություն չեն տալիս բացասական վերացական թվերին»: Դեռ XV դարի վերջում իտալացի գիտնական Լուկա Պաչիոլոն իր կազմած մաթեմատիկայի ձեռնարկում հավասարումներ լուծելիս՝ բոլորովին քննության չի առնում բացասական արմատները: Միայն իտալացի մաթեմատիկոս Ջերոնիմո Կարդանոն (1501—1576 թ. թ.) ընդունում է այդ արմատները, թեև անվանում նրանց «fictae», այսինքն՝ «կեղծ», ու տարբերում նրանց դրական արմատներից, վորոնց անվանում է «verae», այսինքն՝ «իրական»: Մինչև անգամ ֆրանսիացի հռչակավոր մաթեմատիկոս Դեկարտը (1596—1650 թ. թ.) դրական արմատներն անվանում է «իսկական» (vraies), իսկ բացասական արմատները՝ «սուտ» (fausses): Ալբեռs Ժիրարն առաջինն եր, վոր ավեյ հակադիր ուղղություն ուն ցոյց հարաբերական թվերի յերկրաչափական պատկերացումը (1629 թ.): Հոլանդացի մաթեմատիկոս Գուդդեն (1624—1704 թ. թ.) առաջինն եր, վոր նշանակեց միևնույն տառով թե դրական և թե բացասական քանակը, վերադրելով նշանը քանակ արտահայտող տառին:

Սկսած անգլիացի մեծ մաթեմատիկոս Նյուտոնի (1642—1727 թ. թ.) ժամանակաշրջանից՝ բացասական թվերի ուսմունքը գրավում է հատուկտուկ տեղ ու շվեյցարացի հռչակավոր մաթեմատիկոս

Եյլերը (1707—1783 թ. թ.) իր հանրահաշվի մեջ տալիս է այդ թվերի սիստեմատիկ տեսությունը:

Դպրոցական ավանդման պահանջները միայն վերջին տարիներս են մացրել ձեռնարկների մեջ հարաբերական թվերի իրական հիմավորումը՝ հայտաբերելու համար այն հարմարությունները, վորը տալիս է նրանց կիրառումը գործնական բնույթ կրող խնդիրներ լուծելու հարցում:

ԳԼՈՒԽ V.

ՄԻԱՆԴԱՄՆԵՐՈՎ ՅԵՎ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐՈՎ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳՈՒՄԸ. ՄԵԿԱՆՇԱՅՏ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄԸ.

§ 37. ՏԱՌԱՅԻՆ ՆՇՈՒՄՆԵՐ. ՄԻԱՆԴԱՄ ՅԵՎ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄ.

Ամեն մի ուղղանկյուն յեռանկյան կողմերի միջև գոյութիւն ունի հետևյալ կապակցութիւնը.- ներքնաձիգն արտահայտող թվի քառակուսին հավասար է եզերն արտահայտող թվերի քառակուսիների գումարին: Այս կապակցութիւնը հայտնի է Պյութագորի թեորեմ անունով և իր ժամանակին դուք կյուրացնեք այդ կարևոր թեորեմի ապացուցումը, իսկ առ այժմ հաղորդվում է ձեզ՝ իբրև նմուշ, թե ինչպես մի բանաձևով կարելի է արտահայտել ամեն մի ուղղանկյուն յեռանկյան կողմերի ընդհանուր հատկութիւնը: Յետ իրոք, յեթե եզերի և ներքնաձիգի յերկարութիւնները նշանակենք համապատասխանաբար a, b և c տառերով, ապա Պյութագորի թեորեմը կարելի կլինի գրել այսպես.

$$a^2+b^2=c^2:$$

Տառերով արտահայտած թվերը, վորոնք միանում են գործողութիւնների նշանով՝ հնարավորութիւն են տալիս կարճ կերպով գրի անցկացնել այն փոխհարաբերութիւնները, վորոնք գոյութիւն ունեն տվյալ թվերի միջև, ուսումնասիրել այդ փոխհարաբերութիւնները ու հաշվել զանազան վորոնելի թվեր:

Դուք հիմա անցնում եք տառային նմուշներ պարունակող բանաձևերի ձևափոխումների և հաշվումների գործնական աշխատանքին:

Կատարեցեք հետևյալ հանրահաշվական արտահայտութիւնները.

1) Ուղղանկյան մակերեսի արտահայտութիւնը, յեթե նրա կողմերը արտահայտվում են a և b գծային միավորներով:

2) Նույն ուղղանկյան պարագծի արտահայտութիւնը:

3) Յեռանկյան պարագծի արտահայտութիւնը, յեթե նրա կողմերն են a, b և c:

4) Յեռանկյան a և b յերկու կողմերի գումարի և c յերրորդ կողմի տարբերութեան արտահայտութիւնը:

5) a և b կողմեր ունեցող յերկու քառակուսիների մակերեսների գումարի և տարբերութեան արտահայտութիւնը:

6) Այն քառակուսու մակերեսի արտահայտութիւնը, վորի կողմը հավասար է a և b հատվածների գումարին:

7) Այն խորանարդի ծավալի արտահայտութիւնը, վորի կողը հավասար է a հատվածի կրկնապատկին և b հատվածի տարբերութեանը:

8) Մարմնի P քաշի արտահայտութիւնը, յեթե նրա ծավալը հավասար է V խ սմ-ի, իսկ տեսակարար կշիռը՝ d-ի:

9) Որդղանկյունանձև ձողիկի P քաշի արտահայտութիւնը, յեթե նրա չափերն են a, b և c սմ, իսկ տեսակարար կշիռն է՝ d:

10) S տարածութիւն անցնելու t ժամանակամիջոցի արտահայտութիւնը, յեթե շարժման արագութիւնը հավասար է V մ-ի:

11) V խ մ ծավալ ունեցող փոս փորելու համար պահանջվող որերի արտահայտութիւնը, յեթե աշխատում են 8 չափահաս և 9 անչափահաս բանվորներ, և յուրաքանչյուր չափահաս բանվորը մեկ որում կարող է փորել a խ մ, իսկ անչափահասը՝ b խ մ:

12) Մի ավտոմոբիլ V կմ արագութեամբ անցնում է S կմ տարածութիւն, մյուսը, վորի արագութիւնը 1 կմ պակաս է, անցնում է 10 կմ-ով ավելի տարածութիւն: Վորոշել՝ ինչքան ժամանակ և ավելի գործադրել յերկրորդն առաջինից իր ճանապարհն անցնելու համար:

Յուց տվեք.— քանի՛ գործողութիւն և պարունակում իր մեջ վերոհիշյալ խնդիրներից յուրաքանչյուրը: Միքանի գործողութիւններ պարունակող արտահայտութիւնների մեջ վճռն և վերջին գործողութիւնը:

Այն հաշվահաշվական արտահայտությունը, վորը չի պարունակում գումարման յեվ հանման նշաններ, նայեվ այն արտահայտությունը, վորի վերջին գործողությունը վոչ գումարում է, յեվ վոչ էլ հանում՝ կոչվում է միանդամ:

Այն հաշվահաշվական արտահայտությունը, վորի վերջին գործողությունը գումարում է կամ հանում՝ կոչվում է բազմանդամ:

Այն միանդամները, վորոնցից կազմված է բազմանդամը՝ կոչվում են բազմանդամի անդամներ:

Յուց տվեք, ձեր կազմած արտահայտութիւններից վորոնք են միանդամներ և վորոնք՝ բազմանդամներ:

Ըստ անդամների թվի՝ բազմանդամը կոչվում է յերկանդամ, յեռանդամ և այլն:

Տառային բաժանարար չպարունակող արտահայտութիւնը կոչվում է ամբողջ, հակառակ դեպքում՝ կոտորակային:

Ցույց տվեք, նշված արտահայտություններից որոնք են ամբողջ և որոնք կոտորակային։

Վերցրեք a, b, c, d թվերն այնպես, որ $a>b>c>d$ և կատարեք.

1) a և b թվերի գումարը.

2) տրված թվերից բոլոր հնարավոր գումարները՝ վերցրած յուրաքանչյուրը առ յուրաքանչյուր.

3) a և b թվերի գումարի ու c և d թվերի տարբերության արտադրյալը.

4) a և b թվերի քառակուսիների գումարը.

5) a և b թվերի գումարի քառակուսին.

6) a և b թվերի գումարի ու c և d թվերի տարբերության տարբերությունը.

7) a թվի կրկնապատիկի ու c և d թվերի գումարի հարաբերությունը.

8) a և b, a և c, a և d թվերի հարաբերությունների գումարը.

9) a թվի կրկնապատիկի ու b, c և d թվերի գումարի արտադրյալը.

10) a և b թվերի գումարի ու c թվի արտադրյալը։

Ցույց տվեք, որն է այս արտահայտություններից միանդամ և որը՝ բազմանդամ. որն է ամբողջ և որը՝ կոտորակ։

Պարզեք այս արտահայտությունների երկրաչափական իմաստը, եթե a, b, c և d թվերն արտահայտում են որևէ տվյալ հատվածների երկարությունները։ Գծագրեք այն երկրաչափական պատկերները, որոնք որոշվում են այդ արտահայտություններով։

Գտեք այդ արտահայտությունների թվական նշանակությունները, եթե $a=5{,}4$, $b=3{,}6$, $c=3$, $d=1{,}8$։

Գտեք հետևյալ արտահայտությունների թվական նշանակությունները.

$$x=(3{,}2a-1{,}5b)^2,$$
$$y=3(a^2+b^2)-2ab,$$
$$z=\frac{a+2b}{a-c}-\frac{a-b}{b+2c}$$

եթե

1) $a=5$ $b=4$ $c=2{,}5$
2) $a=0{,}5$ $b=0{,}4$ $c=0{,}15$։

Նախընթաց վարժությունների արտահայտությունների մեջ կան միայն դրական թվեր. Սակայն արտահայտությունների մեջ մտնող տառերով կարող են արտահայտված լինել և բացասական թվեր.

հաշվումների արդյունքներն էլ կարող են նույնպես բացասական լինել։

Որինակ՝ գտեք հետևյալ արտահայտությունների թվական նշանակությունները.

$$x=a+4b,$$
$$y=a+b-3c,$$
$$z=(a+2b)\ (b-2c),$$
$$u=a^2-3ab-b^2,$$
$$v=a^3-c^3$$

եթե

1) $a=2$ $b=1{,}5$ $c=3$
2) $a=-0{,}5$ $b=-0{,}1$ $c=-0{,}2$
3) $a=\frac{1}{3}$ $b=-\frac{1}{2}$ $c=\frac{1}{5}$։

Հետազոտեք $x=a-2b$ արտահայտությունը և ցույց տվեք՝

1) a-ի և b-ի վոր դրական նշանակությունների դեպքում այդ արտահայտությունը դրական է, և վոր դեպքում՝ բացասական.

2) նրա նշանը, եթե $a>0$, $b<0$.

3) նրա նշանը, եթե $a<0$, $b>0$.

4) նրա թվական նշանակությունը, երբ $a=-5$, $b=-2$,
» $a=-5$, $b=-2\frac{1}{2}$,
» $a=-5$, $b=-4$։

$y=5a+3b$ արտահայտության համար՝

1) փնտրեք a-ի այնպիսի դրական և b-ի այնպիսի բացասական նշանակություններ, վորպեսզի տվյալ արտահայտությունը դրական լինի. բավական է արդյոք, վոր $|a|>|b|$։ Քանի՞ անգամ $|a|$-ն պետք է մեծ լինի $|b|$-ից.

2) ցույց տվեք, a-ի ինչ բացասական և b-ի ինչ դրական նշանակությունների ժամանակ տվյալ արտահայտությունը կլինի դրական.

3) սուտգեք ստացած արդյունքները՝ վերցնելով.

1) $a=9$, $b=-5$ 4) $a=-6$, $b=5$
2) $a=9$, $b=-6$ 5) $a=-6$, $b=4$
3) $a=9$, $b=-8$ 6) $a=-6$, $b=3$։

§ 38. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆ ԻԲՐԵՎ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԳՈՒՄԱՐ.

Քանի վոր հանրահաշվական հանման ժամանակ նվազելին գումարվում է հակառակ նշանով վերցրած հանելին, ապա $a-b$ տարբերությունը կարելի չէ դիտել իբրև a թվի և հակընթաց b թվի գումար։

b-ի հակընթաց թիվը, այսինքն՝ այն թիվը, որը հավասար է b-ին իր բացարձակ մեծությամբ, բայց տարբերվում է նշանով՝ արտահայտվում է —b-ով. այնպես որ՝

$$a-b=a+(-b)։$$

Եթե b-ն դրական թիվ է, ապա —b-ն բացասական է և ընդհակառակը։

Վերցնենք $a=5$, $b=3$։ Այն ժամանակ՝

$$a-b=5-3=2,$$
$$a+(-b)=5+(-3)=2։$$

Այսպիսով՝

$$a-b=a+(-b)։$$

Ստուգել նույն հավասարությունը, վերցնելով՝

1) $a=6$ $b=-3$
2) $a=-4$ $b=2$
3) $a=-1$ $b=-5$։

Նույն ձևով ներկայացրեք իբրև հանրահաշվական գումարներ՝ հետևյալ բազմանդամները—փոխարինելով հանելիները նրանց հակընթաց գումարելիներով—

$a+b-c$, $a-b-2$, a^2-ab+b^2, a^3-2a^2-1, $a^3-a^2b-ab^2+b^3$։

Քանի որ բացասական թվով բազմապատկելիս՝ բազմապատկելու նշանը փոխվում է հակառակ նշանի, ապա՝

$$-a=(-1)\cdot a,\quad -ab=(-1)\cdot ab,\quad -3a^2b=(-3)\cdot a^2b,$$
$$-b^2=(-1)\cdot b^2։$$

Ստուգեք այս հավասարությունները, վերցնելով $a=5$, $b=-4$։

Այսպիսով, (—) նշանը կարող է վերագրվել գործակցին և հանելի անդամները կարելի չէ դիտել իբրև բացասական գործակիցներով գումարելիներ:

Եվ այսպես, ամեն մի բազմանդամ ներկայացնում է իրենից այնպիսի միանդամների հանրահաշվական գումար, որոնց գործակիցները կարող են լինել դրական կամ բացասական:

Բազմանդամի նկատմամբ կարելի չէ կիրառել գումարի հիմնական հատկությունները, այն է՝

1. Տեղափոխման որենքը. — գումարի մեծությունը կախում չունի գումարելիների կարգից, որինակ՝

$$a-b-c+d=d+a-c-b=\ldots\ldots$$

Այդ պատճառով կարելի չէ կատարել բազմանդամի անդամների տեղափոխություն:

2. Զուգորդման որենք. — Տվյալ թվին վորևե գումար ավելացնելու համար, բավական է նրան հաջորդաբար ավելացնել գումարելի

չուրաքանչյուր գումարելին. բացի դա գումարելիները կարելի չէ խմբավորել. որինակ՝

$$a+(b+c-d)=a+b+c-d$$

և

$$a+b+c-d=(a+c)+(b-d)։$$

Անդամների խմբավորումով ապացուցեք, որ չեռանկյան պարագիծը մեծ է, քան նրա ամենամեծ կողմի կրկնապատիկը. այս ապացուցելու համար անհրաժեշտ է ոգտվել չեռանկյան կողմերի հետևյալ կապակցությունից—չեռանկյան չերկու կողմերի գումարը մեծ է չերրորդ կողմից։

§ 39. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԻ ՆՄԱՆ ԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՄԻԱՑՈՒՄԸ.

Ինչենք հետևյալ բազմանդամը.

$$x=3ab+3ab=2ab։$$

Այս բազմանդամի անդամներն ունեն տառային բազմապատկիչների միատեսակ կազմություն։ Առաջին չերկու անդամներն ունեն նաև հավասար գործակիցներ, չերրորդը տարբերվում է առաջին չերկուսից միայն գործակցով։

Միատեսակ տառային կազմ ունեցող անդամները կոչվում են նման:

ab արտադրյալը ավյալ արտահայտության մեջ կրկնվում է 3 անգամ, 3 անգամ և 2 անգամ իբրև գումարելի, այսինքն՝ ընդամենը 8 անգամ։

Այսպիսով՝

$$3ab+3ab+2ab=8ab։$$

Նմանապես՝

$$2a^2-5a^2=2a^2+(-5a^2)=-3a^2։$$

Այդ պատճառով՝ չերե բազմանդամն ունի նման անդամներ, ապա այդ անդամները կարելի չէ փոխարինել իրենց մեկ նման անդամով այնպես, որ նրա գործակիցը հավասար լինի տվյալ անդամների գործակիցների հանրահաշվական գումարին:

Բազմանդամի այսպիսի պարզեցումը կոչվում է նման անդամների միացում:

Վոչ նման անդամներ միացնելը՝ հնարավոր չէ, որինակ՝

$$a+b,\quad a^2-2a+5,\quad a^2+ab+b^2$$

բազմանդամները չի կարելի ներկայացնել իբրև մեկ անդամ, այնպես որ անդամների նման չլինելու դեպքում՝ նրանց հանրահաշվական գումարը մնում է իբրև բազմանդամ։

Նման անդամների միացումով պարզ ձև ավեք հետևյալ բազմանդամներին.

1) $13x+12x-20x$
$5a+a-8a$
$a-3a-5a$
$ba^2-2a^2-14a^2-a^2$
$0,8b^3+0,2b^3-2b^3$
$\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{5}+\frac{a^2}{20}$

2) $5a-b-a-2b$
$4a+b-3c+a-3b-4c$
$a^2+b^2-3b^2-2a^2$
$0,8a+0,5b-0,6a-0,75b-0,1a$
$2x-y+3z-x+y-4z$
$\frac{a}{2}-\frac{b}{3}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+\frac{a}{6}-\frac{b}{6}$:

§ 40. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԻ ԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԴԱՍԱՎՈՐՈՒՄԸ.

I. *Կազմեցեք a թվի քառակուսու կրկնապատիկի, a-ի և 5-ի արտադրյալի ու 24-ի S գումարը։*

Յուրց ավեք կազմած արտահայտության երկրաչափական իմաստը, եթե a-ն և 5-ն արտահայտում են հատվածների երկարությունը սանտիմետրերով, իսկ 24-ը՝ վորևե պատկերի մակերեսը քառակուսի սանտիմետրերով։

Ստացված բազմանդամի մեջ մտնում է միայն մի a տառը։ Գտեք յուրաքանչյուր անդամի և ամբողջ բազմանդամի թվական նշանակությունը, եթե 1) $a=10$, 2) $a=100$, 3) $a=0,1$։

Յուրց ավեք, ինչ փոփոխություններ կկատարվի յուրաքանչյուր անդամի հետ, եթե մենք a-ի թվական նշանակությունը մեծացնենք 2 անգամ, 3 անգամ, 5 անգամ, ընդհանրապես՝ m անգամ։

Այն անդամը, վորի տառերից վորևե մեկն ունի ամենամեծ աստիճան՝ կոչվում է բազմանդամի բարձր անդամ. իսկ ամենավոքր աստիճան պարունակող կամ այդ տառը բոլորովին չունեցող անդամը՝ կոչվում է բազմանդամի ցածր անդամ։ Սովորաբար այդպիսի բազմանդամի անդամները դասավորվում են վորոշ կարգով, կամ տառի ևվազող աստիճաններով, այսինքն՝ սկսելով բարձր անդամից և վերջացնելով ցածր անդամով, կամ հակառակն՝ այդ տառի աճող աստիճաններով։

Եթե բազմանդամի մեջ կան մեկից ավել տառեր, ապա նրանցից մեկն ընդունվում է իբրև գլխավոր և անդամները դասավորվում են նրա աստիճանների։

II. *Կազմեք՝ a և b թվերի խորանարդների, a թվի քառակուսու և b թվի արտադրյալի, b թվի քառակուսու և a թվի չեռապատիկ արտադրյալի՝ S գումարը։*

Դասավորեք այս բազմանդամի անդամները a տառի նվազող աստիճաններով և պարզեք յուրաքանչյուր անդամի երկրաչափական իմաստը, եթե a-ն և b-ն արտահայտում են հատվածների երկարություններ, և $a>b$։

III. *Ընդունելով x-ը վոքր դծային մի մեծության կեսից՝ կազմեք հետևյալ յերեք ծավալների S գումարը. 1) x կող ունեցող խորանարդի, 2) x հաստություն և քառակուսի հիմք ունեցող ուղղանկյուն սալաքարի, յեթե քառակուսու կողմը հավասար է 1-ի և 3) 2 մեծության բարձրություն ու քառակուսի հիմք ունեցող ուղղանկյունաձև սյան, յեթե քառակուսու կողմը հավասար է x-ի։ Դասավորեք այս բազմանդամի անդամները իրենց մեծության կարգով։ Ինչպես են այս դեպքում դասավորվում անդամները՝ x-ի աճող թե նվազող աստիճաններով։*

IV. *Յուրաքանչյուր բազմանիշ թիվ կարելի է ներկայացնել իբրև մի բազմանդամ, դասավորված տասնորդական թվարկության հիմքի, այսինքն՝ 10-ի աստիճաններով, որինակ, $385=3\cdot10^2+8\cdot10+5$։ Նույն ձևով բազմանդամների վերածեք (ամբողջ կամ կոտորակային) հետևյալ թվերը՝ 2136, 10520, 42,6, 10.085։*

§ 41. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄՆ ՈՒ ՀԱՆՈՒՄԸ.

Բազմանդամների գումարումը.

Զուգորդման որենքից հայտնի է արդեն, վոր տվյալ թվին վորևե գումար ավելացնելու համար հարկավոր է նրան հաջորդաբար ավելացնել գումարի յուրաքանչյուր գումարելին, հետևաբար, վորևե թվին, որինակ՝ 325 թիվը ավելացնելու համար, մենք ավելացնում ենք հաջորդաբար 300, 20 և 5։ Գործադրեք այս որենքը հանրահաշվական հետևյալ գումարումների նկատմամբ և վորտեղ կատանաք նման անդամներ, կատարեք նրանց միացումը.

$a+(b+c+d)$,
$(a+b+c)+(a-b-2c)$,
$(3x-5y+z)+(2x-6y+4z)+(12y-4x-6z)$,
$(a+b-c)+(a-b+c)+(b+c-a)$։

Այս որինակներից հետևում է բազմանդամների գումարման հետևյալ կանոնը.—բազմանդամներ գումարելու համար, պետք է նրանց բոլոր անդամները իրենց նշաններով գրել մեկը մյուսի յետևից վորպես գումարելիներ յեվ կատարել նման անդամների միացում։

Կատարեք բազմանդամների հետևյալ գումարումները.

1) $(a^2+6a+5)+(2a^2-8a+2)+(a^2-a-7)$
2) $(2a^3-5a^2-a+1)+(a^3-6a^2+3a+1)+(-a^3+a^2-a+1)$
3) $(a^2+ab+b^2)+(a^2-ab+b^2)$
4) $(3,6x^2-0,8xy+y^2)+(0,9x^2-0,2xy)+(0,5x^2-0,25y^2)$
5) $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{2c}{5}\right)+\left(\frac{a}{6}-\frac{b}{2}-\frac{c}{10}\right)+\left(\frac{a}{3}-\frac{4c}{15}\right)$

6) $(0,1a^2-1,5a+2,4)+(0,9a^2-0,8a-3)$

7) $(1+x+x^2)+(1-x-2x^2)+(1-3x^2)$

8) $(2,5-k)+(1,3-2k+1,5k^2)+(0,8+3,5k-2,6k^2)$։

Յերբեմն գումարելիները գրում են մեկը մյուսի տակ, ճիշտ այնպես, ինչպես այդ արվում է բազմանիշ թվերի գումարման ժամանակ. այդ դեպքում՝ նման անդամները տեղավորվում են ուղղագիծ սյունյակներում։ Որինակ՝ վերև հիշած գումարումներից հինգերորդը՝ կարելի է դասավորել այսպես.

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b+\frac{2}{5}c \\ \frac{1}{6}a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{10}c \\ \frac{1}{3}a\qquad -\frac{4}{15}c \\ \hline a-\frac{1}{6}b+\frac{1}{30}c. \end{array}$$

Ուժանդակ հաշվումներ.

$$\frac{2}{5}-\frac{1}{10}-\frac{4}{15}=\frac{12-3-8}{30}=\frac{1}{30};$$

Յուց տված յեղանակով կատարեք հետևյալ գումարումները.

1) $(a^3-5a^2+6a)+(a^3+a-2)+(3a^2+a-1)+(-a^2-8a-3)$

2) $(0,8a+0,25b-0,09c)+(0,2a-0,6b)+(0,1b-0,01c)$

3) $\left(\frac{a^3}{5}-\frac{a^2}{10}+1\right)+\left(\frac{a^3}{15}-\frac{a^2}{4}-\frac{a}{6}\right)+\left(\frac{a^3}{3}-\frac{a}{6}-2\right)$

4) $(1,6-x-0,8x^2)+(1,2-2x-0,2x^2)+(0,92-3x)$։

Բազմանդամների հանումը.

Վորևե թվից գումարի հանումը հավասարազոր է այդ գումարը կազմող գումարելիների հաջորդական հանմանը. որինակ՝ վորևե թվից 352-ը հանելու համար՝ հաջորդաբար հանում ենք 300, 50 և 2։

Կիրառենք հանման այս որենքը հետևյալ հանրահաշվական հանումների նկատմամբ, փոխարինելով հանելի բազմանդամի բացասական գործակիցներ ունեցող անդամների հանումը նրանց հակընթաց մեծությունների գումարումով և կատարելով նման անդամների միացում.

1) $(a+3b+5c)-(a+2b+3c)$

2) $(5a+b-c)-(2a+2b+c)$

3) $(9a-b+2c)-(3a-4b-c)$

4) $(x^2+y^2-z^2)-(-x^2-2y^2+2z^2)$

5) $a-(b-c+d)$

6) $a^2-(a^2-b^2+c^2)$

7) $3a^2-(4a^2-5ab-b^2)$

8) $(1+2x)-(1+x-x^2)$։

Այս որինակներից հետևում է բազմանդամների հանման հետևյալ կանոնը.—միանդամից կամ բազմանդամից բազմանդամ հանելու համար, հարկավոր է գրել նվազելին յեվ նրա շարունակությամբ հանելիի անդամները հակառակ նշաններով յեվ կատարել նման անդամների միացում։

Կատարեք հետևյալ հանումները.

1) $(a^3-3a^2+3a-1)-(a^3-4a^2+5a+1)$

2) $(a^3+a^2b+ab^2+b^3)-(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$

3) $(a^2-ab+2b^2)-(a^2+ab+3b^2)$

4) $(3x^2+y^2)-(x^2-y^2)-(2x^2-y^2)$

5) $(3,5x+0,28y-0,5z)-(3,05x+0,3y-0,75z)$

6) $(2+k+k^2-k^3)-(1-2k+2k^2-k^3)$

7) $\left(1+\frac{2}{m}-\frac{3}{m^2}\right)-\left(1-\frac{1}{m}-\frac{2}{m^2}+\frac{1}{m^3}\right)$

8) $\left(\frac{a^2}{8}+\frac{2b}{9}+\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{3}-\frac{c^2}{10}\right)$

9) $(0,6a^2+0,08ab-b^2)-(0,48a^2+ab-0,3b^2)$

10) $\left(\frac{3x^2}{4}-\frac{4x}{5}+1\right)-\left(\frac{2x^2}{3}+\frac{x}{5}+\frac{3}{4}\right)$։

Պարզ ձևերի վերածեք հետևյալ արտահայտությունները, կատարելով նրանց մեջ ցույց տված գումարման և հանման գործողությունները. նման անդամների միացումը կարելի է կատարել առանձին գործողությունների կատարման ընթացքում, կամ վերջում.

1) $5a-[(a-b)+(2c-b)-(b+a)]$

2) $3x+y-[z-(x-y)-(x-z)]$

3) $a^2-\{a-[10-(a^2-a)]\}$

3) $ab-\{ac-[3bc-(2ac-ab)+(2ab-3ac)]\}$։

Պարզ ձևերի վերածեք հետևյալ արտահայտությունները և վրոշեք նրանց թվական մեծությունները, յերբ $a=5$, $b=3$, $c=2$։

1) $a^2-ab+[2b^2-(2ab-3b^2)]-[b^2+(ab-a^2)]$

2) $3a^2-\{b^2-[a^2-(b^2+c^2)-(b^2-bc^2)]\}$

3) $4b-[a-(b-c)]+c-[b-(a-c)]$

4) $a^2b-\{ab^2-[a^2c-(ac^2+b^2c)]\}$։

Ոգտակար և այս խնդիրները լուծել յերկու յեղանակով. մի դեպքում փակագծերի բանալն սկսում ենք ներքին փակագծից,

իսկ յերկրորդ դեպքում՝ արտաքինից. որինակ՝ $a-[b-(c-d)]$ արտահայտությանը կարելի յե տալ հետևյալ պարզ ձևը.

$$a-[b-(c-d)]=a-b+(c-d)=a-b+c-d:$$

Խնդիր.—Գումարման և հանման ցույց տված յեղանակները կիրառեք հետևյալ խնդիրների նկատմամբ.

1) Յեռանկյան պարագիծը հավասար է $3a$: Մի կողմը հավասար է $(a+b)$-ի, յերկրորդը փոքր է նրանից $3b$-ով. վորոշեք յերրորդ կողմը:

2) Քառանկյան պարագիծը հավասար է $(4a+b)$-ի: Մի կողմը հավասար է a-ի, յերկրորդը մեծ է նրանից $(a-b)$-ով, յերրորդը՝ փոքր է յերկրորդից $2b$-ով. վորոշեք չորրորդ կողմը:

3) a մետր խորություն ունեցող գետի մեջ անկած է մի ձող. ձողի յերկարությունը 4 անգամ ավել է գետի խորությունից: Ձողի այն մասը, վորը գտնվում է ջրի մակերևույթից բարձր, b մետրով ավել է գետի խորությունից. վորոշեք, թե ինչ յերկարություն է ձողը խրված գետի հատակում, վորով պահպանվում է նրա հավասարակշռությունը:

4) Ձին մի ժամում վազքով անցնում է a կմ, յերկրորդ ժամում՝ $0,5$ կմ պակաս, յերրորդ ժամում՝ $0,8$ կմ պակաս յերկրորդ ժամում անցածից և չորրորդ ժամում՝ $1,5$ կմ պակաս յերրորդ ժամում անցածից: Ի՞նչ տարածություն անցավ ձին չորս ժամում:

§ 42. ԱՏՏԴՐՅԱԼԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ.

Հանրահաշվական արտահայտությունների բազմապատկումը հիմնվում է արտադրյալի հետևյալ հիմնական հատկությունների վրա.

I. Բաշխման որենք. գումարի յեվ վորեվե թվի արտադրյալը հավասար է գումարելիների յեվ նույն թվի արտադրյալների գումարին:

Ստուգեք այս որենքը հետևյալ թվական որինակների միջոցով.

$$(8+5+7)\cdot 3=8\cdot 3+5\cdot 3+7\cdot 3,$$

$$[(-6)+3+(-1)]\cdot(-2)=(-6)\cdot(-2)+3\cdot(-2)+(-1)\cdot(-2),$$

$$\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}:$$

Բաշխման որենքի հանրահաշվական գրանցումը՝

$$(a+b+c)\cdot m=am+bm+cm:$$

Ցույց ավեք թվական որինակով, վոր այս որենքը կիրառվում է բազմանիշ և միանիշ թվերի բազմապատկման ժամանակ:

Նույն որենքը ստուգեք յերկրաչափորեն. տված է ուղղանկյուն, վորի մի կողմը հավասար է $(a+b+c)$-ի, մյուսը՝ m-ի: Վորոշեք նրա մակերեսը յերկու յեղանակով. 1) ուղղանկյան կողմերի չա-

փերն արտահայտող թվերի անմիջական բազմապատկումով, 2) ուղղանկյունը բաժանելով զուգահեռ ուղիղներով յերեք ուղղանկյունների, վորոնք ունենան ընդհանուր m կողմ, իսկ մյուս կողմերը լինեն a, b և c:

Բազմապատկիչն ամբողջ թիվ լինելու դեպքում՝ բաշխման որենքը կարելի յե դուրս բերել գումարման գուգորդման որենքից, որինակ.

$$(8+5)\cdot 3=(8+5)+(8+5)+(8+5)=(8+8+8)+(5+5+5)=$$
$$=8\cdot 3+5\ 3:$$

II. Տեղափոխության որենք. արտադրյալի մեծությունը կախում չունի բազմապատկիչների կարգից:

Ստուգեք այս որենքը հետևյալ թվական որինակների միջոցով.

$$8\cdot(-3)=(-3)\cdot 8,\ (-5)\cdot 2\cdot(-4)\cdot(-1)=(--4)\cdot(-5)\cdot(-1)\cdot 2,$$
$$4\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\cdot 4:$$

Որենքի հանրահաշվական գրանցումը.

$$a\cdot b=b\cdot a:$$

Ստուգեք որենքը յերկրաչափորեն.

1) *Վորոշեք a և b կողմեր ունեցող ուղղանկյան մակերեսը, ընդունելով իբրև հիմք մի դեպքում a-ն, մյուս դեպքում՝ b-ն:*

2) *Վորոշեք ուղղանկյունաձև ձողի ծավալը, վորի կողերն են a, b և c. ընդունելով բարձրությունը մի դեպքում a-ն, յերկրորդ դեպքում՝ b-ն, յերրորդ դեպքում՝ c-ն:*

Յերկու դրական և ամբողջ բազմապատկիչների դեպքում՝ որենքը կարելի յե ստանալ բաշխման որենքից, որինակ՝

$$5\cdot 3=(1+1+1+1+1)\cdot 3=1\cdot 3+1\cdot 3+1\cdot 3+1\cdot 3+1\cdot 3=3+3+3+$$
$$+3+3=3\cdot 5:$$

Բացատրեք այդպիսի գրանցումը և կրկնեք դատողությունները $6\cdot 2=2\cdot 6$ համար:

Ոգտվելով տեղափոխման որենքից՝ ամբողջ բազմապատկիչների վերաբերմամբ, նույնը կարելի յե տարածել նաև կոտորակային բազմապատկիչների վրա, կիրառելով կոտորակների բազմապատկման կանոնը, որինակ՝

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7},\ \frac{5}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5\cdot 2}{7\cdot 3}:$$

Քանի վոր ստացված արտադրյալների համարիչները և հայտարարները հավասար են, ապա արտադրյալներն ևս հավասար կլինեն. այսինքն՝

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{3}:$$

III. Զուգորդման որեն. — Թվի բազմապատկումն արտադրյալով հավասարազոր է այդ արտադրյալի բազմապատկիչների այդ թվով հաջորդաբար բազմապատկմանը: *Հակառակը՝ արտադրյալի բազմապատկիչները կարելի չէ խմբավորել:*

Ստուգեք որենքը հետևյալ օրինակների միջոցով.

$25 \cdot (3 \cdot 2) = 25 \cdot 3 \cdot 2$, $(-4) \cdot [3 \cdot (-2)] = (-4) \cdot 3 \cdot (-2)$:

Բազմապատկման ժամանակ զուգորդման որենքի հանրահաշվական գրանցումը հետևյալն է՝

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c:$$

Թվաբանության մեջ, երբ բազմապատկիչը զրոներով վերջացող մի թիվ է, բազմապատկելու ժամանակ կիրառվում է զուգորդման որենքը, օրինակ՝

$$13 \cdot 80 = 13 \cdot (8 \cdot 10) = (13 \cdot 8) \cdot 10 = 104 \cdot 10 = 1040:$$

Կիրառեք նույն դատողությունները մի ուրիշ թվական դեպքի նկատմամբ. օրինակ՝ 25×1500: Եթե արտադրյալ կազմող բազմապատկիչների թիվը մեծ է, ապա այս վերջինները կարելի չէ խմբավորել, որով երբեմն հաշվումներն ստանում են ավելի պարզ ձև, օրինակ՝

$25 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 = (25 \cdot 4) \cdot (25 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 5) = 100 \cdot 100 \cdot 10 = 100000$:

Կիրառեք այս յեղանակը հետևյալ օրինակների նակատմամբ՝

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{15}{11}, \quad 15 \cdot 120 \cdot 4 \cdot 5:$$

Նույն որենքից հետևում է, որ արտադրյալի բազմապատկումը որևե թվով հավասարազոր է բազմապատկիչներից մեկի բազմապատկմանը նույն թվով, օրինակ՝ $(12 \cdot 4) \cdot 3 = 36 \cdot 4 = 144$:

Այդ յեղրակացությունը կարելի է ստուգել հետևյալ կոնկրետ խնդրի ոգնությամբ.— անիվը մի վայրկյանում անում է m պտույտ և պտտվում է t վայրկյան, այնպես որ ընդամենը կատարում է mt պտույտ: k անգամ այս արտադրյալը մեծացնելու համար, պետք է մեծացնել պտտման արագությունը k անգամ՝ թողնելով անփոփոխ պտտման տևողությունը, կամ հակառակը՝— մեծացնել k անգամ պտտման ժամանակը՝ անփոփոխ թողնելով արագությունը, այսինքն՝

$$(mt) \cdot k = (mk) \cdot t = m \cdot (kt):$$

Վորոնեք ուրիշ համապատասխան կոնկրետ օրինակներ:

Այս որենքը կարևոր է հակադրել գումարի որևե թվով բազմապատկման որենքին, որտեղ յուրաքանչյուր գումարելին բազմապատկվում է տվյալ թվով: Այսպիսով՝

$$(a+b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m,$$

ամենին

$$(a \cdot b) \cdot m = (a \cdot m) \cdot b = a \cdot (b \cdot m):$$

Եթե յերկու բազմապատկիչներն էլ բազմապատկելու լինենք m-ով, ապա արտադրյալը կբազմապատկվի m^2-ով: Իսկապես՝

$$(a \cdot m)\ (b \cdot m) = (a \cdot b) \cdot (m \cdot m) = (ab) \cdot m^2:$$

§ 43. ԱՍՏԻՃԱՆՆԵՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ.

Փոխարինելով աստիճանները հավասար բազմապատկիչների արտադրյալներով, կատարեք հետևյալ բազմապատկումները.

$$a^3 \cdot a^2, \quad x^2 \cdot x, \quad b^4 \cdot b^4:$$

Ստուգեք արդյունքները, յերե

$$a = 10, \quad x = \frac{1}{2}, \quad b = 0{,}1:$$

Այս օրինակներից բղխում է հետևյալ կանոնը. հավասար հիմք ունեցող աստիճանները բազմապատկելու համար, պետք է գումարել աստիճանացույցները, անփոփոխ թողնելով աստիճանների հիմքերը:

Կիրառելով այս կանոնը՝ բազմապատկեք հետևյալ աստիճանները.

$$a^4 \cdot a^3 \cdot a^2 \qquad (a-b)^3 \cdot (a-b)\ (a-b)^6$$
$$b^5 \cdot b \cdot b \qquad a^m \cdot a^n$$
$$(a+1)^2 \cdot (a+1)^3 \cdot (a+1) \qquad a^m \cdot a^2:$$

Յերկու կամ ավել բազմապատկիչների արտադրյալներով ներկայացրեք հետևյալ աստիճանները.

$$a^{12}, \quad b^{12}, \quad c^5, \quad x^9, \quad y^{11}:$$

Սարև առաջ բերած օրինակների մեջ կատարեք աստիճանն աստիճանի բարձրացման դործողությունը, յերկրորդ բարձրացումը կատարելով բազմապատկման միջոցով.

$$(a^2)^3, \quad (a^3)^2, \quad (a^2)^4, \quad (a^4)^2, \quad (x^3)^3, \quad (b^3)^4, \quad (a^2)^5:$$

Այս օրինակներից բղխում է հետևյալ կանոնը. աստիճանն աստիճանի բարձրացնելու համար, պետք է աստիճանացույցները բազմապատկել, անփոփոխ թողնելով աստիճանի հիմքը:

Կիրառեք այս կանոնը աստիճանն աստիճանի բարձրացման հետևյալ օրինակների մեջ.

$$(a^4)^6, \quad (a^3)^7, \quad (a^m)^2, \quad (a^3)^n, \quad (b^m)^n, \quad [(a-b^4)^3]:$$

Հետևյալ աստիճանները ներկայացրեք իբրև աստիճանի աստիճան.

$$a^{12}, \quad b^{15}, \quad (a+1)^{xy}, \quad (b-1)^{2x}:$$

Անհավասար հիմքեր ունեցող աստիճանների արտադրյալը, օրինակ՝ $2^4 \cdot 3^2$ կամ $a^3 b^2$, ավյալ հիմքերից վոչ առաջնի, վոչ էլ

մյուսի աստիճանը չե և դրա համար հնարավոր չե պարզ ձև տալ նրան։ Այդ պատճառով անհավասար հիմքեր ունեցող աստիճանների բազմապատկման արդյունքը միանդամ է, ուր մտնում են տարալին անհավասար բազմապատկիչներ, որինակ՝

$$a^3b^2,\quad a^2x^5y^2։$$

§ 44. ԱՍՏԻՃԱՆՆԵՐԻ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ.

I. *Կատարեք a^{10}-ի բաժանումը a^4-ի վրա, ընդունելով բաժանումն իբրև բազմապատկման հակադարձ գործողություն, այսինքն՝ գտեք այն բազմապատկիչը, որը բազմապատկելով ավյալ a^4 բաժանարարով, տա արտադրյալում ավյալ a^{10} բաժանելին։*

Նույն ձևով կատարեք b^5-ի բաժանումը b^2-ի վրա և ստուգեք արդյունքը, ընդունելով $b=5$ և $b=10$։

Այս որինակներից բղխում է հետևյալ կանոնը.—հավասար հիմք ունեցող աստիճանների բաժանումը կատարելու համար, պետք է բաժանելիի աստիճանացույցից հանել բաժանարարի աստիճանացույցը, անփոփոխ թողնելով աստիճանի հիմքը։

Այս կանոնը կիրառելի չե այն դեպքում, երբ բաժանելիի աստիճանացույցը մեծ է բաժանարարի աստիճանացույցից։

II. *Եթե բաժանելիի և բաժանարարի աստիճանացույցները հավասար են՝ այդ դեպքում քանորդն հավասար է 1-ի, որինակ՝* $a^5:a^5=1$, $b^m:b^m=1$։

III. *Եթե բաժանելիի աստիճանացույցը փոքր է բաժանարարի աստիճանացույցից, այդ դեպքում քանորդը գրվում է կոտորակի ձևով, որը կարելի չե կրճատել, որինակ՝*

$$a^5:a^7=\frac{a^5}{a^7}։$$

Այս կոտորակը կարելի չե կրճատել a^5-ով, կստացվի՝

$$a^5:a^7=\frac{a^5}{a^7}=\frac{1}{a^2}։$$

IV. *Կատարեք հետևյալ աստիճանների բաժանումը.*

$a^8:a^2$	$b^m:b^3$
$a^6:a$	$a^5:a^6$
$x^3:x^2$	$a^3:a^8$։

V. *Անհավասար հիմքեր ունեցող աստիճանների քանորդը մի կոտորակ է, որը չի կրճատվում, որովհետև համարիչն ու հայտարարը չունեն ընդհանուր բազմապատկիչ. որինակ՝*

$$a^4:b^2=\frac{a^4}{b^2},\quad (x+y)^2:(x-y)^2=\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}։$$

§ 45. ՄԻԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄՆ ՈՒ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ.

I. *Կիրառելով բազմապատկիչների խմբավորումը հետևյալ բազմապատկումների մեջ՝ միացրեք այն բազմապատկիչները, որոնց բազմապատկումից արտահայտությունն ստանում է պարզ ձև.*

$2a^3b\cdot 5$	$5a^4b\cdot a^2b$
$2a^3b\cdot 0{,}25$	$5a^4b\cdot ab^2$
$2a^3b\cdot a$	$5a^4b\cdot 6ab$
$2a^3b\cdot b^2$	$5a^4b\cdot c$
$2a^3b\cdot 3a$	$5a^4b\cdot 4c$
$2a^3b\cdot 4b^2$	$5a^4b\cdot 2b^2c$

Այս որինակներից բղխում է հետևյալ կանոնը. միանդամը միանդամով բազմապատկելու համար, պետք է բազմապատկել գործակիցները յեվ գումարել միևնույն հիմքերի աստիճանացույցները։

Պարզ է, որ միանդամների արտադրյալը նույնպես միանդամ է, որը պարփակում է իր մեջ բազմապատկվող միանդամների բոլոր բազմապատկիչները։ Ոգտվելով վերը հիշված որենքից՝ կատարեք հետևյալ բազմապատկումները.

$8{,}4ab\cdot 0{,}75ac$	$\left(-\frac{3}{4}a\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}a\right)$
$5ab\cdot 4ac\cdot 2bc$	$0{,}8\cdot(-0{,}5b)$
$(-4a^2b)\cdot 3a$	$1{,}2a^3b\cdot a^2bc$։

II. *Կատարեք հետևյալ միանդամների աստիճան բարձրացնելու գործողությունը, փոխարինելով աստիճան բարձրացնելու գործողությունը միևնույն բազմապատկիչներ ունեցող բազմապատկման միջոցով.*

$(ab)^2$	$(a^2b)^2$	$(5a)^2$	$(3a^2)^2$
$(ab)^3$	$(a^2b)^3$	$(2a)^3$	$(2a^3)^3$
$(ab)^4$	$(a^2b)^4$	$(2a)^4$	$(2a^2b)^4$

Այս որինակներից հետևում է, որ՝ արտադրյալի աստիճանը հավասար է առանձին բազմապատկիչների աստիճանների արտադրյալին։

III. *Միանդամը միանդամի վրա բաժանելիս՝ քանորդում ստացվում է միանդամ։ Եթե միևնույն բազմապատկիչը բաժանելիի մեջ կրկնվում է ավելի մեծ թվով, քան բաժանարարում, այդ ավելորդ բազմապատկիչը գրվում է քանորդում։ Իսկ եթե բաժանարարն է պարունակում իր մեջ ավելորդ բազմապատկիչներ, այդ դեպքում ստացվում է կոտորակ, որը կարելի չե կրճատել՝ եթե բաժանելին ու բաժանարարն ունեն ընդհանուր բազմապատկիչներ։*

Կատարեք հետևյալ միանդամների բաժանումը.

$6a^3 : 2a$ $\qquad$ $a^3b : a^2b^2$

$10a^4bc : (-5a^3b)$ $\qquad$ $9ab : 6ac$

$(-18a^2b) : (-0,2a^2b)$ $\qquad$ $8a : 16a^3$։

§ 46. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ ՅԵՎ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ ՄԻԱՆԴԱՄՈՎ.

I. *Քանի որ բազմանդամը ներկայացնում է իր անդամների հանրահաշվական գումարը, ապա բազմանդամը միանդամով բազմապատկելիս՝ կարելի է հիմք ընդունել բաշխման որենքը։*

Կատարեք հետևյալ բազմապատկումները.

$(a+2b+5c) \cdot 3$ $\qquad$ $(a^2-b^2) \cdot 2ab$

$(2x-y+3u) \cdot m$ $\qquad$ $2a^3 \cdot (a^2-ab+b^2)$

$a \cdot (a^2-3a-1)$ $\qquad$ $(2x^2+y^2) \cdot 3xu$։

Այս որինակներից հետևում է, որ՝ բազմանդամը միանդամով բազմապատկելու համար (կամ հակառակը), պետք է բազմանդամի յուրաքանչյուր անդամը բազմապատկել միանդամով յեվ արտադրյալները գումարել։

II. *Բազմանդամի և միանդամի արտադրյալն ունի այնքան անդամ, որքան անդամ ունի տվյալ բազմանդամը. յեթե տվյալ բազմանդամի մեջ կան նման անդամներ, ապա նրա և միանդամի արտադրյալի մեջ էլ կան նման անդամներ (ինչո՞ւ)։*

Ոգտվելով վերև հիշված որենքից՝ կատարեք հետևյալ բազմապատկումները.

$(5a^2-4a+3) \cdot 2a^4$ $\qquad$ $\left(\frac{a^2}{2}-\frac{b^2}{5}\right) \cdot \frac{2a}{3}$

$(x^2+2,5xy-y^2) \cdot (2xy)$ $\qquad$ $(a^m+a^2) \cdot a^m$

$(1,25a^2-1,5ab+2,5b^2) \cdot (-2,4ab^2)$ $\qquad$ $(a^{m+1}-a^{m-1}) \cdot a$

$(a^3+b^3) \cdot ac$ $\qquad$ $(1-0,3k+0,15k^2) \cdot 2k$։

III. Բազմանդամը միանդամի վրա բաժանելու համար, պետք է բազմանդամի յուրաքանչյուր անդամը բաժանել միանդամի վրա. *այս որենքի ճշտության մեջ կարելի է հեշտությամբ համոզվել, յեթե բազմապատկենք ստացված քանորդը բաժանարարով։*

Յեթե բազմանդամի անդամներից մեկը կամ մի քանիսը չեն բաժանվում բաժանարարի վրա առանց մնացորդի, ապա քանորդի համապատասխան անդամները կլինեն կոտորակներ։

Կատարեք հետևյալ բաժանումները.

$(a^5+a^4b+a^3b^2) : a^2$ $\qquad$ $(3,5a^2+2,8ab) : 1,4a$

$(3a^2-12a) : 3a$ $\qquad$ $(a^{m+1}+a^m) : a^{m-1}$

$(4ax-6bx+10cx) : 2x$ $\qquad$ $(ab+ac+bc) : ab$

$(a^2-ab) : -a$ $\qquad$ $(x^3+x) : x^2$։

Ստորև առաջ բերված որինակների մեջ կատարելով նշված գործողությունները՝ պարզ ձև տվեք այդ արտահայտություններին.

1) $a(a+b)-b(a-b)$

$a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)$

$2a^2-a(2a-3b)-b(3a+b)$

$5(8a+3b)-6(7a-3b)$

2) $(2,4-0,9x+0,16x^2) \cdot 5-(1+0,5x+0,2x^2) \cdot 4$

$(1-k+k^2-k^3) \cdot k+(1-k-k^2-k^3) \cdot 2$

$\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b\right) \cdot 2a-\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b\right) \cdot 3b$

$(0,5+x) \cdot 2,4-(0,8-x) \cdot 1,5$

3) $[(a^4+3a^3)-(4a^3-a^2)] : a^2$

$[(a^2+ab+2b^2)-(a^2-ab+3b^2)] : b$

$\frac{ac+ab}{b}-\frac{ac+ab}{c}$

$\frac{a(a^2+b^2)-b(a^2+ab)}{a^2}$

4) $\frac{a^2+b^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2}{b^2}$

$\left(x+\frac{1}{x}\right) \cdot x+\left(y-\frac{1}{y}\right) \cdot y$

$[(a+2b)-(a-c)-(b-4c)]b$

$1-x[1-x(1-x)]$։

§ 47. ԱՌԱՋԻՆ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՄԵԿԱՆԱՀԱՅՏ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԼՈՒԾՄԱՆ ՅԵՂԱՆԱԿՆԵՐԸ.

Մինչ այժմ պարզ հավասարումները դուք լուծում եյիք՝ հիմք ունենալով թվաբանական գործողությունների անդամների փոխհարաբերությունները։

Ավելի բարդ հավասարումները լուծելու համար գործադրվում են մոտավոր յեղանակներ, որոնց հիմք են ծառայում հետևյալ նկատառումները.—*յեթե հավասարումը բավարարվում է անհայտի որևե թվական նշանակությամբ, այսինքն՝ յեթե հավասարման յերկու մասերը հավասարվում են իրար, յերբ այդ մասերում գտնված անհայտին տանք միևնույն թվական նշանակությունը, ապա նրանց հավասարությունը չի խախտվի, յեթե մենք այդ յերկու մասերի հետ կատարենք միևնույն գործողությունը, այսինքն՝ հավասար չափով*

մեծացնենք կամ փոքրացնենք այդ հավասարման յերկու մասերը, բազմապատկենք և կամ բաժանենք միևնույն թվով։

Բացատրենք այս լուծելով մի քանի հավասարումներ.

1) $5(3x+2)=4(31-x)$։

Բազմապատկումը կատարելով, այսինքն՝ ազատվելով փակագծերից՝ ստանում ենք.

$$15x+10=124-4x։$$

Յեթե հավասարման յուրաքանչյուր մասից հանենք 10 և յուրաքանչյուր մասին ավելացնենք $4x$, ապա հավասարման ձախ մասում $+10$ և -10 անդամները կվերանան և կստացվի նոր անդամ՝ $4x$. հավասարման աջ մասում կվերանան $-4x$ և $+4x$ անդամները և կստացվի նոր անդամ՝ -10, այնպես որ հավասարումը կընդունի հետևյալ ձևը՝

$$15x+14x=124-10։$$

Ստացվեց ավելի պարզ հավասարում, քան ունած եր սկզբում, որը բավարարվում է անհայտի նույն թվական նշանակությամբ, ինչով որ բավարարվում եր տվյալ հավասարումը։ Անհայտի միևնույն նշանակությամբ բավարարվող հավասարումները կոչվում են համազոր։

10 և $-4x$ յերկու անդամները կարծես թե «տեղափոխվել են» հակառակ նշաններով հավասարման մի մասից մյուսը և անհայտ անդամները կենտրոնացել են հավասարման մի մասում, իսկ հայտնիները՝ մյուս մասում. միացնելով նման անդամները, ստանում ենք՝

$$19x=114։$$

Հավասարման յերկու մասն էլ բաժանելով անհայտի գործակցի վրա՝ գտնում ենք, որ՝

$$x=6։$$

Ստուգելու համար անհայտի նշանակությունը դրեք իր տեղում հավասարման մեջ։

2) $23-\frac{x+2}{3}=\frac{3x+8}{2}$։

Բոլոր անդամները ընդհանուր հայտարարի բերելով՝ ստանում ենք.

$$\frac{138}{6}-\frac{2(x+2)}{6}=\frac{3(3x+8)}{6}։$$

Յեթե հավասարման յերկու մասն էլ բազմապատկենք ընդհանուր հայտարար 6-ով, ապա կստանանք ավելի պարզ հավասարում, տվյալին համազոր՝

$$138-2(x+2)=3(3x+8)։$$

Լուծումը շարունակվում է ճիշտ այնպես, ինչպես հիշված է վերևը.

$$138-2x-4=9x+24,$$
$$138-4-24=9x+2x,$$
$$110=11x,$$
$$x=10։$$

Ստուգելու համար՝ անհայտի նշանակությունը դրեք իր տեղում՝ հավասարման մեջ։ Այսպիսով հավասարման լուծման յեղանակը հետևյալն է.

1) յեթե հավասարման մեջ կան կոտորակներ, նրա բոլոր անդամները բերվում են ընդհանուր հայտարարի. բազմապատկելով հավասարման յերկու մասն ընդհանուր հայտարարով՝ կոտորակները վոչնչանում են.

2) յեթե հավասարման մեջ պատահում են փակագծեր, համապատասխան գործողություններ կատարելով՝ այդ փակագծերը վերանում են.

3) հավասարման մի մասն են փոխադրվում բոլոր անհայտ անդամները, իսկ մյուս մասը՝ հայտնիները.

4) կատարում ենք նման անդամների միացում.

5) բաժանում ենք հավասարման յերկու մասն անհայտի գործակցի վրա։

Յեթե հավասարման յերկու մասն էլ ունեն ընդհանուր բազմապատկիչ, ապա բաժանելով նրա վրա՝ հավասարումն ստանում և ավելի պարզ ձև, որինակ՝

$$60(x+1)=84(x-3)$$

հավասարումը բաժանելով 12-ի վրա՝ ստացվում է հետևյալ պարզ ձևը.

$$5(x+1)=7(x-3)$$

որը լուծելով՝ գտնում ենք

$$x=13$$

§ 48. ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՈՐԻՆԱԿՆԵՐ.

1) $3(x-3)+5(x-9)=2(17-x)+32$
2) $5(3x-1)=4(2x+11)$
3) $5(2x-7)-4(10-x)=3(x-3)$
4) $6(y+2)-4(y-2)=5(5y-13)-2(20-y)$
5) $1,3(x-0,7)-0,12(x+10)=5(x-1,95)$
6) $5(2,5x+1)-8(0,5x+1,2)-6(0,75x+0,3)=0$
7) $4(2x+11)+3(2-x)-10(10x+43)=0$
8) $x+0,8(x+1,8)+0,6(x+1,6)=0$

9) $\frac{z-5}{2}+\frac{z-4}{3}=2$

10) $\frac{3x+5}{10}-\frac{x+1}{6}=1$

11) $\frac{x+1}{2}+\frac{x-6}{5}-\frac{x+10}{3}=0$

12) $\frac{x-5}{3}+\frac{x-2}{6}=\frac{x\ \ 6}{2}+\frac{x+1}{9}$

13) $\frac{1+3u}{2}+\frac{1-u}{3}=\frac{2-3u}{12}+\frac{10+4u}{15}$

14) $\frac{4x+3}{5}=\frac{x+3}{2}$

15) $\frac{3x-14}{10}=\frac{x+7}{8}$

16) $\frac{2{,}4k+5}{11}=\frac{1+1{,}6k}{5}$

17) $\frac{1+0{,}4y}{3}=\frac{22-0{,}5y}{4}$

18) $x-\frac{x-7}{2}=10+\frac{x-10}{3}$

19) $9-\frac{3x+2}{5}=\frac{26-x}{4}$

20) $3(x^2-6)=x(3x-6)$։

§ 49. ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ԿԱԶՄԵԼՈՒ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ.

Հավասարումների ոգնությամբ լուծեք հետևյալ խնդիրները.

1. ABC յեռանկյան պարագիծը պարունակում է 29 սմ։ BC կողմն ավել է AB կողմի կիսից 1 սմ-ով, իսկ AC կողմը փոքր է AB կողմից 2 սմ-ով. վորոշել այս յեռանկյան կողմերը։

2. Վորոշել ABC յեռանկյան անկյունները, յեթե B անկյունը $\frac{1}{3}d$-ով ավել է A անկյունից, իսկ C անկյունը հավասար է A անկյան կիսին։

Գծագրել յեռանկյունը, յեթե նրա ամենամեծ կողմը հավասար է 9,6 սմ:

3. Վորոշել ABCD քառանկյան անկյունները, յեթե B անկյունը մեծ է A անկյունից 30^0-ով. նույնքանով մեծ է C անկյունը B անկյունից, D անկյունը C անկյունից։ Գծագրել այդ քառանկյունը, յեթե AB կողմը հավասար է 8 սմ-ի, իսկ CD կողմը՝ 4,5 սմ-ի։

4. Կոոպերատիվը գնել է թել և շաքար ու վճարել՝ շաքարի համար 3 անգամ ավել, քան թելի. թելը վաճառելուց հետո ոգուտ ստացել է $10^0/_0$, իսկ շաքարից՝ $15^0/_0$. ընդամենը այդ վաճառքից ստացվել է 132 ռ. ոգուտ։ Վորքան եր վճարված թելին և վորքան շաքարին։

5. Գործարանում աշխատում են տղամարդիկ, կանայք և անչափահասները—ընդամենը 380 մարդ։ Կանանց թիվը կազմում է տղամարդկանց թվի $^1/_3$-ը, իսկ անչափահասների թիվը 40-ով պակաս է կանանց թվից. վորոշել տղամարդկանց, կանանց և անչափահասների թիվը։

6. AB հատվածը C կետով բաժանվում է յերկու մասերի, վորոնցից AC-ն 3 անգամ ավել է BC-ից։ BC հատվածը D կետով բաժանվում է յերկու մասերի, վորոնցից BD-ն 2 անգամ մեծ է CD-ից։ Վորոշել AB հատվածի յերկարությունը, յեթե AD-ն մեծ է DB-ից 7 սմ-ով։ Գծագրելու միջոցով ստուգեցեք լուծումը։

7. Գտնել այն թիվը, վորը մեծ է 21-ից այնքանով, վորքանով նրա $^2/_3$-ը փոքր է 21 ից։

8. Գտնել այն թիվը, վորը փոքր է 40-ից այնքանով, վորքանով նրա $^1/_3$-ը մեծ է 8-ից։

9. Տրված է մի անհայտ թիվ, յեթե այս թվի կիսից հանենք 5, ապա ստացած տարբերությունը 1-ով պակաս կլինի վորոնելի թվի $^1/_3$-ից։ Գտնել այդ թիվը։

10. Անիվը մի վայրկյանում կատարում է 2 պտույտ, մի ուրիշ անիվ, վորի տրամագիծը 3 անգամ փոքր է, կատարում է մի վայրկյանում 12 պտույտ։ Վորոշել այդ անիվների տրամագծերը, յեթե հայտնի է, վոր յերկրորդ անիվի շրջանագծային արագությունը 6 սմ-ով ավել է առաջին անիվի շրջանագծային արագությունից։

11. Արագընթաց գնացքը մի վորոշ տարածություն անցնում է 12 ժամում։ Մարդատար գնացքը, վորի արագությունը մի ժամում արագընթաց գնացքի արագությունից պակաս է 24 կմ-ով անցնում է նույն տարածությունը 20 ժամում։ Վորոշել գնացքների արագությունը և նրանց անցած տարածությունը։

12. Յերկու տառատիպավոր անիվներ, վորոնցից մեկի տառատիպերը 56-ով ավել են մյուսից միացված են իրար հետ։ Յերբ փոքրը կատարում է 12 պտույտ, նույն ժամանակամիջոցում մեծը կատարում է 5 պտույտ։ Գտնել, քանի՞ տառ ունի յուրաքանչյուր անիվը։

13. Վորոշ հաստության ոսկեհնե թելը 1 կգ ուժի ազդեցության տակ ձգվում է իր նորմալ յերկարության $1{,}8^0/_0$-ով, ըստ վորում փոփոխվելով ձգման ուժը՝ համապատասխան փոփոխվում է

նաև յերկարացումը։ 2,5 կգ ուժ գործադրելու դեպքում՝ թելն ընդունում է 9 սմ յերկարություն։ Վորոշել թելի նորմալ յերկարությունը։

14. 25 հինգ և յերեք ռուբլիանոց դրամանիշների գումարը հավասար է 105 ռ.։ Այդ 25 դրամանիշներից քանի՞սն է հինգ և քանի՞սը յերեք ռուբլիանոց։

15. Քանի՞ կիլոգրամ աղի $24^0/_0$-այնին լուծույթ պետք է ավելացնել 74,3 կգ աղի $6^0/_0$-այնին լուծույթին, վորպեսզի ստացվի աղի $16^0/_0$-այնին խառնուրդ։

16. Աշխատանոցում կա $10^0/_0$-այնին և $3^0/_0$ այնին թթվի լուծույթներ։ Քանի՞ կիլոգրամ պետք է վերցնել ամեն մեկից, վոր կարելի լինի պատրաստել 14 կգ $5^0/_0$-այնին լուծույթ։

17. Քանի՞ կիլոգրամ $10^0/_0$-այնին լուծույթ պետք է ավելացնել 1,6 կգ $3^0/_0$-այնին լուծույթին, վոր ստացվի $6^0/_0$-այնին լուծույթ։

18. Վինքան ջուր պետք է ավելացնել 1,5 կգ $10^0/_0$-այնին լուծույթին, վոր ստացվի $6^0/_0$-այնին լուծույթ։

19. Քանի՞ աստիճան կբարձրանա 40 գր յերկաթի ջերմաստիճանը, յեթե նրան հաղորդվի 15 կալորիա ջերմություն։ [Յերկաթի տեսակարար ջերմությունը $= 0,11$]։

20. 100^0 ջերմություն ունեցող 200 գրամ ջուրը խառնեցին 150 գրամ 20^0-ի ջրի հետ։ Վորոշել խառնուրդի ջերմաստիճանը։

21. 400 գրամ 15^0-ի ջերմություն ունեցող ջրին քանի՞ գրամ 100^0-ի ջուր պետք է ավելացնել, վորպեսզի խառնուրդն ունենա 40^0 ջերմաստիճան։

22. Գետի հոսանքով նավակն անցնում է մի ժամում 6 կմ, իսկ հոսանքին հակառակ՝ 4 կմ։ 4 ժամում անցել են 21 կմ։ Քանի՞ ժամ է նավակն անցել հոսանքով և քանի՞ հոսանքին հակառակ։ Ինչի յե հավասար (գծ. 124) նավակի մեկնման և ժամանման տեղերի միջև ընկած տարածությունը։

Գծ. 124

23. Սովորական 16 մոմանոց էլեկտրական լամպը մեկ ժամում ծախսում է 60 վատ և արժե 45 կոպ.։ Ինչքան ժամանակում 1 ռ., 50 կոպեկանոց անտեսական լամպը, վորը անտեսում է էլեկտրական էներգիայի $75^0/_0$-ը, իր ծախսը կհանի, յեթե մեկ հեկտովատ ըստ տարիֆի արժե 3,5 կոպ.։

24. Յերկու հատվածների գումարը հավասար է 47 սմ-ի։ Առաջին հատվածի $^1/_5$ մասը 3 սմ-ով ավել է յերկրորդի մեկ յերրորդական մասից։ Գտնել այդ հատվածների յերկարությունը։

25. Քաղաքի յերկու ուղղանկյունաձև հողամասերը փողոցի վողմից միասին ունեն 32 մ յերկարություն։ Նրանցից մեկի խորությունը 18 մետր է, մյուսինը՝ 15 մետր, իսկ մակերեսների գումարը հավասար է 540 ք. մ-ի։ Վորոշել յուրաքանչյուր հողամասի յերկարությունը։

26. Յերկու ուղղանկյունների բարձրություններն են՝ 8,4 մ և 4, 4 մ։ Առաջինի հիմքը մեծ է յերկրորդի հիմքից 5 մետրով իսկ մակերեսը՝ 72 ք մ-ով։ Վորոշել ուղղանկյունների հիմքերը և մակերեսները։

27. Արագընթաց գնացքն անցնում է մի ժամում մարդատար գնացքից 26 կմ-ով ավել։ 20 րոպեում արագընթաց գնացքն անցնում է 12 կմ ավել, քան մարդատարը՝ 15 րոպեում։ Վորոշել գնացքների արագությունը։

28. Առաջին տեսակի 1 կգ թելի մեծաքանակ արժեքը 3 ռ. 60 կոպեկով ավել է յերկրորդ տեսակի 1 կգ թելի մեծաքանակ արժեքից։ Հատավաճառման ժամանակ առաջին տեսակի թելի արժեքը բարձրացրին $20^0/_0$-ով, յերկրորդ տեսակինը՝ $12,5^0/_0$-ով, ըստ վորում առաջին տեսակի թելի 1 կգ թանգ է յերկրորդ տեսակի 1 կգ թելից 4 ռ. 50 կոպեկով։ Վորոշել թե առաջին և թե յերկրորդ տեսակ թելի մեծաքանակ և հատավաճառ արժեքը։

29. Ջուրը հանքահորից հանելու համար յերկու տեղ դրված են շոգեմեքենաներ։ Առաջինն ամեն 10 րոպեում դուրս է հանում 22 հեկտոլիտր ջուր 155 մետր խորությունից. յերկրորդը՝ յուրաքանչյուր 15 րոպեում դուրս է հանում 45,6 հեկտոլիտր ջուր 88 մետր խորությունից։ Մեքենաների ընդհանուր կարողությունը հավասար է 54 ձիու ուժի։ Վորոշել յուրաքանչյուր մեքենայի կարողությունը։

30. Հավասարասրուն յեռանկյան պարագիծը հավասար է 70 սմ-ի. հիմքը $1^1{}_2$ անգամ ավել է սրունքից։ Վորոշել յեռանկյան կողմերը։

31. Վորոշել ABC յեռանկյան անկյունները, յեթե B անկյունը 20^0-ով ավել է A անկյունից, իսկ C անկյունը 3 անգամ մեծ է B անկյունից։

32. Յերկանիշ թվի տասնավորների թիվը 2-ով ավել է միավորների թվից, իսկ ինքը թիվը $6^2{}_5$ անգամ մեծ է իր թվանշանների գումարից։ Վորոշել այդ յերկանիշ թիվը։

33. Մի մարդ A և B քաղաքների մեջ յեղած տարածությունն անցավ 2 որում. առաջին որը նա անցավ 12 կմ ավել, քան յերկրորդ որը. բացի այդ՝ առաջին որը նա գնում եր մի ժամում 5 կմ,

իսկ յերկրորդ որը՝ 6 կմ արագությամբ. առաջին որը ճանապարհին դործադրել է 2 անգամ ավել ժամամանակ, քան յերկրորդ որը։ Վորոշել A և B քաղաքների մեջ յեղած տարածությունը։

34. Հորիզոնական հարթության վրա գտնվում են 28 կգ-ով մեկը մյուսից ծանր յերկու մարմիններ։ Մեծ մարմնի շփման գործակիցը հավասար է 25%-ի, փոքրինը՝ (ավելի հղկած մակերևույթով)—20%-ի։ Մեծ մարմնի շփումը 3 անգամ ավել է փոքր մարմնի շփումից։ Վորոշել այդ մարմինների կշիռը։

35. Կոոպերատիվն իր ունեցած 105 կգ թելից մեծ մասը վաճառեց կիլոգրամը 4 ռ.-ով, իսկ մնացածը 3 ռ.-ով. առաջին վաճառքից ոգտվեց 22 անգամ ավել, քան յերկրորդից։ Քանի՞ կիլոգրամ է վաճառվել 4 ռ.-ով և քանի՞ կիլոգրամ 3 ռ.-ով։

§ 50. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ.

Բազմանիշ թիվը բազմանիշ թվով բազմապատկման ժամանակ, բազմապատկելի յուրաքանչյուր կարգը բազմապատկվում է բազմապատկչի յուրաքանչյուր կարգով և արտադրյալները գումարվում։ Որինակ՝ 256-ի և 34-ի արտադրյալը կազմվում է հետևյալ արտադրյալների գումարից՝ $200 \cdot 30$, $200 \cdot 4$, $50 \cdot 4$, $50 \cdot 30$, $6 \cdot 30$ և $6 \cdot 4$։ Այսպիսով, գումարների արտադրյալը հավասար է նրանց գումարելիների արտադրյալների գումարին։

Այս յեզրակացությունը հանրահաշվական նշաններով գրվում է այսպես՝

$$(a+b) \cdot (m+n)=am+bm+an+bn,$$

կամ, ավելի մեծ թվով գումարելիների դեպքում՝

$$(a+b+c+d) \cdot (m+n+p)=am+bm+cm+dm+an+bn+cn+dn+ \\ +ap+bp+cp+dp:$$

Այս կարելի չէ իբրև հետևանք ստանալ բաշխման որենքից։ Տված է բազմապատկել՝

$$(a+b+c) \cdot (m+n):$$

Ընդունելով $m+n$ բազմապատկիչն իբրև մի թիվ և կիրառելով բաշխման որենքը՝ գրենք գումարի և այդ թվի բազմապատկումը՝

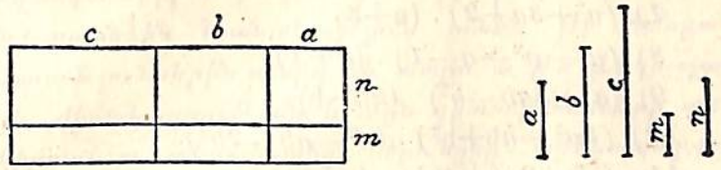
$$(a+b+c) \cdot (m+n)=a(m+n)+b(m+n)+c(m+n):$$

Մնում է բազմապատկել a, b և c թվերը $m+n$ գումարով և արտադրյալները գումարել։ Ստանում ենք՝

$$am+an+bm+bn+cm+cn,$$

այսինքն՝ $(a+b+c) \cdot (m+n)=am+an+bm+bn+cm+cn$, այն, ինչ պահանջվում եր ապացուցել։

Նույն արդյունքներին կարելի չէ հասնել և յերկրաչափորեն։ Վերցնենք մի ուղղանկյուն (գծ. 125), վորի մի կողմը հավասար է



գծ. 125

a, b և c հատվածների գումարին, մյուսը՝ m և n հատվածների գումարին։

Այդ ուղղանկյան մակերեսն արտահայտվում է այսպես՝

$$(a+b+c) \cdot (m+n):$$

Բաժանման կետերից կողմերին տարած զուգահեռներով ուղղանկյան մակերեսը բաժանվում է հետևյալ գումարելիների՝

$$am,\ bm,\ cm,\ an,\ bn,\ cn:$$

Քանի վոր բաշխման որենքը կիրառելի չէ և բացասական թվերի նկատմամբ, ապա բազմապատկման ցույց տված ձևը կարելի չէ կիրառել և այն բազմանդամների նկատմամբ, վորոնց անդամները կարող են լինել դրական և բացասական։

Այստեղից հետևում է, վոր՝ բազմանդամը բազմանդամով բազմապատկելու համար, պետք է բազմապատկելի յուրաքանչյուր անդամը բազմապատկել բազմապատկչի յուրաքանչյուր անդամի վրա լեվ ստացած արտադրյալները գումարել. յեթե արտադրյալի մեջ կան նման անդամներ, պետք է կատարել նրանց սիացումը։

Որինակ.

$$(a+b-c) \cdot (x-y)=ax+bx-cx-ay-by+cy,$$

$$(a^2-3a-2) \cdot (a-4)=a^3-3a^2-2a-4a^2+12a+8=a^3-7a^2+10a+8:$$

Կատարեք հետևյալ բազմանդամների բազմապատկումները.

1) $(a+b-c-d) \cdot (x+y-z)$
2) $(2a+b+3c) \cdot (m+2n-p)$
3) $(5a+2b) \cdot (2k+l)$
4) $(5a-2b) \cdot (2k-l)$
5) $(a+2b+3) \cdot (x-y+1)$
6) $(0,6x-0,8y+1,2) \cdot (0,5a+2,5):$

Հաշվեք, քանի՞ անգամ է պարունակում ստացած արտադրյալներից յուրաքանչյուրը և ցույց տվեք՝ ինչ կախում ունի արտադրյալի անդամների թիվը բազմապատկվող բազմանդամների անդամների թվից։

Հետագա որինակներում արտադրյալի մեջ կան նման անդամներ, որոնց միացումով արտադրյալի անդամների թիվը կրճատվում է։

7) $(a^2+3a+2)\cdot(a+5)$
8) $(a^3-a^2+a-1)\cdot(a+1)$
9) $(a^2+3ab-b^2)\quad(2a-b)$
10) $(3a^2-ab+b^2)\cdot(a^2-ab-2b^2)$
11) $(a^2-2ab+4b^2)\cdot(a+2b)$
12) $(a^3+a^2+a+1)\cdot(a-1)$
13) $(1+k+k^2)\cdot(1-k)$
14) $(3-5x+2x^2)\cdot(2+x-4x^2)$
15) $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}\right)\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-\frac{c}{4}\right)$
16) $\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{2}+\frac{z}{4}\right)\cdot\left(\frac{y}{3}-\frac{z}{2}\right)$
17) $(1+0,6v+0,12v^2)\cdot(v-0,5v^2)$
18) $(1-0,3x+0,02x^2)\cdot(1-0,4x)$
19) $(1,44x^2+0,6xy+0,25y^2)\cdot(1,2x-0,5y)$
20) $(a^2+3ab-4b^2)\cdot(a^2-3ab+4b^2)$։

Յուրյ ավելք, թե դասավորված բազմանդամների արտադրյալի վրա անդամները չեն կարող վոչնչանալ նման անդամների միացումից և վրան և բազմանդամների արտադրյալի անդամների ամենափոքր հնարավոր թիվը։

Պարզ ձև ավելք հետևյալ արտահայտություններին՝ կատարելով նրանց մեջ ցուցյ աված գործողությունները.

1) $(a+b+c)\cdot(a+b-c)-(a-b+c)\cdot(a-b-c)$
2) $(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)-(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$
3) $(a+b)\cdot(c+d)+(a+b)\cdot(c-d)+(a-b)\cdot(c+d)+$
$+(a-b)\cdot(c-d)$
4) $(x+5)\cdot(x+1)+x^2+(x-3)\cdot(x-2)$
5) $(x+3)\cdot(x-1)-(x+4)\cdot(x-2)$
6) $(x+2)\cdot(x-1)-(x-2)\cdot(x+1)$
7) $a^3-(a+4)\cdot(a-3)\cdot(a-1)$
8) $[(3a^2-a-1)+(a^2+2a-1)+(-2a^2+a-1)]\cdot(2a+1)$
9) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+z\right)\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-z\right)-\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+z\right)\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}-z\right)$
10) $\left(1+\frac{2x}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{3}+x^2\right)+\left(1-\frac{2x}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{3}+x^2\right)$
11) $(5+0,8v)\cdot(1-0,02v^2)-(5-0,8v)\cdot(1+0,02v^2)$
12) $1-(1-0,5k)\cdot(1+0,2k)\cdot(1+0,3k)$։

§ 51. ԿՐՃԱՏ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԸ.

Յերկանդամների և բազմանդամների բազմապատկման միքանի դեպքերն առանձին նշանակություն ունեն թե հանրահաշվական արտահայտություններին պարզ ձև տալու և թե յերկրաչափության, ֆիզիկայի, վիճակագրության և այլն գիտությունների ասպարիզում նրանց կիրառելու տեսակետից։ Դրանցից ամենապարզը հետևյալ դեպքերն են. յերկու թվերի գումարի և տարբերության քառակուսին, յերկու թվերի գումարի և նույն թվերի տարբերության արտադրյալը, յերկու թվերի գումարի և տարբերության խորանարդը։ Նշանակենք a-ով և b-ով այն թվերը, որոնց հետ պիտի կատարվեն նշած գործողությունները, ապա բազմապատկելով՝ դուրս բերենք հետևյալ բանաձևերը.

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3) $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$
4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
5) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$։

Անհրաժեշտ է հիշել այս բանաձևերը և նրանց բանավոր արտահայտությունները.

1) յերկու թվերի գումարի հուակուսին հավասար է տվյալ թվերի հուակուսիների գումարին՝ ավելացրած նրանց կրկնապատիկ արտադրյալը.

2) յերկու թվերի տարբերության հուակուսին հավասար է տվյալ թվերի հուակուսիների գումարին՝ առանց նրանց կրկնապատիկ արտադրյալի.

3) յերկու թվերի գումարի յեվ նույն թվերի տարբերության արտադրյալը հավասար է տվյալ թվերի հուակուսիների տարբերությանը

4) յերկու թվերի գումարի խորանարդը հավասար է տվյալ թվերի խորանարդների գումարին՝ ավելացրած՝ առաջին հուակուսու յեվ յերկրորդի յեռապատիկ արտադրյալը յեվ ավելացրած յերկրորդի հուակուսու յեվ առաջնի յեռապատիկ արտադրյալը.

5) յերկու թվերի տարբերության խորանարդը հավասար է տվյալ թվերի խորանարդների տարբերությանը՝ հանած՝ առաջնի հուակուսու յեվ յերկրորդի յեռապատիկ արտադրյալը յեվ գումարած՝ յերկրորդի հուակուսու յեվ առաջնի յեռապատիկ արտադրյալը։

Ստուգեք կրճատ բազմապատկման այս բանաձևերը տվյալ թվերի միքանի թվական նշանակություններ նկատմամբ, որինակ՝ $a=5$, $b=3$. $a=8$, $b=2$. $a=0,4$, $b=0,1$։

Ծանոթություն։ *Քառակուսիների գումարը a^2+b^2-ն վոչ մի բազմապատկումից չի ստացվում և բազմապատկիչների չի վերածվում։*

1-ին, 2-րդ, և 3-րդ բանաձևերի անդամներից յուրաքանչյուրը կազմված են յերկու տառային բազմապատկիչներից, իսկ 4-րդ և 5-րդ բանաձևերի անդամներից յուրաքանչյուրը՝ յերեք տառային բազմապատկիչներից։ Պարզեք կրճատ բազմապատկման բանաձևերից յուրաքանչյուրի յերկրաչափական իմաստը, յեթե a-ն և b-ն արտահայտում են վորևե հատվածների յերկարությունները, բա վորում $a>b$։

Կիրառեք կրճատ բազմապատկման առաջին յերեք բանաձևերը հետևյալ որինակների նկատմամբ.

1) $(a+6)^2$
$(a+1)^2$
$(a-3)^2$
$(a-2)^2$
$(b+10)^2$
$(c-15)^2$

2) $(3a+1)^2$
$(4x-1)^2$
$(10-a)^2$
$(1+k)^2$
$(1-2x)^2$
$(3b-2)^2$

3) $(a+3b)^2$
$(5a-2b)^2$
$(10x+3y)^2$
$(3x-2y)^2$
$(8-3k)^2$
$(3a-5)^2$

4) $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)^2$
$\left(\frac{2x}{3}-\frac{3y}{2}\right)^2$
$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2$
$\left(1-\frac{u}{2}\right)^2$
$(5a-0,2b)^2$
$(2,5a+b)^2$

5) $(a+1)\cdot(a-1)$
$(5a+b)\cdot(5a-b)$
$(1+2x)\cdot(1-2x)$
$(m+5)\cdot(m-5)$
$(6a-5b)\cdot(6a+5b)$
$(0,8x+0,5y)\cdot(0,8x-0,5y)$

6) $(0,3a+0,2b)^2$
$(0,4a-0,3b)^2$
$(1,2+0,5k)\cdot(1,2-0,5k)$
$(1,3m-1,1n)\cdot(1,3m+1,1n)$
$\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{5}\right)\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\right)$
$\left(\frac{3}{4}a+\frac{2}{3}b\right)\cdot\left(\frac{3}{4}a-\frac{2}{3}b\right)$

7) $(a^2+b^2)^2$
$(x^3+y^3)^2$
$(ab-cd)^2$
$(mn-pq)^2$
$(a^3+bc)\cdot(a^2-bc)$
$(x^2+y^2)\cdot(x^2-y^2)$

8) $(3a^2-1)^2$
$(0,5b^3+0,3c^3)^2$
$(a^2+6b^2)\cdot(a^2-6b^2)$
$(0,8ax+0,5b^2)^2$
$(a^3+ab^2)\cdot(a^3-ab^2)$
$(2a^2-3ab)^2$

Կիրառեք 4 և 5 բանաձևերը հետևյալ որինակների նկատմամբ.

1) $(a+1)^3$
$(1-k)^3$
$(3a+2)^3$
$(5x-4y)^3$
$(2-0,5k)^3$
$(3a-4b)^3$

2) $(a^2b+ab^2)^3$
$(a^2-10)^3$
$(ab+10c)^3$
$(a^2-0,1bc)^3$
$(a^3-b^3)^3$
$(x^3+y^3)^3$

3) $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)^3$
$\left(\frac{2x}{3}-3u\right)^3$
$(3a^2+0,1)^3$
$(1,2x^2-0,5)^3$
$(3a^2+5ab)^3$
$(a^2-4a)^2$

Կիրառեք կրճատ բազմապատկման բանաձևերը հետևյալ թվաբանական հաշվումների նկատմամբ, ոգտվելով այստեղ ցուցադրված յեղանակներից.

$34^2=(30+4)^2=30^2+2\cdot30\cdot4+4^2=900+240+16=1156$
$29^2=(30-1)^2=30^2-2\cdot30\cdot1+1^2=900-60+1=841$
$31\cdot29=(30+1)\cdot(30-1)=30^2-1^2=900-1=899$

1) 41^2, 52^2, 101^2, 99^2, 69^2, 68^2
2) $21\cdot19$, $61\cdot59$, $62\cdot58$, $201\cdot199$, $79\cdot81$, $398\cdot402$
3) $1{,}1^2$, $1{,}01^2$, $2{,}03^2$, $1{,}99^2$, $9{,}9^2$, $19{,}7^2$
4) $3{,}1\cdot2{,}9$, $4{,}01\cdot3{,}99$, $15{,}2\cdot14{,}8$, $19{,}9\cdot20{,}1$
5) 11^3, 21^3, 29^3, 99^3, 102^3
6) $1{,}01^3$, $1{,}02^3$, $2{,}01^3$, $1{,}99^3$։

Տված են յերկու հատվածներ, վորոնց չափերն են a և b։ Կրճատ բազմապատկման բանաձևերը կիրառեք հետևյալ մակերեսների և ծավալների արտահայտությունների նկատմամբ.

1) քառակուսու մակերեսի, վորի կողմը հավասար է a հատվածի և b հատվածի կիսի գումարին.

2) քառակուսու մակերեսի, վորի կողմը հավասար է a հատվածի կրկնապատկի և b հատվածի մեկ քառորդի տարբերությանը.

3) ուղղանկյան մակերեսի, վորի կողմերից մեկը հավասար է a հատվածի չեռապատկի և b հատվածի կրկնապատկի գումարին, իսկ մյուսը հավասար է նույն մեծությունների տարբերությանը.

4) քառաղուսու մակերեսի, վորի կողմը հավասար է a հատվածի կիսի և b հատվածի մեկ յերրորդի գումարին.

5) խորանարդի ծավալի, վորի կողը հավասար է a հատվածի կրկնապատկի և b հատվածի կիսի գումարին.

6) խորանարդի ծավալի, վորի կողը հավասար է a հատվածի և b հատվածի մեկ տասերորդականի տարբերությանը։

Գծանկարի վրա տուգեք գումարի քառակուսու բանաձևը՝ վորոշելով այն քառակուսու մակերեսը, վորի կողմը հավասար է

Ծանոգություն։ Քառակուսիների գումար a^2+b^2-ն վոչ մի բազմապատկումից չի ստացվում և բազմապատկիչների չի վերածվում։

1-լին, 2-րդ, և 3-րդ բանաձևերի անդամներից յուրաքանչյուրը կազմված են յերկու տառային բազմապատկիչներից, իսկ 4-րդ և 5-րդ բանաձևերի անդամներից յուրաքանչյուրը՝ յերեք տառային բազմապատկիչներից։ Պարզեք կրճատ բազմապատկման բանաձևերից յուրաքանչյուրի յերկրաչափական իմաստը, յեթե a-ն և b-ն արտահայտում են վորևե հատվածների յերկարությունները, ըստ վորում $a>b$։

Կիրառեք կրճատ բազմապատկման առաջին յերեք բանաձևերը հետևյալ որինակների նկատմամբ.

1) $(a+6)^2$
$(a+1)^2$
$(a-3)^2$
$(a-2)^2$
$(b+10)^2$
$(c-15)^2$

2) $(3a+1)^2$
$(4x-1)^2$
$(10-a)^2$
$(1+k)^2$
$(1-2x)^2$
$(3b-2)^2$

3) $(a+3b)^2$
$(5a-2b)^2$
$(10x+3y)^2$
$(3x-2y)^2$
$(8-3k)^2$
$(3a-5)^2$

4) $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)^2$
$\left(\frac{2x}{3}-\frac{3y}{2}\right)^2$
$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2$
$\left(1-\frac{u}{2}\right)^2$
$(5a-0,2b)^2$
$(2,5a+b)^2$

5) $(a+1)\cdot(a-1)$
$(5a+b)\cdot(5a-b)$
$(1+2x)\cdot(1-2x)$
$(m+5)\cdot(m-5)$
$(6a-5b)\cdot(6a+5b)$
$(0,8x+0,5y)\cdot(0,8x-0,5y)$

6) $(0,3a+0,2b)^2$
$(0,4a-0,3b)^2$
$(1,2+0,5k)\cdot(1,2-0,5k)$
$(1,3m-1,1n)\cdot(1,3m+1,1n)$
$\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{5}\right)\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\right)$
$\left(\frac{3}{4}a+\frac{2}{3}b\right)\cdot\left(\frac{3}{4}a-\frac{2}{3}b\right)$

7) $(a^2+b^2)^2$
$(x^3+y^3)^2$
$(ab-cd)^2$
$(mn-pq)^2$
$(a^3+bc)\cdot(a^2-bc)$
$(x^2+y^2)\cdot(x^2-y^2)$

8) $(3a^2-1)^2$
$(0,5b^3+0,3c^3)^2$
$(a^2+6b^2)\cdot(a^2-6b^2)$
$(0,8ax+0,5b^2)^2$
$(a^3+ab^2)\cdot(a^3-ab^2)$
$(2a^2-3ab)^2$

Կիրառեք 4 և 5 բանաձևերը հետևյալ որինակների նկատմամբ.

1) $(a+1)^3$
$(1-k)^3$
$(3a+2)^3$
$(5x-4y)^3$
$(2-0,5k)^3$
$(3a-4b)^3$

2) $(a^2b+ab^2)^3$
$(a^2-10)^3$
$(ab+10c)^3$
$(a^2-0,1bc)^3$
$(a^3-b^3)^3$
$(x^3+y^3)^3$

3) $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)^3$
$\left(\frac{2x}{3}-3u\right)^3$
$(3a^2+0,1)^3$
$(1,2x^2-0,5)^3$
$(3a^2+5ab)^3$
$(a^2-4a)^2$

Կիրառեք կրճատ բազմապատկման բանաձևերը հետևյալ թվաբանական հաշվումների նկատմամբ, ոգտվելով այստեղ ցուցադրված յեղանակներից.

$34^2=(30+4)^2=30^2+2\cdot30\cdot4+4^2=900+240+16=1156$
$29^2=(30-1)^2=30^2-2\cdot30\cdot1+1^2=900-60+1=841$
$31\cdot29=(30+1)\cdot(30-1)=30^2-1^2=900-1=899$

1) 41^2, 52^2, 101^2, 99^2, 69^2, 68^2
2) $21\cdot19$, $61\cdot59$, $62\cdot58$, $201\cdot199$, $79\cdot81$, $398\cdot402$
3) $1,1^2$, $1,01^2$, $2,03^2$, $1,99^2$, $9,9^2$, $19,7^2$
4) $3,1\cdot2,9$, $4,01\cdot3,99$, $15,2\cdot14,8$, $19,9\cdot20,1$
5) 11^3, 21^3, 29^3, 99^3, 102^3
6) $1,01^3$, $1,02^3$, $2,01^3$, $1,99^3$։

Տված են յերկու հատվածներ, վորոնց չափերն են a և b։ Կրճատ բազմապատկման բանաձևերը կիրառեք հետևյալ մակերեսների և ծավալների արտահայտությունների նկատմամբ.

1) քառակուսու մակերեսի, վորի կողմը հավասար է a հատվածի և b հատվածի կիսի գումարին.

2) քառակուսու մակերեսի, վորի կողմը հավասար է a հատվածի կրկնապատիկի և b հատվածի մեկ քառորդի տարբերությանը.

3) ուղղանկյան մակերեսի, վորի կողմերից մեկը հավասար է a հատվածի յեռապատիկի և b հատվածի կրկնապատիկի գումարին, իսկ մյուսը հավասար է նույն մեծությունների տարբերությանը.

4) քառաղուսու մակերեսի, վորի կողմը հավասար է a հատվածի կիսի և b հատվածի մեկ յերրորդի գումարին.

5) խորանարդի ծավալի, վորի կողը հավասար է a հատվածի կրկնապատիկի և b հատվածի կիսի գումարին.

6) խորանարդի ծավալի, վորի կողը հավասար է a հատվածի և b հատվածի մեկ տասերորդականի տարբերությանը։

Գծանկարի վրա տուգեք գումարի քառակուսու բանաձևը՝ վորոշելով այն քառակուսու մակերեսը, վորի կողմը հավասար է

ավյալ հատվածների գումարին և վորը բաժանված է չորս մասի կողմերին զուգահեռ տարած ցերկու ուղիղներով։

Կիրառեք բանաձևն այն դեպքերի նկատմամբ, յերբ գործ ունեք յերեք և ավելի գումարելիների հետ։

Կատարելով նշած գործողությունները՝ պարզ ձև ավեք հետևյալ արտահայտություններին.

1) $[(3a+b)^2 \quad (a+3b)^2] \cdot 2ab$
2) $[(a^2+2a)^2+(2a^2-a^2)^2] : 5a^2$
3) $[(a+3) \cdot (a+5)-(a-1) \quad (a-2)]^2$
4) $[(a^2+3b^2) \quad (a^2-4b^2) - (a^2+b^2) \quad (a^2 \quad 3b^2)]^2$
5) $\left(\frac{4x^3+6x^2}{2x^2} - \frac{x^4+7x^3}{x^3}\right)^2$
6) $[(xy+uv)^2-(xy-uv)^2]^3$
7) $[(u+1)^3 \quad (u-1)^3]^2$
8) $(a+b+c)^2-(a+b-c)^2$
9) $(0,5ab+0,4cd)^2 - (0,4ab-0,5cd)^2$
10) $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{5}\right)^3 - \left(\frac{a}{2}-\frac{b}{5}\right)^3$։

§ 52. ԼՈՒԾՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ԿՐՃԱՏ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐ ՊԱՀԱՆՋՈՂ ԽՆԴԻՐՆԵՐ.

Լուծեք հետևյալ հավասարումները.

1) $x+3)^2-(x-2)^2=95$
2) $(x-1)^2-(x-5)^2=36-x$
3) $(u+1)^2=(u+4) \cdot (u-1)$
4) $(y-4)^2-(y+8) \cdot (y-8)=0$
5) $(2x+8) \cdot (2x-8)=4(x+4)^2$
6) $3(x+1)^2-7(x-1)^2+(2x-3)^2=11$
7) $\frac{x+16}{x+1} = \frac{x+1}{x-9}$
8) $\frac{2x+9}{2x-1} = \frac{2x-1}{2x-7}$
9) $\frac{8-x}{5-x} = \frac{5-x}{3-x}$
10) $\frac{10+x}{4+x} = \frac{11-x}{10-x}$

Հավասարումների ոգնությամբ լուծեք հետևյալ խնդիրները.

1. Գտնել ցերկու հաջորդական ամբողջ դրական թվեր, վորոնց քառակուսիների տարբերությունը հավասար է 27-ի։

2. Գտնել չորս հաջորդական ամբողջ թվեր, յեթե յերկու վոքր թվերի քառակուսիների գումարը 84-ով պակաս է յերկու մեծ թվերի քառակուսիների գումարից։

3. Յերկու հաջորդական ամբողջ թվերի գումարի քառակուսին 104-ով վոքր է յերկու նրանց ամենից մոտ գտնվող ամբողջ թվերի քառակուսուն։ Գտնել այդ թվերը։

4. Գտնել կանոնավոր կոտորակ, վորի քառակուսին $^1/_2$-ով ավել է նրան մինչև 1-ը լրացնող թվի քառակուսուց։

5. Գտնել կոտորակ, վորի քառակուսին $^3/_5$-ով վոքր է նրան մինչև 1-ը լրացնող թվի քառակուսուց։

6. Յերկու քառակուսիների կողմերի տարբերությունը հավասար է 3 սմ-ի, իսկ նրանց մակերեսների տարբերությունը՝ 111 f սմ-ի։ Վորոշել այդ քառակուսիների կողմերը։

7. 20 սմ յերկարություն ունեցող հատվածը բաժանել ցերկու այնպիսի մասերի, վոր նրանց վրա կառուցած քառակուսիների մակերեսների տարբերությունը հավասար լինի 40 f սմ-ի։

8. Ապացուցել, վոր ցերկու հաջորդական դրական կենտ թվերի քառակուսիների տարբերությունը հավասար է այդ թվերի կրկնապատիկ գումարին։

9. Նույնը ապացուցել ցերկու հաջորդական դրական զույգ թվերի նկատմամբ։

10. Քառակուսի թիթեղյա թերթից քառակուսի հիմքով և 6 սմ բարձրություն ունեցող պատերով պատրաստված է մի արկղ, վորի համար թերթն էր ցեղերին զուգահեռ գծերով ծալել են ուղիղ անկյունով. արկղի հատակի մակերեսը 396 f սմ-ով փոքր է դուրս ցեկել թերթի մակերեսից։ Վորոշել թերթի չափը և արկղի տարողությունը։

11. Թիթեղյա շրջանից կարված է նրան համակենտրոն շրջան, վորի տրամագիծը 10 սմ-ով պակաս է ամբողջ շրջանի տրամագծից։ Մնացած ողակի մակերեսը կազմում է 298,3 f սմ։ Վորոշեք ցերկու շրջանների տրամագծերը՝ ընդունելով $\pi=3,14$։

12. Վիրքան կավելանա շրջանագծի յերկարությունը, յեթե շառավիղն ավելացնենք 1 սմ-ով, a սմ-ով։ Վիրքան պետք է մեծացնել շրջանի շառավիղը, վորպեսզի շրջանագծի յերկարությունն ավելանա 1 մ-ով, a մ-ով։

§ 53. ՊԱՏՄԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ՍԻՄՎՈԼԻԿԱՅԻ ՅԵՎ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՆՇԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ.

Գումարման (+) և հանման (—) նշանները առաջին անգամ պատահում ենք Լեոնարդո դա Վինչի-ի ձեռագրերի մեջ (1452—

1519)։ Ավելի ուշ պատահում ենք Վիդմանի (1489 թ.), Ռուդոլֆի (1532 թ.), Շտիֆելի (1545 թ.) և Ադամ Ռիզեյի (1550 թ.) մոտ։

Բազմապատկման համար Գարիոտն (1600 թ.) ոգտվում էր կետ (.) նշանով։ (×) նշանը (թեք խաչ) պատահում ենք Աուտրիդի մոտ (1631 թ.)։

Բաժանման նշանը հորիզոնական գծի ձևով առաջին անգամ գործ է ածվել արևմտյան արաբների մոտ, վորտեղից հայտնի չէ դարձել Յեվրոպայում Լեոնարդո Պիզանացու (XIII դ.) միջոցով։ (:) յերկու կետերը գործածության մեջ է մացրել Լեյբնիցը (1646—1716 թ.)։

Աստիճան բարձրացնելը հայտնի չեր հույներին, հնդիկներին և արաբներին։ Աստիճանային աստիճանացուցյալների ժամանակակից նշումները մացրել է 1634 թ. Դեկարտը, թեև x^2-ու և x^3-ի հետ միաժամանակ մինչև XIX դարի սկիզբը գրում էլին xx, xxx. Վիյեան (1636 թ.) աստիճանացուցյալները նշանակում էր հռոմեյական թվանշաններով։

Արմատ հանելու $\sqrt{\ }$ նշանն առաջին անգամ պատահում ենք Ռուդոլֆի մոտ (1525 թ.)։ Դեռ ևս հներում արաբների, իսկ ավելի ուշ՝ Արևմտյան Յեվրոպայում «արմատ» բառն ուներ յերկու իմաստ։

Հավասարության (=) նշանը մացրեց Ռեկորդը (1552 թ.)։

Անհավասարության նշանները ($>$ մեծ է կամ $<$ փոքր է) առաջին անգամ պատահում ենք Գարիոտի մոտ (1600 թ.), Բուգերի մոտ՝ $\leqq$ (հավասար կամ մեծ է) $\leqq$ (հավասար կամ փոքր է)։ $a \neq b$ (a-ն հավասար չէ b-ին) նշանը՝ Կրիստոֆելի մոտ։

Փակագիծն առաջին անգամ գործ է ածում Ժիրաճը 1629 թ.։ Այդ նպատակով Վիյեան միացվելիք քանակությունների վերևը դնում էր գիծ։ Այդ նշանը պահպանվեց՝ միացված արմատի $\sqrt{\ }$ նշանի հետ։

Թվերի տեղ տառեր էր գործածում դեռ ևս հույն փիլիսոփա Արիստոտելը, այնուհետև Դիոֆանտը (հույն մաթեմատիկոս IV դ.), Արևմտյան Յեվրոպայում՝ Իորդան Նեմորարիուսը։ Ժամանակակից սիմվոլները հաստատել է Վիյեան, զարգացրել է Նյուտոնը, (1642—1727 թ.) Նամանավանդ Էյլերը (1707—1783 թ.)։

§ 54. ՊԱՏՄԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԱՌԱՋԻՆ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ.

Առաջին աստիճանի հավասարումներ կարողանում էլին լուծել դեռ յեգիպտացիները։ Հույները մինչև Դիոֆանտը հավասարումները լուծում էլին յերկրաչափական միջոցներով։ Դիոֆանտը մացրեց արհեստական յեղանակներ, բայց նրանք ավելի շուտ թվաբանական են, քան հանրահաշվական։

Հանրահաշվական իմաստով հավասարումների լուծման հիմքերը դրել են հնդիկները։ Առաջին աստիճանի հավասարումները լուծելիս՝ նրանք ոգտվում էլին տեղադրման յեղանակով։ Հնդկական հանրահաշիվը Արևմտյան Յեվրոպա չէ անցել արաբների միջոցով։

Անհայտի նշանակման համար դեռ յեգիպտացիների մոտ գոյություն ուներ «խաու»—կույտ տերմինը։ Առաջին աստիճանի անհայտի համար արաբները գործ էլին ածում «իր» և «արմատ» տերմիններըը։ Հավասարման հայտնի անդամն ուղղակի կոչվում էր «թիվ»։ Գործակիցները գրվում էլին անհայտների տակ։ Հնդիկների մոտ գոյություն չուներ հավասարումների հավասարության նշանը, այլ հավասարման մասերը գրում էլին մեկը մյուսի տակ։ Արաբերենից լատիներեն թարգմանողները անհայտի համար մացրին «res» «իր» տերմինը, իտալացիները անվանում էլին «cosa», գերմանացիները ազատագրով այդ բառը՝ դարձրին «coss», և այդ պատճառով սկզբներում հանրահաշիվով զբաղվողներին անվանում էլին «կոսսիստներ»։ Վիյետան անհայտները նշանակում էր ձայնավոր, իսկ հայտնիները՝ բաղաձայն տառերով։ Դեկարտն առաջինը մացրեց 1637 թ. z տառը և հետո x-ը անհայտների նշանակման համար։ Հաստատուն մեծությունները նա առաջինն սկսեց նշանակել $a, b, c, \ldots$ տառերով։ Յերկար ժամանակ հավասարումները լուծում էլին համեմատությունների յեղանակով և մինչև անդամ գրում էլին համեմատությունների ձևով։ Առաջին աստիճանի հավասարումների սիստեմների լուծման համար, Նյուտոնը մացրեց անհայտների համեմատության յեղանակը։

«Ալգեբրա» տերմինն ունի արաբական ծագում ու այդ անունը վերցրված է արաբական մաթեմատիկոսի «Ալ-Ջեբր-վ-ալ-մուկաբալա» աշխատության անունից (830 թ.)։ «Ջեբր» բառը բառացի նշանակում է «վերականգնում», «մուկաբալան»՝ հակադրում։ Որինակ՝ յեթե տված է հավասարում՝

$$8x-5=3x,$$

ապա «Ջեբր» գործողությունը տալիս է

$$8x=3x+5,$$

այսինքն՝ հավասարման յերկու մասերն այս գործողությունը կատարելուց հետո կպարունակեն միայն դրական անդամներ։ «Մուկաբալա» գործողության իմաստը վորոշվում է հավասարման յերկու մասում միանման անդամների կրճատումով.

$$5x+3x=3x+5$$
$$5x=5։$$

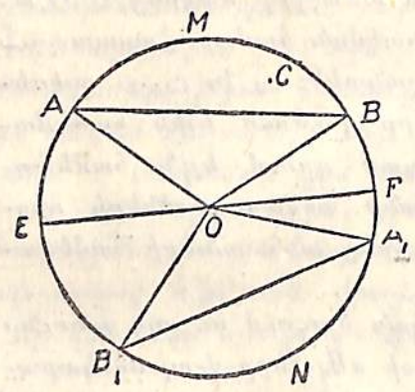
ԳԼՈՒԽ VI.

ԳԾԵՐ ՅԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ ՇՐՋԱՆԻ ՄԵՋ.

§ 55. ԴԱՊԱՓԱՐ ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ, ՇՐՋԱՆԻ ՇԱՌԱՎԻՂԻ, ԱՂԵՂԻ ՅԵՎ ԼԱՐԻ ՄԱՍԻՆ.

Շրջանի ձևին դուք ծանոթ եք արդեն թե առօրյա փորձից և թե մաթեմատիկական պարապմունքներից։

Շրջանն *այն պատկերն է, որը* սահմանափակված է շրջանագծով, *այսինքն՝ փակ կոր գծով, որի բոլոր կետերը հավասար*



Գծ. 126

չափով հեռացած են մի կետից (O), *որը և կոչվում է* շրջանագծի կենtրոն *(գծ. 126)։ Շրջանագծի որևէ կետը ու նրա կենտրոնը միացնող ուղիղ հատվածը կոչվում է* շրջանի շառավիղ (OA)։ *Շրջանն ունի բազմաթիվ շառավիղներ, որոնք բոլորն էլ միմյանց հավասար են։*

Պարզ է, որ շրջանը լիովին որոշվում է շառավիղի յերկարությամբ, այսինքն՝ մի տվյալով։ *Հավասար շառավիղներ ունեցող շրջանները լրիվ կերպով կհամապատեղվեն, այսինքն՝ կլինեն հավասար։*

Շրջանագծի վրա գտնվող յերկու կետերը հատում են նրանից յերկու մասի, որոնք կոչվում են աղեղներ (⌣ AMB ⌣ ANB)։

Շրջանագծի յերկու կետերը միացնող ուղիղ հատվածը (AB) *կոչվում է* լար։

Կենտրոնով անցնող լարը կոչվում է շրջանագծի տրամագիծ։ *Շրջանն ունի բազմաթիվ տրամագծեր։ Տրամագիծը հավասար է* կրկնապատկած շառավիղին։

Ապացուցեք, որ կենտրոնով չանցնող ամեն մի լար փոքր է տրամագծից։ (*Ապացուցելու համար միացրեք լարի ծայրերը կենտրոնի հետ և դիտեք առաջված յեռանկյան կողմերի կախումից իրարից*)։

Համեմատեք շրջանի ներսում (C) *և նրանից դուրս* (D) *գըտնվող կետերի հեռավորությունը կենտրոնից՝ շառավիղի յերկարության հետ։*

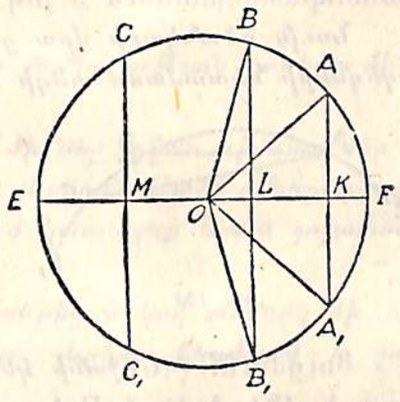
Շրջանի այն մասը (OAMB), *որը սահմանափակված է աղեղով և աղեղի ծայրերին տարած յերկու շառավիղներով, կոչվում է* արտաս (սեկտոր)։

Պարզ է, որ ամեն մի արտաս կարող է պատվել կենտրոնի շուրջը կամավոր անկյունով։

OAMB *արտասը պատենք որևէ անկյունով այնպես, որ* OA *շառավիղն ընդունի* OA_1 *դիրքը։ Այն ժամանակ* OB *շառավիղը և* AMB *աղեղը կընդունեն* OB_1 *և* A_1NB_1 *նոր դիրքերը և* AB *լարը կընդունի* A_1B_1 *նոր դիրքը։ Սրանից հետևում է, որ* շրջանի հավասար աղեղներին համապատասխանում են հավասար լարեր։

§ 56. ՏՐԱՄԱԳԻԾՆ ԻԲՐԵՎ ՇՐՋԱՆԻ ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ (ՍԻՄՄԵՏՐԻԱՅԻ) ԱՌԱՆՑՔ.

Տանենք շրջանի EF *տրամագիծը (գծ. 127) և ստացված աղեղներից մեկի վրա վերցնենք* A,B,C..... *կետերը։ Այդ կետերից տրամագծի վրա իջեցնենք* AK,BZ, CM.... *ուղղահայացներ և շարունակենք մինչև շրջանագծի* $A_1,B_1,C_1,\ldots$ *կետերում հատվելը, ստանում ենք մի շարք զուգահեռ լարեր,* AA_1, $BB_1,CC_1,\ldots$



Գծ. 127

Միացնենք A *և* A_1 *կետերը* O *կենտրոնի հետ։ Ոգտվելով* OAA_1 *յեռանկյունից, ապացուցեք, որ* A *և* A_1 *կետերը համաչափ են* EF *տրամագծի նկատմամբ։ Նույնը կարելի յե ապացուցել* B *և* B_1, C *և* $C_1,\ldots$ *կետերի նկատմամբ, այսինքն՝* EBF *աղեղի յուրաքանչյուր կետին* EB_1F *աղեղի վրա համապատասխանում է մի համաչափ կետ։ Այսպիսով* տրամագիծը շրջանի համաչափության առանցքն է։ Տրամագծին ուղղահայաց ամեն մի լար կիսվում է տրամագծով։

Շրջանը միակ պատկերն է, որն ունի համաչափության բազմաթիվ առանցքներ։ EBF *և* EB_1F *աղեղներն իրենք լինելով տրամագծի նկատմամբ համաչափ, հավասար են միմյանց, այսինքն՝ տրամագիծը կիսում է թե շրջանագիծը և թե շրջանը։*

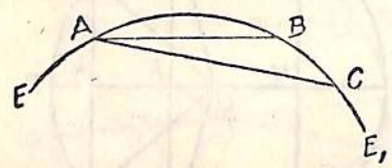
Տանելով ավյալ լարերին զուգահեռ տրամագիծ՝ ապացուցեք, որ կենտրոնից չանցնող լարը բաժանում է շրջանագիծը յերկու

անհավասար աղեղների, մեկը՝ կիսաշրջանագծից փոքր, մյուսը՝ կիսաշրջանագծից մեծ։

Համեմատենք AOA_1 *և* BOB_1 *կեռանկյունները. եթե* BOB_1 *կեռանկյան մեջ* BOB_1 *անկյունը մեծ է* AOA_1 *կեռանկյան* AOA_1 *անկյունից, իսկ այդ անկյունները կազմող կողմերը միմյանց հավասար են։ Եթե մի կեռանկյան կողմերից երկուսը համապատասխանաբար հավասար են մի այլ կեռանկյան կողմերից երկուսին, իսկ այդ կողմերի միջև ընկած անկյունները հավասար չեն, ապա այդ անկյուններից մեծի դիմաց գտնվում է մեծ կողմը. հետևապես,* $BB_1 > AA_1$։ *OL-ը և OK-ն այդ անհավասար լարերի հեռավորություններն են կենտրոնից, ըստ որում* $OL < OK$։ *Այսպիսով որքան լարը մոտ է կենտրոնին, այնքան մեծ է նա։* AB *և* A_1B_1 *աղեղները համաչափ լինելով՝ հավասար են, այսինքն՝ զուգահեռ լարերի միջև գտնվող աղեղները հավասար են։*

BFB_1 *և* AFA_1 *աղեղները փոքր են կիսաշրջանագծից.* $\smile BFB_1 > \smile AFA_1$ *և* BB_1 *լարը մեծ է* AA_1*-ից։ Ուրեմն, եթե երկու աղեղներ փոքր են կիսաշրջանագծից, ապա մեծ աղեղին համապատասխանում է մեծ լարը։*

Նույն գծանկարի վրա ցույց տվեք, որ կիսաշրջանագծից մեծ աղեղների նկատմամբ ունի լարերի հակադարձ կապակցությունը։



գծ. 128

Ցուցում։—Շրջանի կենտրոնը պետք է հավասար չափով հեռացած լինի A-ից և B-ից, A-ից և C-ից։

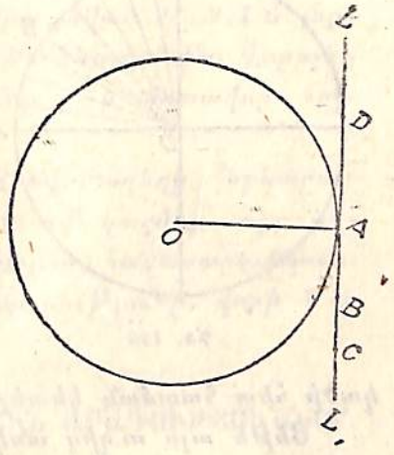
2. Մի ուղիղ գծի վրա չդասավորված երեք տվյալ կետերի վրայով անցկացրեք շրջան։

3. Ապացուցեք, որ հնարավոր չէ կառուցել մի շրջան, որն անցնի մի ուղիղի վրա դասավորված երեք կետերով։

4. Կառուցեք մի քանի շրջաններ, որոնք անցնեն տվյալ երկու կետերով։

§ 57. ՇՈՇԱՓՈՂ.

Վերցնենք շրջանագծի վրա որևէ կետ (A), տանենք այդ կետով OA շառավիղը և շառավիղին ուղղահայաց LL_1 *ուղիղը (գծ. 129)։ Բանի որ կետի և այդ ուղիղ գծի միջև եղած ամենակարճ տարածությունն այդ կետից ուղիղի վրա իջեցրած ուղղահայացն է, ապա* LL_1 *ուղիղի B, C, D, ... կետերն ավելի են հեռացած կենտրոնից, քան A կետը, այսինքն՝ նրանց հեռավորությունը կենտրոնից մեծ է A շառավիղից. հետևապես,* LL_1 *ուղիղի բոլոր կետերը, բացի A կետից, շրջանից դուրս են գտնվում։*



գծ. 129

Այն ուղիղը, որի մի կետը գտնվում է շրջանագծի վրա և մնացած բոլոր կետերն ընկած են շրջանից դուրս, կոչվում է շոշափող։

Խնդիրներ.—1. Վերև տասածների հիման վրա շրջանագծի վրա տրված կետում կառուցեք շրջանին շոշափող։

2. Ցույց տվեք մեքենաների շրջաններին տարած շոշափողների որինակներ։

3. Տված են՝ շրջան և ուղիղ։ Տանել շրջանին շոշափողն ը, որոնք զուգահեռ են տվյալ ուղիղին։

Ցուցմունք.—Տվյալ ուղիղի վրա իջեցնել կենտրոնից ուղղահայաց։

4. Ապացուցեք, որ հավասար երկարության լարերը մի որևէ շրջանի շոշափողներ են։

5. Տված է շրջան։ Կառուցեք մի նոր շրջան այնպես, որ նրան շոշափվեն տվյալ շրջանի մեջ բոլոր a *երկարություն ունեցող լարերը։*

6. Տվյալ ուղիղի տվյալ կետում կառուցեք նրան շոշափող և r *շառավիղ ունեցող շրջան։*

7. Տված է երկու կետ և կետերից մեկով անցնող մի ուղիղ։ Կառուցեք շրջան, որ անցնի այդ երկու կետերով և շոշափի տվյալ ուղիղին։

8. Տված են՝ շրջանին շոշափող և նրան զուգահեռ լար։ Ապացուցեք, որ այդ լարով ձգվող աղեղը շոշափման կետում կիսվում է։

9. Տված է շրջանին շոշափող։ Կառուցեք տված շոշափողին զուգահեռ շոշափող։ Ի՞նչպես են դասավորված երկու զուգահեռ շոշափողների շոշափման կետերը։

§ 58. ԿԵՆՏՐՈՆԱԿԱՆ ԱՆԿՅՈՒՆ.

Շրջանի երկու շառավիղներով կազմված անկյունը կոչվում է կենտրոնական անկյուն. *որինակ՝* $\angle AOB$ *(գծ. 130)։*

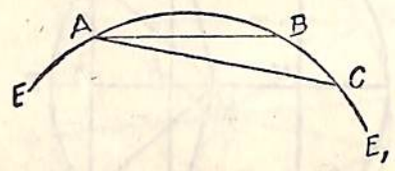
Ինչպես հայտնի է, ամեն անկյուն կարող է արտահայտվել ուղիղ անկյան մասերով։ Ուղիղ անկյան $^1/_{90}$ *մասն ընդունված է իբրև միավոր ու կոչվում է աստիճան։ Մեկ աստի-*

անհավասար աղեղների, մեկը՝ կիսաշրջանագծից փոքր, մյուսը՝ կիսաշրջանագծից մեծ։

Համեմատենք AOA_1 *և* BOB_1 *կեռանկյունները. BOB_1 կեռանկյան մեջ BOB_1 անկյունը մեծ է AOA_1 կեռանկյան AOA_1 անկյունից, իսկ այդ անկյունները կազմող կողմերը միմյանց հավասար են։ Եթե մի կեռանկյան կողմերից երկուսը համապատասխանաբար հավասար են մի այլ կեռանկյան կողմերից երկուսին, իսկ այդ կողմերի միջև ընկած անկյունները հավասար չեն, ապա այդ անկյուններից մեծի դիմաց գտնվում է մեծ կողմը. հետևապես,* $BB_1 > AA_1$։ *OL-ը և OK-ն այդ անհավասար լարերի հեռավորություններն են կենտրոնից, բայց որում* $OL < OK$։ *Այսպիսով որքան լարը մոտ է կենտրոնին, այնքան մեծ է նա։ AB և* A_1B_1 *աղեղները համաչափ լինելով՝ հավասար են, այսինքն՝ զուգահեռ լարերի միջեվ գտնվող աղեղները հավասար են։*

BFB_1 *և* AFA_1 *աղեղները փոքր են կիսաշրջանագծից. $\smile BFB_1 > \smile AFA_1$ և BB_1 լարը մեծ է AA_1-ից։ Ուրեմն, յերի յերկու աղեղներ փոխ են կիսաշրջանագծից, ապա մեծ աղեղին համապատասխանում է յեվ մեծ լարը։*

Նույն գծանկարի վրա գտնել տվեք, որ կիսաշրջանագծից մեծ աղեղների նկատմամբ տեղի ունի լարերի հակադարձ կապակցությունը։



գծ. 128

Խնդիրներ.— *1. Տված է շրջանի* EE_1 *աղեղը (գծ. 128), բայց կենտրոնն անհայտ է. անցկացնելով յերկու լար AB և AC՝ գտնել տվեք կենտրոնը։*

Յուցմունք.—*Շրջանի կենտրոնը պետք է հավասար չափով հեռացած լինի A-ից և B-ից, A-ից և C-ից։*

2. Մի ուղիղ գծի վրա չդասավորված յերեք տված կետերի վրայով անցկացրեք շրջան։

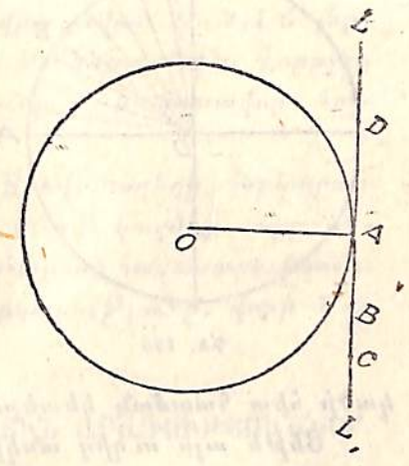
3. Ապացուցեք, որ հնարավոր չէ կառուցել մի շրջան, որն անցնի մի ուղիղի վրա դասավորված յերեք կետերով։

4. Կառուցեք մեքանի շրջաններ, որոնք անցնեն տվյալ յերկու կետերով։

§ 57. ՇՈՇԱՓՈՂ.

Վերցնենք շրջանագծի վրա որևէ կետ (A), տանենք այդ կետով OA շառավիղը և շառավիղին ուղղահայաց LL_1 ուղիղը (գծ. 129)։ Բանի որ կետի և այդ ուղիղ գծի միջև եղած ամենակարճ տարածությունն այդ կետից ուղիղի վրա իջեցրած ուղղահայացն է,

ապա LL_1 ուղիղի B,C,D,.... կետերն ավելի յեն հեռացած կենտրոնից, քան A կետը, այսինքն՝ նրանց հեռավորությունը կենտրոնից մեծ է A շառավիղից. հետևապես, LL_1 ուղիղի բոլոր կետերը, բացի A կետից, շրջանից դուրս են գտնվում։



գծ. 129

Այն ուղիղը, որի մի կետը գտնվում է շրջանագծի վրա յեվ մնացած բոլոր կետերն ընկած են շրջանից դուրս, կոչվում է շոշափող։

Խնդիրներ.—*1. Վերն ասածների հիման վրա շրջանագծի վորևէ կետում կառուցեք շրջանին շոշափող։*

2. Ցույց տվեք մեքենաների շրջաններին տարած շոշափողների որինակները։

3. Տված են՝ շրջան և ուղիղ։ Տանել շրջանին շոշափողներ, վորոնք զուգահեռ են տվյալ ուղիղին։

Յուցմունք.—*Տվյալ ուղիղի վրա իջեցնել կենտրոնից ուղղահայաց։*

4. Ապացուցեք, որ հավասար յերկարություն ունեցող լարերը մի վորևէ շրջանի շոշափողներ են։

5. Տված է շրջան։ Կառուցեք մի նոր շրջան այնպես, որ նրան շոշափվեն տվյալ շրջանի մեջ բոլոր a յերկարություն ունեցող լարերը։

6. Տվյալ ուղիղի տվյալ կետում կառուցեք նրան շոշափող և r շառավիղ ունեցող շրջան։

7. Տված է յերկու կետ և կետերից մեկով անցնող մի ուղիղ։ Կառուցեք շրջան, որ անցնի այդ յերկու կետերով և շոշափի տվյալ ուղիղին։

8. Տված են՝ շրջանին շոշափող և նրան զուգահեռ լար։ Ապացուցեք, որ այդ լարով ձգվող աղեղը շոշափման կետում կիսվում է։

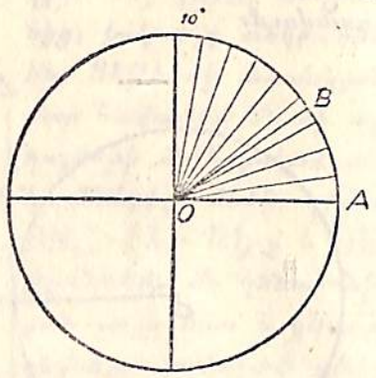
9. Տված է շրջանին շոշափող։ Կառուցեք տված շոշափողին զուգահեռ շոշափող։ Ինչպես են դասավորված յերկու զուգահեռ շոշափողների շոշափման կետերը։

§ 58. ԿԵՆՏՐՈՆԱԿԱՆ ԱՆԿՅՈՒՆ.

Շրջանի յերկու շառավիղներով կազմված անկյունը կոչվում է կենտրոնական անկյուն. *որինակ՝* $\angle AOB$ *(գծ. 130)։*

Ինչպես հայտնի է, ամեն անկյուն կարող է արտահայտվել ուղիղ անկյան մասերով։ Ուղիղ անկյան $^1/_{90}$ մասն ընդունված է իբրև միավոր ու կոչվում է անկյունային աստիճան։ Մեկ աստի-

ճանից փոքր անկյուններն արտահայտվում են անկյունային րոպեներով և վայրկյաններով. անկյունային րոպեն կազմում է $^1/_{60}$ աստիճան, անկյունային վայրկյանը՝ $^1/_{60}$ րոպե: Այս միավորները շատ հին ծագում ունեն. դրանք գործածության մեջ եկին դեռ ևս հներում՝ աստեղաստղիների մոտ:



Գծ. 130

Յեթե յերկու իրար ուղղահայաց արամագծեր տանենք, ապա կստանանք չորս ուղիղ անկյուն: Այդ դեպքում շրջանագիծը կբաժանվի չորս հավասար աղեղների, որոնք կոչվում են շրջանագծի քառորդներ, կամ կվադրանտներ, որինակ՝ յերկրագնդի միջօրեականները բևեռներով և հասարակածի հետ հատման կետերով բաժանվում են կվադրանտների:

Յեթե այս ուղիղ անկյունները բաժանենք անկյունային աստիճանների, ապա յուրաքանչյուր կվադրանտը կբաժանվի 90 հավասար աղեղների, որոնք կոչվում են աղեղնային աստիճաններ: Յեվ այսպես՝ աղեղնային աստիճան կազմում է կվադրանտի $^1/_{90}$ կամ ամբողջ շրջանագծի $^1/_{360}$ մասը: *Աղեղնային աստիճանի* $^1/_{60}$ *մասը կոչվում է* աղեղնային րոպե, *աղեղնային րոպեի* $^1/_{60}$ *մասը՝* աղեղնային վայրկյան:

Քանի որ շրջանագծի յերկարությունը համեմատական է շառավղի յերկարությանը, ապա աղեղնային աստիճանի յերկարությունն ևս համեմատական է շառավղի յերկարությանը. որինակ՝ յերկրային հասարակածի աղեղնային աստիճանը պարունակում է 110 կմ, իսկ զուգահեռական շրջանների աստիճանները որքան հեռանում են հասարակածից, այնքան՝ որքան մեծանում է նրանց աշխարհագրական լայնությունը, այնքան փոքրանում են:

Անկյունային աստիճանը, այսինքն՝ ուղիղ անկյան $^1/_{90}$ մասը, միանգամայն որոշ անկյուն է, որի մեծությունը կախված չէ կողմերի յերկարությունից:

Քանի որ 1^0 ունեցող կենտրոնական անկյունը հենվում է 1^0 ունեցող աղեղի վրա, ապա ամեն մի կենտրոնական անկյան մեջ պարունակվում է նույնքան անկյունային աստիճան (կամ նրա մասերը), որքան աղեղնային աստիճան (կամ նրա մասեր) պարունակվում է համապատասխան աղեղի մեջ: Կարճ ասած՝ «կենտրոնական անկյունը չափվում է իր աղեղով»: Որինակ՝ 130-րդ գծանկարի վրա AB աղեղը պարունակում է մոտ 36 աղեղնային-

նրա համապատասխան կենտրոնական անկյունը՝ 36 անկյունային աստիճաններ: Փոխադրիչի գործածությունը հիմնված է դրա վրա:

Վարժություններ. — 1. Հաշվեք յերկրային հասարակածի 1 վայրկյանի (1″) յերկարությունը, յեթե նրա շառավիղը հավասար է 6377 կմ-ի ($\pi=3,14$):

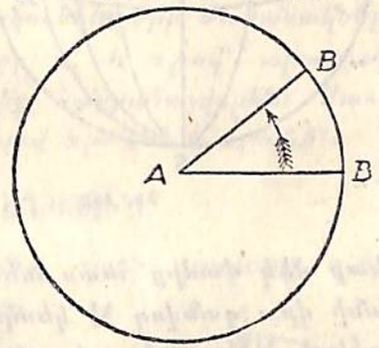
2. 1,5 մ շառավիղ ունեցող շրջանի վրա տված է 2,1 մ յերկարության աղեղ, որի ծայրերը միացած են կենտրոնին: Որոշեք ստացած կենտրոնական անկյան մեծությունը 1^0-ի մոտավոր ճշտությամբ ($\pi=3,14$):

3. Նշանակելով շրջանի շառավիղը R-ով, աղեղի յերկարությունը S-ով և նրա աստիճանների թիվը n-ով՝ կազմեք այդ մեծությունների փոխադարձ կախումն արտահայտող հավասարությունը:

4. Հաշվեք այն շրջանի շառավղի յերկարությունը, որի 1^0-ը հավասար է 1 սմ-ի:

§ 59. ԱՆԿՅՈՒՆԱՅԻՆ ՅԵՎ ՇՐՋԱՆԱԳԾԱՅԻՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

Յեթե մի կետում ամրացրած ձողը համաչափ պտտենք այդ կետի շուրջը (գծ. 131), ապա ժամանակի մեկ միավորի ընթացքում նա կանցնի մի որոշ BAB_1 անկյուն, որը կոչվում է անկյունային պտտման արագություն:



Գծ. 131

Միևնույն ժամանակ նրա շարժվող ծայրը ժամանակի մեկ միավորի ընթացքում անցնում է որոշ յերկարության աղեղ, որը կոչվում է շրջանագծային պտտման արագություն:

Խնդիրներ. — 1. Գտեք ժամացույցի ժամերի, րոպեների և վայրկյանների սլաքների անկյունային արագությունը, ընդունելով վայրկյանը ժամանակի միավոր:

2. Վորոշեք շոգեկառքի անիվի անկյունային պտտման արագությունը, յեթե գնացքի արագությունը մեկ ժամում հավասար է 50 կմ և անիվի տրամագիծը՝ 1,8 մ-ի (10^0 ի մոտավոր ճշտությամբ):

3. Վորոշեք հասարակածի կետի (R=6377 կմ) շրջանագծային արագությունը, որն ստացվում է յերկրագնդի պտտվելուց իր առանցքի շուրջը (0,1 կմ-ի մոտավոր ճշտությամբ):

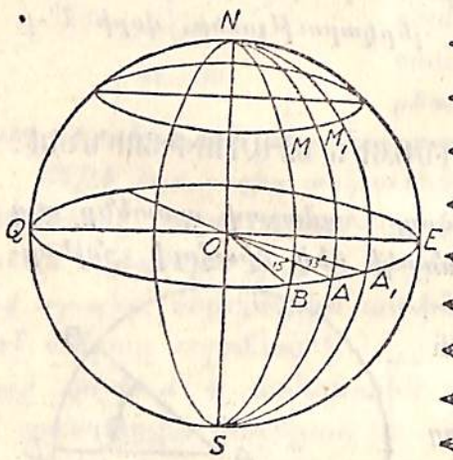
4. 35 սմ շառավիղ ունեցող կլոր սղոցը մի րոպեում 200 պտույտ է կատարում: Ի՞նչ արագությամբ է շարժվում սղոցի ատամը (մի վայրկյանում):

5. Շարժիչի թափանիվը, վորի տրամագիծը 5 մ է, մի րոպեյում 26 պտույտ է կատարում։ Ի՞նչպիսի շրջանագծային արագութիյուն ունի թափանիվը։

6. Սերզատ մեքենայի պատվող գլանը, վորն ունի 40 սմ տրամագիծ՝ մի վայրկյանում անում է 10 պտույտ։ Վիրքան է սերզատ մեքենայի աշխատելու ժամանակ քաշած կաթի մասնիկների շրջանագծային արագութիյունը։

§ 60. ՏԵՂԱԿԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ.

132-րդ գծանկարը պատկերացնում է յերկրագունդը, վորտեղ հաշվի չի առնված բևեռների մոտ յեղած նրա սեղմվածութիյունը։ NS-ը յերկրագնդի առանցքն է, EAQE-ն՝ հասարակածը, EQ-ն նրա



գծ. 132

տրամագիծը, վորը պատկում է գծանկարի հարթութիյան վրա. իսկ NAS, NES, NBS-ը միջօրեականներ են։

Յերկրագունդն իր առանցքի շուրջը լրիվ պտույտը կատարում է 24 ժամում. հետևապես, մեկ ժամում նա անցնում է $360^0 : 24 = 15^0$։

Հասարակածի յուրաքանչյուր կետը մեկ ժամում անցնում է հասարակածի 15^0 ունեցող աղեղ, որինակ՝ A կետը մեկ ժամից հետո տեղափոխվում է A_1 կետը։ NAS միջօրեականի վրա գտնվող M կետը նույն ժամանակում անցնում է դուրս MM_1 աղեղը և տեղափոխվում M-ից M_1 կետը։

Դիցուք՝ արևի կենտրոնը գտնվում է գծանկարի հարթութիյան վրա այնպես, վոր նրա ճառագայթներն ուղղված են NESQ գծանկարի հարթութիյանը զուգահեռ։ Այն վայրկյանին, յերբ NAS միջօրեականն անցնում է հարթութիյանը և բռնում NES դիրքը, նրա բոլոր կետերի համար կեսօր է, իսկ նրա հակադիր NQS միջօրեականի կետերի համար՝ կես գիշեր։

NBS միջօրեականը, վորը գտնվում է NAS-ից 15^0 հեռու, մի ժամից հետո այն դիրքը կընդունի, վորի հետևանքով իրարից 15^0 հեռու գտնվող միջօրեականների համար սահմանվում է տեղական ժամանակի մեջ մեկ ժամվա տարբերութիյուն։

Այս բացատրութիյունների հիման վրա հեշտութիյամբ կարելի յե հաշվել յերկրագնդի յերկու կետերի ժամանակների տարբերութիյունը, յեթե հայտնի յե նրանց յերկայնութիյունների տարբերութիյունը և հակառակը։

Աստղաբաշխները յերկայնութիյունները վորոշում են՝ գլխավոր ընդունելով այն միջօրեականը, վորն անցնում է Գրինվիչի աստղադիտարանի վրայով և ժամանակը հաշվում ըստ Գրինվիչի։

Խնդիրներ.—1. Վորոշեք յերկրագնդի յերկու կետերի յերկայնութիյունների տարբերութիյունը, յեթե նրանց ժամանակների տարբերութիյունն է՝ 2 ժամ, 1 ժամ 30 րոպե, 40 րոպե, 22 րոպե։

2. Վորոշեք յերկրագնդի յերկու կետերի ժամանակների տարբերութիյունը, յեթե նրանց յերկայնութիյունների տարբերութիյունն է՝ 1^0, $2^0 30'$, $12^0 20'$ $4^0 15'$, $90'$, 180^0։

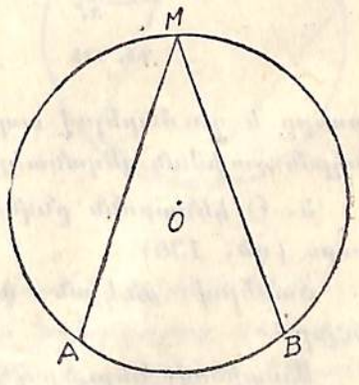
3. Վորոշեք Լենինգրադի, Ոդեսսայի, Կազանի, Վլադիվոստոկի, Բեռլինի, Փարիզի և Լոնդոնի ժամանակը, յերբ Մոսկվայում կեսօր է, հիմք ընդունելով ներքևի աղյուսակը, ուր նշված են այս քաղաքների արևելյան յերկայնութիյունները Գրինվիչի նկատմամբ.

Մոսկվա . . .	$37^0 34'$	Վլադիվոստոկ . .	$101^0 34'$
Լենինգրադ . .	$30^0 19'$	Բեռլին	$13^0 24'$
Ոդեսսա . . .	$30^0 45'$	Փարիզ	$2^0 20'$
Կազան . . .	$49^0 07'$		

4. Նշանակելով յերկրագնդի յերկու կետերի ժամանակները t_1 և t_2-ով և նրանց յերկայնութիյունները α_1 և α_2-ով՝ արտահայտեք այդ մեծութիյունների կախումն իրարից հանրահաշվորեն։ Ստուգեք կազմված հավասարութիյունը, վերցնելով $\alpha_1 = 10^0$ և $\alpha_2 = 55^0$։

§ 61. ՆԵՐԳԾՅԱԼ ԱՆԿՅՈՒՆ.

Ներգծյալ կոչվում է այն անկյունը, վորի գագաթը գտնվում է շրջանագծի վրա յեվ վորի կողմերը լարեր են, որինակ՝ $\angle AMB$ (գծ. 133)։



գծ. 133

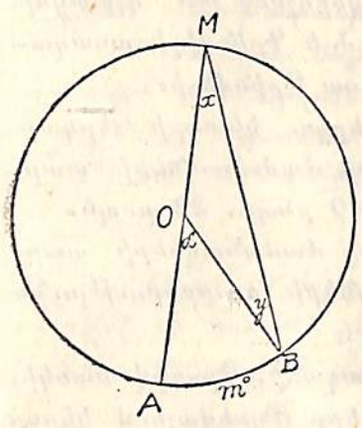
Շրջանի կենտրոնը գտնվում է AMB անկյան կողմերի միջև։ Լարերը տարբեր այնպես, վոր մի դեպքում կենտրոնը գտնվի ներգծյալ անկյունից դուրս և մյուս դեպքում կենտրոնը գտնվի կողմերից մեկի վրա։

Ներգծյալ անկյունը կենտրոնական անկյան հետ համեմատելու և նրա չափելու յեղանակը գտնելու համար, դիտարկենք այս յերեք դեպքերով առանձին-առանձին։

1. O կենտրոնը գտնվում է AMB ներգծյալ անկյան մի կողմի վրա (գծ. 134)

Ոգտվելով յեռանկյան արտաքին անկյան հատկութիւնից և կենտրոնական անկյան չափման յեղանակից՝ ապացուցեք, որ արամագծով և լարով կազմված անկյունը ($\angle x$) հավասար է կենտրոնական (α) անկյան կիսին, որը հենվում է նույն աղեղի վրա և այդ պատճառով էլ չափվում է իր աղեղի կիսով, այսինքն՝

$$x=\frac{\alpha}{2}=\frac{m^0}{2}:$$

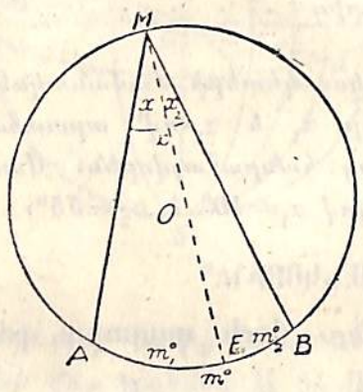


Գծ. 134

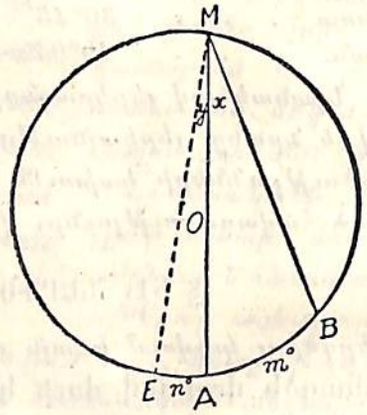
2. O կենտրոնը գտնվում է AMB ներգծյալ անկյան կողմերի միջև (գծ. 135)։

Տանելով ME արամագիծը՝ AMB անկյունը և նրա համապատասխան աղեղը բաժանում ենք յերկու մասի։

AB աղեղի աստիճանների թիվը նշանակելով m-ով, իսկ AE և EB մասերի աստիճանների թիվը՝ m_1 և m_2-ով, չափեք x անկյան



Գծ. 135



Գծ. 136

մասերը և գումարելով ապացուցեք, որ այս դեպքում ներգծյալ անկյան չափման յեղանակը նույնն է։

3. O կենտրոնն ընկնում է AMB ներգծյալ անկյան կողմերից դուրս (գծ. 136)։

Տանելով անկյան գագաթից ME արամագիծը՝ ապացուցեք նույնը։

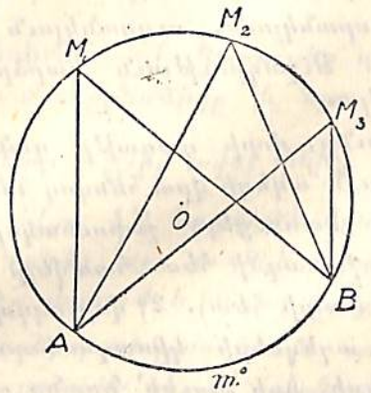
Այսպիսով, ներգծյալ անկյան կողմերն ինչպիսի դիրք էլ ընդունեն շրջանի կենտրոնի նկատմամբ, ներգծյալ անկյունը հավասար է նույն աղեղի վրա հենված կենտրոնական անկյան կիսին յեվ չափվում է իր աղեղի կիսով։

Ներգծյալ անկյան թեորեմից հետևում է.

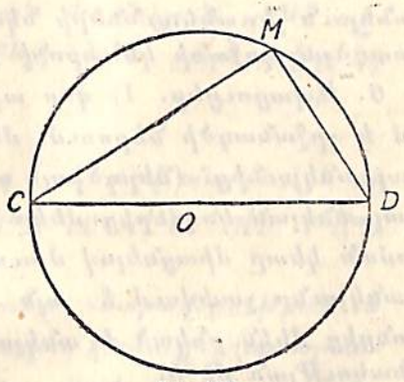
1) միևնույն աղեղի կամ հավասար աղեղների վրա հենվող բոլոր ներգծյալ անկյուններն իրար հավասար են, որինակ՝ AM_1B, AM_2B,... (գծ. 137)։

2) արամագծի (կամ կիսաշրջանագծի) վրա հենվող ամեն մի ներգծյալ անկյուն, որինակ՝ CMD-ն ուղիղ անկյուն է (գծ. 138), ինչու։

3) կիսաշրջանագծից փոքր աղեղի վրա հենվող ներգծյալ α անկյունը



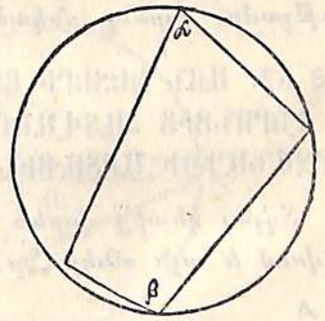
Գծ. 137



Գծ. 138

(գծ. 139) սուր է. կիսաշրջանագծից մեկ աղեղի վրա հենվող ներգծյալ β անկյունը՝ բութ է (ինչու)։

4) անհավասար աղեղների վրա հենվող կենտրոնական անկյունները համեմատական են իրենց աղեղներին (գծեք յերկու աղեղներ, որոնցից մեկը $1^1/_2$ անգամ մեծ լինի մյուսից, և ապացուցեք, որ այդ աղեղների վրա հենվող ներգծյալ անկյունների հարաբերությունը հավասար է աղեղների հարաբերությանը)։



Գծ. 139

Խնդիրներ.—1. Շրջանագիծը A, B և C յերեք հաջորդաբար վերցրած կետերով բաժանվում է յերեք աղեղների, որոնցից $\smile AB=100^0$, $\smile BC=60^0$։ Որոշեք ABC յեռանկյան անկյունների մեծությունը (այդպիսի յեռանկյունը կոչվում է շրջանին ներգծյալ)։

2. Շրջանագիծը A, B, C և D չորս հաջորդաբար դասավորած կետերով բաժանվում է չորս աղեղների, որոնցից $\smile AB=60^0$, $\smile BC=90^0$, $\smile CD=135^0$։ Որոշեք ABCD քառանկյան անկյունների մեծությունը։

3. ABC յեռանկյան գագաթները գտնվում են շրջանագծի վրա. $\angle A=\frac{3}{4}d$ և $\angle B=\frac{d}{3}$։ Որոշեք AB, BC և CD աղեղների աստիճանների թիվը։

4. Վերցնելով վորևե շառավիղով շրջան, կառուցեք նախորդ խնդրի յեռանկյունը (ոգտվեցեք կենտրոնական անկյուններից)։

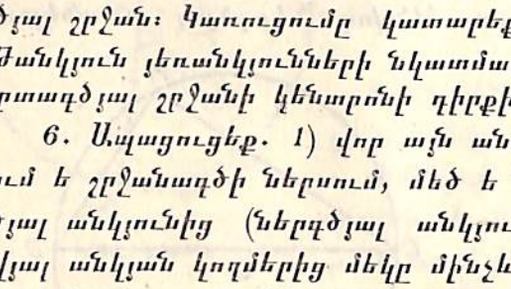
5. Այն յեռանկյունը, վորի կողմերը կազմում են շրջանի լարերը, կոչվում է շրջանին ներգծյալ, իսկ այդ շրջանը (վորն ուրեմն անցնում է յեռանկյան յերեք գագաթներով) կոչվում է յեռանկյանը արտագծյալ։ Կառուցեք ավյալ ABC յեռանկյանն արտագծյալ շրջան։ Կառուցումը կատարեք սրանկյուն, ուղղանկյուն և բթանկյուն յեռանկյունների նկատմամբ։ Ուշադրություն դարձրեք արտագծյալ շրջանի կենտրոնի դիրքի վրա։

6. Ապացուցեք. 1) վոր այն անկյունը, վորի գագաթը գտնվում է շրջանագծի ներսում, մեծ է նույն աղեղի վրա հենվող ներգծյալ անկյունից (ներգծյալ անկյունը կառուցեք, շարունակելով ավյալ անկյան կողմերից մեկը մինչև շրջանագծի հետ հատվելը և հատման կետը միացնելով մյուս կողմի ծայրի հետ). 2) վոր այդպիսի անկյունը չափվում է այն յերկու աղեղների կիսագումարով, վորոնցից մեկն ընկած է անկյան կողմերի, իսկ մյուսը՝ նրանց շարունակության միջև։

7. Ապացուցեք. 1) վոր շրջանից դուրս գագաթ ունեցող և հատողներով կազմված անկյունը, փոքր է այն ներգծյալ անկյունից, վորը հենված է այդ հատողների միջև ընկած աղեղներից մեծի վրա (ժամանակ գծերի կառուցումը նման է նախորդ խնդրի կառուցումներին). 2) վոր նա չափվում է այն յերկու աղեղների կիսատարբերությամբ, վորոնք ընկած են կողմերի միջև։

§ 62. ԱՅՆ ԿԵՏԵՐԻ ՅԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՏԵՂԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ, ՎՈՐՈՆՑԻՑ ՀԱՏՎԱԾԸ ՅԵՐԵՎՈՒՄ Է ՈՒՂԻՂ ԱՆԿՅՈՒՆՈՎ. ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ԱՐՏԱՔԻՆ ԿԵՏԻՑ ՆՐԱ ՇՈՇԱՓՈՂԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ.

Տվյալ կետից վորևե հատվածի տեսողության անկյուն (գծ. 140) կոչվում է այն անկյունը, վորը կազմվում է այդ կետից դեպի ավյալ հատվածի ծայրերն ընկնող ճառագայթներով։



Գծ. 140

Պարզ է, վոր տեսողության անկյունը կախված է կետի դիրքից, հատվածի նկատմամբ, որինակ՝ AB հատվածի տեսողության անկյունը M կետից ավելի մեծ է, քան N կետից (ինչու՞)։ Սատեցեք փոխադրիչով։

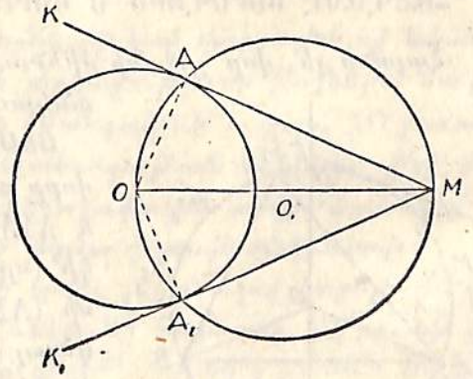
Մենք տեսանք, վոր կիսաշրջանագծի վրա հենվող անկյունն ուղիղ է։ Յեթե շրջանին արտագիծ տանենք (պատրաստեք նկարը) և կառուցենք տեսողության անկյուններ շրջանագծի վրա գտնվող կետերից, ապա տեսողության բոլոր անկյունները կլինեն ուղիղ։

Հետևապես, այն կետերի յերկրաչափական տեղը, վորոնցից տվյալ հատվածը յերևում է ուղիղ անկյունով՝ շրջանագիծ է, վորի տրամագիծը կազմում է տվյալ հատվածը (կատարեք այդ յերկրաչափական տեղի կառուցումը վորևե ավյալ հատվածի նկատմամբ)։

Ցուցումներ.—1. Կառուցեք ուղղանկյուն յեռանկյուն, յեթե տրված են c ներքնաձիգը և նրա վրա իջեցրած h բարձրությունը (h-ը չպետք է $\frac{c}{2}$-ից ավել լինի)։

2. Տվյալ AB հատվածի վրա գտնվող C կետով անցնում է մի ուղիղ։ Գտնել այդ ուղիղի վրա այն կետերը, վորտեղից տվյալ հատվածը յերևում է ուղիղ արկյունով։

Ներգծյալ անկյան նույն հատկությունը հնարավորություն է տալիս արտաքին կետից շրջանագծին շոշափող կառուցել (պատրաստեք շրջանի և արտաքին կետի գծանկարը, նախորոք մոտավորապես նկատի առեք այդ շոշափողները և շոշափման կետերը, միացրեք կենտրոնը շոշափման կետերի և տվյալ կետի հետ)։ Ապացուցեք, վոր կենտրոնը և տվյալ կետը միացնող հատվածը շոշափման կետերից պետք է յերևա ուղիղ անկյունով (համաձայն շոշափողի ուղղության վերաբերող թեորեմի) և հետո կատարեք շոշափողների կառուցումը նոր գծանկարի վրա։ Կրկնեցեք կառուցումը, փոխելով արտաքին կետի և կենտրոնի միջև յեղած հեռավորությունը, սակայն շրջանի մեծությունը թողնելով նույնը։



Գծ. 141

Գծանկար 141-ի վրա O-ն ավյալ շրջանն է, M-ը ավյալ կետն է, MK և MK_1 շրջանին տարած շոշափողներ են, A և A_1 շոշափման կետերն են, O_1-ը ժամանակ կենտրոնն է, այսինքն՝ այն կետերի յերկրաչափական տեղը, վորտեղից OM հատվածը յերևում է ուղիղ անկյունով։

Ինչ առաջ (§ 57) մենք տեսանք, վոր շրջանագծի վրա գտնվող կետով անցնում է միայն մեկ շոշափող. հիմա տեսնում ենք, վոր շրջանագծից դուրս գտնվող կետից նրան կարելի յե տանել

չերկու շոշափողներ. շրջանի ներսում վերցրած կետով վոչ մի շոշափող չի կարող անցնել։

Խնդիրներ.—1. *Ապացուցեք.* 1) *վոր միևնույն կետից միևնույն շրջանին տարած շոշափողները միմյանց հավասար են (շոշափողի չերկարությունը վորոշվում է շոշափողի այն հատվածի չերկարությամբ, վորն ընկած է տվյալների և շոշափման կետերի միջև).* 2) *վոր այն անկյունը, վորը կազմվում է շոշափման կետերին տարված շառավիղներով ($\angle AOA_1$) և այն անկյունը, վորը կազմվում է M կետից տարված չերկու շառավիղներով ($\angle AMA_1$) տվյալ կետը և կենտրոնը միացնող ուղիղով բաժանվում են հավասար մասերի.* 3) *վոր շոշափման կետերը համաչափ են այդ ուղիղի նկատմամբ։*

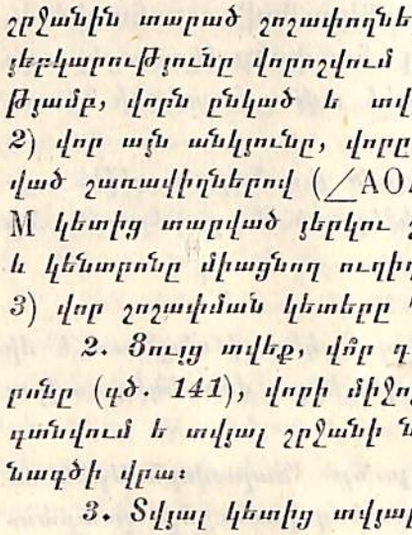
2. *Ցույց տվեք, վոր դեպքում ոժանդակ շրջանագծի O_1 կենտրոնը (գծ. 141), վորի միջոցով վորոշվում են շոշափման կետերը, գտնվում է տվյալ շրջանի ներսում, նրանից դուրս կամ նրա շրջանագծի վրա։*

3. *Տվյալ կետից տվյալ շրջանին տանել հատողներ այնպես, վոր տտացված լարերն ունենան a չերկարություն։*

4. *Գտնել այն կետերի չերկրաչափական տեղը, վորտեղից շրջանին տարած շոշափողներն ունեն a չերկարություն։*

§ 63. ԱՅՆ ԿԵՏԵՐԻ ՉԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՏԵՂԸ, ՎՈՐՏԵՂԻՑ ՏՎՅԱԼ ՀԱՏՎԱԾԸ ՉԵՐԵՎՈՒՄ Է ՍՈՒՐ ԿԱՄ ԲՈՒԹ ԱՆԿՅՈՒՆՈՎ.

Հայտնի չե, վոր շրջանի միևնույն աղեղի վրա հենվող ներգծյալ անկյունները հավասար են միմյանց։



Գծ. 142

Յեթե տանենք AB լարը (գծ. 142), վորը բաժանում է շրջանը չերկու AM_1B և ALB աղեղների, ապա նրանցից մեկի (օրինակ ALB) վրա հենվող և մյուսի (AM_1B) վրա գագաթ ունեցող ներգծյալ անկյունները հավասար են, այսինքն՝ տվյալ AB հատվածը չերևում է AM_1B ուղիղի բոլոր M_1, M_2, M_3, M_4,.... կետերից միևնույն անկյունով։ Յեթե AB հատվածի մյուս կողմի վրա AM_1B աղեղին համաչափ աղեղ կառուցենք, ապա նրա կետերից AB հատվածը կերևա նույն անկյունով։

Այսպիսով. այն կետերի չերկրաչափական տեղը, վորտեղից տվյալ հատվածը չերևում է տվյալ անկյունով, կլինեն այն չերկու աղեղները (AKB չեվ AM_1B), վորոնց համար տվյալ հատվածն ընդհանուր լար է։

Հիմա տեսնենք, ինչպես կարելի չե վորոշել այդ աղեղներից մեկի կենտրոնը, օրինակ՝ O (O_1-ը համաչափ է O-ին), չերբ հայտնի չե α տեսողության անկյան մեծությունը։

Առաջինը, O կենտրոնը պետք է հավասարապես հեռացած լինի տվյալ հատվածի A և B ծայրերից, և հետևապես նա գտնվում է այդ հատվածի միջնուղղահայացի վրա։

Յերկրորդ՝ վորպեսզի ներգծյալ անկյունն ունենա տվյալ α մեծությունը, կենտրոնական AOB անկյունը պետք է հավասար լինի 2α-ի, իսկ նրա AOL կեսը պետք է հավասար լինի α-ին։ Յեթե AB հատվածի միջնուղղահայացի վորևե կետում, օրինակ E-ում, կառուցենք α-ին հավասար $\angle LEF$-ը, ապա OA շառավիղը պետք է լինի FE-ին ուղղահեռ։

Այսպիսով, O կենտրոնի դիրքը վորոշվում է AB հատվածի միջնուղղահայացի և ոժանդակ FE ուղիղին A կետից տարած ուղղահեռ ուղիղի հատումով։

O_1 կենտրոնը և չերկրորդ AKB աղեղը կառուցվում են, իբրև O կենտրոնին և AM_1B աղեղին համաչափ կենտրոն և աղեղ։

Հիմնվելով այս բոլորի վրա՝ կառուցեք այն կետերի չերկրաչափական տեղը, վորոնցից 6 սմ չերկարության տվյալ հատվածը չերևում է α սուր անկյունով։

Կրկնեք կառուցումը՝ մեծացնելով կամ փոքրացնելով տեսողության անկյունը, իսկ հատվածի չերկարությունը թողնելով նույնը։

Գտեք, ինչ դիրք կունենան ոժանդակ EF ուղիղը, AO շառավիղն ու O և O_1 կենտրոնները, չեթե տեսողության անկյունը լինի բութ։

Կառուցեք այն կետերի չերկրաչափական տեղը, վորտեղից 8 սմ չերկարության տվյալ հատվածը չերևա β բութ անկյունով։

O կենտրոնի դիրքն ավելի պարզ չեղանակով կարելի չե վորոշել, չերբ տվյալ տեսողության անկյունը հավասար է մի քանի վորոշ մեծությունների. օրինակ՝ չերբ $\alpha=45^0$, $\alpha=60^0$, $\alpha=30^0$։ *Ցույց տվեք այս դեպքերի նկատմամբ չերկրաչափական տեղի կառուցման պարզեցրած չեղանակը և կատարեք այդ կառուցումը։*

Խնդիրներ.—1. *Տվյալ AB հատվածի P կետով անցնում է մի ուղիղ. այդ ուղիղի վրա գտեք այն բոլոր կետերը, վորոնցից տվյալ AB հատվածը չերևում է α անկյունով։*

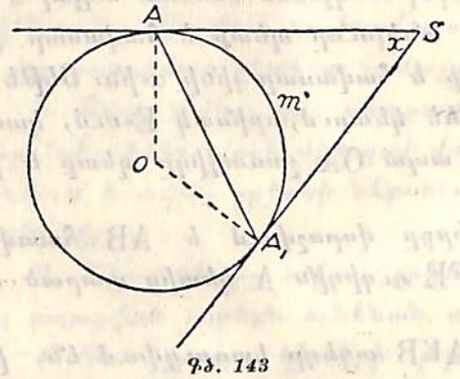
2. *Կառուցեք չեռանկյուն a կողմով, նրա դիմացի α անկյունով և տվյալ կողմի m միջնագծով։*

3. *Կառուցեք չեռանկյուն a կողմով, նրա դիմացի α անկյունով և նրա վրա իջեցրած h բարձրությամբ։*

4. Ուղիղի վրա տրված են A, B և C կետերը։ Գտեք յերկու կետեր, վորոնցից AB և BC հատվածները յերևում են 60^0 45^0 անկյունով։

§ 64. ԱՐՏԱԳԾՅԱԼ ԱՆԿՅՈՒՆ, ՇՈՇԱՓՈՂՈՎ ՈՒ ԼԱՐՈՎ ԿԱԶՄԱԾ ԱՆԿՅՈՒՆ.

Յերկու շոշափողներով կազմված անկյունը կոչվում է արտագծյալ անկյուն (գծ. 143)։ Նրա կողմերի մեջ ներփակված են յերկու աղեղներ։ Յենթադրենք նրանցից փոքրը պարունակում է m^0։



Գծ. 143

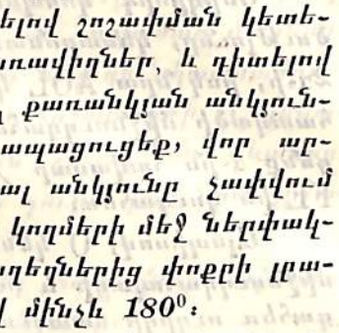
Տանելով շոշափման կետերին շառավիղները, և դիտելով $OASA_1$ քառանկյան անկյունները՝ ապացուցեք, վոր արտագծյալ անկյունը չափվում է նրա կողմերի մեջ ներփակված աղեղներից փոքրի լարությամբ մինչև 180^0։

Շոշափման A և A_1 կետերը միացնելով լարով՝ A և A_1 գագաթների մոտ առաջվում են անկյուններ, վորոնք կազմված են շոշափողով և լարով։ Դիտելով ASA_1 հավասարասրուն յեռանկյան անկյունները՝ ապացուցեք, վոր շոշափողով և լարով կազմված անկյունը չափվում է իր կողմերի մեջ ընկած աղեղի կիսով։

Այն յեռանկյունը, վորը կազմված է շոշափողներով, կոչվում է շրջանին արտագծյալ. յեռանկյան կողմերին շոշափվող շրջանը կոչվում է յեռանկյանը ներգծյալ։ Կառուցեք ABC յեռանկյանը ներգծյալ շրջան։

§ 65. ՅԵՐԿՈՒ ՇՐՋԱՆՆԵՐԻ ՓՈԽԱԴԱՐՁ ԴԻՐՔԸ.

Ընդհանուր կենտրոն ունեցող յերկու շրջանները կոչվում են համակենտրոն (կոնցենտրիկ (գծ. 144)։



Գծ. 144

Տեխնիկայի մեջ համակենտրոն շրջանները գործ են ածվում շարժում հաղորդելու համար արագության փոփոխման հետ. յերկու տարբեր արամագիծ ունեցող անիվներ, վորոնք հագցրված են միևնույն առանցքին՝ ունեն հավասար անկյունային և իրենց արամագծերին համեմատական շրջանագծային արագություննե՛րը, որինակ՝ թափանիվն ունի նույն արագությունը, ինչ վոր նրա առանցքը, սակայն նրա շրջանագծային արագությունն ավել է առանցքի շրջանագծային արագությունից այնքան անգամ, վորքան նրա արամագիծը մեծ է առանցքի արամագծից։

Յերկու համակենտրոն շրջաններից մեծի շրջանագծի վրա գտնվող կետերը փոքրի համար հանդիսանում են արտաքին կետեր. ընդհակառակը՝ փոքր շրջանագծի վրա գտնվող կետերը մեծի համար հանդիսանում են ներքին կետեր։

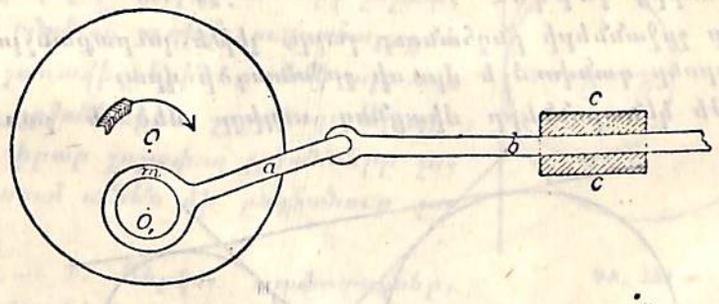
Ընդհանուր կենտրոն չունեցող յերկու շրջաններ կոչվում են ապակենտրոն (եքսցենտրիկ)։ Բացի այդ, յեթե նրանց շառավիղները հավասար չեն, ապա հնարավոր է, վոր շրջաններից մեկը գտնվի մյուսի ներսում (գծ. 145)։ Ապացուցեք, վոր այս դեպքում կենտրոնների միջև յեղած հեռավորությունը (կենտրոնագիծը) փոքր է շառավիղների տարբերությունից՝

$$A < R - R_1:$$

(Ապացուցելու համար OO_1-ը շարունակեք մինչև մեծ շրջանի շրջանագծի հետ հատվելը)։

Գծ. 145

Շրջանների այս ձևի դասավորումը գործադրվում է մեքենաների մեջ՝ պտտվող շարժումը առաջացող շարժման վերածելու համար և ընդհակառակը (գծ. 146)։

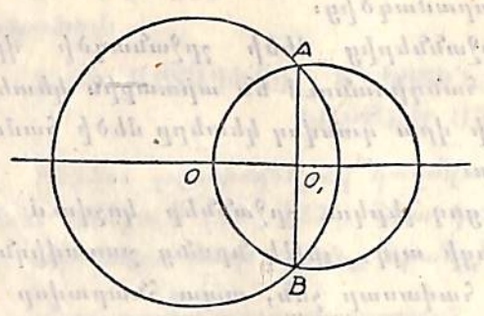


Գծ. 146

O շրջանը պտտվում է անշարժ կենտրոնի շուրջը. O_1-ը ապակենտրոն շրջանն է (եքսցենտրիկ). m-ը O_1 շրջանն ընդգրկող ողակ է, վորը a շարժանակի հետ կազմում է մեկ ամբողջություն, իսկ b-ն մեքենայի անշարժ մուֆտի միջով անցնող ձողն է։ Ցույց տվեք, վորպիսի շարժում կատանան O_1, m, a և b, յերբ O շրջանը պտտվում է անշարժ կենտրոնի շուրջը։

Յերկու ապակենտրոն շրջաններ կարող են փոխադարձաբար հատվել (գծ. 147 և 148)։ Յերկու ապակենտրոն շրջանների կենտ-

բոններից անցնող ուղիղն այդ շրջանների համար համաչափության ընդհանուր առանցքն է։ Այդ պատճառով շրջանների հատման



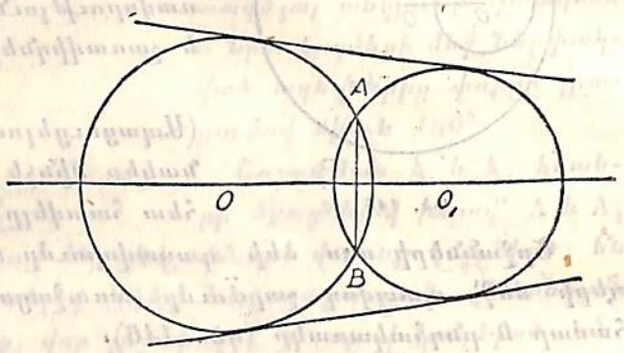
Գծ. 147

յերկու կետերը համաչափ են դասավորված կենտրոնները միացնող ուղիղի նկատմամբ. այսինքն՝ յերկու հատվող շրջանների ընդհանուր լարն ուղղահայաց է կենտրոնները միացնող ուղիղին և նրանով բաժանվում է հավասար մասերի։

Ասացուցեք, որ հատվող շրջանների կենտրոնների միջև յեղած տարածությունը մեծ է շառավիղների տարբերությունից, բայց փոքր՝ նրանց գումարից.

$$R-R_1<a<R+R_1$$

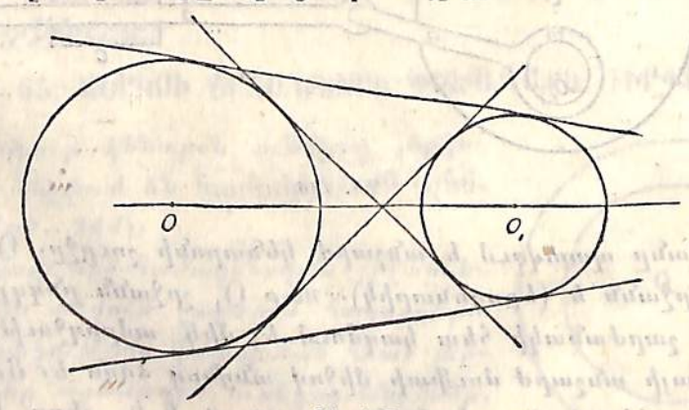
(միացրեք հատման կետը կենտրոնների հետ և քննեք OO_1A յեռանկյան կողմերի փոխադարձ կախումը)։



Գծ. 148

Խնդիր. — Վորոշեք, ինչ անկյունով է յերևում կենտրոններից յերկու հավասար շրջանների ընդհանուր լարը, յեթե յուրաքանչյուր շրջանի կենտրոնը գտնվում է մյուսի շրջանագծի վրա։

Յեթե կենտրոնները միացնող ուղիղը մեծ է շառավիղների

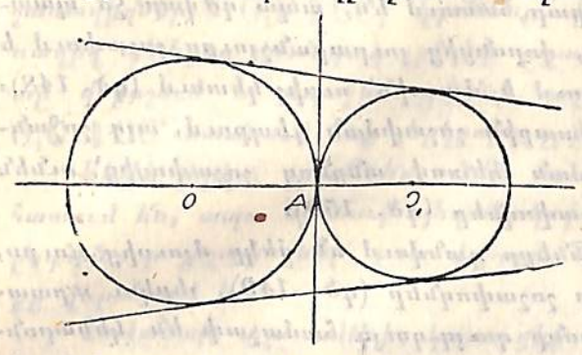


Գծ. 149

գումարից ($a>R+R_1$), ապա շրջանները չունեն ընդհանուր կետ և յուրաքանչյուրը նրանցից դասավորվում է մեկը մյուսից դուրս (գծ. 149)։

Շրջանների այս ձևի դասավորումը կիրառվում է փոկային փոխանցման ժամանակ, ըստ վորում շրջանագծային արագությունը մի անիվից փոխանցվում է մյուսին առանց փոփոխության, իսկ անկյունային արագությունը փոփոխվում է։

Յեթե կենտրոնները միացնող ուղիղը հավասար է շառավիղների գումարին կամ տարբերությանը, ապա նրանք իրար շոշափում են. յերբ $a=R+R_1$ տեղի կունենա արտաքին շոշափում (գծ. 150), իսկ յերբ $a=R-R_1$՝ ներքին շոշափում (գծ. 151)։

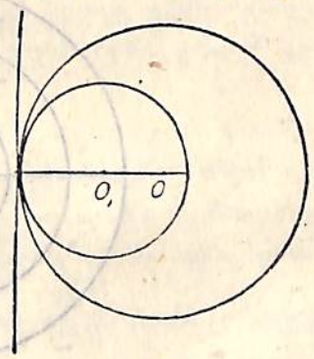


Գծ. 150

Շրջանների այս ձևի դասավորումը կիրառվում է տեխնիկայի մեջ ատամնավոր անիվների միջոցով շարժում փոխանցելու ժամանակ։

Արտաքին շոշափման դեպքում անիվների ատամները ուղղված են դուրս, իսկ ներքին շոշափման դեպքում՝ մեծ անիվի ատամները ուղղված են ներս։ Պարզ է, որ ատամնավոր անիվների միջոցով շարժում փոխանցելու ժամանակ փոխվում է ոչ թե շրջանագծային, այլ անկյունային արագությունը։

Յերկու իրար շոշափող շրջանների շոշափման կետով անցնող ուղիղն ուղղահայաց է OA և O_1A շառավիղներին. ուրեմն այդ ուղիղը կլինի շրջաններին շոշափող։ Այսպիսով, յերկու իրար շոշափող շրջանները շոշափման կետում ունեն մի ընդհանուր շոշափող։



Գծ. 151

Խնդիրներ. — 1. Յերկու ատիողակները, վորոնց տրամագծերն են 36 և 60 սմ, հագցրած են մի ընդհանուր առանցքի, վորը մեկ րոպեում 150 պտույտ է կատարում։

Վորոշեք նրանց անկյունային և շրջանագծային արագությունները։

2. Յերկու անիվներ, վորոնց տրամագծերն են 60 և 24 սմ, միացած են իրար փոկավոր հաղորդակցությամբ։ Նրանցից մեծը մի րոպեում 180 պտույտ է կատարում։ Վորոշեք (ընդունելով վայրկյանն իբրև ժամանակի միավոր) նրանց անկյունային և շրջանագծային արագությունները։

§ 66. ՅԵՐԿՈՒ ՇՐՋԱՆՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՇՈՇԱՓՈՂՆԵՐ.

Յեթե մի շրջանագիծ գտնվում է մյուսի մեջ ($a<R-R_1$), ապա նրանք ընդհանուր շոշափող չունեն։

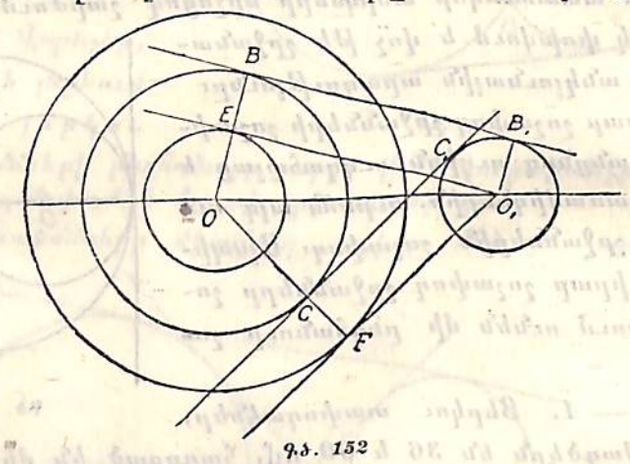
Յեթե յերկու շրջանագիծ ունեն ներքին շոշափում ($a=R-R_1$), ապա նրանք ունեն մի ընդհանուր շոշափող, վորն անցնում է նրանց ընդհանուր կետով (գծ. 151)։

Յեթե յերկու շրջան իրար հատում են, ապա դժվար չէ պատկերացնել յերկու ուղիղներ, վորոնցից յուրաքանչյուրը շոշափում է շրջաններից մեկին մի կետում և մյուսին՝ ուրիշ կետում (գծ. 148)։

Յերկու շրջանների արտաքին շոշափման դեպքում, այդ շրջանները, բացի նրանց շոշափման կետով անցնող շոշափողից՝ ունեն նաև յերկու ընդհանուր շոշափողներ (գծ. 150)։

Վերջապես, յերբ շրջանները գտնվում են մեկը մյուսից դուրս, նրանք ունեն 4 ընդհանուր շոշափողներ (գծ. 149), յերկու արտաքին և յերկու ներքին, վորոնք զույգ-զույգ համաչափ են կենտրոնները միացնող ուղիղի նկատմամբ։ Գտնենք նրանց կառուցման յեղանակը (գծ. 152)։

O և O_1 շրջաններն ունեն ընդհանուր արտաքին շոշափող, վորի շոշափման կետերն են՝ B և B_1-ը, OB և O_1B շառավիղներին



գծ. 152

ուղղահայաց լինելով ընդհանուր շոշափողին՝ զուգահեռ են իրար։ Փոքր շրջանի O_1 կենտրոնից տանենք $O_1E \parallel BB_1$։ BB_1O_1E քառանկյունն ուղղանկյուն է, հետևապես $BE=O_1B_1$, իսկ $OE=R-R_1$։ Կառուցենք O շրջանին համակենտրոն (կոնցենտրիկ) շրջան, վորի շառավիղը վերցնենք հավասար OE-ին, այսինքն՝ $R-R_1$-ին։ O_1E ուղիղը վորոշվում է իբրև այդ ժամանակ շրջանին տարած շոշափող։ Այսպիսով, կառուցելով $R-R_1$ շառավիղով ժամանակ շրջան և տանելով O_1E շոշափողը՝ գտնում ենք E կետը։

Շարունակելով OE ուղիղն այնքան, վոր նա հատվի O շրջանի հետ, գտնում ենք շոշափման B կետը. տանելով $O_1B_1 \parallel OB_1$, գտնում ենք շոշափման B_1 կետը։ Այդ յերկու կետերը միացնող ուղիղը կլինի շրջանների յերկու արտաքին ընդհանուր շոշափողներից մեկը։ O_1-ից ժամանակ շրջանին տարած յերկրորդ շոշափողը տալիս է յերկրորդ ընդհանուր արտաքին շոշափողը։

Դիտենք ներքին CC_1 շոշափողը. տանելով շոշափման կետերին շառավիղներ և $O_1F \parallel CC_1$՝ կգտնենք, վոր O_1F ուղիղը $R+R_1$ շառավիղ ունեցող ժամանակ շրջանի շոշափողն է։ Շոշափման F կետը վորոշում է առաջին շրջանի շոշափման C կետը. տանելով $O_1C_1 \parallel OC$՝ ստանում ենք յերկրորդ շրջանի շոշափման C_1 կետը։

Յեթե յերկու շրջաններ ունեն արտաքին շոշափում կամ իրար հատում են, ապա միևնույն յեղանակով կարելի չէ կառուցել նրանց ընդհանուր շոշափողները, ըստ վորում ներքին շոշափողների դեպքը վերանում է։

Համաձայն այս ամենի, կառուցեք յերկու շրջանների ընդհանուր շոշափողները, յերբ այդ շրջանները զանազան դիրք են գրավում իրար նկատմամբ։

§ 66. ՅԵՐԿՈՒ ՇՐՋԱՆՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՇՈՇԱՓՈՂՆԵՐ.

Եթե մի շրջանագիծ գտնվում է մյուսի մեջ ($a<R-R_1$), ապա նրանք ընդհանուր շոշափող չունեն։

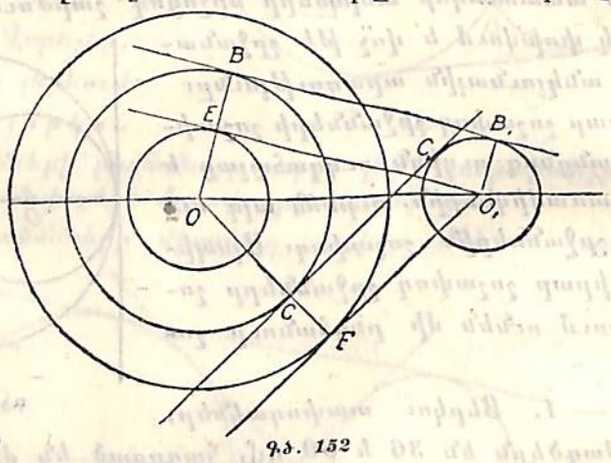
Եթե յերկու շրջանագիծ ունեն ներքին շոշափում ($a=R-R_1$), ապա նրանք ունեն մի ընդհանուր շոշափող, որն անցնում է նրանց ընդհանուր կետով (գծ. 151)։

Եթե յերկու շրջան իրար հատում են, ապա դժվար չէ պատկերացնել յերկու ուղիղներ, որոնցից յուրաքանչյուրը շոշափում է շրջաններից մեկին մի կետում և մյուսին՝ ուրիշ կետում (գծ. 148)։

Յերկու շրջանների արտաքին շոշափման դեպքում, այդ շրջանները, բացի նրանց շոշափման կետով անցնող շոշափողից՝ ունեն նաև յերկու ընդհանուր շոշափողներ (գծ. 150)։

Վերջապես, յերբ շրջանները գտնվում են մեկը մյուսից դուրս, նրանք ունեն 4 ընդհանուր շոշափողներ (գծ. 149), յերկու արտաքին և յերկու ներքին, որոնք զույգ-զույգ համաչափ են կենտրոնները միացնող ուղիղի նկատմամբ։ Թողնենք նրանց կառուցման յեղանակը (գծ. 152)։

O և O_1 շրջաններն ունեն ընդհանուր արտաքին շոշափող, որի շոշափման կետերն են՝ B և B_1-ը։ OB և O_1B շառավիղներին



գծ. 152

ուղղահայաց լինելով ընդհանուր շոշափողին՝ զուգահեռ են իրար։ Փոքր շրջանի O_1 կենտրոնից տանենք $O_1E \parallel BB_1$։ BB_1O_1E քառանկյունն ուղղանկյուն է, հետևապես $BE=O_1B_1$, իսկ $OE=R-R_1$։ Կառուցենք O շրջանին համակենտրոն (կոնցենտրիկ) շրջան, որի շառավիղը վերցնենք հավասար OE-ին, այսինքն՝ $R-R_1$-ին։ O_1E ուղիղը որոշվում է իբրև այդ ժամանդակ շրջանին տարած շոշափող։ Այսպիսով, կառուցելով $R-R_1$ շառավիղով ժամանդակ շրջան և տանելով O_1E շոշափողը՝ գտնում ենք E կետը։

Շարունակելով OE ուղիղն այնքան, որ նա հատվի O շրջանի հետ, գտնում ենք շոշափման B կետը. տանելով $O_1B_1 \parallel OB_1$, գտնում ենք շոշափման B_1 կետը։ Այդ յերկու կետերը միացնող ուղիղը կլինի շրջանների յերկու արտաքին ընդհանուր շոշափողներից մեկը։ O_1-ից ժամանդակ շրջանին տարած յերկրորդ շոշափողը տալիս է յերկրորդ ընդհանուր արտաքին շոշափողը։

Դիտենք ներքին CC_1 շոշափողը. տանելով շոշափման կետերին շառավիղներ և $O_1F \parallel CC_1$՝ կգտնենք, որ O_1F ուղիղը $R+R_1$ շառավիղ ունեցող ժամանդակ շրջանի շոշափողն է։ Շոշափման F կետը վորոշում է առաջին շրջանի շոշափման C կետը. տանելով $O_1C_1 \parallel OC$՝ ստանում ենք յերկրորդ շրջանի շոշափման C_1 կետը։

Եթե յերկու շրջաններ ունեն արտաքին շոշափում կամ իրար հատում են, ապա միևնույն յեղանակով կարելի չէ կառուցել նրանց ընդհանուր շոշափողները, ըստ վորում ներքին շոշափողների դեպքը վերանում է։

Համաձայն այս ամենի, կառուցեք յերկու շրջանների ընդհանուր շոշափողները, յերբ այդ շրջանները զանազան դիրք են գրավում իրար նկատմամբ։

ԳԼՈՒԽ VII.

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐ ՅԵՎ ՏԱՌԱՅԻՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ.

§ 67. ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐՈՎ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆԸ.

Թվաբանական կոտորակներով գործողություններին պարզ ձև տալու համար, հաճախ համարիչը և հայտարարը վեր ենք լուծում բազմապատկիչների, այսինքն՝ ներկայացնում նրանց իբրև ավելի պարզ թվերի արտադրյալներ. այդ յեղանակը կիբառվում և կոտորակների կրճատման և ընդհանուր հայտարարի բերելու ժամանակ։

Յեթե հարկավոր ե, օրինակ՝ կրճատել $\frac{21}{35}$-ը, ապա համարիչը և հայտարարը մենք գրում ենք այսպես՝ $21=3\,.\,7$ և $35=5\,.\,7$ և բաժանում նրանց ընդհանուր բազմապատկչի վրա՝

$$\frac{21}{35}=\frac{3\,.\,7}{5\,.\,7}=\frac{3}{5};$$

Յեթե հանրահաշվական կոտորակի համարիչն ու հայտարարը միանդամներ են, ապա վերջիններս արդեն արտադրյալներ են և նրանց ընդհանուր բազմապատկիչը դանվում ե անմիջապես։ Պարզ ե, որ օրինակ՝ $\frac{2ax}{3ab}$ կոտորակը կարելի յե կրճատել, որովհետև նրա անդամներն ունեն a ընդհանուր բազմապատկիչ և կոտորակն առանում ե ավելի պարզ ձև՝ $\frac{2x}{3b}$։

$\frac{a^2}{bc}$ *կոտորակը չի կարելի կրճատել, որովհետև նրա անդամներն ընդհանուր բազմապատկիչ չունեն։*

Վարժություն.—*Կրճատեք հետևյալ միանդամ համարիչ և հայտարար ունեցող կոտորակները.*

$$\frac{a^2}{ab},\ \frac{3ab}{6bc},\ \frac{a^2}{a^3},\ \frac{a^3}{a^7},\ \frac{6a(x+y)}{9a^2(x+y)},\ \frac{7a^2}{35a},\ \frac{b^2}{b^3c},\ \frac{a^x}{a^{x+1}},\ \frac{b^{m-2}}{b},\ \frac{c^{p-1}}{c^{p+2}};$$

Յեթե կոտորակի համարիչը և հայտարարը բազմանդամներ են, ապա նրա կրճատումը բարդանում ե, որովհետև ընդհանուր բազմապատկիչն անմիջապես հայտնի չե, այլ դեռ պետք ե գտնել՝ վերածելով համարիչը յեվ հայտարարն ավելի պարզ բազմապատկիչների։

Հետագայում մենք կքննենք բազմանդամների պարզ բազմապատկիչների վերածելու մի քանի պարզ եղանակները, գործադրելով այն՝ հանրահաշվական կոտորակների գործողություններ կատարելու ժամանակ։

§ 68. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿԻՉԻ ՓԱԿԱԳԾԵՐԻՑ ՀԱՆԵԼԸ.

Վերցնենք

$$ax+ba+cx$$

բազմանդամը և հարց տանք՝ կարող ենք արդյոք ընդունել այդ բազմանդամն իբրև արտադրյալ, այսինքն՝ իբրև ավելի պարզ արտահայտությունների բազմապատկման արդյունք։ Քանի վոր բազմանդամը միանդամով բազմապատկելու ժամանակ բազմանդամի յուրաքանչյուր անդամը բազմապատկվում և միանդամով և քանի վոր մեր վերցրած բազմանդամի բոլոր անդամներն էլ պարունակում են x բազմապատկիչը, ապա այդ բազմանդամը x-ով բազմապատկած մի բազմանդամ ե, վորի անդամները մենք կստանանք, յեթե ավյալ բազմանդամի անդամներից x-ն առանձնացնենք, այսինքն՝

$$ax+bx+cx=x(a+b+c)։$$

Յեթե աված ե $\frac{ax+bx+cx}{ay+by+cy}$ կոտորակը, ապա նրան կարելի յե տալ հետևյալ պարզ ձևը.

$$\frac{ax+bx+cx}{ay+by+cy}=\frac{x(a+b+c)}{y(a+b+c)}=\frac{x}{y},$$

քանի վոր $a+b+c$ բազմապատկիչն ընդհանուր ե նրա համարչի և հայտարարի համար։

Այս ամենից հետևում ե, վոր յեթե բազմանդամի բոլոր անդամներն ունեն ընդհանուր բազմապատկիչ, ապա բազմանդամը կարելի յե արտահայտել իբրեվ այդ բազմապատկչի յեվ այն բանորդի արտադրյալը, վորն ստացվում ե բազմանդամի բոլոր անդամներն ընդհանուր բազմապատկչի վրա բաժանելուց։

Այս յեղանակը կոչվում ե՝ «ընդհանուր բազմապատկչի փակագծերից հանելը»։

Վարժություններ.—*Հետևյալ բազմանդամները վերածեք բազմապատկիչների.*

1) $ab+ac$
a^2b-a^2c
$3a+3b-3c$
$4x-4y+8z$

2) a^2+ab
$abx-bcx$
$2ab+4ac-6ad$
$3a^2b^2+6a^2c^2+9a^2d^2$

3) $5a^3+8a^2$
$2a^3-7a$
a^3+a
a^4+a^2

4) $4x^3-2x^2$
$10x^5+5x^2$
$x^4y+x^3y^2$
$x^5y^2+x^3y$

5) a^3+a^2+a
$b^5-b^4+b^3$
$x^3y^3+x^2y^2-xy$
$4u^3v^3-6u^2v^2+2uv^2$

6) $(a+b)^2-10(a+b)$
$(a+1)^3+2(a+1)^2$
$a(x+y)-b(x+y)+c(x+y)$
$3x(a-b)-6y(a-b)$։

Որինակների վերջին խմբակում վակատծերից հանվող բազմապատկիչը չերևանդամ է։

Կիրառելով բազմանդամները բազմապատկիչների վերածելու չեզոնակը՝ կրճատումներ կատարեք հետևյալ կոտորակների նկատմամբ։

1) $\dfrac{am+bm}{cm+dm}$

$\dfrac{ax+ay-az}{bx+by-bz}$

$\dfrac{ab}{ab+bc}$

$\dfrac{2a-2b}{ax-bx}$

2) $\dfrac{a^2-ab}{ab-b^2}$

$\dfrac{3x+3y+3z}{x^2+xy+xz}$

$\dfrac{a^2+1}{a^3+a}$

$\dfrac{m^2+n^2}{m^3+mn^2}$

3) $\dfrac{3a^2-6ab+9b^2}{6a^3-12a^2b+18ab^2}$

$\dfrac{5-5x}{x-x^2}$

$\dfrac{16-8k}{2k^2-k^3}$

$\dfrac{a^2+b^2}{2a^2x+2b^2x}$

Ծանոթություն.—Եթե կոտորակի համարիչն ու հայտարարն իրենց բացարձակ մեծությամբ իրար հավասար են, բայց ունեն տարբեր նշաններ, ապա պարզ է, որ կոտորակը հավասար է -1-ի, որինակ՝ $\dfrac{-5}{5}=-1$, $\dfrac{4}{-4}=-1$։

Նմանապես՝ $\dfrac{a-b}{b-a}=-1$։ $b-a$ հայտարարը կարելի չէ դրել այսպես՝ $(a-b)\cdot(-1)$, այնպես որ՝

$$\frac{a-b}{b-a}=\frac{a-b}{(-1)\cdot(a-b)}=\frac{1}{-1}=-1;$$

Դրա փոխարեն կարելի էր հայտարարը թողնել անփոփոխ և $a-b$ համարիչը գրել այսպես՝ $(b-a)\cdot(-1)$. այդ դեպքում՝

$$\frac{a-b}{b-a}=\frac{(b-a)\cdot(-1)}{b-a}=\frac{-1}{1}=-1,$$

այնինքն՝ ստանում ենք նույն արդյունքը։

Եթե համարիչն ունի բազմապատկիչ, որը տարբերվում է հայտարարի բազմապատկիչից միայն նշանով, ապա կարելի է փոխել նրա նշանը, փոխելով նաև համարիչում գտնված մյուս բազմապատկչի նշանը։ Նույն գործողությունը կարելի է կատարել նաև հայտարարում գտնված բազմապատկիչների նկատմամբ։

Դիցուք տված է $\dfrac{ac-bc}{bd-ad}$ կոտորակը, որը հավասար է $\dfrac{(a-b)}{(b-a)d}$։ Փակագծերից հանենք վոչ թե c-ն, այլ $-c$-ն, այն ժամանակ փակագծերի մեջ $a-b$-ի փոխարեն կստանանք $b-a$ և կոտորակը կընդունի հետևյալ ձևը.

$$\frac{-c(b-a)}{d(b-a)};$$

կրճատելով $b-a$ բազմապատկչով՝ կստանանք $\dfrac{-c}{d}$, կամ $-\dfrac{c}{d}$։

Յուց տված չեղանակով կրճատեք հետևյալ կոտորակները.

$$\frac{ax-bx+cx}{by-ay-cy},\quad \frac{2x-4y}{6y-3x},\quad \frac{a^2-ab-ac}{b^2+bc-ab},\quad \frac{1-k^2}{k^4-k};$$

§ 69. ՅԵՐԿՈՒ ԿԱՄ ՄԻՔԱՆԻ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲԱԺԱՆԱՐԱՐՆ ՈՒ ԲԱԶՄԱՊԱՏԻԿԸ.

I. Կոտորակը կրճատելիս՝ համարիչն ու հայտարարը բաժանում ենք մի ևնույն արտահայտության վրա. այդ արտահայտությունը կարող է պարունակել մի քանի այնպիսի բազմապատկիչներ, որոնք կան համարչում և հայտարարում, որինակ՝

$$\frac{axy+bxy}{ax^2+bx^2}$$

կոտորակի համարիչը և հայտարարը բազմապատկիչների վերլուծելով՝ ստանում ենք

$$\frac{axy+bxy}{ax^2+bx^2}=\frac{xy(a+b)}{x^2(a+b)};$$

Համարչի և հայտարարի ընդհանուր բազմապատկիչներն են՝ x և $a+b$. ուրեմն կոտորակը կրճատվում է նրանց $x\cdot(a+b)$ արտադրյալով և ստացվում է $\dfrac{xy(a+b)}{x^2(a+b)}=\dfrac{y}{x}$։

Այն արտահայտությունը, որի վրա տվյալ յերկու կամ ավել արտահայտություններ բաժանվում են առանց մնացորդի, կոչվում է այդ արտահայտությունների ընդհանուր բաժանարար։ Ընդհանուր բաժանարարը հավասար է այդ արտահայտությունների ընդհանուր բազմապատկիչների արտադրյալին։

Մեր վերցրած կոտորակին կարելի չեր պարզ ձև տալ՝ բաժանելով համարիչն ու հայտարարը կամ միայն x-ի կամ միայն $a+b$-ի վրա. այս դեպքում կոտորակը կընդուներ $\frac{y(a+b)}{x(a+b)}$, կամ $\frac{xy}{x^2}$ ձև ը: Սակայն այսպիսի կրճատումը լրիվ չեր լինի:

Այսպիսով, կոտորակը մինչև վերջը կրճատելու համար, պետք է համարիչը և հայտարարը բաժանել նրանց բոլոր ընդհանուր բազմապատիկների արտադրյալի վրա, որը կոչվում է տվյալ արտահայտությունների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար:

II. Գումարման և հանման ժամանակ կոտորակները բերվում են ընդհանուր հայտարարի, որը պետք է բաժանվի տվյալ կոտորակների հայտարարների վրա առանց մնացորդի:

Որինակ՝ $\frac{4}{20}$ և $\frac{5}{12}$ կոտորակները գումարելու համար, մենք նրանց բերում ենք ընդհանուր հայտարարի, որը կլինի 60. 60-ը բաժանվում է թե 20-ի և թե 12-ի վրա: Այդ ընդհանուր հայտարարը գտնելու համար տվյալ հայտարարները վեր ենք ածում պարզ բազմապատիկների $20=2^2.5$, $12=2^2.3$: Ընդհանուր հայտարարը պետք է կազմված լինի տվյալ հայտարարների բոլոր բազմապատիկներից, այսինքն՝ նա հավասար է $2^2.3.5=60$: Այս հայտարարի փոխարեն կարելի չեր վերցնել 120, 180 և այլն, և ընդհանրապես ամեն մի թիվ, որը բաժանվում է 60-ի վրա առանց մնացորդի, հեհաապես բաժանվում է տվյալ հայտարարների վրա:

Տվյալ թվերի վրա առանց մնացորդի բաժանվող ամեն մի թիվ կոչվում է նրանց ընդհանուր բազմապատիկը:

Յերկու թվերի ամենափոքր բազմապատիկը գտնելու համար, բավական է նրանցից մեկի բոլոր բազմապատկիչների արտադրյալը բազմապատկել յերկրորդ թվի այն պարզ բազմապատկիչներով, որոնք այդ արտադրյալի մեջ բացակայում են: Մեր որինակում վերցնում ենք առաջին հայտարարի բազմապատկիչների արտադրյալը $2^2.5$-ը և բազմապատկում նրան յերկրորդ հայտարարի բազմապատկիչ 3-ով:

Յերկուսից ավել կոտորակների գումարման ժամանակ, առաջին հայտարարի բազմապատկիչների արտադրյալը պետք է բազմապատկել մնացած բոլոր հայտարարների այն բազմապատկիչներով, որոնք բացակայում են այդ արտադրյալում. որինակ՝ $\frac{3}{20}$, $\frac{1}{30}$ և $\frac{7}{8}$ կոտորակները գումարելիս՝ պետք է վարվել այսպես.

$20=2.2.5$
$30=2.3.5$
$8=2.2.2$

Ընդհանուր հայտարարը, բացի առաջին հայտարարի բազմապատկիչներից, պետք է ունենա յերկրորդ հայտարարի բազմապատկիչներից 3-ը և յերրորդից՝ 2-ը: Այդ պատճառով ընդհանուր հայտարարը հավասար է $2.2.5.3.2=2^3.3.5=120$:

Վերջացրեք տվյալ կոտորակների գումարումը:

Այսպիսով միքանի թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը հավասար է նրանցից մեկի բոլոր պարզ բազմապատկիչների արտադրյալին՝ բազմապատկած մնացած թվերի այն պարզ բազմապատկիչներով, որոնք բացակայում են այդ արտադրյալում:

Յեթե տվյալ թվերն ընդհանուր բազմապատկիչ չունեն ապա նրանց ամենափոքր բազմապատիկը հավասար է տվյալ թվերի արտադրյալին, որինակ՝

$$\frac{5}{8}+\frac{7}{9}=\frac{45}{72}+\frac{56}{72}=\frac{101}{72};$$

Յեթե տվյալ թվերից մեկն առանց մնացորդի բաժանվում է մյուսների վրա, ապա այդ թիվը և տվյալ թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը: Որինակ.

$$\frac{5}{12}+\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{5}{12}+\frac{2}{12}+\frac{9}{12}=\frac{16}{12}=1\frac{1}{3};$$

Այս ամենը տարածվում է նաև հանրահաշվական արտահայտությունների և հանրահաշվական կոտորակների գումարման և հանման վրա:

Այսպիսով, միքանի ամբողջ հանրահաշվական արտահայտությունների ընդհանուր բազմապատիկ կոչվում է ամեն մի արտահայտություն, որը բաժանվում է առանց մնացորդի տվյալ արտահայտություններից յուրաքանչյուրի վրա: Ամենափոքր (այսինքն ամենապարզ) ընդհանուր բազմապատիկը հավասար է տվյալ արտահայտություններից մեկի բոլոր բազմապատկիչների արտադրյալին՝ բազմապատկած մնացած արտահայտությունների այն բազմապատկիչներով, որոնք բացակայում են այդ արտադրյալում:

Յեթե տվյալ արտահայտություններն ընդհանուր բազմապատկիչ չունեն, ապա նրանց ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը հավասար է տվյալ արտահայտությունների արտադրյալին:

Յեթե տվյալ արտահայտություններից մեկը բաժանվում է առանց մնացորդի մյուսների վրա, ապա նա հենց ինքն է տվյալ արտահայտությունների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը:

Ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկ հեշտ է գտնել, յեթե տվյալ արտահայտությունները միանդամներ են: Որինակ՝

ab և bc արտահ. ամեն. ընդհ. բազմ. կլինի abc,
$3x^2$, $2a^3$ և ax^2 » » » » » $3ax^2 \cdot 2a \cdot x = 6a^3x^2$,
x^2 և $3y$ » » » » » $3x^2y$,
a^3b^2c, ab և a^2c » » » » » a^3b^2c։

Գտեք ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկ.

$(a^2b^2,\ a^3b)$, $(a^2y^3,\ xy^4)$, $(c^3d^2,\ c^2d^3)$, $(abc,\ a^2b)$,
$(6ax^3,\ 9a^3x)$, $(a^2,\ b^2)$, $(4ab,\ 5b^2)$, $(6a^2b^2,\ 12a^3b^3)$,
$(3a,\ 2b,\ c)$, $(8a^2,\ 4ab,\ 2b^2)$, $(a^3,\ a^2b,\ ab^2,\ b^3)$, $(a^3,\ a^2,\ a^4)$։

Եթե ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը բաժանենք տվյալ արտահայտություններից վրա, ապա քանորդներն ընդհանուր բազմապատկիչ չեն ունենա։ Այս բանում կարելի է համոզվել նախորդ որինակների միջոցով։

Եթե տվյալ արտահայտությունները բազմանդամներ են, ապա նրանց ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը գտնելու համար պետք է նրանց վերածել պարզ բազմապատկիչների։

Դիցուք, պահանջվում է գտնել

$$ax+bx, \qquad a^2+ab$$

բազմանդամների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը.

$ax+bx=x \cdot (a+b)$ }
$a^2+ab=a \cdot (a+b)$ } ամեն. ընդհ. բազմ.$=x \cdot (a+b) \cdot a = ax \cdot (a+b)$։

Գտեք ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը.

1) $(a^2-ab,\ a^2)$, $(a^2-ab,\ a^2+ab)$, $(a^3+a^2,\ ax+x)$,
2) $(a+b,\ a-b)$, $(x+y,\ x^2+xy)$, $(1+k,\ 1-k)$,
3) $(k+k^2,\ m+km)$, $(2a+2b,\ ac+bc,\ ac)$։

Կիրառենք ընդհանուր հայտարար գտնելը կոտորակների գումարման և հանման նկատմամբ։

Որինակ 1.

$$\frac{a+b}{ab}+\frac{a-c}{ac}.$$

Ընդհանուր հայտարարը պետք է լինի տվյալ հայտարարների ընդհանուր բազմապատիկը։ Տվյալ հայտարարների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է abc։ Փոխարինելով առաջին կոտորակի հայտարարը abc-ով, մենք նրան մեծացնում ենք c անգամ. հետևապես, համարիչն էլ պետք է բազմապատկել c-ով, ապա յերկրորդ կոտորակի համարիչն ու հայտարարը բազմապատկում ենք b-ով, և գումարման գործողությունը գրում այսպես.

$$\frac{a+b}{ab}+\frac{a-c}{ac}=\frac{(a+b)c}{abc}+\frac{(a-c)b}{abc}=\frac{(a+b)c+(a-c)b}{abc}=$$
$$=\frac{ac+bc+ab-bc}{abc}=\frac{ab+ac}{abc}=\frac{a(b+c)}{abc}=\frac{b+c}{bc}.$$

Որինակ 2.

$$\frac{a+b}{ax-bx}-\frac{2b}{ax+bx}.$$

Տվյալ հայտարարները վեր ենք ածում բազմապատկիչների և գտնում ընդհանուր հայտարարը.

$$ax-bx=x(a-b),\quad ax+bx=x(a+b)։$$

Ընդհանուր հայտարարը հավասար է $x(a+b)(a-b)=x(a^2-b^2)$։

Առաջին հայտարարը պետք է բազմապատկել $a+b$-ով, յերկրորդը՝ $a-b$-ով։ Նույն բազմապատկիչներով բազմապատկում ենք և համարիչներն ու հանման գործողությունը գրում այսպես.

$$\frac{a+b}{ax-bx}-\frac{2b}{ax+bx}=\frac{(a+b)^2}{x(a^2-b^2)}-\frac{2b(a-b)}{x(a^2-b^2)}=\frac{(a+b)^2-2b(a-b)}{x(a^2-b^2)}=$$
$$=\frac{a^2+2ab+b^2-2ab+2b^2}{x(a^2-b^2)}=\frac{a^2+3b^2}{x(a^2-b^2)}.$$

Հանրահաշվական կոտորակների գումարման և հանման կանոնը նույնն է, ինչ և թվաբանական կոտորակներինը. կոտորակները գումարելու կամ հանելու համար պետք է ընդհանուր հայտարարի բերել նրանց, վորը և կլինի տվյալ հայտարարների ամենափոքր բազմապատիկը. ապա բաժանելով ընդհանուր հայտարարը յուրաքանչյուր կոտորակի հայտարարի վրա՝ պետք է բազմապատկել նույն կոտորակի համարիչն ստացված քանորդով. կոտորակները ընդհանուր հայտարարի բերելուց հետո՝ գումարման և հանման տվյալ գործողությունները կատարում են համարիչների հետ ու գրում մեկ ընդհանուր հայտարար։

Կատարեք հետևյալ հանրահաշվական կոտորակների գումարումը և հանումը.

1. $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$
2. $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$
3. $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$
4. $\frac{x}{yz}-\frac{y}{xz}$
5. $\frac{a+b}{b}-\frac{a-b}{a}$
6. $\frac{a+b}{a}+\frac{a-b}{b}$
9. $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}$
10. $\frac{c+d}{c-d}+\frac{c-d}{c+d}$
11. $\frac{a+c}{ac+2ad}-\frac{b+d}{bc+2bd}$
12. $\frac{a-3}{a^2+5a}+\frac{a+3}{a^2-5a}$
13. $\frac{a-b}{a^2+ab}+\frac{a}{ab+b^2}-\frac{a-b}{ab}$
14. $\frac{1}{3x+6}-\frac{1}{2x+4}-\frac{1}{6}$

7. $\frac{a-1}{a}+\frac{a-2}{a^2}-\frac{2a-1}{a^3}$ 15. $\frac{6x-7}{5x-10}-\frac{x-1}{x-2}-\frac{1}{5}$

8. $\frac{x+y}{xy^2}+\frac{x-y}{xy^2}-\frac{1}{2xy}$ 16. $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a+c}{a-c}$

§ 70. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՊԱՐԶ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱԾՈՒՄԸ ԿԱՄԱՅ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

Ինչպես գիտենք, հետևյալ նույնությունը

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

ճիշտ է a-ի և b-ի ցանկացած արժեքների համար։ Այդ նույնությունը կարելի է կարդալ նաև հակառակ կերպով՝ a^2-b^2 տարբերությունը հավասար է $a+b$ և $a-b$ տարբերությունների արտադրյալին։

Ինչպես տեսանք, a^2-b^2 տարբերությունը կարելի է արտահայտել $a+b$-ի և $a-b$-ի արտադրյալով, այսինքն՝ նա վերածվում է երկու այդպիսի բազմանդամների արտադրյալի։

Նույն ձևով բազմանդամները կարող են ներկայացվել նաև մի քանի բազմանդամների արտադրյալի տեսքով։

Օրինակ՝

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$
$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2,$$
$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3,$$
$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3.$$

Այդ բանաձևերը բառերով արտահայտվում են այսպես.

Երկու թվերի քառակուսիների տարբերությունը հավասար է այդ թվերի գումարի և տարբերության արտադրյալին։

Երկու թվերի քառակուսիների և այդ թվերի կրկնապատիկ արտադրյալի գումարը պարունակող եռանդամը՝ հավասար է այդ թվերի գումարի քառակուսուն։

Երկու թվերի քառակուսիների գումարի և այդ թվերի կրկնապատիկ արտադրյալի տարբերությունը պարունակող եռանդամը հավասար է նույն թվերի տարբերության քառակուսուն։

Երկու թվերի խորանարդների, առաջնի քառակուսու և երկրորդի եռապատիկ արտադրյալի, երկրորդի քառակուսու և առաջնի եռապատիկ արտադրյալի գումարից բաղկացած քառանդամը հավասար է նույն թվերի գումարի խորանարդին։

Այն քառանդամը, որը պարունակում է իր մեջ երկու թվերի խորանարդների տարբերությունը, հանած առաջնի քառակուսու և երկրորդի եռապատիկ արտադրյալը, գումարած երկրորդի քառակուսու և առաջնի եռապատիկ արտադրյալը՝ հավասար է նույն թվերի տարբերության խորանարդին։

Հիմնվելով սրա վրա՝ վերածեք բազմապատկիչների հետևյալ երկանդամները և բազմանդամները.

1) a^2-9 2) $a^2+10a+25$ 3) $x^2-\frac{1}{4}$

x^2-16 $x^2+8x+16$ $a^2-0,01$

b^2-1 y^2-2y+1 $0,25m^2-0,09n^2$

$4a^2-b^2$ $1+2u+u^2$ $x^2+7x+\frac{49}{4}$

$9a^2-25c^2$ $a^2b^2+2ab+1$ $x^2-x+\frac{1}{4}$

$a^2x^2-b^2y^2$ $9a^2-12ab+4b^2$ $4a^2x^2+2ax+\frac{1}{4}$

4) a^3+3a^2+3a+1 5) a^6+2a^3+1 6) $0,25-4k^6$

x^3-3x^2+3x-1 a^6-4a^3+4 $1,44-a^2k^4$

$1-6k+12k^2-8k^3$ $a^4-6a^2b^2+b^4$ $2,25\ a^2x^2$

$a^3x^3+3a^2x^2-3ax+1$ x^4-25 $1-c^2y^2z^2$

$1-3ab+3a^2b^2-a^3b^3$ $x^2y^2-0,36$ $100-a^2b^2c^2$

$a^3b^3+3a^2b^2c^2+3abc^4+c^6$ $1-0,16a^2k^2$ $36-a^4b^2$

Գտեք հետևյալ բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը.

1) $a^2+10ab+25$, a^2-25
2) a^2-16, a^2-4a
3) $x^2-2xy+y^2$, x^3-x^2y
4) $1-4x^2$, $xy+2x^2y$
5) $5a+10b$, a^2-4b^2, a^2+2ab
6) a^3-a, a^2+a, $ab+b$
7) a^2-1, a^2+2a+1, a^2-2a+1
8) x^2-y^2, x^2-xy, $xy-y^2$

Կատարեք հետևյալ կոտորակների գումարումը և հանումը՝ նախորոք հայտարարները վերածելով պարզ բազմապատկիչների.

1) $\frac{a}{a^2-1}+\frac{1}{a-1}+\frac{a}{a+1}$

2) $\frac{8}{16-x^2}+\frac{2}{4-x}-\frac{1}{4+x}$

3) $\frac{a-3}{a+3}-\frac{a-9}{a^2+6a+9}$

4) $\frac{m-1}{2m-5}-\frac{2m^2-7m}{4m^2-20m+25}$

5) $\frac{1}{a^2-4}+\frac{1}{a^2+2a}+\frac{1}{a^2-2a}$

6) $\frac{1}{1-2k}+\frac{1}{k+2k^2}-\frac{4k}{1-4k^2}$

7) $\frac{y+1}{xy+y}-\frac{x-1}{x^2+2x+1}$

8) $\frac{2}{a}-\frac{a-2b}{a^2-ab}-\frac{a}{a^2-ab+b^2}$

Հետևյալ վարժություններում կատարվում են հանրահաշվական կոտորակներով գանազան գործողություններ, բայց երբեմն պետք է դարձյալ դեկավարվել թվաբանական կոտորակներով կատարվող գոր-

ծողութ յունների կանոններով. կոտորակները բազմապատկելիս՝ պետք է բազմապատկել համարիչները և հայտարարներն առանձին-առանձին. բաժանելիս՝ բաժանելին բազմապատկել բաժանարարի հակադարձ կոտորակով։ Ընդհանրապես հարմար է համարիչը և հայտարարը նախորոք վերածել պարզ բազմապատկիչների՝ ի նկատի ունենալով հնարավոր կրճատումները։ Որինակ՝

$$\frac{a+2b}{a^2-2ab+b^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab}=\frac{a+2b}{(a-b)^2}\cdot\frac{(a+b)\cdot(a-b)}{a(a+2b)}=$$
$$=\frac{(a+2b)\ \ (a+b)\cdot(a-b)}{(a-b)^2\cdot a(a+2b)}=\frac{a+b}{a(a-b)},$$

$$\frac{3ab}{a^2-9b^2}:\frac{6b^2}{a^2-6ab+9b^2}=\frac{3ab}{(a+3b)\cdot(a-3b)}:\frac{6b^2}{(a-3b)^2}=$$
$$=\frac{3ab\cdot(a-3b)^2}{(a+3b)\cdot(a-3b)\cdot 6b^2}=\frac{a(a-3b)}{2b(a+3b)},$$

Եթե խնդրի որինակը կազմված է ամբողջի և կոտորակի հանրահաշվական գումարից, ապա ամբողջը կարելի է արտահայտել կոտորակի ձևով, վորի հայտարարը հավասար է տվյալ կոտորակի հայտարարին, և կատարելով այդ կոտորակների հանրահաշվական գումարը՝ ստացված արդյունքն արտահայտված կլինի կոտորակի միջոցով։ Որինակ՝

$$1+\frac{b}{a-b}=\frac{a-b}{a-b}+\frac{b}{a-b}=\frac{a-b+b}{a-b}=\frac{a}{a-b},$$
$$a+b-\frac{a^2}{a-b}=\frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^2}{a-b}=\frac{a^2-b^2-a^2}{a-b}=-\frac{b^2}{a-b};$$

Պարզ ձև տվեք հետևյալ կոտորակային արտահայտություններին՝ կատարելով նրանց մեջ ցույց տված գործողությունները.

1) $\left(1+\frac{1}{a}\right):\left(1-\frac{1}{a}\right)$

2) $\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2x}{1-x^2}$

3) $\left(2+\frac{b}{a-b}\right)\cdot\frac{(a-b)^2}{4a^2-b^2}$

4) $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}$

5) $\frac{a^2}{bc}\cdot\frac{b^2}{ac}\cdot\frac{c^2}{ab}$

6) $\frac{a+3}{a-3}:\frac{a^2}{a^2-9}$

7) $\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-1}-\frac{2}{a+2}\right):\frac{2a+1}{a^2-1}$

8) $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right)\cdot\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2+b^2}$

§ 71. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԻ ՊԱՐԶ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱԾՈՒՄԸ, ՆՐԱ ԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԽՄԲԱՎՈՐՄԱՆ ՑԵՂԱՆԱԿՈՎ.

Ք ննենք

$$ax+bx+ay+by$$

քառանդամը։ Նրա անդամներն ընդհանուր բազմապատկիչ չունեն. վերածման մեզ հայտնի բանաձևերից և վոչ մեկը չի կարելի կիրառել այս դեպքում։ Սակայն նրա վերածումը պարզ բազմապատկիչների կարելի է կատարել հետևյալ կերպով. քառանդամը ներկայացնենք իբրև երկու անդամների գումար, միացնելով մի խմբի մեջ ընդհանուր բազմապատկիչ ունեցող երկու անդամներ. միացնենք առաջին անդամը յերկրորդի, և յերրորդը՝ չորրորդի հետ (կամ էլ՝ առաջինը յերրորդի, յերկրորդը՝ չորրորդի հետ)։ Ստանում ենք՝

$$ax+bx+ay+by=(ax+bx)+(ay+by)։$$

Յերկանդամ գումարելիներից յուրաքանչյուրը կարելի է ներկայացնել իբրև երկանդամի և միանդամի արտադրյալ։ Ստանում ենք՝

$$x(a+b)+y(a+b)։$$

Յերկու գումարելիները ունեն $(a+b)$ ընդհանուր բազմապատկիչ, վորը դուրս ենք բերում փակագծերից և ստանում վերջնականապես՝

$$(a+b)\cdot(x+y),$$

այսինքն՝ տվյալ քառանդամը վերածվեց յերկու ոազմապատկիչների։

Գրանցումը տարվում է այսպես.

$$ax+bx+ay+by=(ax+bx)+(ay+by)=x(a+b)+y(a+b)=$$
$$=(a+b)\ (x+y)։$$

Ստուգելու համար բավական է ստացված յերկու յերկանդամները բազմապատկել։

Բազմանդամի վերածումը հնարավոր յեղավ շնորհիվ նրան, վոր x և y բազմապատկիչները դուրս բերելուց հետո՝ փակագծերի մեջ ստացվեցին իրար հավասար յերկանդամներ։ Հակառակ պարագայում բազմանդամը չեր վերածվի բազմապատկիչների. որինակ՝ փորձենք կիրառել այդ յեղանակը $ax+bx+ay-by$ քառանդամի նկատմամբ։

Ունենք՝

$$ax+bx+ay-by=(ax+bx)+(ay-by)=x(a+b)+y(a-b)։$$

Գումարելիները չունեն ընդհանուր բազմապատկիչ և մեր կատարած ձևափոխություններից հետո տեսնում ենք, վոր այլևս հնարավոր չի շարունակել վերածումը։ Ձեվ այսպես, $ax+bx+ay-by$ բազմանդամը հնարավոր չի վերածել պարզ բազմապատկիչների։

Վերածենք և այս բազմանդամը՝

$$ax+bx+cx-ay-by-cy։$$

Ներկայացնենք նրան իբրև յերկու յեռանդամների տարբերություն։ Կիրառելով խմբավորման միևնույն յեղանակը՝ ստանում ենք.

$$ax+bx+cx-ay-by-cy=(ax+bx+cx)-(ay+by+cy)=$$
$$=x(a+b+c)-y(a+b+c)=(a+b+c)\cdot(x-y),$$

այսինքն՝ տվյալ բազմանդամն արտահայտված է իբրև յեռանդամի և յերկանդամի արտադրյալ (ստուգում)։

Վարժություններ. — *Վերածեք բազմապատկիչների հետևյալ բազմանդամները.*

$a^2+ab+ac+bc$ — $2x^3+2x^2-20x-30$

$ac+bc-ad-bd$ — $a^2x+ax+x+a^2y+ay+y$

$ax+bx-ay+by$ — $k-kl-l^2+l^3$

a^3+a^2+3a+3 — $ax-ay+bx-by-cx+cy$

a^3-a^2+a-1 — $a^3+a^2+ab^2-b^2+ac^2-c^2$

$a^2x-ax^2-5a+5x$ — $2x^2-5xy+4xu-20yu$

Կրճատեցեք հետևյալ կոտորակները.

$$\frac{am+an-bm-bn}{am+an+cm+cn} \qquad \frac{x^2+2x+1}{x^3+x^2+x+1}$$

$$\frac{ax-bx-ay+by}{ax-bx+ay-by} \qquad \frac{x^2-10x+25}{x^3-5x^2-x+5}$$

$$\frac{a^2-16}{a^3+4a^2+2a+8} \qquad \frac{1-3k+2k^2+6k^3}{1-4k^2+4k^4}$$

$$\frac{a^2+2a}{a^3+2a^2+3a+6} \qquad \frac{k-k^3}{1+k+k^2+k^3}$$

§ 72. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ.

Համարիչը և հայտարարը պարզ բազմապատկիչների վերածելիս՝ կարող է պատահել, որ հայտարարի բոլոր բազմապատկիչները գտնվեն համարչի մեջ. այս դեպքում՝ կոտորակի կրճատումից ստացվում է ամբողջ արտահայտություն և. այսպիսով, մի բազմանդամի բաժանումը մյուսի վրա կատարվում է առանց մնացորդի։

Կատարեք հետևյալ բաժանումները՝ պարզ բազմապատկիչների վերածելով կամ միայն բաժանելին, կամ թե՝ և՛ բաժանելին և բաժանարարը.

$(a^2-b^2):(a+b)$ — $(a^3+2a^2b+ab^2):(a^2+ab)$

$(a^2-1):(a-1)$ — $(x^3-x):(x^2+x)$

$(a^2+6a+9):(a+3)$ — $(y^5-\ ^3):(y^3\ y^2)$

$(a^2-2a+1):(a-1)$ — $(x^4\ \ 1):(\ \ 1)$

$(x^2+6x+8):(x+2)$ — $(a^4\ \ 81):(a^3+3a^2+9a+27)$

$(x^2\ \ 6x+5):(x-5)$ — $(a^3+3\ ^2b+3ab^2+b^3):(a^2+2ab+b^2)$

Բազմանդամը բազմանդամի վրա բաժանելիս՝ յերբեմն ոգտվում են բազմանիշ թվերի բաժանման յեղանակից։ Պարզենք այս յեղանակն որինակով.

Դիցուք պահանջվում է a^3+5a^2+2a-8 բազմանդամը բաժանել $a+2$ յերկանդամի վրա։

Քանի որ յերկու բազմանդամների արտադրյալը հավասար է նրանց բոլոր անդամների արտադրյալների հանրահաշվական գումարին, ապա a^3+5a^2+2a-8 բաժանելին վորոնելի քանորդի բոլոր անդամների և $a+2$ բաժանարարի արտադրյալների հանրահաշվական գումարն է. ուրեմն բաժանելիի բարձր անդամը a^3-ը պետք է լինի բաժանարարի և քանորդի բարձր անդամների արտադրյալը. բայց քանի վոր բաժանարարի բարձր անդամն a-ն է, ապա քանորդի բարձր անդամը գտնելու համար բավական է a^3-ը բաժանել a-ի վրա։ Ստանում ենք $a^3:a=a^2$։ Կազմենք այժմ բաժանարարի և քանորդի բարձր անդամի արտադրյալը։ Կստանանք՝

$$(a+2)\cdot a^2=a^3+2a^2։$$

Յեթե բաժանելիից հանենք այս արտադրյալը, ապա մնացորդը կլինի բաժանարարի և քանորդի մնացած անդամների արտադրյալը, բացի բարձր անդամից։ Ստանում ենք՝

$$(a^3+5a^2+2a-8)-(a^3+2a^2)=3a^2+2a-8։$$

Այս մնացորդի բարձր անդամը պետք է լինի բաժանարարի բարձր անդամի, այսինքն՝ a-ի, և քանորդի հաջորդ անդամի արտադրյալը. ուրեմն քանորդի յերկրորդ անդամը գտնելու համար պետք է մնացորդի բարձր անդամը, այսինքն՝ $3a^2$-ը բաժանել a-ի վրա. այսպիսով կգտնենք, վոր քանորդի յերկրորդ անդամը հավասար է $3a$-ի։ Բազմապատկելով բաժանարարը $3a$-ով՝ ստանում ենք $3a^2+6a$, վորը և հանում ենք մնացորդից։ Ստանում ենք՝

$$(3a^2+2a-8)-(3a^2+6a)=4a-8։$$

Այս յերկրորդ մնացորդը պետք է պարունակի բաժանարարի և քանորդի մնացած անդամների արտադրյալը, բացի առաջին յերկու գտածից. քանորդի հաջորդ անդամը գտնում ենք՝ նորից բաժանելով մնացորդի բարձր անդամը բաժանարարի բարձր անդամի վրա։ Ստանում ենք՝

$$(-4a):a=-4։$$

Բազմապատկում ենք բաժանարարը քանորդի նոր ստացած անդամով և ստանում՝

$$(a+2)\cdot(-4)=-4a-8։$$

Հանում ենք այս արտադրյալը մնացորդից՝

$$(-4a-8)-(-4a-8)=0։$$

Յեվ այսպես, բաժանումն ավարտվեց։

Բազմանդամների բաժանումը գրանցվում է այսպես.

$$\begin{array}{r|l} a^3+5a^2+2a-8 & a+2 \\ \hline a^3+2a^2 & a^2+3a-4 \\ \hline 3a^2+2a-8 & \\ 3a^2+6a & \\ \hline -4a-8 & \\ -4a-8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Յեթե բաժանելիի բարձր և ցածր անդամների միջև պակասում են այն տարի միջանցային աստիճանները, որի աստիճաններով դասավորված է բազմանդամը, ապա հարմար է ազատ տեղ թողնել այդ միջանցային անդամների համար։ Որինակ՝

$$2a^4-5a^3+13a-24 \text{ և } a^2-2a+3$$

բազմանդամների բաժանումը գրում ենք այսպես.

$$\begin{array}{r|l} 2a^4-5a^3+13a-24 & a^2-2a+3 \\ \hline 2a^4\ \ 4a^3+6a^2 & 2a^2-a-8 \\ \hline -a^3-6a^2+13-24 & \\ -a^3+2a^2-3a & \\ \hline -8a^2+16a-24 & \\ -8a^2+16a\ \ 24 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Բաժանելիի և բաժանարարի անդամները կարելի չե դասավորել և աճող աստիճաններով ու քանորդի անդամները վորոշել ցածրից սկսելով։

Յեթե բաժանարարի և քանորդի անդամների արտադրյալները հանելիս ստացվի այնպիսի մնացորդ, վորի բարձր անդամը չի բաժանվում բաժանարարի բարձր անդամի վրա, ապա քանորդը չի արտահայտվում ամբողջ բազմանդամով և բաժանումն ընդհատվում է։ Որինակ՝

$$\begin{array}{r|l} a^3+8a^2+3a+5 & a^2+a-1 \\ \hline a^3+a^2-a & a+7 \\ \hline 7a^2+4a+5 & \\ 7a^2+7a-7 & \\ \hline -3a+12 & \end{array}$$

բաժանումից ստացվում է $-3a+12$ մնացորդը, և քանորդը կարող է գրվել այսպես.

$$a+7+\frac{-3a+12}{a^2+a-1}.$$

Կատարեք հետևյալ բաժանումները.

$(a^2+9a+14):(a+2)$ $\quad$ $(a^3-a^2-a-2):(a^2+a+1)$
$(a^2-8a+15):(a-3)$ $\quad$ $(x^3+2x^2-2x+3):(x^2-x+1)$
$(a^3+5a^2+5a+4):(a+4)$ $\quad$ $(a^4-3a^3+8a-24):(a^2-2a+4)$
$(6x^3+x^2-11x+6):(3x-2)$ $\quad$ $(x^3+3x^2-5x-15):(x+3)$
$(2x^3+3x^2-2x-3):(2x+3)$ $\quad$ $(2a^4+3a^3-4a-6):(2a+3)$
$(x^4-2x^2+2x-1):(x-1)$ $\quad$ $(a^4-4a^3+4a^2-9):(a^2-2a+3)$

Հետևյալ որինակների մեջ բաժանումը չի տալիս ամբողջ քանորդ։ Բաժանումը շարունակեք այնքան մինչև որ ամբողջ քանորդ ստանալն անկարելի դառնա, ապա ստուգեք այդ «մնացորդով բաժանումները».

$(a^2+5a+9):(a+3)$ $\quad$ $(a^3+3a^2+3a+4):(a^2+2a+1)$
$(3a^2-a-1):(a-1)$ $\quad$ $(a^3+2a^2+2a+1):(a^2+2a+1)$
$(a^3+a^2+a+2):(a+1)$ $\quad$ $(a^4+a^2-a-4):(a^2-a+2)$

§ 73. ԽՈՐԱՆԱՐԴՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՆ ՈՒ ՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆԸ.

Բաժանեք յերկու թվերի խորանարդների գումարը նույն թվերի գումարի վրա, և յերկու թվերի խորանարդների տարբերությունը նույն թվերի տարբերության վրա՝ կիրառելով բազմանդամների բաժանման յեղանակը։

Բաժանումները կատարվում են այսպես.

$$\begin{array}{r|l} a^3+b^3 & a+b \\ \hline a^3+a^2b & a^2-ab+b^2 \\ \hline -a^2b+b^3 & \\ -a^2b-ab^2 & \\ \hline ab^2+b^3 & \\ ab^2+b^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} a^3-b^3 & a-b \\ \hline a^3-a^2b & a^2+ab+b^2 \\ \hline a^2b-b^3 & \\ a^2b-ab^2 & \\ \hline ab^2-b^3 & \\ ab^2-b^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Այսպիսով, 1) յերկու թվերի խորանարդների գումարը բաժանվում է այդ թվերի գումարի վրա առանց մնացորդի, ընդ վորում քանորդում ստացվում է այդ թվերի տառակուսիների գումարն առանց նրանց արտադրյալի.

2) յերկու թվերի խորանարդների տարբերությունը բաժանվում է նրանց տարբերության վրա առանց մնացորդի, ընդ վորում քանորդում ևս ստացվում է այդ թվերի տառակուսիների գումարն ավելացրած նրանց արտադրյալը։

Խորանարդների գումարի և տարբերության բաժանվելը ստուգեք թվական տվյալներով, վերցնելով՝ $a=5$ և $b=2$, կամ $a=10$ և $b=3$։

Քանի վոր բաժանելին հավասար է բաժանարարի և քանորդի արտադրյալին, ապա ստացած արդյունքները կարելի չե գրել վերծանման բանաձևերի միջոցով։

$$a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2),$$
$$a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2).$$

Բազմապատկում կատարելով՝ ստուգեք այս բանաձևերը։

Վարժություններ.—*1. Գտեք հետևյալ արտահայտությունների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը.*

a^3-1 և a^2-a
a^3+1 և a^3+a^2
a^3-8 և a^3+2a^2+4a
a^3+8 և $a^2b-2ab+4b$
a^3+x^3 և $a^2+3ax+2x^2$
x^3-y^3 և $x^2-4xy+3y^2$

2. Կրճատեք հետևյալ կոտորակները.

$$\frac{a^3-a^2}{a^3-1} \qquad \frac{x^3-a^3}{x^3+ax^2+a^2x}$$
$$\frac{x^3+1}{x^3+x^2} \qquad \frac{x^3-3x+9}{x^3+27}$$
$$\frac{a^3+1}{a^3+3a^2+3a+1} \qquad \frac{b^3-8}{b^3-6b^2+12b-8}$$
$$\frac{4a^2-9b^2}{8a^3-27b^3} \qquad \frac{25x^2-y^2}{125x^3+y^3}$$

3. Կատարեք ցույց տված գործողությունները.

$$\frac{a^2-2ab}{a^3-b^3}+\frac{b}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{a-b}$$
$$\frac{a-b}{a^3+b^3}\cdot\frac{a+b}{a^3-b^3}$$
$$\left(1-\frac{x^3}{x^3+y^3}\right):\left(1-\frac{x^2-xy}{x^2-xy+y^2}\right)$$
$$\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}\right):\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)$$

§ 74. ՏԱՌԱՑԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ.

Հաճախակի կոնկրետ խնդիրները մենք լուծել ենք հավասարումների ոգնությամբ. անհայտ թիվը մենք նշանակում էինք x-ով կամ մի վորևե ուրիշ տառով և հավասարության ոգնությամբ արտահայտում անհայտ և տվյալ թվերի կախումը։ Տվյալներն արտահայտվում էին ամբողջ կամ կոտորակային թվաբանական թվերով։

Բայց կարող է պատահել, վոր տվյալներն ունենան ավելի ընդհանուր հատկություններ, այն է՝ տառերով արտահայտված հանրահաշվական թվեր։ Այդ դեպքում խնդիրը լուծելիս՝ ստացվում է

հավասարում տառային տվյալներով։ Այդ հավասարումն արտահայտում է x անհայտ թվի և տվյալ a, b և այլն թվերի կախումը։

Քննենք մի քանի այդպիսի խնդիրներ։

1. Տրված են a և b երկու թվեր, և a>b։ Գտնել մի նոր թիվ, վորը մեծ է b-ից այնքան, վորքան նա փոքր է a-ից։

Նշանակենք անհայտ թիվը x-ով։

Գտնենք, վորքան է x-ն ավել b-ից. դրա համար b-ին հանում ենք x-ից և ստանում՝

$$x-b.$$

Այժմ գտնենք, վորքան է x-ը փոքր a-ից. դրա համար x-ը հանում ենք a-ից և ստանում՝

$$a-x.$$

Համաձայն խնդրի պայմանի՝ այդ տարբերությունները պետք է իրար հավասար լինեն, այնպես վոր

$$x-b=a-x.$$

Այս հավասարումն արտահայտում է x-ի և տվյալների մեջ եղած կախումը։

Ստացած հավասարումը լուծելու համար անհայտ անդամները տեղափոխենք հավասարման մի կողմը, իսկ հայտնի անդամները՝ մյուս կողմը.

$$x+x=a+b$$

կամ

$$2x=a+b.$$

Բաժանելով հավասարման երկու մասերն անհայտի գործակցով ստանում ենք

$$x=\frac{a+b}{2}.$$

Այսպիսով տառային հավասարման լուծումը վորոշում է անհայտի հանրահաշվական արտահայտությունը տվյալների միջոցով։

Լուծման ճշտությունն ստուգելու համար, հարկավոր է անհայտի ստացած արտահայտությունը տեղադրել հավասարման մեջ, և հավասարման երկու մասում կատարել ցույց տված գործողությունները, վորից հետո պիտի ստացվի նույնություն։ Ստուգում ենք կատարում.

$$\frac{a+b}{2}-b=a-\frac{a+b}{2}$$
$$\frac{a+b-2b}{2}=\frac{2a-a-b}{2}$$
$$\frac{a-b}{2}=\frac{a-b}{2}$$

Ուրեմն, լուծման ճշտությունը հայտնաբերված է։ Անհայտ թիվը իրոք հավասար է $\frac{a+b}{2}$։

2. Տվյալ a հատվածը բաժանել 2 մասերի այնպես, որ նրանց վրա կառուցած քառակուսիների մակերեսների տարբերությունը հավասար լինի m^2-ու քառակուսի միավորներին։

Որոնելի հատվածներից մեծը նշանակենք x-ով. մյուս հատվածը կլինի $a-x$։

Նրանց վրա կառուցած քառակուսիների մակերեսները կլինեն՝ x^2 և $(a-x)^2$։

Քանի որ այդ քառակուսիների մակերեսների տարբերությունը պետք է հավասար լինի m^2, ապա կազմում ենք հետևյալ հավասարումը.

$$x^2-(a-x)^2=m^2։$$

Այս հավասարումը լուծելու համար՝ փակագծերը բաց ենք անում և տեղափոխում անհայտ անդամները հավասարման մի կողմը, իսկ հայտնիները՝ մյուս կողմը.

$$x^2-x^2+2ax=a^2+m^2,$$
$$2ax=a^2+m^2։$$

Բաժանելով հավասարման երկու մասն էլ անհայտի գործակցի $(2a)$ վրա, ստանում ենք՝

$$x=\frac{a^2+m^2}{2a}։$$

Այսպիսով որոնելի հատվածներից մեծը հավասար է $\frac{m^2+a^2}{2a}$։

Որոնելի հատվածներից փոքրը որոշելու համար՝ մեծ հատվածի գտած մեծությունը հանում ենք տվյալ a հատվածից և ստանում՝

$$a-\frac{a^2+m^2}{2a}=\frac{2a^2-a^2-m^2}{2a}=\frac{a^2-m^2}{2a}։$$

Լուծման ճշտությունն ստուգելու համար, կազմում ենք այդ հատվածների վրա կառուցած քառակուսիների մակերեսների տարբերությունը.

$$\left(\frac{a^2+m^2}{2a}\right)^2-\left(\frac{a^2-m^2}{2a}\right)^2=\frac{a^4+2a^2m^2+m^4}{4a^2}-\frac{a^4-2a^2m^2+m^4}{4a^2}=$$
$$=\frac{a^4+2a^2m^2+m^4-a^4+2a^2m^2-m^4}{4a^2}=\frac{4a^2m^2}{4a^2}=m^2,$$

այսինքն՝ քառակուսիների մակերեսների տարբերությունը հավասար է պահանջված m^2։

3. Լուծենք

$$ax+b^2=a^2-bx$$

հավասարումը։

Տեղափոխելով անհայտ անդամները հավասարման մի կողմը, իսկ հայտնիները՝ մյուս կողմը, ստանում ենք՝

$$ax+bx=a^2-b^2։$$

Միայն մեկ անհայտ անդամ ստանալու համար հավասարման ձախ մասում ընդհանուր x բազմապատկիչը դուրս ենք հանում փակագծերից։ Ստանում ենք՝

$$x(a+b)=a^2-b^2։$$

Որտեղից՝

$$x=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}=a-b։$$

Լուծման ճշտությունն ստուգեք, հավասարման մեջ տեղադրելով անհայտի գտած նշանակությունը։

4. Լուծենք մեկ հավասարում ևս.

$$\frac{x+a}{x-a}-\frac{x-a}{x+a}=\frac{8a^2}{x^2-a^2}։$$

Բերելով տվյալ կոտորակները x^2-a^2 ընդհանուր հայտարարի և բազմապատկելով հավասարման երկու մասն այդ ընդհանուր հայտարարով՝ ստանում ենք.

$$(x+a)^2-(x-a)^2=8a^2,$$
$$x^2+2ax+a^2-x^2+2ax-a^2=8a^2,$$
$$4ax=8a^2,$$
$$x=2a։$$

Ստուգելու համար անհայտի գտած նշանակությունը տեղադրում ենք հավասարման մեջ և ստանում.

$$\frac{2a+a}{2a-a}-\frac{2a-a}{2a+a}=\frac{8a^2}{4a^2-a^2},$$
$$\frac{3a}{a}-\frac{a}{3a}=\frac{8a^2}{3a^2},$$
$$3\quad\frac{1}{3}=\frac{8}{3},$$
$$\frac{8}{3}=\frac{8}{3};$$

Այսպիսով, անհայտի գտած նշանակությունը բավարարում է հավասարմանը։

Այս բոլոր օրինակներից եզրակացնում ենք.

1) այն ավյալները, վորոնց հիման վրա կազմվում է հավասարումը, կարող են լինել տառային. հավասարումը կազմելու յեղանակը նույնն է, ինչ վոր թվական ավյալների դեպքում.

2) տառային ավյալներով հավասարումը լուծելու համար վարվում ենք այսպես.

յեթե հավասարումը պարունակում է կոտորակներ, ապա հավասարման բոլոր անդամները բերում ենք ընդհանուր հայտարարի և բազմապատկելով հավասարումն այդ հայտարարով՝ ազատում նրան կոտորակներից.

յեթե հավասարումը փակագծեր ունի, ապա փակագծերը բաց ենք անում. անհայտ անդամները տեղափոխում ենք հավասարման մի կողմը, իսկ հայտնիները՝ մյուս կողմը.

բոլոր անհայտ անդամները միացնում ենք՝ փակագծերից դուրս հանելով նրանց անհայտ բազմապատկիչը.

բաժանելով հավասարման յերկու մասն անհայտի գործակցի վրա, ստանում ենք անհայտի նշանակությունը։

Լուծեք հետևյալ հավասարումները և ստուգեք լուծումը տեղադրումով.

1) $ax+b=bx+a$

2) $a(x-a)=b(x-b)$

3) $a(x+b)=b(x-a)$

4) $(x+a)\cdot(x+b)=(x+2a)\cdot(x-b)$

5) $(x+2a)^2-(x-a)^2=15a^2$

6) $(x+m)^2-(x+2m)\cdot(x-3m)=16m^2$

7) $(x+3a)\cdot(x-2a)-(x-a)^2+6a^2=0$

8) $(x+4a)^2-(x-4a)^2=0$

9) $(x+5m)\cdot(x-m)-(x+m)^2+6m^2=0$

10) $(x+a+b)^2-(x+a-b)^2=4b(2a+b)$

11) $a^2(x-a)=b^2(b-x)$

12) $(x-a)\cdot(x+b)=(x+a)\cdot(x-2b)$

13) $\frac{a}{x}+\frac{b}{2x}+\frac{c}{3x}=1$

14) $\frac{a}{x}-\frac{b}{3x}=1-\frac{b}{3a}$

15) $\frac{1}{a-x}-\frac{1}{a+x}=\frac{a}{a^2-x^2}$

16) $\frac{1}{2a+x}+\frac{2a}{4a^2-x^2}=\frac{1}{2a-x}$

17) $\frac{5}{x^2+ax-12a^2}+\frac{2}{x^2-16a^2}=\frac{1}{x^2-7ax+12a^2}$

18) $\frac{1}{x^2-25a^2}+\frac{2}{x^2+6a+5}=\frac{1}{x^2+4a-5a^2}$

19) $\left(1-\frac{x}{a}\right)\cdot\left(3-\frac{x}{8a}\right)=\left(1-\frac{x}{2a}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{4a}\right)$

20) $\left(1-\frac{x}{a+x}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{a-x}\right)=\frac{2a}{a+x}$

Լուծեք հետևյալ խնդիրները հավասարումների ոգնությամբ։

1. Յերկու անհայտ թվերի գումարը հավասար է a-ի, տարբերությունը՝ b-ի։ Գտնել այդ թվերը։

2. Յերկու թվերի գումարը հավասար է a-ի, իսկ նրանց հարաբերությունը՝ k-ի։ Գտնել այդ թվերը։

3. ABC յեռանկյան պարագիծը հավասար է $2p$-ի։ AB կողմը մեծ է BC կողմից m-ով, իսկ BC կողմը մեծ է AC կողմից n-ով։ Վորոշել յեռանկյան կողմերը։

4. Վորոշել զուգահեռակողմի անկյունները, յեթե բութ անկյունը q անգամ մեծ է սուր անկյունից։

5. Վորոշել ABC յեռանկյան անկյունները, յեթե A անկյունը m^0-ով մեծ է B անկյունից, իսկ B անկյունը նույնքանով մեծ է C անկյունից։

6. Սեղանի (տրապեց) միջին գիծը հավասար է l-ի. զուգահեռ կողմերից մեկը $1^1/_2$ անգամ մեծ է մյուսից։ Վորոշել սեղանի զուգահեռ կողմերը։

7. Հավասարասրուն յեռանկյան պարագիծը հավասար է P-ի։ Սրունքը k անգամ մեծ է հիմքից։ Վորոշել այդ հավասարասրուն յեռանկյան կողմերը։

8. O կետի շուրջը դասավորված են 4 անկյուն՝ AOB, BOC, COD և DOA։ BOC անկյունը n^0-ով մեծ է AOB անկյունից, COD անկյունը նույնքանով մեծ է BOC անկյունից. DOA անկյունը նույնքանով մեծ է COD անկյունից։ Վորոշել այդ անկյունները։

9. Յերկու քառակուսիների կողմերի տարբերությունը պարունակում է b մ, իսկ նրանց մակերեսների տարբերությունը՝ A ք. մ։ Վորոշել այդ քառակուսիների կողմերը։

10. Յերկաթգծի ճանապարհով դասավորված են մեկը մյուսից հեռու չորս կայարաններ՝ A, B, C և D։ AD տարածությունը հավասար է s կմ-ի։ BC տարածությունը a կմ-ով փոքր է AB-ից, իսկ CD տարածությունը b կմ-ով մեծ է BC-ից։ Վորոշել հարևան կայարանների միջև յեղած տարածությունը։

ԳԼՈՒԽ VIII.

ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐ.

§ 75. ՄԵԿ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄ ՅԵՐԿՈՒ ԱՆՀԱՅՏՈՎ.

Ինչենք այսպիսի խնդիր. յերկու ուղղանկյունների մակերեսների գումարը հավասար է 65 ք. մ-ի։ Այդ ուղղանկյունների մեկի հիմքը պարունակում է 4 մ, մյուսի հիմքը՝ 3 մ։ Վորոշել նրանց բարձրությունները։

Նշանակելով վորոնելի բարձրությունները x-ով և y-ով՝ կազմում ենք այսպիսի հավասարում՝

$$4x+3y=65:$$

Դժվար չե համոզվել, վոր այս խնդիրն ունի անսահման թվով լուծումներ։ Յեվ իրոք, ուղղանկյուններից մեկի, որինակ՝ առաջնի, բարձրությանը կարելի յե տալ կամավոր մեծություն, միայն թե նրա մակերեսը տվյալ մակերեսների գումարից ավել չլինի։ Յենթադրենք, առաջին ուղղանկյան բարձրությունը պարունակում է 8 մ, այսինքն՝ $x=8$։ Այդ դեպքում նրա մակերեսը կպարունակի 32 ք. մ. հանելով վերջինս տվյալ գումարից՝ գտնում ենք, վոր յերկրորդ ուղղանկյան մակերեսը պարունակում է 33 ք. մ, և նրա բարձրությունը հավասար է 11 մ-ի, այսինքն՝ $y=11$։

Յեթե ընդունենք $x=10$, ապա y-ը հավասար կլինի $8^1/_3$-ի։

Հաշվենք y-ի նշանակությունները, յերբ x-ին տրվում է տյուսակում ցույց տված հետևյալ նշանակությունները.

x	5	$6^1/_2$	11	$12^1/_2$	13	14	15
y							

Կարելի յեր y-ին տալ մի շարք կամավոր թվական նշանակություններ, այն ժամանակ նրանցից յուրաքանչյուրին կհամապատասխաներ x-ի վորոշ թվական նշանակությունները։

Ուրեմն, այս խնդիրն իսկապես ունի բազմաթիվ լուծումներ. հնարավորություն չկա խնդրի պայմանների հիման վրա ցույց տալ, թե՝ հատկապես ինչ մեծություն ունեն ուղղանկյունների բարձրությունները։ Այդպիսի մի խնդիր, վորը թույլ և տալիս բազմաթիվ լուծումներ՝ կոչվում է անվորոշ:

Խնդրի անվորոշությունը պայմանավորվում է նրանով, վոր յերկու անհայտները գտնելու համար տրված է միայն մի պայման, այն է՝ անհայտ թվերից մեկի և 4-ի արտադրյալը մյուս անհայտի ու 3-ի արտադրյալի հետ կազմում է 65։

Ամեն մի խնդիր, վորը պարունակում է յերկու անհայտ մեծություններ և դրանց միջև կապը մատնանշող միայն մի պայման, կարող է դրվել իբրև մի հավասարումն յերկու անհայտով։ Այդ պատճառով յերկու անհայտով մի հավասարումը միշտ ունի անթիվ լուծումներ. անհայտներից մեկին կարելի յե տալ միանգամայն կամավոր թվական նշանակություններ և նրանցից յուրաքանչյուրին կհամապատասխանե մյուս անհայտի մի վորոշ թվական նշանակություն։

Մեր քննած խնդրի վորոնելի մեծությունները, ըստ իրենց իմաստի, թույլ ելին տալիս միմիայն դրական լուծումներ, բայց հավասարումն ընդհանրապես թույլ է տալիս և բացասական լուծում։

Գտնենք

$$2x+3y=15$$

հավասարման մի քանի լուծումները։

Այդ լուծումները ներկայացնենք աղյուսակի ձևով.

x	0	2	4	6	8	10	—2
y	5	$3^2/_3$	$2^1/_3$	1	$-^1/_3$	$-1^2/_3$	$6^1/_3$

Այս լուծումները կարելի յե ներկայացնել գրաֆիկների միջոցով։ Դրա համար վերցնում ենք յերկու փոխադարձ ուղղահայաց ուղիղներ (գծ. 153), վորոնք կոչվում են կոորդինատների առանցքներ։ Նրանցից մեկի վրա վորևե մասշտաբով վերցնում ենք x-ի մեծություններն արտահայտող հատվածներ։ Այդ ուղիղն անվանենք x-երի կամ աբսցիսների առանցք։

Այդ կոորդինատների հատման O կետը կոչվում է կoորգինատների սկիզբ: *Յեվ այսպես, աբսցիսների առանցքի վրա նշում ենք O, 2, 4, 6, 8, 10, —2 կետերը։ x-ի բացասական մեծությունները հաշվում ենք կոորդինատների սկզբից դեպի ձախ. աբսցիսների առանցքի վրա կոորդինատների սկզբից վերցրած հատվածները կոչվում են* աբսցիսներ:

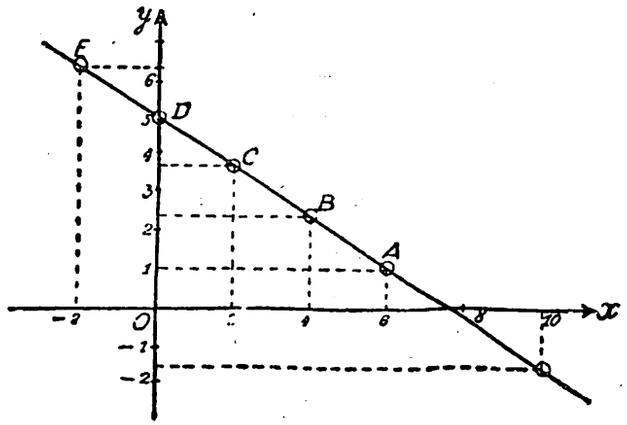
y-ի համապատասխան մեծությունները հատվածներով կարտահայտենք յերկրորդ առանցքի վրա, վորը կոչվում է y-երի կամ օրդինատների առանցք և վորը նշանակվում է Oy-ով. հատվածները վերցնենք նույն մասշտաբով և դարձյալ կոորդինատների սկզբից. y-ի դրական նշանակություններն արտահայտող հատվածները վեր-

ցրվում են O կետից դեպի վեր, բացասական նշանակություններ արտահայտող հատվածները՝ O կետից դեպի ցած։ Այսպիսով, նշում ենք y-ի ստացած նշանակություններին համապատասխանող կետերը, այն է՝ 5, $3^2/_3$, $2^1/_3$, 1, $-1/_3$, $-1^2/_3$, $6^2/_3$։ Կոորդինատների սկզբից մինչև նշված կետերը վերցրած հատվածները կոչվում են ordինատներ:

Ուրեմն OX և OY առանցքների վրա նշված են կետեր, որոնք արտահայտում են x և y անհայտների համար ստացած թվական նշանակությունները։

Վերցնենք մի զույգ կետ, որոնք արտահայտում են անհայտների միմյանց համապատասխանող մեծություններ, օրինակ՝ $x=6$, $y=1$։

Կոորդինատների առանցքներին այս կետերում կանգնեցնում ենք ուղղահայացներ և գտնում նրանց հատման A կետը։



գծ. 153

Այս կետն արտահայտում է հավասարման լուծումներից մեկը, այն է՝ երբ $x=6$-ի, $y=1$-ի։ Նույն ձևով մենք ստանում ենք մի շարք ուրիշ կետեր օրինակ՝ B կետը, որը համապատասխանում է՝ $x=4$ $y=2^1/_3$. C կետը, որը համապատասխանում է՝ $x=2$, $y=2^2/_3$ և այլն։ Զույգ-զույգ միացնելով A, B, C կետերը՝ ստանում ենք մի շարք ուղղանկյուն յեռանկյուններ, որոնց ներքնաձիգերն են AB, BC։ Այդ յեռանկյունների եզերն իրար համապատասխանաբար հավասար են, այն է՝ մի եզը հավասար է 2-ի, մյուսը՝ $1^1/_3$-ի. հետևապես յեռանկյունները հավասար են. ուրեմն, հավասար են և A, B, C գագաթների մոտ գտնվող անկյունները, այսինքն՝ \B, BC և այլ հատվածները OX առանցքին հավասար կերպով են թեքված. սրանից հետևում է, որ A, B C կետերը գտնվում են մի ուղիղ գծի վրա։

Այդ ուղիղը կոչվում է յերկու անհայտով առաջին աստիճանի հավասարման գրաֆիկ։

Քանի որ ուղիղը որոշվում է յերկու կետերով, ապա գրաֆիկը կառուցելու համար, բավական է վերցնել հավասարման յերկու լուծումը, դնել նրանց համապատասխան յերկու կետերը և միացնել այդ կետերը։

Գրաֆիկ կառուցելով՝ մենք կարող ենք նրանից ոգտվել հավասարման մյուս լուծումների գրաֆիկները կառուցելու համար.

Որինակ՝ վերցնենք OX առանցքի վրա 3-ի հավասար հատված։ Կանգնեցնելով այդ կետում OX առանցքին ուղղահայաց՝ մենք տեսնում ենք, որ նա հատում է գրաֆիկը մի կետում, որի որդինատը հավասար է 3-ի. հետևապես, 3-ի հավասար x-ին համապատասխանում է 3-ի հավասար y-ը։ Տեղադրելով հավասարման մեջ x-ի և y-ի այս նշանակությունները՝ մենք տեսնում ենք, որ լուծումը ճիշտ է. Յերկու անհայտով հավասարման լուծումների այդպիսի գրաֆիկական կառուցումը ճիշտ արդյունքների չի հանգում միայն այն դեպքում, յերբ գրաֆիկը ճիշտ և կառուցած։ Սովորաբար այդպիսի կառուցումների համար դործ է ածվում միլիմետրական թուղթ։

Վարժություն.—Յերկու կամավոր ընտրած լուծումների ոգնությամբ՝ կառուցեք հետևյալ հավասարումների գրաֆիկները։ Վորոշել գրաֆիկորեն մի քանի լուծումներ և ստուգել՝ տեղադրելով նրանց տվյալ հավասարումների մեջ.

$$x+2y=8$$
$$2x-y=3$$
$$3x-2y=1$$
$$x-3y=2$$
$$2x+3y=0.$$

§ 76. ԱՌԱՋԻՆ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՅԵՐԿՈՒ ԱՆՀԱՅՏՈՎ ՅԵՐԿՈՒ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄ.

Յելնելով § 75-ից մենք իմացանք, որ յերկու անհայտների նշանակություններ գտնելու համար մի պայման ունենալը բավական չէ։ Ապացուցեք, որ յերկու անհայտների նշանակությունները վորոշելու համար անհրաժեշտ է ունենալ յերկու պայման։ Դրա հավար քննենք հետևյալ խնդիրը.

Դիցուք պահանջվում է վորոշել յերկու հատվածների յերկարությունը հետևյալ տվյալներով.

1) յեթե մեկի կրկնապատկին պակասենք յերկրորդի յեռապատիկը, ապա կստանանք 22 մ.

2) եթե առաջնի հնգանյաշտից հանենք չերկրորդի կրկնապատիկը, ապա կստանանք 17 մ։

Վորոնելի հատվածների չերկարությունները մետրերով արտահայտող թվերը նշանակենք x-ով և y-ով. այդ դեպքում տվյալ չերկու պայմանները կարելի չե գրել հետևյալ չերկու հավասարումների ձևերով.

$$2x+3y=22,$$
$$5x-2y=17.$$

Այս հավասարումներից յուրաքանչյուրն առանձին վերցրած ունի անթիվ լուծումներ x-ի և y-ի համար պետք է գտնել այնպիսի մի զույգ թիվ, որը միաժամանակ բավարարի չերկու տվյալ հավասարումներին։

Մեզ հայտնի չեղանակով կառուցենք առաջին հավասարման գրաֆիկը՝ ընդունելով, դիցուք x-ը հավասար 2-ի և 5-ի. y-ի համապատասխան նշանակությունները կլինեն 6 և 4. ստանում ենք LL_1 ուղիղը։

Նույն ձևով կկառուցենք չերկրորդ հավասարման գրաֆիկը՝ ընդունելով x-ը հավասար 1-ի և 2-ի. y-ի համապատասխան նշանակությունները կլինեն -6 և $-3^1/_2$. այսպիսով ստանում ենք MM_1 ուղիղը։

Կառուցած չերկու ուղիղների հատման A կետը գտնվում է միաժամանակ թե մեկ հավասարման և թե մյուսի գրաֆիկների վրա. ուրեմն նա այդ հավասարումների լուծումն է, այսինքն՝ ստացիս և x-ի և y-ի չերկու այնպիսի թվական նշանակություններ, որոնք միաժամանակ չերկու հավասարումներին էլ բավարարում են։

Տվյալ դեպքում գրաֆիկների հատման A կետի կոորդինատներն են՝ $x=5$, $y=4$, այսինքն՝ վորոնելի հատվածների չերկարությունը հավասար է 5 և 4 մետրի։

Դժվար չե ստուգել այս լուծումը։

Այսպիսով, չերկու անհայտները վորոշելու համար բավական է ունենալ չերկու պայման, այլ կերպ ասած՝ չերկու միացյալ հավասարումներով վորոշվում են չերկու անհայտ թվեր։ Չերկու միացյալ հավասարումները կոչվում են նաև հավասարումների սիստեմ։

Հիմա քննենք հավասարումների սիստեմը լուծելու չեղանակները։

§ 77. ՏԵՂԱԴՐՄԱՆ ՁԵՂԱՆԱԿ.

Տված է չերկու հավասարումների սիստեմ.

$$\begin{cases} 4x+y=51 \\ 7x-2y=33 \end{cases}$$

Ոգտագործելով առաջին հավասարումը՝ անհայտներից մեկը, դիցուք y-ը, արտահայտենք մյուս անհայտի միջոցով։ $4x$ անդամը տեղափոխելով հավասարման ա՛յ մասը՝ ստանում ենք՝

$$y=51-4x.$$

x-ը և y-ն ինչ նշանակություններ չի վոր ունենան, պետք է կապված լինեն իրար հետ այն հավասարությունով, այսինքն՝ $51-4x$ արտահայտությունը հավասար պետք է լինի y-ին։ Այդ պատճառով մենք կարող ենք այս արտահայտությունը դնել չերկրորդ հավասարման մեջ y-ի տեղը. ստանում ենք՝

$$7x-2(51-4x)=33.$$

Այսպիսով մեզ հաջողվեց ստանալ հավասարում միայն մեկ անհայտով, այն է x-ով. մյուս անհայտը վերացել է։

Այս հավասարումը լուծելով՝ ստանում ենք՝

$$x=9.$$

x-ի այն նշանակությունը տեղադրելով վերև գտած y-ի արտահայտության մեջ՝ ստանում ենք՝

$$y=51-4\cdot 9=15.$$

Ձեվ այսպես, տեղադրման չեղանակը կայանում է հետևյալում.— հավասարումներից մեկի ոգնությամբ արտահայտում ենք անհայտներից մեկը մյուսի միջոցով։ Տեղադրելով այդ արտահայտությունը մյուս հավասարման մեջ՝ ստանում ենք մեկ անհայտով մեկ հավասարում, որը և լուծելով՝ գտնում ենք այդ անհայտի նշանակությունը։ Դրանից հետո վորոշում ենք և մյուս անհայտը։

Լուծեք տեղադրման չեղանակով հետևյալ հավասարումները.

1) $x+3y=21$, $5x+4y=72$
2) $3x=5y$, $2x+y=26$
3) $2x=3y-1$, $2y=x+3$
4) $3x-2y=2$, $9x-4y=7$
5) $ax+by=a^2+b^2$, $x+y=2a$
6) $3x-y=5a$, $4x+y=9a$

§ 78. ԱՆՀԱՅՏՆԵՐԻ ՆՇԱՆԱԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏՄԱՆ (ԲԱՂԴԱՏՄԱՆ) ՁԵՂԱՆԱԿ.

Տված է հավասարումների սիստեմ՝

$$\begin{cases} 7x+2y=67 \\ 5x-3y=39 \end{cases}$$

Առաջին հավասարումից արտահայտենք, դիցուք, y-ը x-ի միջոցով։

Ստանում ենք՝

$$y=\frac{67-7x}{2},$$

Նույն y անհայտի արտահայտությունը գտնենք յերկրորդ հավասարումից։ Քանի վոր յերկրորդ հավասարման մեջ y-ի գործակիցը բացասական է, ապա $-3y$ անդամը տեղափոխենք հավասարման աջ մասը հակառակ նշանով, իսկ ազատ անդամը 39-ը՝ ձախ մասը։ Ստանում ենք՝

$$5x-39=3y.$$

Բաժանելով հավասարման յերկու մասն էլ y-ի գործակցի վրա, ստանում ենք՝

$$y=\frac{5x-39}{3}.$$

Միևնույն անհայտի համար մենք ստացանք յերկու տարբեր արտահայտություններ, վորոնց թվական նշանակություններն իրար պետք է հավասար լինեն, իսկ դրա համար x-ը պետք է ունենա վորոշ թվական նշանակություն, վորը և վորոշվում է հետևյալ հավասարումից

$$\frac{67-7x}{2}=\frac{5x-39}{3}.$$

Այսպիսով մենք նորից ստացանք մեկ հավասարում մեկ անհայտով, y անհայտը վերացավ։

Լուծենք հիմա այդ հավասարումը.

$$3(67-7x)=2(5x-39),$$
$$201-21x=10x-78,$$
$$201+78=10x+21x,$$
$$279=31x,$$
$$x=9.$$

x-ը վորոշելուց հետո գտնում ենք y-ի նշանակությունը՝ ոգտվելով վերևում գտած արտահայտություններից մեկով՝

$$y=\frac{67-7\cdot 9}{2}=2.$$

Ցույց այսպես, բաղդատման յեղանակը կայանում է հետևյալում. յերկու հավասարումներից էլ արտահայտում ենք միևնույն անհայտը մյուսի միջոցով. ստացած յերկու արտահայտությունները հավասարեցնում ենք իրար և ստանում այդպիսով մեկ հավասարում մեկ անհայտով, վորը և լուծում ենք։ Մեկ անհայտը գտնելուց հետո, գտնում ենք և մյուսը։

Բաղդատման յեղանակով լուծենք հետևյալ հավասարումները.

1) $5x+4y=51$, $2x+y=18$
2) $3x+2y=22$, $5x-y=2$
3) $9x+4y=11$, $11x+6y=14$
4) $2x+9y=4$, $4x+15y=3$
5) $7x+y=21$, $4x-y=12$
6) $3x=2y$, $8x-y=26$

§ 79. ԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ՑԵՎ ՀԱՆՈՒՄԱՆ ԿԱՄ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐԵՑՄԱՆ ՑԵՂԱՆԱԿ.

Թեև այս յեղանակի հիմունքները ավելի բարդ են, քան մեր քննած տեղադրման և բաղդատման յեղանակների հիմունքները, սակայն մյուս կողմից, նա ավելի հեշտությամբ է կիրառվում և մեծ մասամբ ավելի շուտ հասցնում նպատակին։

Գարգենք այս յեղանակը մի քանի որինակների միջոցով։

1. Տված է յերկու անհայտ թվերի գումարը և տարբերությունը.

$$\begin{vmatrix} x+y=19 \\ x-y=7 \end{vmatrix}$$

Գումարենք տվյալ հավասարումների ձախ մասերը. ստանում $2x$ գումարը։ Քանի վոր պայմանի համաձայն առաջին հավասարման ձախ մասը հավասար է 19-ի, իսկ յերկրորդ հավասարման ձախ մասը՝ 7-ի, ապա ձախ մասերի գումարը պետք է հավասար լինի 19-ի և 7-ի գումարին, այսինքն՝ 26-ի։ Այսպիսով՝

$$2x=26,$$
$$x=13.$$

x-ի այս նշանակությունը տեղադրելով տվյալ հավասարումներից մեկի մեջ՝ գտնում ենք՝

$$y=6.$$

2. Տված է հավասարումների սիստեմ՝

$$\begin{vmatrix} 7x+4y=37 \\ 15x+4y=61 \end{vmatrix}$$

Նախորդ որինակում y-ը մենք վերացրինք՝ գումարելով հավասարումների ձախ մասերը։ Տվյալ որինակում, քանի վոր y-ի գործակիցներն ունեն միատեսակ նշաններ, y-ը վերացնելու համար պետք է հավասարումները հանել մեկը մյուսից։

Հանենք յերկրորդ հավասարման ձախ մասից առաջին հավասարման ձախ մասը։ Նրանց տարբերությունը հավասար պետք է լինի աջ մասերի տարբերությանը։ Կարճ ասելով՝ «յերկրորդ հավասարումից հանում ենք առաջին հավասարումը»։ Ստանում ենք՝

$$8x=24,$$
$$x=3.$$

x-ի նշանակությունը տեղադրելով հավասարումներից մեկի մեջ գտնում ենք՝

$$y=4.$$

Քննենք մի սխեման ևս՝

$$\left|\begin{array}{l} 11x+8y=71 \\ 5x-6y=13 \end{array}\right|$$

Նախորդ օրինակներում y անհայտի վերացումը թեթևանում էր նրանով, որ նրա գործակիցների բացարձակ մեծությունները հավասար էին։ Տվյալ սխեմայի մեջ նրանք հավասար չեն։ Նրանց հավասարեցնելու համար, գտնենք y-ի գործակիցների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը. նա հավասար է 24-ի։ Դրա համար բազմապատկենք առաջին հավասարման երկու մասը 3-ով, երկրորդինը՝ 4-ով։ Ստանում ենք՝

$$\left|\begin{array}{l} 33x+24y=213 \\ 20x-24y=52 \end{array}\right|$$

Գումարելով այս հավասարումները, ստանում ենք՝

$$53x=265,$$

$$x=5.$$

x-ի նշանակությունը տեղադրելով հավասարումներից մեկի մեջ գտնում ենք,

$$y=2.$$

Ահա այսպես, գումարման և հանման եղանակը կայանում է հետևյալում.—գտնում ենք կրճատվող անհայտի գործակիցների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը և հավասարումների երկու մասերը բազմապատկելով համապատասխան բազմապատկիչներով՝ հավասարեցնում ենք այդ անհայտի գործակիցները. հետո գումարում ենք կամ հանում տվյալ հավասարումները, դրանով այդ անհայտը վերացնում և ստանում ենք մի անհայտով մի հավասարում. լուծելով այս հավասարումը՝ գտնում ենք մի անհայտի նշանակությունը, որից հետո տեղադրման եղանակով որոշում ենք նաև մյուս անհայտի նշանակությունը։

Լուծենք հետևյալ հավասարումների սիստեմները գումարման և հանման եղանակով.

1) $5x+9y=47,\quad 10x+13y=79$
2) $3x+2y=2,\quad 9x+4y=5$
3) $8x-9y=-2,\quad 16x+15y=62$
4) $7u-2v=16,\quad 13u-5v=31$
5) $2s+9t=65,\quad 6s+5t=85$
6) $2x+3y=9a,\quad 5x-6y=9a$

7) $9x+8y=3a+2b,\quad 6x+4y=2a+b$
8) $x+y=2a,\quad 5x-2y=3a+7b$
9) $2u+v=5a+4b,\quad u+2v=4a+5b$
10) $x+y=a^2,\quad x-y=b^2$

§ 80. ՄԻՔԱՆԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ ԱՆՀԱՅՏՈՎ ՅԵՐԿՈՒ ԱՆՀԱՅՏՈՎ ՅԵՐԿՈՒ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ.

I. Հավասարումների սիստեմ լուծելու մեր քննած բոլոր եղանակները նախ վերացնում են մի անհայտը, ապա կազմում մեկ անհայտով մեկ հավասարում։ Դրա համար այդ եղանակները կարող են կոչվել անհայտի վերացման եղանակներ։ Ցավ, այսպես, ունենալով միևնույն անհայտ պարունակող երկու հավասարումներ, կարելի չե այդ անհայտը վերացնել՝ կիրառելով կամ տեղադրման, կամ գործակիցների հավասարեցման, կամ բաղդատման եղանակները, և ստանալ մեկ հավասարում առանց այդ անհայտի։

II. Անհայտները կարող են ունենալ և տառային գործակիցներ։ Հավասարումների սիստեմն այս դեպքում լուծվում է դարձյալ նույն եղանակներով։

Լուծենք գումարման և հանման եղանակներով հետևյալ սիստեմը՝

$$\left|\begin{array}{l} ax+by=5 \\ a^2x-b^2y=3a-2b \end{array}\right|$$

y-ը վերացնելու համար առաջին հավասարման երկու մասը բազմապատկում ենք b-ով, իսկ երկրորդը թողնում նույնությամբ։ Ստանում ենք հավասարումների այսպիսի սիստեմ.

$$\left|\begin{array}{l} abx+b^2y=5b \\ a^2x-b^2y=3a-2b \end{array}\right|$$

Գումարելով այս հավասարումները, ստանում ենք՝

$$abx+a^2x=3a+3b.$$

Ձախ մասում հանելով փակագծերից ընդհանուր ax բազմապատկիչը իսկ աջ մասում 3-ը, ստանում ենք.

$$ax+(a+b)=3(a+b).$$

Կրճատելով $a+b$-ով և բաժանելով երկու մասն էլ x-ի գործակցի վրա՝ գտնում ենք, որ

$$x=\frac{3}{a};$$

x-ի այս նշանակությունը տեղադրելով հավասարումներից մեկի, ոբինակ՝ առաջնի (որն ավելի պարզ ձև ունի) մեջ, ստանում ենք՝

$$3+by=5,$$

վորտեղից

$$y=\frac{2}{b}:$$

III. Յերբե տվյալ հավասարումները պարունակում են կոտորակներ, կամ հարկավոր է նրանց ավելի պարզ ձև տալ, ապա յուրաքանչյուր հավասարումը, նախ քան հավասարումների սիստեմը լուծելը, պետք է պարզեցնել մինչև վերջը և հետո միայն լուծել ստացած հավասարումների սիստեմը՝ ցույց տված յեղանակներից մեկով:

Տված է հավասարումների սիստեմ՝

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=5,\quad (x+1)\cdot(y-4)=(x-1)\cdot(y-3):$$

Առաջին հավասարումն ազատում ենք կոտորակներից և ստանում՝

$$4x+3y=60:$$

Յերկրորդ հավասարման մեջ բաց ենք անում փակագծերը, և անհայտ անդամները փոխադրում հավասարման մի մասը, իսկ հայտնիները՝ մյուս մասը.

$$\begin{array}{l} xy\quad 4x+y-4=xy-3x-y+3,\\ \quad -4x+y+3x+y=3+4,\\ \quad -x+2y=7:\end{array}$$

Մենք ստացանք հավասարումների ավելի պարզ սիստեմ՝

$$\left|\begin{array}{l} 4x+3y=60\\ -x+2y=7\end{array}\right|:$$

Յերեք յեղանակներից վորևե մեկով լուծելով այս սիստեմը՝ ստանում ենք.

$$x=9,\quad y=8:$$

§ 81. ՅԵՐԿՈՒ ԱՆՀԱՅՏՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ. ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

Լուծեք հետևյալ հավասարումների սիստեմները և ստուգեք լուծումը՝ տեղադրելով հավասարումների մեջ անհայտների գտած նշանակությունները:

Ճանկալի չէ բոլոր յեղանակների կիրառումը:

1) $3,2x=5y,\ 2x+15y=29$
2) $0,25u+0,1v=13,\ 2u-3v=9$
3) $0,7x+0,6y=10,38,\ 0,8x-0,3y=4,47$
4) $0,8x+13y=21,75,\ 0,4x+11y=7,43$
5) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=13,\ \frac{x}{5}-\frac{y}{8}=1$

6) $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=2,\ \frac{x}{2}-\frac{y}{9}=9$
7) $\frac{u}{2}+\frac{v}{5}=11,\ \frac{u}{9}+\frac{v}{2}=7$
8) $\frac{2u}{5}+\frac{3v}{4}=38,\ \frac{4u}{5}-\frac{v}{2}=28$
9) $\frac{4x}{5}+\frac{3y}{4}=9\frac{1}{2},\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=4\frac{1}{3}$
10) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=5,\ \frac{1}{4}x-\frac{1}{9}y=2\frac{2}{3}$
11) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2,\ ax+by=a^2+b^2$
12) $ax+by=2,\ a^2x-b^2y=a-b$
13) $(x+5)\cdot(y-1)=(x-4)\cdot(y+11),\ 5x=7y$
14) $uv=(u+8)\cdot(v-2),\ u=2\cdot(v+1)$
15) $\frac{x+2}{y}=\frac{x+4}{y+1},\ \frac{x+4}{y+3}=\frac{2x-1}{2y}$
16) $\frac{x}{y-1}=\frac{x-6}{y-3},\ \frac{x}{y}=\frac{x-5}{y-2}$
17) $\frac{x+y}{3}-\frac{x-3}{2}=2,\ x-2y=3$
18) $\frac{x+2y}{7}-\frac{x-y}{2}=1,\ x+3y=18$
19) $\frac{2x+y}{5}-\frac{x-y}{4}=3,\ 2x+5y=36$
20) $\frac{3x-y}{2}-\frac{x+y}{5}=5,\ 2x=3y$
21) $\frac{x+y}{2}=x-2,\ \frac{x-y}{4}=y-3$
22) $\frac{x-1}{2}+\frac{y-1}{3}=y,\ \frac{20-x}{3}+\frac{9+y}{2}=x$
23) $xy+(x+4)\cdot(y-2),\ \frac{x+y}{5}+\frac{x-y}{2}=6$
24) $xy=(x-3)\cdot(y+1),\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=2y-1$
25) $\frac{x+y}{a}-\frac{x-y}{b}=0,\ ax-by=a^2+b^2$
26) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2b,\ x+y=b(a+b)$
27) $3(x+y)=7(x-y),\ x+2y=9a$

28) $x+2y=5m$, $2x-y=5n$

29) $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=5$, $\frac{x}{2a}-\frac{y}{3b}=3$

30) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=8$, $\frac{x}{3a}-\frac{y}{2b}=3$

31) $(a+b)x-(a-b)y=0$, $(a^2-b^2)\cdot(x+y)=2a$

32) $a^2x+b^2y=a+b$, $a^3x+b^3y=a^2+b^2$

33) $\frac{x-b}{a}-\frac{y-a}{b}=a+b$, $b(x+y)=a(x-y)$

34) $a(x+y)=a^2+1$, $2x+a^2y=3a$

35) $a(x-y)=1$, $x+y=\frac{3}{a}$

36) $ax+by=m$, $cx+dy=h$։

§ 82. ՅԵՐԿԱՆՀԱՅՏ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐ ԿԱԶՄԵԼԸ.

Յերկանհայտ հավասարումների ոգնությամբ կարելի է լուծել մի շարք խնդիրներ, վորոնց մեջ պահանջվում է վորոշել յերկու անհայտ մեծություններ, ըստ վորում այդ անհայտների և տվյալների միջև յեղած կապակցությունն արտահայտված է յերկու պայմանով։

Յեթե պայմաններից մեկում շատ պարզ կերպով է արտահայտված անհայտների կապակցությունը, ապա կարիք չկա սիստեմ կազմել. այդպիսի դեպքերում դյուրին է արտահայտել մեկ անհայտը մյուսի միջոցով և բավարարվել մի հավասարումով՝ հիմք ընդունելով տվյալ յերկրորդ պայմանը։ Որինակ, յեթե տված է, վոր անհայտ թվերից մեկն ավել է յերկրորդից a թվով, ապա կարելի է նրանցից դիցուք փոքրը նշանակել x-ով իսկ մեծը՝ $x+a$-ով։

Իսկ յեթե անհայտները և տվյալները կապված են ավելի բարդ պայմաններով, ապա անհայտների համար մտցնում ենք առանձին նշումներ և կազմում յերկու հավասարումների սիստեմ՝ հիմնվելով խնդրի պայմանների վրա։

Պարզենք ասածն որինակով։

Պահանջվում է վորոշելու յերկու թիվ, յեթե 1) առաջնի կեսը 4-ով ավել է յերկրորդի մեկ յերրորդականից և 2) վորոնելի թվերի գումարը 11 անգամ մեծ է նրանց տարբերությունից։

Անհայտները նշանակենք մեկը x-ով, մյուսը՝ y-ով։

Ըստ առաջին պայմանի կկազմենք հավասարում՝

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=4։$$

Ըստ յերկրորդի՝ հավասարում

$$x+y=11(x-y)։$$

Այսպիսով, կազմվում է հավասարումների սիստեմ, վորը և լուծելով՝ գտնում ենք՝

$$x=18,\quad y=15,$$

այսինքն՝ վորոնելի թվերն են 18-ը և 15-ը։

Լուծեք հետևյալ խնդիրները յերկու անհայտով յերկու հավասարումների սիստեմի ոգնությամբ։

1. 3 լիտր սպիրտը և 4 լիտր յուղը կշռում են միասին 6 կգ։ Կես լիտր սպիրտը $^1/_4$ լիտր յուղից կշռում է 300 գ-ով ավել։ Վորոշել թե սպիրտի և թե յուղի մեկ լիտրի կշիռը։

2. Ճանապարհորդն անցավ 9 ժամ արագընթաց և 10 ժամ մարդատար գնացքով ընդամենը 940 կմ։ Մի ուրիշ ճանապարհորդ անցավ 15 ժամ արագընթաց և 1 ժամ մարդատար գնացքով և անցավ նույն տարածությունը։ Վորոշել գնացքների արագությունը։

3. Արհեստանոցում աշխատում են 6 չափահաս և 5 անչափահաս բանվորներ, վորոնք ամսական ստանում են 675 ռ. աշխատավարձ։ Մի ուրիշ արհեստանոցում նույն աշխատավարձով աշխատում են 8 չափահաս և 3 անչափահաս բանվորներ, վորոնք ամսական ստանում են 735 ռ։ Վորոշել յուրաքանչյուր չափահաս և անչափահաս բանվորի ամսական աշխատավարձը։

4. 3,5 մ հասա լարը 20 մ բարակ լարի հետ միասին կշռում է 1 կգ 25 գ։ 4,5 մ հասա լարը 24 մ բարակ լարի հետ միասին կշռում է 1 կգ 275 գ։ Վորոշել թե հասա և թե բարակ լարերի 1 մետրի կշիռը։

5. Բանակի չոկատը միևնույն նշանին 500 մ տարածության վրա կակեց 800 փամփուշտ, իսկ 1 կմ տարածությունից՝ 600 փամփուշտ և ունեցավ ընդամենը 174 զարկ նպատակին։ Նույն չոկատը նույն նշանին 500 մ տարածությունից արձակեց 500 փամփուշտ, իսկ 1 կմ տարածությունից՝ 300 փամփուշտ և ունեցավ 102 զարկ նպատակին։ Վորոշել 500 մ և 1 կմ տարածությունների համար ունեցած նպատակադարկերի միջին տոկոսը։

6. 5 կգ թեյը և 2 կգ սուրճը միասին արժեն 31 ռ։ Յեթե թեյը թանգանար 10%-ով, իսկ սուրճը՝ 25%-ով, ապա 1 կգ թեյի և 1 կգ սուրճի համար պետք եր վճարել 9 ռ. 25 կ։ Գտնել 1 կգ թեյի և 1 կգ սուրճի գինը։

7. Վորոշել ուղղանկյան հիմքը և բարձրությունը հետևյալ պայմաններով. 1) հիմքի $^1/_2$-ը 5 սմ-ով մեծ է բարձրության $^1/_3$-ից. 2) յեթե հիմքը մեծացնենք 8 սմ-ով, իսկ բարձրությունը փոքրացնենք 3 սմ-ով, ապա ուղղանկյան մակերեսը կմնա անփոփոխ։

8. Ծռուղում վրա դասավորված են A, B և C կետերը։ Յեթե AB տարածությունն անցնենք 15 կմ արագությամբ, իսկ BC-ն՝

12 կմ արագությամբ, ապա ամբողջ AC տարածությունը կարելի կլինի անցնել $6^1/_2$ ժամում։ Իսկ եթե AB տարածությունն անցնենք 12 կմ և BC-ն՝ 15 կմ արագությամբ, ապա AC տարածությունն անցնելու համար կպահանջվի 7 ժամ։ Որոշել AB, BC և AC տարածությունները։

9. Եթե մի վորևե ուղղանկյան հիմքը մեծացնենք 3 սմ-ով և բարձրությունը 5 սմ-ով, ապա նրա մակերեսը կմեծանա 83 f սմ-ով. իսկ եթե փոքրացնենք հիմքը 2 սմ-ով և բարձրությունը 1 սմ-ով, ապա ուղղանկյան մակերեսը կփոքրանա 20 f. սմ-ով։ Վորոշել ուղղանկյան չափերը։

10. 200 գ անդիկով լցրած անոթը 100^0 տաքացնելու համար ծախսված է 650 կալորիա։ Նույն անոթը լցրած 360 գ անդիկով նույն աստիճանին հասցնելու համար ծախսված է 1130 կալորիա։ Վորոշել անոթի և 1 գ անդիկի ջերմունակությունը։

11. Աշխատանքի կեսը կատարել է մեկ արտել, մյուս կեսը՝ մի ուրիշ արտել ու ամբողջ աշխատանքն ավարտել 33 րոպե։ Եթե առաջին արտելը կատարեր աշխատանքի $^2/_3$ մասը, իսկ երկրորդը միայն $^1/_3$ մասը, ապա ամբողջ աշխատանքը կավարտվեր մեկ ուրով շուտ։ Քանի րոպե կկատարեր ամբողջ աշխատանքը յուրաքանչյուր արտելն առանձին։ Քանի րոպե կկատարվեր միևնույն աշխատանքը, եթե երկու արտելներն էլ աշխատեին միասին։

12. 10 կգ անտրացիտը և 15 կգ կոքսը այրվելուց տալիս են 186500 մեծ կալորիա. 5 կգ անտրացիտը և 4 կգ կոքսը տալիս են 68400 մեծ կալորիա։ Վորոշել անտրացիտի և կոքսի ջերմարար ունակությունը։ Ջերմարար ունակությունը կոչվում է ջերմության այն քանակը, վորն ստացվում է 1 կգ այրվող նյութերն այրելուց։

13. 25 կգ տորֆը և 3 կգ չոր փայտն այրվելուց տալիս են 134000 կալորիա, ըստ վորում փայտի ջերմարար ունակությունը կազմում է տորֆի ջերմարար ունակության $60^0/_0$-ը։ Վորոշել տորֆի և չոր փայտի ջերմարար ունակությունը։

14. Նավակն անցնելով հոսանքի ընթացքով $2^1/_2$ ժամ և հոսանքին հակառակ $1^1/_2$ ժամ՝ կանգ է առնում մեկնման տեղից 9,3 կմ տարածության վրա։ Եթե նա անցներ հոսանքի ընթացքով $1^1/_2$ ժամ և հոսանքին հակառակ $2^1/_2$ ժամ, ապա նա կանգ կառներ մեկնման տեղից 2,1 կմ տարածության վրա։ Վորոշել 1) նավակի արագությունը գետի հոսանքի ընթացքով և հոսանքին հակառակ, 2) հոսանքի արագությունը և 3) նավակի արագությունը կանգնած ջրում։

15. Առաջին տեսակի լծակի վրա ազդում են երկու ուժեր։ Նրանց համազորը հավասար է 33 կգ-ի։ Լծակի բազուկները հարաբերում են միմյանց, ինչպես 4 : 7 ին։ Գտնել լծակի վրա ազդող ուժերի մեծությունը։

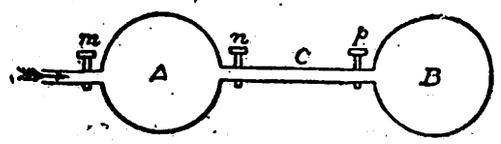
16. Մեկ լիտր սպիրտի և եֆիրի խառնուրդը կշռում է 780 գ։ Վորոշել խառնուրդի մեջ եղած սպիրտի և եֆիրի քանակը, եթե սպիրտի տեսակարար կշիռը հավասար է 0,8-ի, իսկ եֆիրինը՝ 0,7-ի։

17. Իրարից 1.0 կմ հեռավորության վրա գտնվող երկու կայարաններից միաժամանակ դուրս եկան իրար հանդիպելու ուղղությամբ երկու մարդատար գնացքները և հանդիպեցին միմյանց $1^1/_2$ ժամից հետո։ Եթե մարդատար գնացքը նույն ժամին դուրս գար և նրան հակառակ ուղղությամբ, ապա արագընթաց գնացքը կհասներ նրան $7^1/_2$ ժամից հետո։ Վորոշել գնացքների արագությունը։

18. Ջերկու կոոպերատիվներ հունվար ամսում վաճառեցին 5800 ռ. ապրանք։ Փետրվար ամսում առաջին կոոպերատիվի շրջանառությունն ավելացավ $25^0/_0$-ով, երկրորդինը՝ $30^0/_0$-ով և միասին վաճառեցին 7400 ռ. ապրանք։ Վորոշել յուրաքանչյուր կոոպերատիվի շրջանառությունը հունվար և փետրվար ամիսներում։

19. Կոոպերատիվը մեկ պարտիա թեյի վաճառքից ստացավ $12^0/_0$ վաստակ, իսկ երկրորդ պարտիայից՝ $15^0/_0$, իսկ երկուսից միասին ստացավ ընդամենը 102 ռ. վաստակ։ Եթե առաջին պարտիայից նա ստանար $18^0/_0$, իսկ երկրորդից — $20^0/_0$ վաստակ, ապա ընդհանուր վաստակը կկազմեր 144 ռ.։ Վորոշել թեյի արժեքն առաջին և երկրորդ դեպքում։

20. A և B գյուղերը միացած են խճուղով և սովորական ճանապարհով (շավիղ), վորը կարճ է խճուղուց 7 կմ-ով. գյուղացին A գյուղից B գյուղը խճուղով անցնում է $3^1/_2$ ժամում և վերադառնում սովորական ճանապարհով 3 ժամում. վերջին դեպքում նա մեկ ժամում 1 կմ պակաս է անցնում։ Վորոշել A և B գյուղերի միջև եղած տարածությունը, եթե խճուղով և եթե սովորական ճանապարհով, և գյուղացու երթևեկության (գնալու և վերադառնալու) արագությունը։

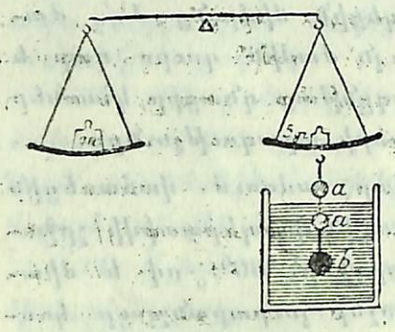


Գծ 134

21. Ունենք A և B երկու իրար հավասար ապակե գնդաձև անոթներ (գծ. 154), վորոնք միացած են C խողովակով։ Եթե n ծորակով A գնդի ու C խողովակի մեջ բաց թողնենք 2,6 գ ոդ, ապա նրա ճնշումը կհավասարակշռվի անդիկային ծանրաչափի (բարոմետր) այնպիսի սյան ճնշմամբ, վորի բարձրությունը 380 մմ է։ Իսկ եթե բաց անենք p ծորակը, վորպեսզի ոդը հավասար կերպով բաժանվի երկու գնդերի և խողովակի

մեջ, նրա ճնշումը հավասար կլինի 200 մմ-ի։ Որոշել գնդերի և խողովակի տարողությունը։ Հայտնի չե, որ 1 լիտր ողը ծանրությունն նորմալ ճնշման ժամանակ (760 մմ) կշռում է 1,3 գ։

22. Կշեռքի մի նժարից կախված են a չերկու միատեսակ չերկաթե և մեկ պղնձե b գնդիկները, որոնք հավասարակշռված են m տարայով։ Եթե ջրի մեջ սուզենք պղնձե և չերկաթե գնդիկներից մեկը, ապա հավասարակշռությունը վերականգնելու համար, առաջին նժարի վրա պետք է ավելացնել 5 գ։ Եթե ջրի մեջ սուզենք բոլոր չերկաթ գնդիկները, ապա պետք է ավելացնել ևս 1 գ։ Հայտնի չե, որ պղնձը ջրի մեջ կորցնում է իր կշռի $^1/_9$-ը, իսկ չերկաթը՝ $^2/_{15}$-ը։ Որոշել չուրաքանչյուր գնդի կշիռը։



Գծ. 155

23. Մի չերկանիշ թիվ 7 անգամ մեծ է իր թվանշանների գումարից։ Այդ թվի տասնավորների թիվը 6-ով պակաս է միավորների հնգապատիկ թվից։ Որոշել այդ չերկանիշ թիվը։

24. Որոշել չերկանիշ թիվը հետևյալ տվյալներով.

1) միավորների թվի կեսը պակաս է տասնավորների թվից.

2) եթե այդ թվի թվանշանները տեղափոխենք, կստանանք մի նոր թիվ, որը 27-ով մեծ է որոնելի թվից։

25. Շինության կառուցմանը մասնակցում են տղաղձագործների չերկու արտել։ Առաջին արտելի մասնակցողների $^1/_4$-ը միայն նախկին տեղում չերկրորդ արտելի մասնակցողների $^5/_6$ մասի հետ, իսկ մնացածներն անցան մի ուրիշ շենքի կառուցման, որից հետո նոր կազմված չուրաքանչյուր արտելի մեջ մասնակցողների թիվը հավասար չեղավ 28-ի։ Վիրքան եր չուրաքանչյուր արտելում մասնակցողների թիվը իրարից բաժանվելուց առաջ։

26. Գործարանն ունի չերկու շոգեմեքենա, որոնց ընդհանուր կարողությունը հավասար է 216 ձիու ուժի։ Մեկի արտադրողականությունը հարաբերում է մյուսի արտադրողականությանն այնպես, ինչպես 25 : 11-ին։ Որոշել չուրաքանչյուր մեքենայի կարողությունը։

27. Հրանոթի կրակոցի ձայնը 1 վայրկյանում, քամու ուղղությամբ՝ անցնում է 334 մ, իսկ քամուն հակառակ ուղղությամբ՝ 320 մ։ Գտնել ձայնի տարածվելու արագությունը և քամու արագությունը։

28. Որոշել ABC չեռանկյան անկյունները հետևյալ տվյալներով։ B անկյունն այնքանով է մեծ A անկյունից, որքանով C անկյունը մեծ է B անկյունից։ A անկյան $^1/_5$-ի, B անկյան $^1/_2$-ի և C անկյան $^1/_3$-ի գումարը հավասար է 64^0-ի։

29. Չերկու թվերի գումարը հավասար է m-ի, իսկ տարբերությունը՝ n-ի։ Որոշել այդ թվերը։

30. Չերկու թվերի գումարը հավասար է S-ի, իսկ նրանց հարաբերությունը՝ K-ի։ Գտնել այդ թվերը։

31. a մետր մահուդը և b մետր մետաքսը միասին արժեն m ռ. մահուդի կրկնապատիկ չանակը և մետաքսի հնգապատիկ քանակն արժեն միասին $4m$ ռ.։ Որոշել մահուդի և մետաքսի 1 մետրի արժեքը։

32. m չափահաս և n անչափահաս բանվորների վաստակը կազմում է A ռ.։ Չափահաս բանվորի վաստակը 1 ռուբլով պակաս է անչափահաս բանվորի կրկնապատիկ վաստակից։ Որոշել չափահասի և անչափահասի վաստակը։ Գտնել ստացած արտահայտությունների թվական մեծությունները, չեթե 1) $m = 8$, $n = 5$, $A = 605$. 2) չեթե $m = 10$, $n = 3$, $A = 805$։

33. Չերկու որոնելի հատվածների գումարը հավասար է a-ի։ Եթե առաջին հատվածը մեծացնենք m անգամ, իսկ չերկրորդը՝ n անգամ, ապա կստանանք իրար հավասար հատվածներ։ Որոշել որոնելի հատվածները։

34. Մի հեծանիվի անիվի շրջանագիծը a սմ-ով մեծ է մի ուրիշ հեծանիվի անիվի շրջանագծից։ Առաջինի անիվը կատարում է m պտույտ նույն տարածության վրա, ինչ տարածության վրա չերկրորդի անիվը կատարում է n պտույտ։ Որոշել այդ հեծանիվների անիվների շրջանագիծը։ Գտնել ստացած արտահայտությունների թվական մեծությունը, չեթե $a = 10$, $m = 40$, $n = 42$։

35. Իրարից a սմ հեռավորության վրա գտնվող չերկու կետեր շարժվում են հավասարաչափ իրար հանդեպ և t վայրկյանից հետո նրանք իրար պետք է հանդիպեն։ Եթե քիչ արագություն ունեցող կետը շարժվի նույն արագությամբ, բայց հակառակ ուղղությամբ՝ հեռանալով մյուս կետից, ապա չերկրորդ կետը կհասնի առաջինին 5 վայրկյանից հետո։ Որոշել կետերի շարժման արագությունը։

36. Չերկու կետեր շարժվում են հավասարաչափ։ Առաջին կետը m վայրկյանում անցնում է նույն տարածությունը, ինչ չերկրորդ կետը՝ n վայրկյանում։ Առաջին կետը n վայրկյանում անցնում է a մետր պակաս, քան չերկրորդը՝ m վայրկյանում։ Որոշել

այդ կետերի շարժման արագությունը։ Գտնել այդ արագությունների արտահայտությունների թվական արժեքը, եթե՝ $m=7$, $n=9$, $a=16$։

§ 83. ԲԱԶՄԱՆՇԱՆԱԿ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄ.

Մի քանի անհայտներ որոշելու համար անհրաժեշտ է ունենալ նույն թվով պայմաններ։ Եթե բոլոր անհայտները նշանակենք առանձին տառերով, ապա նրանց որոշելու համար հարկավոր կլինի ունենալ այնքան հավասարում, որքան անհայտ ունենք։

Այդպիսի հավասարումների սիստեմները լուծելու համար կիրառվում են բոլոր այն եղանակները, որոնց ոգնությամբ լուծվում են երկանհայտ հավասարումների սիստեմները։

Դիցուք տված է երեանհայտ հավասարումների սիստեմ։ Միացնելով հավասարումները զույգ-զույգ, որինակ՝ առաջինը երկրորդի և առաջինը երրորդի հետ, կարելի է անհայտներից մեկը վերացնել և այդպիսով ստանալ երկանհայտ հավասարումների սիստեմ, այսինքն՝ 1-ով իջեցնել հավասարումների և անհայտների թիվը։ Նույն ձևով կարելի է 4 հավասարումների սիստեմից անցնել երեք հավասարումների սիստեմին։

Լուծենք սիստեմ՝

$$\left|\begin{array}{l} 3x+2y-z=21 \\ 4x-3y+2z=12 \\ x+5y-3z=19 \end{array}\right|$$

կիրառելով գործակիցների հավասարեցման եղանակը՝ վերացնենք z անհայտը։ Միացնենք առաջին հավասարումը երկրորդի հետ ու z-ի գործակիցները հավասարեցնելու համար՝ առաջին հավասարման երկու մասն էլ բազմապատկենք 2-ով։ Գումարելով հավասարումները ստանում ենք՝

$$10x+y=54.$$

Միացնենք առաջին հավասարումը երրորդի հետ։ Բազմապատկենք առաջին հավասարման երկու մասն էլ 3-ով և հանենք նրանից երրորդը։ Ստանում ենք՝

$$8x+y=44.$$

Այսպիսով ստանում ենք երկանհայտ հավասարումների սիստեմ, վորը և լուծում ենք։

Գտարեք z անհայտի նշած վերացումը և վերջացրեք հավասարումների սիստեմի լուծելը։

Նույն սիստեմը լուծեք տեղադրման եղանակով, գտնելով վորևե հավասարումից մեկ անհայտի արտահայտությունը և գնելով այն մյուս հավասարումների մեջ։

Եթե տվյալ հավասարումներից մեքանիսի մեջ չկան բոլոր անհայտները, ապա դրանով անհայտների վերացումը հեշտանում է։

Որինակ՝ հետևյալ սիստեմի մեջ.

$$\left|\begin{array}{l} 2x+3y-2z=16 \\ 3x-y+5z=53 \\ y+2z=12 \end{array}\right|$$

վերջին հավասարման մեջ չկա x անհայտը։ Առաջին և երկրորդ հավասարումներից վերացնելով x-ը, ստանում ենք երկանհայտ հավասարումների սիստեմ y և z անհայտներով։ Լուծենք այդ սիստեմը։

Վարժություններ բազմանհայտ հավասարումներով։

Լուծեք ստորև բերված հավասարումների սիստեմները։ Եթե տվյալ հավասարումները պահանջում են պարզեցում, ապա նախ պետք է նրանց պարզել և հետո անցնել նրանց լուծմանը։

1) $x+y+z=31$, $2x-y+z=23$, $3x+y=46$
2) $x+3y=10$, $2x+z=7$, $2y+3z=21$
3) $\frac{u}{3}+\frac{v}{2}+\frac{t}{5}=9$, $u-v=4$, $u+2t=22$
4) $x+u=3(x-u)$, $x+y=5(x-y)$, $x+3y+5u=33$
5) $2x+3y=3$, $x+2u=1$, $9y+4u=7$
6) $x+y=11$, $y+z=15$, $x+z=14$
7) $x+y+z=14$, $x+y+u=17$, $x+z+u=20$, $y+z+u=21$
8) $2x+y+z=16$, $5x-y+z=17$, $3x+2y+3z=35$
9) $3x-3y+5z=22$, $2x+2y+7z=23$, $x-4y-3z=3$
10) $x-4y+3z+6$, $x+3y-2z=10$, $3x-4y-5z=6$
11) $y+z=a$, $x+z=b$, $x+y=c$
12) $x+y=2a$, $x+z=3a$, $y+z=3a-2b$
13) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=8$, $\frac{x}{3}+u=6$, $x+y=3(y-2u)$
14) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=11$, $\frac{y}{4}+u=8$, $x+y=5(x-u)$
15) $x+y=19$ $x+z=15$ $x+u=12$ $x+y+z+u=26$
16) $x-y=2$, $z-x=3$, $x+2u=20$, $x-3y-z+10u=7$
17) $ax+by=a^2+2b^2$, $ax+bz=a^2+2ab-b^2$, $y+z=b$
18) $x+y=a$, $x+z=b$, $3y+2z=a+b$
19) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{5}{6}$, $\frac{x}{a}+\frac{u}{c}=\frac{2}{3}$, $\frac{y}{b}+\frac{u}{c}=\frac{1}{2}$
20) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{1}{12}$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{4}$, $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{1}{3}$

Լուծեք հետևյալ խնդիրները հավասարումների սիստեմի ոգնությամբ.

1. 24 սմ երկարության հատվածը բաժանել երեք մասի այնպես, վոր առաջին մասը 5 սմ-ով մեծ լինի երկրորդի կեսից և երրորդի կրկնապատիկից։

2. Որոշել ABC եռանկյան անկյունները, եթե A անկյունը 5^0-ով մեծ է B անկյան կիսից, իսկ B անկյունը 30^0-ով փոքր է C անկյան կրկնապատկից։

3. Որոշել եռանկյան կողմերը, եթե ամենամեծ և ամենափոքր կողմերի գումարը հավասար է 27,3 սմ-ի, ամենամեծ և միջակ կողմերի գումարը հավասար է 28,7 սմ-ի, իսկ միջակ և ամենափոքր կողմերի գումարն է 25 սմ։

4. ABCD քառանկյան պարագիծը պարունակում է 50 սմ։ AB ամենամեծ կողմը հավասար է մնացած կողմերի գումարի $^2/_3$-ին։ BC կողմը 2 սմ-ով մեծ է CD կողմից և նուշնքանով փոքր AD կողմից։ Որոշել քառանկյան կողմերը։

5. Ցերեք անոթների մեջ լցրած է 6,9 լիտր ջուր։ Ցեթե առաջին անոթից դատարկենք յերկրորդի մեջ 0,3 լիտր, ապա նրանց մեջ կստացվի հավասար քանակությամբ ջուր։ Ցեթե դրանից հետո յերրորդ անոթից նուշնքան ջուր լցնենք յերկրորդի մեջ՝ ապա յերկրորդ անոթում ջրի քանակը 2,5 անգամ ավել կլինի, քան յերրորդում։ Քանի՞ լիտր ջուր կա ուրաքանչյուր անոթի մեջ։

6. Ցերեք թվերի գումարը հավասար է a-ի։ Նրանցից առաջինը m միավորով ավել է յերկրորդից, վորն իր հերթին k անգամ մեծ է յերրորդից։ Որոշել այդ թվերը։

7. $y=ax^2+bx+c$ եռանդամի թվական արժեքներն են՝ 2, 0 և 56, յերբ $x=1$, $x=2$ և $x=10$։ Որոշել այդ եռանդամի a, b և c գործակիցները։

Փոխարինելով a, b և c գործակիցներն իրենց թվական նշանակություններով՝ հաշվել եռանդամը, յերբ 1) $x=3$ և 2) $x=7$։

8. $y=a+bu+cu^2$ եռանդամը u-ի յերեք տվյալ թվական նշանակությունների ժամանակ ընդունում է համապատասխան արժեքներ, վորոնք ցույց են տրված հետևյալ աղյուսակում.

u	1	2	3
y	15,1	16,9	17,9

Գտնել եռանդամի թվական նշանակությունը, յերբ $u=0$ և յերբ $u=0,5$։

9. Եռանկյան կողմերը պարունակում են a, b և c սմ։ Մի ուրիշ եռանկյան զույգ-զույգ վերցրած կողմերի գումարները հավասար են առաջին եռանկյան կողմերին։ Որոշել այդ եռանկյան կողմերը։ Կառուցել յերկու եռանկյունները, վերցնելով $a=9$, $b=8$, $c=7$։

10. Որոշել յերեք մարմինների քաշը հետևյալ տվյալներով. յեթե յերկու մարմինը դնել կշեռքի մի նժարի, իսկ յերրորդը մյուս նժարի վրա, ապա յերեք գանազան համակցությունների (կոմբինացիաների) ժամանակ հավասարակշռություն ստանալու համար, պետք է այն նժարի վրա, վորտեղ դրված է մի մարմին, ավելացնել 14 գր, 10 գր, 8 գր:

ԳԼՈՒԽ IX.

ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆ ՈՒ ՊԱՏԿԵՐՆԵՐԻ ՆՄԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ.

§ 84. ԳԱՂԱՓԱՐ ՆՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ.

Յուրաքանչյուր վայրի կամ շենքի հատակագիծը, նաև ամեն մի տեխնիկական գծանկար տալիս են ձևերի պատկերացում այս կամ այն մասշտաբով, ըստ վորում անփոփոխ պահպանվում են անկյունների մեծությունն ու հատվածների հարաբերությունը, այնպես վոր գծանկարի վրա վերցրած հատվածների յերկարությունները համեմատական են պատկերացվող հատվածների իրական մեծություններին։ Այն պատկերները, վորոնց մեջ իրագործվում է այս պայմանը, կոչվում են նման։ Այդ պատճառով պատկերների նմանության և հատվածների համեմատականության վերաբերող հարցերը սերտ կերպով կապված են միմյանց հետ ու կազմում են այս գլխի բովանդակությունը։

Յերկու հատվածների հարաբերությունը վորոշելու համար, մենք գտնում ենք, թե՝ մի հատվածը քանի անգամ և պարունակվում մյուսի մեջ. իսկ յեթե փոքր հատվածն առանց մնացորդի չի տեղավորվում մեծ հատվածի մեջ, ապա մենք նրան բաժանում ենք հավասար մասերի և վորոշում, թե ստացած մասը քանի՞ անգամ է տեղավորվում մյուս հատվածի մեջ։ Այդ իսկ պատճառով հատվածների հարաբերությունը վորոշելու համար, պետք է կարողանալ հատվածը բաժանել հավասար մասերի։ Այստեղից էլ կսկսենք նմանության ուսումնասիրությունը։

§ 85. ՀԱՏՎԱԾԻ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ ՀԱՎԱՍԱՐ ՄԱՍԵՐԻ.

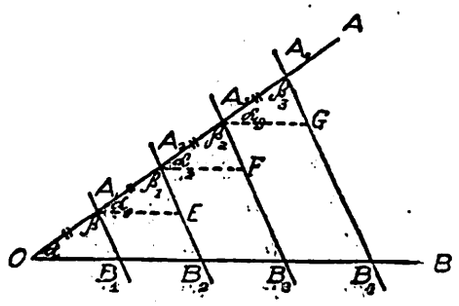
Յենթադրենք տված է կամավոր մեծության AOB անկյունը (գծ. 156)։ Նրա կողմերից մեկի, ասենք՝ OA-ի վրա վերցնենք իրար հավասար հատվածներ՝ OA_1, A_1A_2, A_2A_3,...։ Բաժանման կետերից վորևե մեկից տանենք անկյան մյուս կողմը հատող մի ու-

ղիղ, որինակ՝ A_1B_1-ը, և նրան զուգահեռ A_2B_2, A_3B_3,... ուղիղները։ OB կողմի վրա կառուցանան այդպիսով մի շարք հատվածներ՝ OB_1, B_1B_2, B_2B_3,...։ Ապացուցենք, որ այս հատվածները հավասար են միմյանց։

Ապացուցելու համար տանենք OB կողմին զուգահեռ ուժանդակ ուղիղներ՝ A_1E, A_2F, A_3Q....։

Համեմատելով OA_1B_1, A_1A_2E, A_2A_3F.... յեռանկյունները, տեսնում ենք, որ նրանք հավասար են, քանի որ նրանք ունեն մի հավասար կողմ և այդ կողմի վրա ընկած յերկու հավասար անկյուններ, (ցույց տվեք մանրամասն հավասար մասերը), որտեղից հետևում է, որ նրանց համապատասխան OB_1, A_1E, A_2F... կողմերը նույնպես հավասար են, այն է՝

$$OB_1=A_1E=A_2F=\dots$$



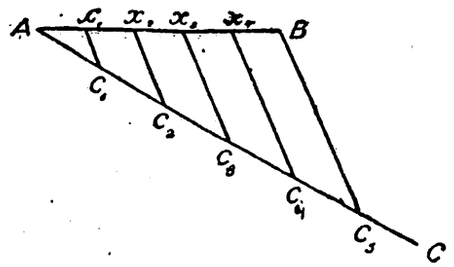
Գծ. 156

Քննելով $B_1A_1EB_2$, $B_2A_2FB_3$, $B_3A_3OB_4$,... զուգահեռակողմները (պարալելոգրամ), մենք յեզրակացնում ենք, որ նրանց հակադիր կողմերն իրար հավասար են, այն է՝ $A_1E=B_1B_2$, $A_2F=B_2B_3$, $A_3Q=B_3B_4$,....։

Նախորդ հավասարության մեջ A_1E, A_2F... հատվածները փոխարինելով նրանց հավասար հատվածներով, ստանում ենք՝

$$OB_1=B_1B_2=B_2B_3=\dots.$$

Ուրեմն, յեթե անկյան մի կողմի վրա վերցնենք իրար հավասար կամավոր հատվածներ, յեվ բաժանման կետերից տանենք զուգահեռ ուղիղներ մինչեվ անկյան մյուս կողմի հետ հատվելը, ապա անկյան այս յերկրորդ կողմի վրա յեվս կառաջանան իրար հավասար հատվածներ:



Գծ. 157

Այս թեորեմի հիման վրա լուծվում է հատվածը հավասար մասերի բաժանելու խնդիրը։

Որինակ՝ տվյալ AB հատվածը հարկավոր է բաժանել 5 հավասար մասերի (գծ. 157)։

Նրա A ծայրից տանում ենք վորևե AC ուղիղ այնպես, որ AB-ի հետ կազմի վորևե անկյուն։ Ապա AC-ի վրա A կետից նշում ենք հավասար յերկարության 5 հատվածներ։

Հինգերորդ C_5 կետը միացնում ենք B-ի հետ և բոլոր մյուս կետերից տանում C_5B-ին զուգահեռ ուղիղներ, որոնք AB ուղիղը, համաձայն ապացուցած թեորեմի, X_1, X_2, X_3 և X_4 կետերում բաժանում են 5 հավասար մասերի։

Վարժություններ.—1. Բաժանեք տվյալ հատվածը 3, 6 և 7 հավասար մասերի։

2. Բաժանեք տվյալ հատվածը ցույց տված յեղանակով 4 հավասար մասերի և ստուգեք կառուցման ճշտությունը՝ կրկնակի կիսելով տվյալ հատվածը՝ համաչափության վրա հիմնված յեղանակով։

3. Բաժանեք տվյալ հատվածը 2 այնպիսի մասերի, որոնցից մեկը մեծ լինի մյուսից 2, $1^1/_2$ և $1^1/_4$ անգամ։

§ 86. ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ.

Նախորդ գծանկարի վրա (գծ. 157) վերցնենք BAC անկյան կողմերը հատող զուգահեռներից վորևե յերկուսը, որինակ՝ BC_5-ն ու X_3C_3-ը և քննենք A անկյան կողմերի վրա նրանցից առաջացած հատվածները։ BC_5 հատողը կտրում է AB և AC_5 հատվածները, X_3C_3 հատողը կտրում է AX_3 և AC_3 հատվածները։

AB ու AX_3 հատվածները կազմված են 5 և 3 հավասար մասերից, հետևապես նրանց հարաբերությունը արտահայտվում է $\frac{5}{3}$

թվով $\frac{AB}{AX_3}=\frac{5}{3}$;

Անկյան մյուս կողմի վրա ստացված AC_5 ու AC_3 հատվածները նույնպես կազմված են 5 և 3 իրար հավասար մասերից, այնպես որ նրանց հարաբերությունն արտահայտվում է նույն թվով՝

$$\frac{AC_5}{AC_3}=\frac{5}{3};$$

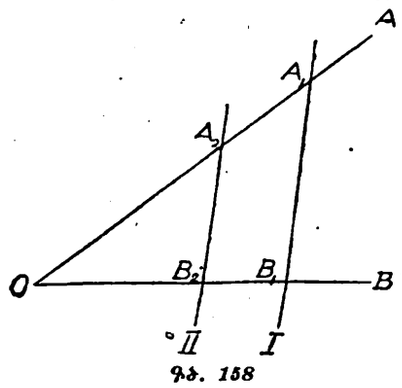
Ուրեմն, անկյան մի կողմի վրա առաջացած հատվածների հարաբերությունը հավասար է անկյան մյուս կողմի վրա առաջացած հատվածների հարաբերությանը, այսինքն՝ այդ հատվածները կազմում են հետևյալ հարաբերությունը՝

$$\frac{AB}{AX_3}=\frac{AC_5}{AC_3};$$

Մենք քննեցինք A գագաթից հաշված հատվածները։ Քննելով մի կողմի վրա գտնվող յերկու իրար հարևան AX_3 ու X_3B հատվածները և մյուս կողմի վրա նրանց համապատասխան AC_3 ու C_3C_5 հատվածները՝ յերկու դեպքում էլ մենք կստանայինք $^3/_2$ հարաբերությունը, այսինքն՝ հետևյալ հավասարությունը՝

$$\frac{AX_3}{X_3B}=\frac{AC_3}{C_3C_5}.$$

Եթե անկյան կողմերի վրա ստացված հատվածների թիվը լինեն ուրիշ, ապա նրանց հարաբերությունները կարտահայտվելին ուրիշ կոտորակներով. բայց մի կողմի հատվածների հարաբերության հավասարությունը մյուս կողմի հատվածների հարաբերության՝ կմնար դարձյալ իր ուժի մեջ։



Գծ. 158

Այստեղից հետևում է այն թեորեմը, որի վրա հիմնված է համեմատականության և նմանության ամբողջ ուսմունքը.—Եթե անկյան կողմերը հատենք յերկու զուգահեռ ուղիղներով, ապա այդ կողմերի վրա կառաջանան համեմատական հատվածներ, այսինքն՝ եթե AOB անկյան կողմերը (գծ. 158) հատենք I և II զուգահեռ ուղիղներով, այն ժամանակ՝

$$\frac{OA_1}{OA_2}=\frac{OB_1}{OB_2}$$

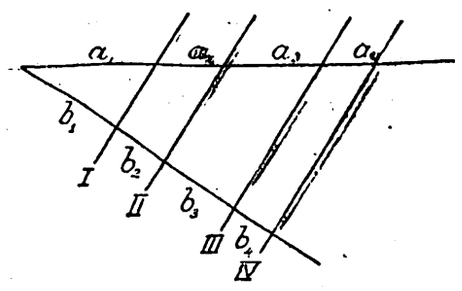
կատարելով միջին անդամների տեղափոխությունը՝ որից, ինչպես մենք գիտենք հավասարությունը չի խախտվի, կստանանք՝

$$\frac{OA_1}{OB_1}=\frac{OA_2}{OB_2}.$$

Եթե AO կողմի վրա վերցնենք OA_2 ու A_2A_1 հատվածները, ապա կստանանք համեմատությունն՝

$$\frac{OA_2}{A_2A_1}=\frac{OB_2}{B_2B_1}.$$

Ընդհանրապես, եթե անկյան մի կողմի վրա վերցնենք որևէ զույգ հատվածներ, ապա նրանց հարաբերությունը հավասար է մյուս կողմի վրա դասավորված համապատասխան հատվածների հարաբերությանը։



Գծ. 159

Հատվածների թիվը կարելի է ավելացնել։ Որինակ՝ եթե (գծ. 159) I ∥ II ∥ III ∥ IV, ապա անկյան կողմերի վրա համապատասխանաբար դասավորված հատվածների հարաբերությունները՝ հավասար են՝

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_4}{b_4}.$$

Խնդիրներ.—1. O գագաթ ունեցող անկյան մի կողմի վրա նշված են հատվածները՝ OA=9 սմ-ի և AB=6,3 սմ-ի։ Մյուս կողմի վրա նշված է 12,06 սմ-ի հավասար OC հատվածը։ Այդ կողմի վրա, վորպեսզի AC և BD ուղիղները լինեն զուգահեռ, O կետից ինչ տարածության վրա պետք է վերցնել D կետը։

2. Յերկու զուգահեռ ուղիղները՝ LL_1 և MM_1 հատում են անկյան կողմերը և նշում մի կողմի վրա հատվածները՝ $a=13,2$ սմ և $b=8,4$ սմ, վորոնք կազմում են միմյանց շարունակությունը։ Մյուս կողմի վրա նրանք նշում են յերկու այնպիսի հատվածներ, վորոնցից մեկը մեծ է մյուսից 3,6 սմ-ով։ Վորոշեք այդ հատվածները և կատարեք ամբողջ պատկերի կառուցումը 2 անգամ փոքրացրած մասշտաբով։

3. Յերկու զուգահեռ ուղիղներ հատելով անկյան կողմերը՝ առաջացնում են նրանցից մեկի վրա a_1 և a_2, իսկ մյուսի վրա b_1 և b_2 հատվածները։ Վորոշեք այդ հատվածների յերկարությունները, յեթե a_1-ը մեծ է a_2-ից 6 սմ-ով, b_1-ը մեծ է b_2-ից 4 սմ-ով և a_2-ը փոքր է b_1-ից 1 սմ-ով։

4. Մի շարք զուգահեռ ուղիղներ հատելով անկյան կողմերը՝ առաջացնում են այդ կողմերից մեկի վրա 9 սմ, 4 սմ 6 սմ և 5 սմ յերկարության հատվածներ։ Մյուս կողմի վրա գտնվող նրանց համապատասխան հատվածների գումարը հավասար է 18 սմ-ի։ Վորոշեք այդ հատվածների յերկարությունը։

Համեմատական հատվածների հիմնական թեորեմից անմիջականորեն բղխում և կառուցման հետևյալ խնդիրների լուծումը.

1. a, b և c հատվածների համար չորրորդ համեմատականի կառուցումը։

Կառուցում ենք կամավոր անկյուն և նրա կողմերից մեկի վրա վերցնում a և b հատվածները, իսկ մյուս կողմի վրա՝ c հատվածը. միացնում ենք a և c հատվածների ծայրերը և b հատվածի ծայրից տանում a և c հատվածների ծայրերը միացնող ուղիղին զուգահեռ մի ուղիղ։

Անկյան յերկրորդ կողմի վրա ստացվում է x հատվածը, վորը բավարարում է

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$$

համեմատությանը, այսինքն՝ հանդիսանում է a, b և c հատվածների համար չորրորդ համեմատական։

Կատարեք այս կառուցումը, վերցնելով a, b և c կամավոր յերկարություններ ունեցող որևէ հատվածներ։

2. Հատվածի բաժանումն այնպիսի մասերի, որոնք համեմատական լինեն տվյալ յերկու (կամ մի քանի) հատվածներին։

Տված է AB հատվածը։ Պահանջվում է բաժանել նրան յերկու այնպիսի մասերի, որոնք համեմատական լինեն տվյալ m և n հատվածներին։

A կետի մոտ կառուցում ենք կամավոր մեծության անկյուն, որի կողմերից մեկը AB-ն է։ Անկյան մյուս կողմի վրա հաջորդաբար նշում ենք m և n հատվածները։ n հատվածի ազատ ծայրը միացնում ենք B-ի հետ և m հատվածի ծայրից տանում առաջին ուղիղին զուգահեռ մի ուղիղ։ AB հատվածը կտրվում է նրանով x և y հատվածների, որոնք համեմատական են m-ին և n-ին, այսինքն՝

$$\frac{x}{y}=\frac{m}{n}:$$

Կատարեք այս կառուցումը՝ վերցնելով կամավոր AB, m և n հատվածները։

Կատարեք տվյալ հատվածի բաժանումը յերեք այնպիսի մասերի, որոնք համեմատական լինեն m_1, m_2, m_3 տվյալ հատվածներին։

Խնդիրներ.—1. Յեռանկյան պարագիծը հավասար է տվյալ P մեծությանը, ըստ որում նրա կողմերը համեմատական են տվյալ յերեք l, m և n հատվածներին (որոնցից ամենամեծը մնացած յերկուսի գումարից պետք է փոքր լինի)։ Կառուցեք այդ յեռանկյունը։

2. Շեղանկյան անկյունագծերի գումարը հավասար է տվյալ s հատվածին, իսկ նրանց հարաբերությունը հավասար է տվյալ p և q հատվածների հարաբերությանը։ Կառուցեք շեղանկյունը։

3. Կառուցեք ուղղանկյուն, որի պարագիծը հավասար է տվյալ P մեծությանը, յեթե նրա կողմերը համեմատական են հավասարակողմ յեռանկյան կողմերին և բարձրությանը։

4. Կառուցեք ուղղանկյուն յեռանկյուն, որի ներքնաձիգը հավասար է տվյալ c մեծությանը և բարձրությամբ բաժանվում է 2 և 1-ի հարաբերությամբ։

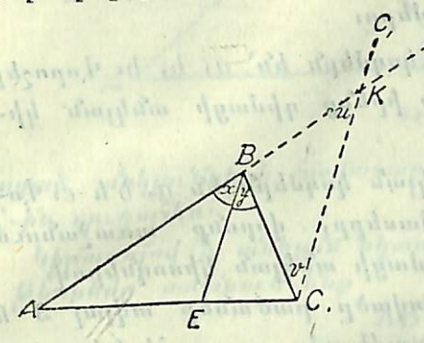
5. Յեռանկյան կողմը հավասար է a-ի և համապատասխան բարձրությամբ բաժանվում է յերկու այնպիսի մասերի, որոնց հարաբերությունը հավասար է p և q տվյալ հատվածների հարաբերությանը։ Տվյալ կողմի հակադիր անկյունն ունի տվյալ α մեծությունը։ Կառուցեք այդ յեռանկյունը։

6. Կառուցեք յեռանկյուն, յեթե տված է a հիմքը, նրան հակադիր α անկյունը և հայտնի է, որ գագաթից տարած կիսողով հիմքը բաժանվում է m և n հարաբերությամբ յերկու մասերի։

§ 87. ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԱՆԿՅԱՆ ԿԻՍՈՂԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ.

Հայտնի է, որ հավասարասրուն յեռանկյան գագաթի անկյան կիսողը յեռանկյան համաչափության առանցքն է և հիմքը բաժանում է յերկու հավասար մասերի։

Անհավասար կողմեր ունեցող անկյան կիսողը հակադիր կողմը բաժանում է անհավասար մասերի։ Այդ հատվածների և անկյուն կազմող կողմերի մեջ յեղած կախումը կարելի է գտնել համեմատական հատվածների հիմնական թեորեմի հիման վրա։



Գծ. 160

Տված է ABC յեռանկյունը (գծ. 160), որտեղ B անկյունը BE ուղիղով կիսվում է, այնպես որ

$$\angle x=\angle y:$$

C գագաթից տանենք BE կիսողին զուգահեռ CC_1 ուղիղը, որը AB կողմի շարունակության հետ հատվում է K կետում։

Քննելով BCK յեռանկյան u և v անկյունները՝ մենք տեսնում ենք, որ u և x անկյունները BE և CC_1 զուգահեռներով ու BK հատողով առաջացած համապատասխան անկյուններ են, իսկ v և y անկյունները նույն զուգահեռներով և BC հատողով առաջացած ներքին խաչադիր անկյուններ են, հետևապես,

$$\angle u=\angle x \text{ և } \angle v=\angle y:$$

Քանի որ x և y անկյունները հավասար են, ապա և

$$\angle u=\angle v,$$

որտեղից հետևում է, որ BCK յեռանկյունը հավասարասրուն է, այսինքն՝

$$BC=BK:$$

A անկյան կողմերը հատում են յերկու զուգահեռներով, հետևապես՝

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BK};$$

Այս համեմատության մեջ BK-ն փոխարինելով նրան հավասար BC-ով, կստանանք՝

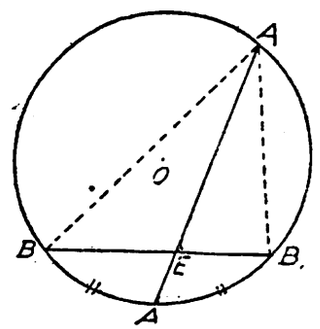
$$\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC},$$

այսինքն՝ յեռանկյան անկյան կիսողն այդ անկյան հակադիր կողմը բաժանում է յերկու այնպիսի մասերի, որոնք համեմատական են յեռանկյան մյուս կողմերին։

Խնդիրներ.—*1.* Յեռանկյան կողմերն են 9 սմ, 6 սմ և 10 սմ, վորոշել ամենամեծ կողմի այն մասերը, վորոնք առաջանում են յերբ նա հատվում է իր դիմացի անկյան կիսողով և ստուգել ստացած արդյունքը կառուցումով։

2. Յեռանկյան պարագիծը հավասար է 29,6 սմ-ի։ Յեռանկյան կողմերից մեկը նրան հակադիր անկյան կիսողով բաժանվում է յերկու մասերի, վորոնցից մեկը հավասար է 6 սմ-ի, իսկ մյուսը՝ 3,6 սմ-ի։ Վորոշեք յեռանկյան մյուս կողմերը։

3. Հավասարաթողուն յեռանկյան կողմերն են՝ a, b, b։ Վորոշել այն մասերը, վորոնք առաջանում են իրենց դիմացի անկյան կիսողներով։



գծ. 161

4. Յեռանկյան կողմերն են a, b և c։ Վորոշեք այն մասերը, վորոնք առաջանում են իրենց դիմացի անկյան կիսողներով։

5. AB հատվածը բաժանեք տվյալ 3 և 2-ի հարաբերությամբ, դուգահեռներ կառուցելու փոխարեն՝ ոգտվելով անկյան կիսողի թեորեմից։

6. Ապացուցեք, վոր յերեք շրջանի յերկու փոխադարձաբար հատվող լարերից մեկն անցնում է մյուս լարին ձգված ազեղի միջակետով (գծ. 161), ապա առաջին լարի մյուս ծայրի հեռավորությունները յերկրորդ լարի ծայրերից համեմատական են յերկրորդ լարի հատվածներին, այսինքն՝ յերբ $\smile A_1B = \smile A_1B_1$, ապա $\frac{AB}{AB_1} = \frac{EB}{EB_1}$։

§ 88. ՆՄԱՆ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ ՅԵՎ ՆՄԱՆ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՊԱՏԱՍԽԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ.

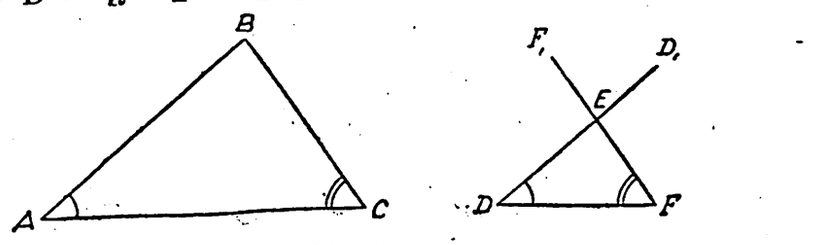
Տված է ABC *յեռանկյունը (գծ. 162)։ Կամավոր վերցրած* DF *հատվածի ծայրերում կառուցենք* A *և* C *անկյուններին հավասար անկյուններ։ Նրանց կողմերի հատումից ստացվում է* E *կետը, այնպես վոր առաջանում է* DEF *յեռանկյունը։*

Քանի վոր այս յեռանկյան յերկու անկյունները համապատասխանաբար հավասար են ABC *յեռանկյան յերկու անկյուններին, ապա հավասար են նաև յերրորդ անկյունները՝* $\angle E = \angle B$։

Յերկու յեռանկյուններ կոչվում են նման, յեթե մեկի անկյունները համապատասխանաբար հավասար են մյուսի անկյուններին։ (*Նմանության նշանն է՝* $\triangle ABC \sim \triangle DEF$)։

Հավասար անկյունների հակադիր կողմերը կոչվում են համապատասխան։

Յեթե DEF *յեռանկյունը վերադրենք* ABC *յեռանկյանն այնպես, վոր* D *անկյունը համընկնի իրեն հավասար* A *անկյանը, ապա*



գծ. 162

մնացած անկյունների հավասարության հետևանքով՝ EF-*ը կլինի* BC-*ին զուգահեռ։*

Կիրառելով A *անկյան նկատմամբ համեմատական հատվածների թեորեմը՝ ստանում ենք՝*

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF};$$

Յեթե E *անկյունը համատեղենք իրեն հավասար* B *անկյան հետ, ապա* DF-*ը կլինի* AC-*ին զուգահեռ և մենք կստանանք մի ուրիշ համեմատություն՝*

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DF};$$

Միացնելով այս յերկու համեմատությունները մի տողում և նշանակելով մի յեռանկյան կողմերը a, b, c-*ով, իսկ նրան նման յեռանկյան համապատասխան կողմերը՝* a_1, b_1, c_1-*ով՝ ստանում ենք՝*

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1},$$

այսինքն՝ նման յեռանկյունների համապատասխան կողմերը համեմատական են։

Կառուցեք նման յեռանկյուններ, վերցնելով յեռանկյան վորևե կողմի վրա մի կետ և տանելով այդ կետից մյուս կողմերից մեկին զուգահեռ ուղիղ։

Կատարեք այդպիսի կառուցում։

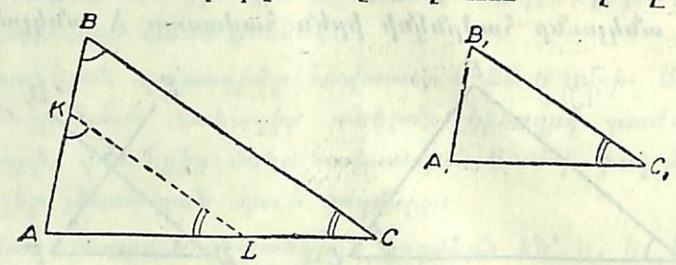
Յեթե ABC *և* $A_1B_1C_1$ *յերկու յեռանկյունների նմանությունը հայտնի չէ, այսինքն՝ նրանց անկյունների հավասարությունը տված չէ, բայց հայտնի է, վոր նրանց կողմերը համեմատական են, ապա կարելի է ապացուցել, վոր յեռանկյունները նման են։*

Տված է (գծ. 163), վոր ABC *և* $A_1B_1C_1$ *յեռանկյունների կողմերը համեմատական են, այսինքն՝*

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1};$$

Պետք է ապացուցել, որ $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$։

Ապացուցելու համար ABC յեռանկյան վրայի կողմի, որինակ՝ AB-ի վրա վերցնենք A_1B_1-ին հավասար AK հատվածը և նրա K



Գծ. 163

ծայրից տանենք $KL \parallel BC$. այն ժամանակ՝ $\angle K = \angle B$ և $\angle L = \angle C$, այսինքն՝ $\triangle ABC \sim \triangle AKL$, որտեղից հետևում է այդ յեռանկյունների կողմերի համեմատականությունը, այսինքն՝

$$\frac{AB}{AK} = \frac{BC}{KL} = \frac{AC}{AL}.$$

Այսպիսով, AKL յեռանկյան կողմերը, ինչպես և $A_1B_1C_1$ յեռանկյան կողմերը համեմատական են ABC յեռանկյան կողմերին. հետևապես նրանք իրար համեմատական են՝

$$\frac{A_1B_1}{AK} = \frac{B_1C_1}{KL} = \frac{A_1C_1}{AL}.$$

Սակայն AK-ն ըստ կառուցման հավասար է A_1B_1-ին, այսինքն՝ ստացած հարաբերություններից առաջինը հավասար է 1-ի, հետևապես և մնացած երկու հարաբերություններն ևս հավասար լինելով առաջնին—հավասար են 1-ի. այդ պատճառով՝

$$KL = B_1C_1 \text{ և } AL = A_1C_1,$$

և $\triangle AKL = \triangle A_1B_1C_1$ ըստ երեք կողմերի հավասարության, որտեղից հետևում է նաև անկյունների հավասարությունը.

$$\angle A_1 = \angle A,\ \angle B_1 = \angle K \text{ և } \angle C_1 = \angle L, \text{ կամ}$$
$$\angle B_1 = \angle B,\ \angle C_1 = \angle C,\ \angle A_1 = \angle A$$

այն, ինչ և հարկավոր եր ապացուցել։

Այսպիսով, եթե մի յեռանկյան կողմերը համեմատական են մյուսի կողմերին, ապա այդ յեռանկյունները նման են, այսինքն՝ նրանց անկյունները համապատասխանաբար հավասար են:

Նման կառուցմամբ, յեռանկյունների հավասարության պայմանների որնությամբ ցույց տվեք, որ

1) երկու յեռանկյուններ նման են, եթե նրանցից մեկի երկու կողմերը համեմատական են մյուսի համապատասխան կողմերին և այդ կողմերի մեջ գտնվող անկյունները հավասար.

2) ուղղանկյուն յեռանկյունները նման են, եթե մեկի ներքնաձիգը և եջը համեմատական են մյուսի ներքնաձիգին և եջին։

Հայտնի չե, որ զուգահեռ կողմեր ունեցող անկյունները կամ հավասար են, կամ նրանց գումարը հավասար է $2d$-ի։ Այդ պատճառով երկու անկյունների կողմերի զուգահեռականությունից դեռ չի հետևում անկյունների հավասարությունը. բայց եթե այդպիսի անկյուններ հավասար չեն, ապա նրանց գումարը հավասար է $2d$-ի։

Սակայն կարելի է ապացուցել, որ եթե A, B և C անկյունները յեռանկյան անկյուններ են և նրանց կողմերը զուգահեռ են մի ուրիշ $A_1B_1C_1$ յեռանկյան անկյունների կողմերին, ապա անկյուններըը զույգ-զույգ հավասար են, այսինքն՝ զուգահեռ կողմեր ունեցող յեռանկյունները նման են։

Ապացուցենք այս թեորեմն առանց գծանկարի ոգնության։

Տված է՝ $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1$, $BC \parallel B_1C_1$։

Ապացուցենք, որ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$։

Ապացուցելու համար յենթադրենք, թե առաջին յեռանկյան անկյուններից մեկը հավասար չե մյուս յեռանկյան համապատասխան անկյանը, որինակ՝ $\angle A \neq \angle A_1$։

Եթե մի յեռանկյան մեկ անկյունը հավասար չե մյուս յեռանկյան անկյանը, ապա ճնացած անկյունների հավասարությունը չի կարող տեղի ունենալ, որովհետև երկու յեռանկյուններում էլ անկյունների գումարը նույնն է. հետևապես, յեռանկյուններն ունեն գոնե մի զույգ ևս անհավասար անկյուններ, որինակ՝ $\angle B \neq \angle B_1$։

Մենք ստացանք համապատասխանաբար զուգահեռ կողմերով երկու անհավասար անկյուններ. հետևապես նրանց գումարը երկու դեպքում էլ հավասար է $2d$-ի՝

$$\angle A + \angle A_1 = 2d \text{ և } \angle B + \angle B_1 = 2d։$$

Գումարելով այս հավասարությունները՝ ստանում ենք՝

$$\angle A + \angle B + \angle A_1 + \angle B_1 = 4d։$$

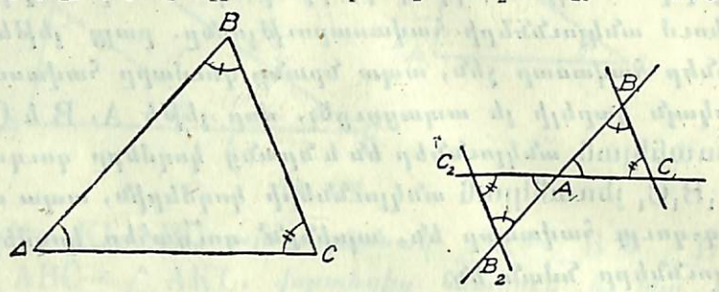
Բայց, որովհետև բացի այդ անկյուններից կան նաև C, C_1 անկյունները, ապա ուրեմն երկու յեռանկյունների բոլոր անկյունների գումարը մեծ է $4d$-ից, որը հնարավոր չե։

Ձեվ այսպես, այն յենթադրությունը, թե առաջին յեռանկյան անկյուններից մեկը հավասար չե մյուս յեռանկյան համապատասխան անկյանը, հանգում է անհեթեթ յեզրակացության. հետևապես այս յեռանկյունների անկյունները համապատասխանաբար հավասար են։

Ստուգենք այժմ յեզրակացությունը 164-րդ գծանկարով։

Տված է ABC յեռանկյունը։ A_1 կամավոր կետից տանենք AB-ին և AC-ին երկու զուգահեռ ուղիղներ։

Հատելով նրանց BC-ին զուգահեռ ուղիղով՝ ստանում ենք յեռանկյուն՝ կամ $A_1B_1C_1$ դիրքում, կամ $A_1B_2C_2$ դիրքում։ Առաջին դեպքում A_1, B_1 և C_1 անկյունների կողմերն ընթանում են նույն ուղղությամբ, ինչ և A, B և C համապատասխան անկյունների կողմերը. յերկրորդ դեպքում՝ A_1, B_2 և C_2 անկյուններից յուրա-



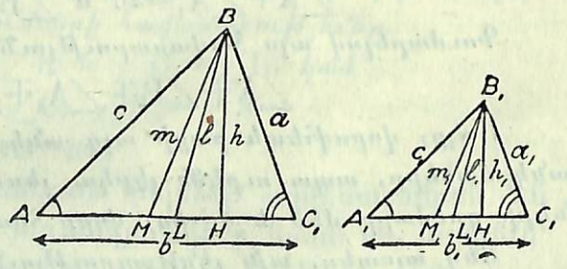
Գծ. 164

քանչյուրի յերկու կողմն էլ ընթանում են ABC յեռանկյան համապատասխան անկյունների կողմերին հակառակ ուղղությամբ, այսինքն՝ յերկու դեպքում էլ համապատասխանաբար զուգահեռ կողմեր ունեցող անկյունները հավասար են։

Ապացուցեք նույն յեղանակով հետևյալը.—յերե մի յեռանկյան կողմերը համապատասխանաբար ուղղահայաց են մյուս յեռանկյան կողմերին, ապա յեռանկյուններ նման են։

§ 89. ՀԱՄԱՊԱՏԱՍԽԱՆ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐ ՆՄԱՆ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԵՋ.

Քանի վոր յերկու նման յեռանկյուններից մեկի կողմերը վորոշ անգամ մեծ են մյուս յեռանկյան համապատասխան կողմերից, ապա նրա կողմերի գումարն ևս նույնքան անգամ մեծ է մյուս յեռանկյան կողմերի գումարից, այսինքն՝ նման յեռանկյունների պա-



Գծ. 165

ռագծերը համեմատական են համապատասխան կողմերին։

$$\frac{P}{P_1}=\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1};$$

Ոգտվելով 165-րդ գծանկարից, ապացուցեք, վոր նման յեռանկյունների մեջ համապատասխան հատվածները (*որինակ, բարձրությունները, կիսողները, միջնագծերը*) համեմատական են համապատասխան կողմերին (*ապացուցելու համար հարկավոր է հայտնաբերել այն յեռանկյունների նմանությունը, վորոնց կողմերն այդ հատվածներն են*)։

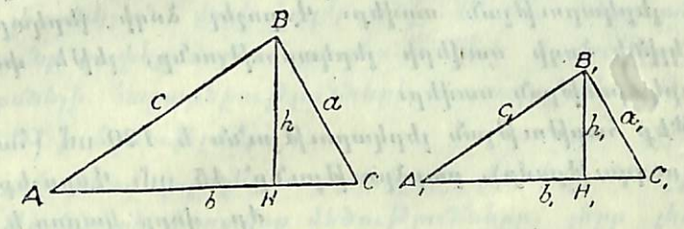
§ 90. ՆՄԱՆ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐԻ ՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆԸ.

Յերե քառակուսու կողմը մեծացնենք մի քանի անգամ, որինակ m անգամ, ապա նրա մակերեսը կավելանա m^2 անգամ, այսինքն՝ քառակուսիների մակերեսները համեմատական են իրենց կողմերի քառակուսիներին՝

$$\frac{S}{S_1}=\frac{a^2}{a_1^2};$$

Ապացուցենք, վոր այս կապակցությունը տեղի ունի և նման յեռանկյունների համար։

Տված է մի զույգ նման յեռանկյուններ (գծ. 166)։



Գծ. 166

Տանենք նրանց համապատասխան h և h_1 բարձրությունները և գրենք նրանց մակերեսների արտահայտությունները.

$$S=\frac{b\cdot h}{2},\quad S_1=\frac{b_1\cdot h_1}{2};$$

Գտնենք մակերեսների հարաբերությունը. բաժանման ժամանակ կրճատում ենք 2-ով.

$$\frac{S}{S_1}=\frac{b\cdot h}{b_1\cdot h_1};$$

Հավասարության աջ մասում ստացված կոտորակը կարելի է փոխարինել յերկու կոտորակների արտադրյալով՝

$$\frac{S}{S_1}=\frac{b}{b_1}\cdot\frac{h}{h_1};$$

Քանի վոր նման յեռանկյունների համապատասխան բարձրությունները համեմատական են համապատասխան կողմերին, ապա բարձրությունների $\frac{h}{h_1}$ հարաբերությունը կարելի է փոխարինել վորևե համապատասխան կողմերի հարաբերությամբ, որինակ՝ $\frac{b}{b_1}$-ով, այնպես վոր

$$\frac{S}{S_1}=\frac{b}{b_1}\cdot\frac{b}{b_1}=\frac{b^2}{b_1^2},\text{ կամ }\frac{S}{S_1}=\left(\frac{b}{b_1}\right)^2;$$

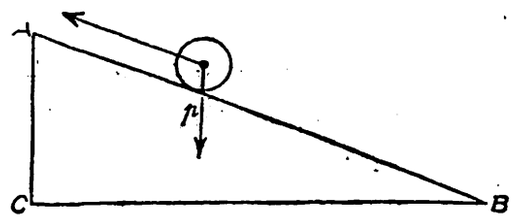
Յեվ այսպես, նման յեռանկյունների մակերեսները համեմատական են համապատասխան կողմերի քառակուսիներին, կամ ընդհանրապես՝ համապատասխան հատվածների քառակուսիներին:

§ 91. ՆՄԱՆ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ԽՆԴԻՐՆԵՐ.

1. Լծակի բազուկները են՝ 30 սմ և 1 մ: Փոքր բազուկից կախված ծանրոցը բարձրացրին 8,4 սմ: Վո՞րքան իջավ լծակի մեծ բազուկի ծայրը:

2. Ուղղաձիգ ձողը հորիզոնական հարթության վրա ձգում է 10,5 մ յերկարության ստվեր: Նրա յերկարությունը վորոշելու համար ուղղաձիգ դրված է 50 սմ յերկարության փայտ, վորը ձգում է 28 սմ յերկարության ստվեր: Վորոշել ձողի յերկարությունը: Վո՞րքան կլինի ձողի ստվերի յերկարությունը, յեթե փայտը ձգի 75 սմ յերկարության ստվեր:

3. Թեք հարթության յերկարությունն է 120 սմ (հարթության թեքման ուղղությամբ), բարձրությունը՝ 45 սմ: Վորոշեք այն ուժը, վորը կարող է թեք հարթության վրա գտնվող 4,8 կգ ծանրության գունդը պահել հավասարակշռության մեջ (գծ. 167):



Գծ. 167

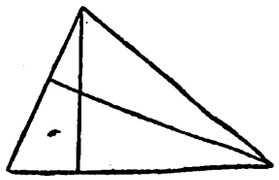
AB=120 սմ, AC=45 սմ, p=4,8 կգ:

4. Յեռանկյան կողմերն են՝ 15,3 սմ, 12,6 սմ և 8,1 սմ: Վորոշեք նրան նման յեռանկյան կողմերը, յեթե նրա պարագիծը հավասար է 54 սմ-ի:

5. Յեռանկյան կողմերը հավասար են 18, 15 և 14 սմ-ի: Վորոշեք նրան նման յեռանկյան կողմերը, յեթե նրա ամենամեծ և ամենափոքր կողմերի տարբերությունը հավասար է 2,4 սմ-ի:

6. Յեռանկյան պարագիծը հավասար է 2p-ի (p-ով նշանակված է կիսապարագիծը): Վորոշեք նրա կողմերը, յեթե նրան նման յեռանկյան կողմերն են a, b և c:

7. Ապացուցեք, վոր սեղանի (տրապեցի) անկյունագծերը փոխադարձաբար բաժանվում են հիմքերին համեմատական մասերի:

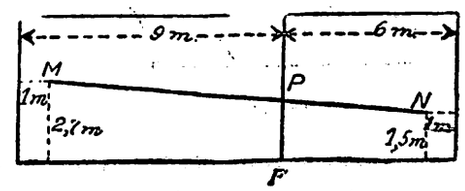

Գծ. 168

8. Յեռանկյան մեջ տարված են յերկու բարձրություններ (գծ. 168): Գտեք զույգ նման յեռանկյուններ և ապացուցեք, վոր բարձրությունները հակադարձ համեմատական են համապատասխան կողմերին: Հաշվեք յերկու կողմերից մեծին համապատասխանող բարձրության յերկարությունը, յեթե մյուս բարձրությունը հավասար է 12,5 սմ-ի, իսկ կողմերն են՝ 15 սմ և 12 սմ: Ստուգելու համար կատարեք այդ յեռանկյունները:

9. Քանի վոր նման պատկերների համապատասխան հատվածները համեմատական են, ապա հավասարասրուն ուղղանկյուն յեռանկյան ներքնաձիգի և եջի, նույնպես և հավասարակողմ յեռանկյան բարձրության ու կողմի հարաբերությունները միանգամայն վորոշ են: Չափումով վորոշեք այդ հարաբերությունների մոտավոր մեծությունները, կատարելով (միլիմետրային թղթի վրա) հավասարասրուն ուղղանկյուն յեռանկյուն, վորի եջը լինի 10 սմ և հավասարակողմ յեռանկյուն, վորի կողմը լինի 10 սմ: Ներքնաձիգն ու բարձրությունը չափեք մոտավորապես 1 մմ-ի ճշտությամբ, վորպեսզի վորոնելի հարաբերությունների մոտավոր մեծություններն ստանաք 0,01-ի ճշտությամբ:

10. Նույն ձևով վորոշեք ուղղանկյուն յեռանկյունների եջերի հարաբերությունների մոտավոր մեծությունները, յերբ յեռանկյան սուր անկյուններից մեկը հավասար է 22° 30′, 30°, 15°: Եջերի հարաբերությունը կոչվում է տանգենս (tg) այն անկյան համար, վորը գտնվում է հարաբերության մեջ իբրև նախորդ անդամ վերցրած եջի դիմաց: Այսպիսով, վորոշվում են վերև հիշված անկյունների տանգենսները, այն է՝ tg 22° 30′, tg 30° և tg 15°:

11. 169-րդ գծանկարը ներկայացնում է իրենից CF միջնապատով բաժանած յերկու հարևան սենյակների ներքին պատը: M կետից դեպի N կետը պետք է անցկացնել մի ուղղաձիգ խողովակ, ըստ վորում պատերի չափերը և M ու N կետերի դիրքերը ցույց են տրված գծանկարի վրա: Ցույց տվեք, թե խողովակն անցկացնելու համար միջնապատում ինչ բարձրության վրա պիտի ծակել P անցքը:



Գծ. 169

12. Ապացուցեք, վոր այն յեռանկյունը, վորի գագաթները գտնվում են տվյալ յեռանկյան կողմերի միջնակետերում, նման է տվյալ յեռանկյանը: Վորոշեք այդ յեռանկյան կողմերի հարաբերությունը:

13. Կատարեք տվյալ ABC յեռանկյանը նման և P պարագիծ ունեցող յեռանկյուն:

14. Կառուցեք տվյալ ABC չեռանկյանը նման չեռանկյուն, չեթե վորոնելի չեռանկյան ամենամեծ կողմին համապատասխանող բարձրությունը հավասար է h-ի։

§ 92. ՆՄԱՆ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ.

Մենք տեսանք (§ 91), վոր չերկու չեռանկյունների անկյունների հավասարությունն առաջ է բերում կողմերի համեմատականություն և հակառակը։

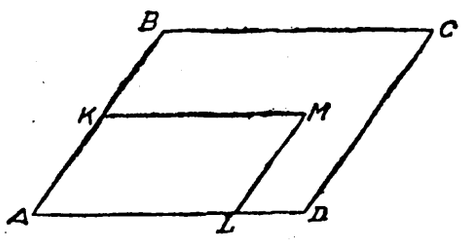
Բազմանկյունների մեջ այդպիսի կախում չկա։

Վերցնենք, որինակ՝ ABCD զուգահեռակողմը (գծ. 170)։ Նրա կողմերի վրա վերցնենք AK և AL կամավոր հատվածները և կառուցելով նրանց վրա AKML զուգահեռակողմը՝ մենք տեսնում ենք, վոր չերկու զուգահեռակողմների անկյունները հավասար են, բայց կողմերն ընդհանրապես համեմատական չեն. վորպեսզի նրանք լինեն համեմատական, հարկավոր է AB և AD կողմերը բաժանել միևնույն հարաբերությամբ։

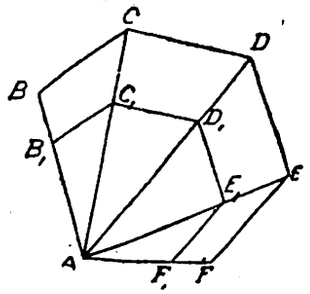
Ընդհակառակը՝—կողմերի համեմատականությունից չի հետևում անկյունների հավասարություն, ինչպես այդ չերևում է, որինակ՝ չեթե բաղդատենք քառակուսին շեղանկյան հետ։

Նման կոչվում են այն բազմանկյունները, վորոնց անկյուները հավասար են չեվ կողմերը համեմատական։

Տվյալ բազմանկյան նմանը կառուցվում է այսպես (գծ. 171)։ Տվյալ ABCDEF բազմանկյան A գագաթից տանում ենք AC, AD, AE անկյունագծերը։ A անկյան կողմերից մեկի, որինակ՝ AB-ի վրա վերցնում ենք կամավոր չերկարության AB_1 հատվածը և տանում $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1D_1 \parallel CD$……



գծ. 170



գծ. 171

Կառուցած բազմանկյան անկյունները հավասար են տվյալ բազմանկյան անկյուններին, վորովհետև մենք գծել ենք զուգահեռներ։ Մնում է ցույց տալ կողմերի համեմատականությունը։

ABC և $A_1B_1C_1$ չեռանկյունների նմանությունից հետևում է՝

$$\frac{AB}{AB_1}=\frac{BC}{B_1C_1};$$

Նույն չեռանկյունների նմանությունից գտնում ենք՝

$$\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{AC_1};$$

ACD և AC_1D_1 չեռանկյունների նմանությունից ստանում ենք՝

$$\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{AC}{AC_1};$$

Համեմատելով այս համեմատությունը նախորդի հետ՝ չեզրակացնում ենք՝

$$\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1};$$

Նույն ձևով վորոշվում է մյուս կողմերի հարաբերությունների հավասարությունը։

Մեր կառուցումից չերևում է, վոր նման բազմանկյունները հատապատասխան անկյունագծերով կարելի չե բաժանել նման և միատեսակ դասավորություն ունեցող չեռանկյունների։

Տվյալ կողմով կառուցեք տվյալ բազմանկյան նման բազմանկյուն, չեթե հայտնի չե, թե՝ տվյալ բազմանկյան վոր կողմն է համեմատական վորոնելի բազմանկյան տվյալ կողմին։

Կողմերի գումարները, այսինքն՝ չերկու նման բազմանկյունների պարագծերը, և ընդհանրապես համապատասխան հատվածները նորից համեմատական են համապատասխան կողմերին.

$$\frac{P}{P_1}=\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\cdots\cdots$$

Չեթե համապատասխան կողմերի հարաբերությունը նշանակենք k-ով, ապա նման բազմանկյունների մեջ ստացվող նման չեռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը հավասար կլինի k^2-ուն։ Ուրեմն, նման պատկերների մակերեսները կազմող առանձին գումարելիների հարաբերությունները արտահայտվում են միևնույն k^2 թվով. հետևապես և նրանց գումարները, այսինքն՝ բազմանկյունների մակերեսները, գտնվում են նույն հարաբերության մեջ՝

$$\frac{S}{S_1}=k^2;$$

Փոխարինելով k-ն վորևե համապատասխան կողմերի հարաբերությունով, որինակ՝ $\frac{a}{a_1}$-ով, ստանում ենք

$$\frac{S}{S_1}=\frac{a^2}{a_1^2},$$

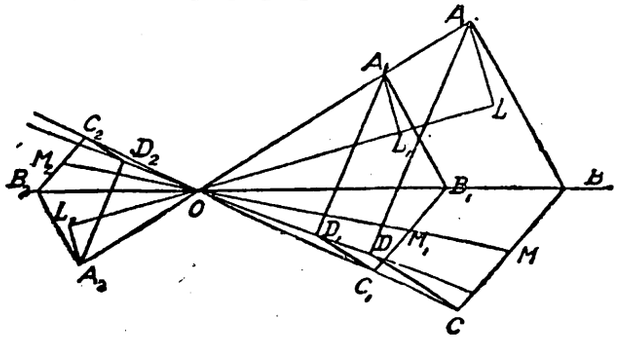
այսինքն՝ նման բազմանկյունների մակերեսները համեմատական են համապատասխան կողմերի քառակուսիներին կամ ընդհանրապես համապատասխան հատվածների քառակուսիներին։

Յեթե, որինակ՝ անփոփոխ թողնելով բազմանկյան անկյունները, մեծացնենք նրա գծային չափերը 10 անգամ, ապա նրա մակերեսը կմեծանա 10 անգամ։

Յեթե յերկու քաղաք ունեն մոտավորապես նման բազմանկյունների ուրվագիծ և մեկի գծային չափերը մեծ են մյուսի գծային չափերից, որինակ՝ 3 անգամ, ապա ազգաբնակչության միևնույն խտության դեպքում՝ մեծը մոտավորապես 9 անգամ ավել բնակիչ և տեղավորում, քան փոքրը։

§ 93. ՆՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆ ՅԵՎ ՊԱՆՏՈԳՐԱՖ.

Յենթադրենք տված և վորևե բազմանկյուն՝ ABCD (*գծ. 172*)։ *Վերցնենք վորևե O կետ և այդ կետն ու բազմանկյան բոլոր գագաթները միացնող հատվածները բաժանենք միևնույն հարաբերությամբ։ Դրա համար հատվածներից մեկը, որինակ՝* OA-*ն բաժանում ենք հայտնի հարաբերությամբ, ստանում ենք բաժանման* A_1 *կետը և հետո անց ենք կացնում* $A_1B_1 \parallel AB$, $BC \parallel B_1C_1$ *և այլն։ Ստացված* $A_1B_1C_1D_1$ *բազմանկյունը նման է տված* ABCD *բազմանկյանը, քանի վոր նրանց անկյունները զույգ-զույգ հավասար են, իսկ վորևե զույգ համապատասխան կողմերի հարաբերությունը հավասար է* $\frac{OA}{OA_1}=\frac{OB}{OB_1}=\dots$ *հարաբերությանը։*



գծ. 172

Յեթե յերկու նման բազմանկյուններից մեկի կողմերը համապատասխանաբար զուգահեռ են մյուսի կողմերին, ապա այդ նման բազմանկյունները կոչվում են նմանադիր։

A_1 *կետը* OA *հատվածի վրա վերցնելու փոխարեն, կարելի է այդ հատվածը շարունակել O-ի մյուս կողմը և վերցնել* OA-*ի վորոշ մասը հակադիր ուղղությամբ մինչև* A_2։ *Տանելով* ABCD *բազմանկյան կողմերին զուգահեռներ՝ ստանում ենք* $A_2B_2C_2D_2$ *բազմանկյունը, վորը նույնպես նման է և նմանադիր է տվյալ բազմանկյանը։*

Թե մեկ և թե մյուս դեպքում նման և նմանադիր բազմանկյունների համապատասխան գագաթները միացնող ուղիղներն առաջին դեպքում AA_1, $BB_1\dots$, *յերկրորդ դեպքում* AA_2, $BB_2\dots$, *անցնում են O կետով։*

Յեթե O կետը նախորոք չի տված, բայց տված է յերկու նման բազմանկյուններ համապատասխան զուգահեռ կողմերով, ապա կարելի չե ապացուցել, վոր համապատասխան գագաթները միացնող ուղիղներն անցնում են մի կետով։ (Առաջարկվում է ապացուցել)։

Այն կետը, վորով անցնում են նման յեվ նմանադիր բազմանկյունների համապատասխան գագաթները միացնող բոլոր ուղիղները՝ կոչվում է բազմանկյունների նմանության կենտրոն։

Նմանության կենտրոնի և յերկու համապատասխան գագաթների միջև յեղած տարածությունների հարաբերությունը հավասար է համապատասխան կողմերի հարաբերությանը։

Քննելով ABCD *և* $A_1B_1C_1D_1$ *բազմանկյունները՝ մենք տեսնում ենք, վոր նրանց համապատասխան կողմերը միատեսակ են ուղղված. իսկ* ABCD *և* $A_2B_2C_2D_2$ *բազմանկյունների կողմերը հակադարձ են ուղղված. դրա հետ միասին կենտրոնն ու յերկու համապատասխան գագաթները միացնող հատվածներն առաջին դեպքում՝ ունեն միատեսակ, իսկ յերկրորդ դեպքում՝ հակադարձ ուղղություններ։*

Առաջին դեպքում նմանության կենտրոնը կոչվում է արտաքին, իսկ յերկրորդ դեպքում՝ ներքին։ ABCD *և* $A_1B_1C_1D_1$ *բազմանկյունները, վորոնց կողմերը միատեսակ են ուղղված՝ ունեն նմանության* արտաքին *կենտրոն* O. ABCD *և* $A_2B_2C_2D_2$ *բազմանկյունները, վորոնց կողմերը հակադարձ են ուղղված՝ ունեն նմանության* ներքին *կենտրոն։*

Յեթե ABCD *բազմանկյան կողմի վրա վերցնենք* M *կետը, ապա հեշտությամբ կարելի չե կառուցել համապատասխան* M_1 *և* M_2 *կետերը, վորոնք պատկանում են* $A_1B_1C_1D_1$ *և* $A_2B_2C_2D_2$ *բազմանկյուններին (գծ. 172)։*

ABCD *բազմանկյան ներսում վերցնենք* L *կետը։ Մյուս յերկու բազմանկյունների համապատասխան կետերը կառուցելու համար տանենք* OL *ուղիղը. L-ը միացնենք գագաթներից մեկի, որինակ՝ A-ի հետ և տանենք AL-ին զուգահեռներ* A_1L_1 *ու* A_2L_2-*ը մինչև* OL-*ի հետ հատվելը։*

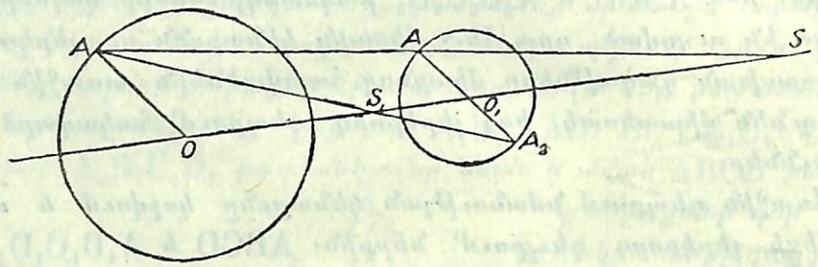
Յեթե նմանադիր բազմանկյունների համապատասխան կողմերը միատեսակ ուղղություն ունեն, ապա նրանց հարաբերությունը, նաև համապատասխան գագաթների և կենտրոնի հեռավորությունների հարաբերությունները համարվում են դրական, հակառակ դեպքում՝ բացասական։

Յերկու շրջանները նույնպես կարելի չե նման պատկերներ համարել. նրանց պարագծերը, այսինքն՝ շրջանագծերի յերկարությունները, ինչպես գիտենք, համեմատական են շրջանների շառավիղներին, իսկ մակերեսները՝ շառավիղների քառակուսիներին։ Ուրեմն, յեթե շրջանների շառավիղները հավասար չեն, ապա նրանց պարագծերը և մակերեսները չեն կարող հավասար լինել։

ները համեմատական են համապատասխան հատվածներին, այն է՝ շառավիղներին կամ տրամագծերին. շրջանների մակերեսները համեմատական են համապատասխան հատվածների՝ շառավիղների կամ տրամագծերի՝ քառակուսիներին: Ստուգեք այդ, ոգտվելով R և R_1 շառավիղ ունեցող յերկու շրջանների շրջանագծերի յերկարությունների և մակերեսների բանաձևերից, և նրանց հարաբերությունը գտեք բաժանման միջոցով:

Համակենտրոն շրջանների նմանության կենտրոնն և նրանց ընդհանուր կենտրոնը:

Յերկու ապակենտրոն շրջանները միաժամանակ ունեն թե արտաքին և թե ներքին նմանության կենտրոններ (գծ. 173): Քանի վոր շրջանների կենտրոնները համապատասխան կետեր են, ապա



գծ. 173

նրանց նմանության կենտրոնը գտնվում է այդ շրջանների կենտրոնները միացնող ուղիղի վրա: Այդ ուղիղի վրա նմանության կենտրոնները գտնելու համար, շրջաններից մեկում տանում ենք կամավոր ուղղություն ունեցող մի շառավիղ OA, մյուսի մեջ՝ նրան զուգահեռ տրամագիծ A_1A_2: Միատեսակ ուղղված շառավիղների A և A_1 ծայրերը միացնող ուղիղը տալիս է շրջանների նմանության S արտաքին կենտրոնը. հակադարձ ուղղված շառավիղների A և A_2 ծայրերը միացնող ուղիղը տալիս է նմանության S_1 ներքին կենտրոնը:

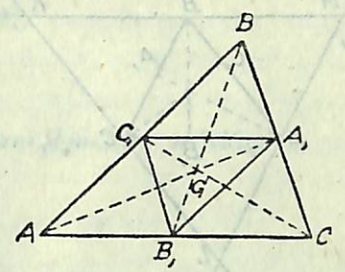
Վարժություն.—O շրջանի ներսում վերցրված է վորևե L կետը: Կառուցել նրա համապատասխան կետը O_1 շրջանի ներսում, հաշվելով նմանության կենտրոն S ը. նույնը—S_1-ի համար:

Յերկու շրջանների ներքին շոշափողներն անցնում են S_1-ով, արտաքին շոշափողները S-ով:

Ոգտվելով նմանության կենտրոնի գաղափարից՝ կարելի է ապացուցել, վոր յեռանկյան յերեք միջնագծերը հատվում են միևնույն կետում և բաժանվում 2 և 1-ի հարաբերությամբ:

ABC յեռանկյան կողմերը (գծ. 174) կիսում ենք A_1, B_1 և C_1 կետերում: AC և A_1C_1 ուղիղները B անկյան կողմերի վրա հատում

են հավասար հատվածներ, հետևապես $AC \parallel A_1C_1$. նույնպես յեզրակացնում ենք, վոր $AB \parallel A_1B_1$ և $BC \parallel B_1C_1$: Հետևապես, ABC և $A_1B_1C_1$ յեռանկյունների կողմերը համապատասխանաբար զուգահեռ են և յեռանկյունները նման ու նմանադիր են, այսինքն՝ ունեն նմանության կենտրոն. այդ պատճառով համապատասխան գագաթները միացնող AA_1, BB_1, CC_1 ուղիղները հատվում են միևնույն կետում:



գծ. 174

ABC և $A_1B_1C_1$ յեռանկյունների նմանությունից հետևում է, վոր

$$\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=2:$$

Յեվ այսպես, ABC և $A_1B_1C_1$ յեռանկյունների համապատասխան կողմերը հարաբերում են միմյանց այնպես, ինչպես 2-ը 1-ին. հետևաբար համապատասխան գագաթները և նմանության կենտրոնը միացնող ուղիղները միևնույն հարաբերության մեջ են գտնվում՝

$$\frac{C_1A}{C_1A_1}=\frac{C_1B}{C_1B_1}=\frac{C_1C}{C_1C_1}=\frac{2}{1},$$

վորը և պահանջվում եր ապացուցել:

Յեռանկյան միջնագծերի հատման կետը կոչվում է յեռանկյան ծանրության կենտրոն. յեթե սավարաթղթից կամ փայտից կտրենք յեռանկյուն, վորի հաստությունը և խտությունը բոլոր մասերում լինի նույնը, և միջնագծերի հատման կետում շինած անցքով անցկացնենք բարակ շյուղ կամ ասեղ, ապա կողմերի ամեն տեսակի դրության ժամանակ յեռանկյունը կպահպանի իր հավասարակշռության:

Վարժություն.—Ապացուցեք, վոր յեռանկյունը յերեք միջնագծերով բաժանվում է 6 հավասարամեծ յեռանկյունների:

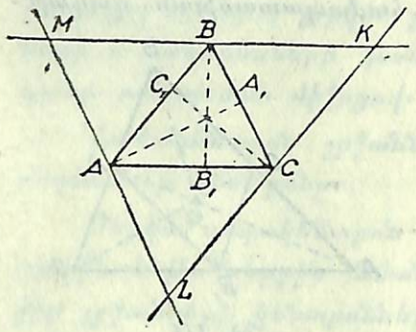
Ծանրության կենտրոնը, արտագծյալ շրջանի կենտրոնը, ներգծյալ շրջանի կենտրոնը և բարձրությունների հատման կետը կոչվում են յեռանկյան նշանավոր կետեր:

Արտագծյալ շրջանի կենտրոնը (գլ. VI, § 61) գտնվում է յեռանկյան կողմերի միջնուղղահայացների հատման կետում:

Ներգծյալ շրջանի կենտրոնը (գլ. VI, § 64) գտնվում է յեռանկյան յերեք անկյունների կիսորդների հատման կետում:

Վոր յեռանկյան յերեք բարձրությունները նույնպես հատվում են մի կետում, ապացուցվում է հետևյալ ձևով.

Տվյալ ABC յեռանկյան (գծ. 175) գագաթներից տանում ենք նրանց հակադիր կողմերին զուգահեռ ուղիղներ և ստանում △KLM։ ABKC, AMBC և ABCL քառանկյունները՝ զուգահեռակողմեր են, հետևապես MB=AC=BK, այսինքն՝ B կետը MK կողմի միջնակետն է. նույնպես A-ն ML-ի միջնակետն է և C-ն KL-ի։

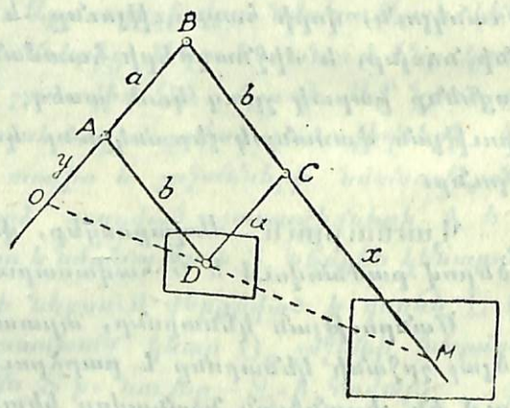


Գծ. 175

Քանի որ $BB_1 \perp AC$ և $AC \parallel MK$, ապա $BB_1 \perp MK$, այսինքն՝ BB_1-ը MK կողմին ուղղահայաց է և անցնում է նրա միջնակետով. նույնպես AA_1-ը ուղղահայաց է LM կողմին և անցնում է նրա միջնակետով և CC_1-ը ուղղահայաց է AB կողմին և անցնում է նրա միջնակետով. հետևապես ABC յեռանկյան AA_1, BB_1 և CC_1 բարձրությունները հատվում են ուժանդակ KLM յեռանկյանն արտագծած շրջանի կենտրոնում։

Գծանկարը տվյալ մասշտաբով փոքրացնելու կամ մեծացնելու համար յերբեմն գործ է ածվում պանտոգրաֆ կոչված գործիքը. այս գործիքն առաջարկել է 1631 թվին կրիստիան Շնեյդերը։

Պանտոգրաֆը կազմված է շարնիրների միջոցով իրար միացրած չորս քանոններից, որոնք կազմում են զուգահեռակողմ. նրա յերկու կից կողմերն ունեն շարունակություն (գծ. 176)։



Գծ. 176

AB-ի շարունակության վրա վերցրած O կետում ամրացրած է անշարժ առանցք. M կետում հաստատված է սրածայր, որը շարժում են ընդօրինակվող գծանկարի ուրվագծով։ D կետում գտնվում է մատիտ, որը և տալիս է փոքրացած պատճենը։

Մեծացրած պատճեն ստանալու համար D կետում տեղավորում են ուրվագծով շարժվող սրածայրը, իսկ M-ում՝ մատիտը։ O-ն պետք է լինի ընդօրինակվող գծանկարի և նրա պատճենի նմանության կենտրոնը, այսինքն՝ O, D և M կետերը պետք է ծռան մի ուղիղի վրա։

Տեսնենք դրա համար ինչ պայմաններ են հարկավոր։

Նշանակենք AB և CD ձողերի յերկարություններն a-ով, AD և BC ձողերինը՝ b-ով, իսկ CM և AO տարածությունները համապատասխանաբար x-ով և y-ով։

Յենթադրենք գծանկարը պետք է փոքրացնել այնպես, որ ընդօրինակվող պատկերի չափերը հարաբերեն պատճենի չափերին այնպես, ինչպես m-ը n-ին, այնպես որ

$$\frac{OM}{OD}=\frac{m}{n},$$

OMB և ODA յեռանկյունների նմանությունից ունենք՝

$$\frac{OM}{OD}=\frac{b+x}{b},$$

այսինքն՝

$$\frac{b+x}{b}=\frac{m}{n},$$

որտեղից

$$x=b\frac{m-n}{n}.$$

OAD և MDC յեռանկյունների նմանությունից գտնում ենք՝

$$\frac{y}{b}=\frac{a}{x},$$

որտեղից

$$y=\frac{ab}{x}=a\cdot\frac{n}{m-n}.$$

Յեթե որինակ՝ $\frac{m}{n}=\frac{5}{2}$,

ապա

$$x=b\cdot\frac{3}{2},\quad y=a\cdot\frac{2}{3},$$

այսինքն՝ y-ն այնքան անգամ է փոքր a-ից, որքան x-ը մեծ է b-ից, կամ հակառակը։

M սուր ծայրը և O առանցքը գծանգան դիրքերում հաստատելու համար, ձողերում շինում են մի քանի անցքեր, իսկ կատարելագործված պանտոգրաֆներում՝ հատուկ պահիչներ, որոնք շարժվում են ձողերի յերկարությամբ և կարող են պտուտակներով ամրացվել որևէ տեղում։

Վարժություններ.—1. Յենթադրենք պանտոգրաֆի զուգահեռակողմի կողմերն ունեն հետևյալ չափերը՝ $a=20$ սմ, $b=15$ սմ (գծ. 176). որոշել M և O կետերի դիրքը, յեթե պատճենը պետք է լինի՝ 1) 3 անգամ փոքր, 2) $1^1/_2$ անգամ փոքր ընդօրինակվող գծանկարից։

2. Յերկու շրջանների շառավիղները պարունակում են 7,5 սմ և 3 սմ, իսկ կենտրոնները միացնող ուղիղը հավասար է 18,9 սմ-ի։ Վորոշեք նմանության արտաքին և ներքին կենտրոնների հեռավորությունը շրջանների կենտրոններից։

3. Համապատասխանաբար զուգահեռ և միատեսակ ուղղություն ունեցող յերկու նման բազմանկյունների պարագծերը հավասար են 70 սմ-ի և 30 սմ-ի։ A և A_1 յերկու համապատասխան գագաթների տարածությունը հավասար է 16 սմ-ի։ Վորոշեք այդ գագաթների հեռավորությունը ավյալ բազմանկյունների նմանության կենտրոնից։

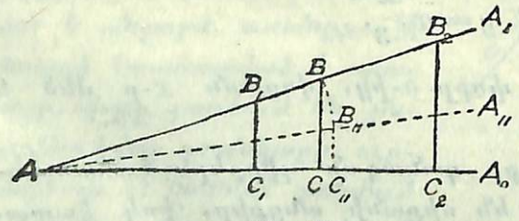
4. Յերկու նման բազմանկյուններ ունեն նմանության ներքին կենտրոն, վորի հեռավորությունները A և A_1 յերկու համապատասխան գագաթներից հավասար են 10 սմ-ի և 6 սմ-ի։ Մի բազմանկյան AB կողմը պարունակում է 4 սմ և AA_1-ի հետ կազմում է 60° անկյուն։ Վորոշեք A_1B_1 համապատասխան կողմի յերկարությունը և կառուցեք այն, յերբ A-ն և A_1-ը ունեն ավյալ դիրքը։

§ 94. ՍԿԶԲՆԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՅԵՒԱՆԿՅՈՒՆԱՁԱՓՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ.

Յերկու ուղիղ գծերի փոխադարձ թեքման մեծությունը չափվում է այդ գծերով կազմված անկյունով։

Սակայն լինում են դեպքեր, յերբ այդ մեծությունը հարկավոր է վորոշել այլ կերպ։

Ունենք AA_1 թեք գիծը (գծ. 177). պետք է արտահայտել նրա թեքումը AA_0 հորիզոնական ուղղության նկատմամբ։



գծ. 177

Յենթադրենք AA_1-ը պատկերացնում է հավասարաչափ բարձրացող լեռնային ճանապարհի մի մասը. պետք է վորոշ թվով արտահայտել ուղղորդ վերելքի մեծությունը։

Դրա համար AA_1 թեքի վրա վերցնում ենք վորևե B կետը և վորոշում նրա բարձրությունը AA_0 հորիզոնականից, վորի համար AA_0-ի վրա իջեցնում ենք BC ուղղահայացը։ Յենթադրենք AB ճանապարհի յերկարությունը հավասար է 100 մ-ի, իսկ B կետի բարձրությունը AA_0 հորիզոնականից, այսինքն՝ BC-ն, հավասար է 8 մ-ի։ Այսպիսով ճանապարհի 100-րդ մետրի վրա վերելքը կազմում է 8 մ, այսինքն՝ վերելքի մեծությունը հավասար է ճանապարհի յերկարության 0,08 մասին։

Յեթե B կետի դիրքը փոխենք՝ վերցնելով նրան A կետից ավելի մոտ կամ ավելի հեռու, որինակ՝ B_1 կամ B_2 կետերը, ապա վերելքի մեծությունը կվոխվի ճանապարհի յերկարության համեմատական, այսինքն՝

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2},$$

վորովհետև ABC, AB_1C_1 և AB_2C_2 յեռանկյունները միմյանց նման են և նրանց համապատասխան կողմերը համեմատական են։

Յեվ այսպես, մինչև վոր AA_1 ուղիղի թեքման անկյունը մնում է առանց փոփոխության, անփոփոխ է մնում նաև վերելքի բարձրության և ճանապարհի յերկարության հարաբերությունը։

Յեթե ուղղորդ վերելքը փոխվի, որինակ՝ յեթե թեքման ուղղությունը լինի $AA_{//}$-ը, այսինքն՝ թեքման անկյունը փոքրանա, ապա ճանապարհի նույն AA_1 յերկարության վրա $B_{//}C_{//}$ վերելքը կլինի փոքր, այսինքն՝ վերելքի բարձրության և ճանապարհի յերկարության հարաբերությունը կփոքրանա. յեթե թեքման անկյունը մեծանա, կմեծանա և այդ հարաբերությունը։

Այստեղից յեզրակացնում ենք, վոր ճանապարհի թեքման մեծությունը վորոշվում է վերելքի մեծության և ճանապարհի յերկարության հարաբերությունով։

Վարժություններ.—1. Կառուցեք թեք գծերի ուղղություններ, ըստ վորում վերելքի մեծության և թեքի յերկարության հարաբերություններն արտահայտվեն կոտորակներով՝

$$\frac{1}{9},\ 0{,}25,\ 0{,}45,\ 0{,}75։$$

Ցուցմունք.—Առաջին թեքը կառուցելու համար տանում ենք հորիզոնական գիծ. նրա վորևե կետում կառուցում ենք 1 սմ յերկարության ուղղահայաց և նրա ծայրից, իբրև կենտրոնից տանում 9 սմ շառավիղով մի աղեղ։ Այդ աղեղի և հորիզոնական գծի հատման կետը միացնում ենք ուղղահայացի ծայրին։

2. Փոխադրիչով չափեք կառուցած անկյունները։

Գիտենալով ABC յեռանկյունը՝ մենք տեսնում ենք, վոր AB-ն ներքնաձիգ է, իսկ BC-ն A անկյան դիմացի եջը, այսինքն՝ A անկյան մեծությունը բնութագրված է նրա դիմացի եջի և ներքնակյան մեծությունը բնութագրված է նրա դիմացի եջի և ներքնաձիգի հարաբերությամբ։ Այդ հարաբերությունը կոչվում է A անկյան սինուս։

$$\frac{BC}{AB} = \sin A։$$

BC ճանապարհի վերելքի մեծությունը AB ճանապարհի յերկարության հետ համեմատելու փոխարեն, կարելի է համեմատել

AC յերկարութ յան, այսինքն՝ հորիզոնական գծի վրա վերցրած հատվածի հետ։ AC-ն A անկյանը կից եզն է և հակադիր, և հակադիր եզի ու կից եզի հարաբերութ յունը կոչվում է անկյան տանգենս.

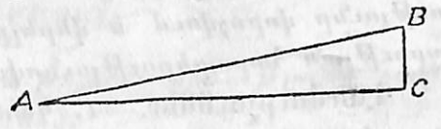
$$\frac{BC}{AC} = \text{tg } A.$$

Այսպես ուրեմն, մենք ծանոթացանք սուր անկյան մեծութ յունը վորոշող յերկու հարաբերութ յունների հետ—սինուսի (sin) և տանգենսի (tg)։ Այս հարաբերութ յունները կոչվում են անկյան յեռանկյունաչափական մեծություններ:

Համեմատելով $\frac{BC}{AB}$ և $\frac{BC}{AC}$ կոտորակները՝ մենք տեսնում ենք, վոր նրանց համարիչները հավասար են, բայց յերկրորդի հայտարարը փոքր է. հետևապես յերկրորդ կոտորակն առաջինից մեծ է, այսինքն՝

$$\text{tg } A > \sin A.$$

Յեթե անկյունը շատ փոքր է (գծ. 178), ապա նրան կից եզը համարյա թե հավասար է ներքնաձիգին, վորի հետևանքով տանգենսի և սինուսի տարբերութ յունը դառնում է շատ չնչին. յերբ անկյունն աճում է, աճում է նաև տանգենսի և սինուսի տարբերութ յունը։ Յեթե անկյունը մեծ է 45^0-ից, ապա նրա հակադիր եզը մեծ է կից եզից, այնպես վոր տանգենսը մեծ է 1-ից, մինչդեռ սինուսը մնում է 1-ից փոքր, վորովհետև եզն անպայմանորեն փոքր է ներքնաձիգից։



գծ. 178

Վարժություններ.—1. Կառուցեք անկյուններ, վորոնց տանգենսները հավասար են՝ $\frac{2}{5}$, 0,75, 1, 1,5, 2, 3,25։

Յուցմունք.—Առաջին անկյունը կառուցելու համար ուղիղի վրա վերցնում ենք 5 կամավոր հավասար մասեր պարունակող մի հատված. նրա մի ծայրում կանգնեցնում ենք ուղղահայաց, վորի վրա վերցնում ենք 2 նույնպիսի մաս, և այդ ուղղահայացի ծայրը միացնում կառուցած հատվածի մյուս ծայրին։

2. Կառուցեք անկյուններ, վորոնց սինուսները հավասար են $\frac{2}{5}$-ի և 0,75-ի։ Չափեք այդ անկյունները փոխադրիչով և համեմատեք նախորդ վարժության առաջին յերկու անկյունների հետ։

3. Կառուցեք անկյուն, վորի սինուսն է $\frac{7}{8}$, և չափելով վորոշեք նույն անկյան տանգենսը։

4. Հավասարակողմ յեռանկյան և նրա բարձրութ յան ոգնութ յամբ ապացուցեք, վոր $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$։

5. Չափելով վորոշեք 0,01-ի մոտավոր ճշտութ յամբ՝ $\sin 15^0$, $\sin 30^0$, $\sin 45^0$, $\sin 60^0$ և $\sin 75^0$։

Յուցմունք.—Միլիմետրային թղթի վրա կառուցում ենք ուղիղ անկյուն, և նրա գագաթից, իբրև կենտրոնից, գծում քառորդ շրջանագիծ 10 սմ շառավիղով. նրա ծայրերից վերցնում ենք շառավիղին հավասար յերկու լար, այնպես վոր ստացվում է 30-ական աստիճան պարունակող յերեք աղեղ։ Աղեղի բաժանման կետերը միացնում ենք կենտրոնին և ստացած անկյունները կիսում։ Ստացած շառավիղների ծայրերից ուղիղ անկյան կողմերից մեկի վրա իջեցնում ենք ուղղահայացներ։ Չափելով այդ ուղղահայացների յերկարութ յունները՝ վորոշում ենք նրանց և շրջանի շառավիղի հարաբերութ յունները։

6. Վորոշեք 0,01-ի մոտավոր ճշտութ յամբ՝ $\text{tg } 15^0$, $\text{tg } 30^0$, $\text{tg } 45^0$, $\text{tg } 60^0$ և $\text{tg } 75^0$։

Յուցմունք.—Ոգտվել նախորդ վարժության գծանկարով։ Այն շառավիղի ծայրում, վորի վրա իջեցրած են ուղղահայացները, տանում ենք շրջանին շոշափող. շառավիղները շարունակում ենք մինչև շոշափողի հետ հատվելը. չափելով այն հատվածները, վորոնք ստացվում են շոշափողի վրա շոշափման կետից մինչև շարունակված շառավիղների հատումը՝ վորոշում ենք նրանց և շառավիղների հարաբերութ յունը։

7. Նախորդ չափումների հիման վրա կազմեք 15^0, 30^0, 45^0, 60^0 և 75^0 անկյունների յեռանկյունաչափական մեծութ յունների ապյուսակը հետևյալ ձևով.

Անկյուն A	sin A	tg A
15^0		
30^0		
45^0		
60^0		
75^0		

8. Համեմատելով այս անկյունների յեռանկյունաչափական մեծութ յունները՝ ցույց տվեք, վոր յերբ անկյունը մեծանում է, նրա յեռանկյունաչափական մեծութ յունների փոփոխումը համեմատական չե անկյան մեծութ յան։

1-ից մինչև 89-ը ամբողջ աստիճաններ պարունակող անկյունների յեռանկյունաչափական մեծութ յունների ավելի մանրամասն

աղյուսակը՝ հաշված 0,001 մոտավոր ճշտությամբ՝ տեղավորված է 209 էջերում։

Այդ աղյուսակը հնարավորություն է տալիս վորոշել անկյունը 1° մոտավոր ճշտությամբ, երբ տված է սինուսի կամ տանգենսի մեծությունը։

Որինակ.—$\sin \alpha = \frac{5}{8}$։

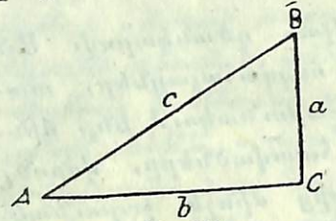
Դարձնելով $\frac{5}{8}$-ը տասնորդական կոտորակ՝ տանում ենք

$$\sin \alpha = 0{,}625.$$

Աղյուսակից տեսնում ենք, վոր α անկյունը գտնվում է 38^0-ի և 39^0-ի միջև, 39^0-ին ավելի մոտ։

§ 95. ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԱՄԵՆԱՊԱՐԶ ԴԵՊՔԵՐ.

Ուղղանկյուն յեռանկյան ներքնաձիգի յերկարությունը նշանակենք c-ով, իսկ եջերի յերկարությունները՝ a-ով և b-ով (գծ. 179)։



գծ. 179

Համաձայն նախորդի՝

$$\sin A = \frac{a}{c} \text{ և } \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}.$$

Այս հարաբերություններից տանում ենք՝

$$a = c \cdot \sin A \text{ և } a = b \cdot \operatorname{tg} A,$$

այսինքն՝ եջը հավասար է ներքնաձիգին՝ բազմապատկած հակադիր անկյան սինուսով, յեվ եջը հավասար է մյուս եջին՝ բազմապատկած հակադիր անկյան տանգենսով։

Սրանց հիման վրա կարելի է, ոգտվելով յեռանկյունաչափական մեծությունների աղյուսակից՝ հաշվել եջի յերկարությունը, յեթե տված են նրա հակադիր անկյունը և ներքնաձիգը կամ մյուս եջը։

Առաջին հավասարությունից տանում ենք նաև՝

$$c = \frac{a}{\sin A},$$

այսինքն՝ ներքնաձիգը հավասար է եջին՝ բաժանած նրա հակադիր անկյան սինուսի վրա։

Յեթե տված է ուղղանկյուն յեռանկյան սուր անկյուններից մեկը, ապա հեշտությամբ կարելի է վորոշել մյուսը, վորպես լրացուցիչ մինչև 90^0-ը. վերջինիս նկատմամբ կարելի է կիրառել հապատասխան հավասարությունները՝

$$\sin B = \frac{b}{c} \text{ և } \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}.$$

Վարժություններ.—1. Ուղղանկյուն յեռանկյան ներքնաձիգը հավասար է 15 սմ-ի, սուր անկյուններից մեկը պարունակում է 32^0։ Հաշվեք եջերի յերկարությունները։

2. Շեղանկյան կողմը հավասար է 22,5 սմ-ի, իսկ նրա սուր անկյունը պարունակում է 48^0։ Հաշվեք անկյունագծերի յերկարությունները։

3. Ուղղանկյան անկյունագիծը հավասար է 1 մ-ի։ Անկյունագծերի միջև գոնվող անկյունը պարունակում է 70^0։ Հաշվեք ուղղանկյան կողմերը և մակերեսը։

4. Ուղղանկյուն յեռանկյան եջերից մեկը պարունակում է 9,6 սմ և ներքնաձգի հետ կազմում 64^0-ի անկյուն։ Հաշվեք մյուս եջը և ներքնաձիգը։

5. Հավասարասրուն յեռանկյան հիմքը հավասար է 8 սմ-ի, իսկ գագաթի անկյունը՝ 52^0-ի։ Հաշվեք սրունքը։

6. Շեղանկյան սուր անկյունը պարունակում է 50^0, իսկ անկյունագծերից մեծը հավասար է 32,4 սմ-ի։ Հաշվեք կողմը և փոքր անկյունագիծը։

7. Վորոշեք ուղղանկյուն յեռանկյան անկյունները, յեթե եջերը պարունակում են յերկարության 15 և 35 միավորներ։

8. Վորոշեք ուղղանկյուն յեռանկյան անկյունները, յեթե եջը 2 անգամ մեծ է մյուս եջից։

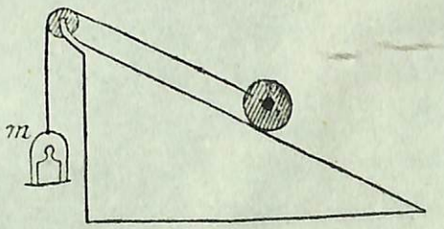
9. Վորոշեք ուղղանկյուն յեռանկյան անկյունները, յեթե ներքնաձիգը հավասար է 15 սմ-ի և եջերից մեկը՝ 9,4 սմ-ի։

10. Վորոշեք հավասարասրուն յեռանկյան անկյունները, յեթե նրա հիմքը կազմում է սրունքի $^3/_4$ մասը։

11. Արտահայտեք աստիճաններով արևի բարձրությունը, յեթե 2 մ յերկարության ուղղաձիգ ձողը ձգում է 1,8 և 2,75 մ յերկարության ստվեր։

12. Վորոշեք նույն ձողի ձգած ստվերը, յերբ արևն ունի 10^0 և 45^0 բարձրություն։

13. 9 կգ ուժը վեր է լուծված յերկու փոխադարձ ուղղահայաց ուժերի, վորոնցից մեկը համազորի հետ կազմում է 30^0 անկյուն։ Վորոշել բաղադրիչ ուժերի մեծությունները։



գծ. 180

14. Վորոշեք յերկու փոխադարձ ուղղահայաց 8 և 5 կգ ուժերի համազորի ուղղությունը և մեծությունը։

15. Ինչ մեծության ծանրոց պետք է դնել m նժարի վրա (գծ. 180), վորի քաշն է 150 գր, վորպեսզի թեք հարթության վրա

հավասարակշռության մեջ պահվի 1 կգ ծանրոցը, եթե նրա թեքման անկյունը հավասար է 20^0, 30^0, 40^0։

16. Վիրքան պետք է լինի հարթության թեքման անկյունը, որպեսզի նույն ծանրոցը հավասարակշռության մեջ պահվի միայն m ճիժարով, առանց լրացուցիչ ծանրոցի։

17. 1 մ երկարության ծանրաչափական խողովակն ուղղաձիգ դրությունից թեքված է 10^0։ Քանի՞ սանտիմետր բարձրությամբ է նա լցված սնդիկով, եթե ծանրաչափի բարձրությունը հավասար է 76 սմ-ի։ Քանի՞ աստիճան պետք է թեքել նրան, որպեսզի ամբողջովին լցվի սնդիկով։

18. Վորոշեք միալանջ տանիքի թեքման անկյունը, եթե նրա վերին եզրը բարձր է ցածի եզրից 4 մ-ով և տան լայնությունն 14 մ։

19. Վորոշեք միալանջ տանիքի լայնությունը, եթե շենքի լայնությունն է 12 մ և տանիքի վերին ու ցածրի եզրերի բարձրությունների տարբերությունը հավասար է 3 մ-ի։

20. Վորոշեք սանդուղքների թեքման անկյունը, եթե նրա աստիճանների լայնությունը հավասար է 30 սմ և բարձրությունը՝ 14 սմ։

Սուր անկյունների *sinus*-ների յեվ *tangens*-ների ճշտակությունների աղյուսակը.

Աստիճաններ	Sinus	Tangens	Աստիճաններ	Sinus	Tangens	Աստիճաններ	Sinus	Tangens
1	0·017	0·017	31	0·515	0 601	61	0·875	1·804
2	0·035	0·035	32	0·530	0 625	62	0·883	1·881
3	0·052	0·052	33	0·545	0 649	63	0·891	1·963
4	0·070	0·070	34	0·559	0·675	64	0·899	2·050
5	0·087	0·087	35	0·574	0·700	65	0·906	2·145
6	0·105	0·105	36	0·588	0·727	66	0·914	2·246
7	0·122	0·123	37	0·602	0 754	67	0·921	2·356
8	0·139	0·141	38	0·616	0·781	68	0·927	2·475
9	0·156	0·158	39	0·629	0·810	69	0·934	2·605
10	0·174	0·176	40	0·643	0·839	70	0·940	2·747
11	0·191	0·194	41	0·656	0·869	71	0·946	2·904
12	0·208	0·213	42	0·669	0·900	72	0·951	3·078
13	0·225	0·231	43	0·682	0·933	73	0·956	3·271
14	0·242	0·249	44	0·695	0·966	74	0·961	3·487
15	0·259	0·268	45	0·707	1·000	75	0·966	3·732
16	0·276	0·287	46	0·719	1·036	76	0·970	4·011
17	0·292	0·306	47	0·731	1·072	77	0·974	4·331
18	0·309	0·325	48	0·743	1·111	78	0·978	4·705
19	0·326	0.344	49	0·755	1·150	79	0·982	5·145
20	0·342	0·364	50	0·766	1·192	80	0·985	5·671
21	0·358	0·384	51	0·777	1·235	81	0·988	6·314
22	0·375	0·404	52	0·788	1·280	82	0·990	7·115
23	0·391	0·424	53	0·799	1·327	83	0·993	8·144
24	0·407	0·445	54	0·809	1·376	84	0·995	9·514
25	0·423	0·466	55	0·819	1·428	85	0·996	11·430
26	0·438	0·488	56	0 829	1·483	86	0·998	14·301
27	0·454	0·510	57	0 839	1·540	87	0·999	19·081
28	0·469	0·532	58	0·848	1·600	88	0 999	28·636
29	0·485	0·554	59	0·857	1·664	89	1·000	57·290
30	0·500	0·577	60	0 866	1·732			

ՅԱՆԿ

Յերես

Գլուխ I. Յեռանկյուն յեվ զուգահեռ գծեր.

§ 1. Յեռանկյան ձևերի մասին 3
§ 2. Յեռանկյան անկյունները 6
§ 3. Յեռանկյան անկյունների գումարը 7
§ 4. Հավասարասրուն յեռանկյան գագաթի անկյան կիսողը . 9
§ 5. Յեռանկյունների հավասարության մասին . . . 12
§ 6. Անկյունների կառուցումը քանոնի և կարկնի ոգնությամբ . 14
§ 7. Յեռանկյան արտաքին անկյունները 16
§ 8. Յեռանկյան կողմի յերկարության փոփոխվելը՝ անկյան մեծությունը փոփոխելիս 17
§ 9. Յեռանկյունների կառուցումը 18
§ 10 Զուգահեռ գծերի մասին 20
§ 11. Զուգահեռներին ուղիղով հատելուց առաջացած անկյունների մասին 21
§ 12. Զուգահեռները հատելուց առաջացած անկյունների հատկությունների կիրառումը կարևոր առաջադրություններ առաջարկելու հարցում 22

Գլուխ II. Ուղղահայաց յեվ համաչափություն (սիմմետրիա)

§ 13. Ուղղահայաց և թեք 26
§ 14. Ուղղանիկ և հորիզոնական գծեր 27
§ 15. Ինչպես և հարկավոր ուղիղի ամբողջ կետում կանգնեցնել ուղղահայաց և ինչպես ուղիղից դուրս գտնվող կետից իջեցնել ուղղահայաց 31
§ 16. Յեռանկյան բարձրությունները 32
§ 17. Յեռանկյան մակերեսի հաշվելը 34
§ 18. Կետի և հատվածի առաջադրությունը (պրոեկցիա) ուղիղի վրա 36
§ 19. Գաղափար առանցքային համաչափության մասին . . 39
§ 20. Հավասարասրուն յեռանկյան կառուցումը նրա ամբողջ տարրերով 40
§ 21. Գաղափար կետերի յերկրաչափական տեղի մասին և այդպիսի տեղերի օրինակները 42

Յերես

Գլուխ III. Ամենապարզ խառանկյուններ.

§ 22. Խառանկյան մասին ընդհանրապես 46
§ 23. Գաղափար զուգահեռագծի մասին։ Նրա կողմերի, անկյունների և անկյունագծերի հատկությունները . . . 48
§ 24. Զուգահեռագծի մակերեսը 50
§ 25. Եռանկյուն 51
§ 26. Ուղղանկյուն 53
§ 27. Խառակուսի 55
§ 28. Սեղան (տրապեց) 55

Գլուխ IV. Հարաբերական թվեր.

§ 29. Սկզբնական հասկացողություններ 59
§ 30. Գործողություններ հարաբերական թվերով։ Գումարում . 63
§ 31. Հարաբերական թվերի հանում 67
§ 32. Հարաբերական թվերի գումարման և հանման պարզ ձևեր . 71
§ 33. Հարաբերական թվերի բազմապատկումը 74
§ 34. Հարաբերական թվերի բաժանումը 77
§ 35. Գաղափար հարաբերական թվերի աստիճան բարձրացնելու մասին 79
§ 36. Պատմական տեղեկություններ բացասական թվերի ծագման մասին 80

Գլուխ V. Միանդամներով յեվ բազմանդամներով գործողությունների համակարգումը։ Մեկանիայս հավասարման լուծումը.

§ 37. Տառային նշումներ։ Միանդամ և բազմանդամ . . . 82
§ 38. Բազմանդամի իրրև հանրահաշվական գումար . . . 85
§ 39. Բազմանդամի նման անդամների միացումը . . . 87
§ 40. Բազմանդամի անդամների դասավորումը 88
§ 41. Բազմանդամների գումարումն ու հանումը . . . 89
§ 42. Արտադրյալի հիմնական հատկությունները . . . 92
§ 43. Աստիճանների բազմապատկումը 95
§ 44. Աստիճանների բաժանումը 96
§ 45. Միանդամների բազմապատկումն ու բաժանումը . . 97
§ 46. Բազմանդամի բազմապատկումը և բաժանումը միանդամով . 98
§ 47. Առաջին աստիճանի մեկանհայտ հավասարման լուծման ընդհանուր կանոնները 99
§ 48 Հավասարումների լուծման օրինակներ 101
§ 49. Հավասարումներ կազմելու օրինակներ 102
§ 50. Բազմանդամների բազմապատկումը 106
§ 51. Կրճատ բազմապատկման բանաձևերը 109
§ 52. Լուծման համար կրճատ բազմապատկման բանաձևեր պահանջող խնդիրներ 112
§ 53 Պատմական տեղեկություններ հանրահաշվական սիմվոլիկայի և գործողությունների նշանների մասին 113

Յերես

§ 54. Պատմական տեղեկութիւններ առաջին աստիճանի հավասարումների մասին 114

Գլուխ VI. Գծեր յեվ անկյուններ շրջանի մեջ.

§ 55. Գաղափար շրջանագծի, շրջանի, շառավիղի, աղեղի և լարի մասին 116
§ 56. Տրամագիծն իբրև շրջանի համաչափութեան առանցք . . 117
§ 57. Շոշափող 118
§ 58. Կենտրոնական անկյուն 119
§ 59. Անկյունային և շրջանագծային արագութիւններ . . 121
§ 60. Տեղական ժամանակ 122
§ 61. Ներգծյալ անկյուն 123
§ 62. Այն կետերի յերկրաչափական տեղի կառուցումը, վորոնցից հատվածը յերևում է ուղիղ անկյունով. Շրջանագծի արտաքին կետից նրա շոշափողի կառուցումը 126
§ 63. Այն կետերի յերկրաչափական տեղը, վորտեղից ավյալ հատվածը յերևում է սուր կամ բութ անկյունով . . . 128
§ 64. Արտագծյալ անկյուն և շոշափողով ու լարով կազմած անկյուն 130
§ 65. Յերկու շրջանների փոխադարձ դիրքը 130
§ 66. Յերկու շրջանների ընդհանուր շոշափողներ . . . 134

Գլուխ VII. Հաճրահաշվական կոտորակներ յեվ տառային գործակիցներով հավասարումներ.

§ 67. Հանրահաշվական կոտորակներով գործողութիւնների ներածութիւնը 136
§ 68. Ընդհանուր բազմապատկչի փակագծերից հանելը . . 137
§ 69. Յերկու կամ միքանի արտահայտութիւնների ընդհանուր բաժանարարն ու բազմապատիկը 139
§ 70. Բազմանդամների պարզ բազմապատկիչների վերածումը կրճատ բազմապատկման բանաձևերի միջոցով 144
§ 71. Բազմանդամի պարզ բազմապատկիչների վերածումը, նրա անդամների խմբավորման յեղանակով 146
§ 72. Բազմանդամների բաժանումը 148
§ 73. Խորանարդների գումարն ու տարբերութիւնը . . . 151
§ 74. Տառային հավասարումներ 152

Գլուխ VIII. Հավասարումների սիստեմներ.

§ 75. Մեկ հավասարում յերկու անհայտով 158
§ 76. Առաջին աստիճանի յերկու անհայտով յերկու հավասարումների սիստեմ 161
§ 77. Տեղադրման յեղանակ 162
§ 78. Անհայտների նշանակութիւնների համեմատման (բաղդատման) յեղանակ 163

Յերես

§ 79. Գումարման և հանման կամ գործակիցների հավասարեցման յեղանակ 165
§ 80. Միքանի նկատողութիւն յերկու անհայտով յերկու հավասարումների սիստեմների լուծման մասին 167
§ 81. Յերկու անհայտով հավասարումների սիստեմների լուծման վարժութիւններ 168
§ 82. Յերկնհայտ հավասարումների սիստեմներ կազմելը . . 170
§ 83. Բազմանհայտ հավասարումների սիստեմ 176

Գլուխ IX. Հատվածների համեմատականութիւնն ու պատկերների նմանութիւնը.

§ 84. Գաղափար նմանութեան մասին 179
§ 85. Հատվածի բաժանումը հավասար մասերի 179
§ 86. Համեմատական հատվածների կառուցումը 181
§ 87. Յեռանկյան անկյան կիսողի հատկութիւնը 185
§ 88. Նման յեռանկյուններ և նման յեռանկյունների համապատասխան կողմերի հատկութիւնը 186
§ 89. Համապատասխան հատվածներ նման յեռանկյունների մեջ . 190
§ 90. Նման յեռանկյունների մակերեսների հարաբերութիւնը . 191
§ 91. Նման յեռանկյունների վերաբերյալ խնդիրներ . . . 192
§ 92. Նման բազմանկյուններ 194
§ 93. Նմանութեան կենտրոն և պանտոգրաֆ 196
§ 94. Սկզբնական տեղեկութիւններ յեռանկյունաչափութեան մասին 202
§ 95. Ուղղանկյուն յեռանկյունների լուծման ամենապարզ դեպքեր 206

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԳՐԱԴԱՐԱՆ

ՆԱԽ ՔԱՆ ԳՐՔԻՑ ՕԳՏՎԵԼԸՆ ՈՒՂՂԵԼ ՀԵՏԵՎՅԱԼ ՎՐԻՊԱԿՆԵՐԸ

Յեր.	Տող	Տպված է	Պետք է լինի
8	15 ն.	նախ՝ յեռանկյունը	նախ՝ այն յեռանկյունը
»	13 ն.	անկյունը անկոնստաչափով աչքով հաշվելուց	անկյունն աչքաչափով հաշվելուց
26	1 ն.	CD հատվածի	AD հատվածի
27	1 վ.	ABC ուղղանկյուն	ACD ուղղանկյուն
32	15 վ.	կամավոր միևնույն բայց շառավիղներով	կամավոր, բայց միևնույն շառավիղներով
35	5 վ.	$\triangle = \frac{AB \cdot BC}{2}$,	$\triangle = \frac{AB \cdot BC}{2}$,
36	2 ն.	B կետը	A_1 կետը
37	3 վ.	A_1 և B_1՝ AA_1 և BB_1 ուղղահայացների հիմքերը	AA_1 և BB_1 ուղղահայացների A_1 և B_1 հիմքերը
38	11 ն.	ուղղությունը	ուղղորդությունը
44	15 ն.	$\angle CBD = \angle ABO$	$\angle CBO = \angle ABO$
45	2 վ.	յեռանկյան	անկյան
47	2 ն.	$\frac{1}{4}d$-վ	$\frac{1}{4}d$-ով
50	5 ն.	BE և FD ուղղահայացները	BE և CF ուղղահայացները
»	2 ն.	EBFD	EBCF
51	1 վ.	և զուգահեռակողմ հավասարը	և զուգահեռակողմի հավասար
66	22 վ.	°	t°
»	23 վ.	ավյալների համար.	ավյալների համար. վորոշել ջերմության փոփոխությու-
75	3 վ.	$(+4^0) \cdot (+3^0) = (+12^0)$	$(+4^0) \cdot (+3) = (+12^0)$
»	9 վ.	$(+3^0) \cdot (-4^0) = (-12^0)$	$(+3^0) \cdot (-4) = (-12^0)$
»	20 վ.	$(-3^0) \cdot (\ 4^0)$.	$(-3^0) \cdot (-4)$.
»	12 ն.	$(-3^0) \cdot (-4^0) = (+12^0)$	$(-3^0) \cdot (-4) = (+12^0)$
80	16 վ.	(XII—X II դ.)	(XII—XIII դ.)
87	12 վ.	$x = 3ab + 3ab = 2ab$	$x = 3ab + 3ab + 2ab$
91	7 վ.	նվագելիք	նվագելին
105	11 ն.	1^1	$1^1/$

Յեր.	Տող	Տպված է	Պետք է լինի
105	5 ն.	6^2 $_5$	$6^2/_5$
110	14 ն.	$(5a \quad 0{,}2b)^2$	$(5a - 0{,}2b)^2$
112	7 վ.	$[(3a+b)^2 \quad (a+3b)^2] \cdot 2ab$	$[(3a+b)^2 - (a+3b)^2] \cdot 2ab$
117	18 վ.	BZ	BL
119	3 վ.	A շառավիղից	AO շառավիղից
125	8 վ.	մեկ	մեծ
127	6 ն.	ժամադակ կենտրոնն և	ժամադակ շրջանն և
128	6 վ.	ավյալների	ավյալ կետի
»	8 ն.	ուղիղի	աղեղի
131	16 վ.	$A < R - R_1$	$a < R - R_1$
135	2 վ.	$O_1B_1 \parallel OB_1$,	$O_1B_1 \parallel OB$,
145	1 վ.	$a^2 \quad 9$	$a^2 - 9$
»	4 ն.	$\frac{m-1}{2m \quad 5} - \frac{2m^2 \quad 7m}{4m^2 \quad 20m+25}$	$\frac{m-1}{2m-5} - \frac{2m^2-7m}{4m^2-\ :\ m+25}$
»	4 ն	$\frac{2}{a} \frac{a-2b}{a^2-ab} - \frac{a}{a^2-ab+b^2}$	$\frac{2}{a} \frac{a-2b}{a^2-ab} - \frac{a}{a^2-2ab+b^2}$
146	10 վ.	$= \frac{3ab \cdot (a-3b)^2}{(a+3b) \cdot (a-3b) \cdot 6b^2}$	$\frac{3ab \cdot (a-3b)^2}{(a+3b) \cdot (a-3b) \cdot 6b^2}$
»	10 ն.	$\left(1+\frac{1}{a}\right) : \left(1\frac{1}{a}\right)$	$\left(1+\frac{1}{a}\right) : \left(1-\frac{1}{a}\right)$
147	10 վ.	$x(a+b)+y(a+b$	$x(a+b)+y(a+b)$
148	5 վ.	$ax \quad bx-ay+by$	$ax-bx-ay+by$
»	7 վ.	$a^3 \quad a^2+ab^2-b^2+ac^2-c^2$	$a^3-a^2+ab^2-b^2+ac^2-c^2$
»	11 ն.	$(a^2+6 \ +9) : (a+3)$	$(a^2+6a+9) : (a+3)$
»	11 ն.	$(y^5-y^3) : (y^3 \quad y^2)$	$(y^5-y^3) : (y^3-y^2)$
150	10 ն.	$a+7+\frac{-3a+12}{a^2+a \quad 1}$	$a+7+\frac{-3a+12}{a^2+a \ -1}$
»	4 ն	$(2x^3+3x^2-2x \ -3)0(2x+3)$	$(2x^3+3x^2-2x-3) : (2x+3)$
152	12 վ.	$x^3 \quad y^3$	x^3-y^3
153	2 ն.	$\frac{a+b-2b}{2} = \frac{2a-a \quad b}{2}$	$\frac{a+b \ -2b}{2} = \frac{2a \ - \ a-b}{2}$
154	5 վ.	m^2-ու	m^2
155	12 վ.	$= \frac{(a+b)(a \quad b)}{a+b}$	$= \frac{(a+b)(a \ - \ b)}{a+b}$
»	12 ն.	$x^2+2ax+a^2-x^2+2a.x \quad a^2=8a^2$	$x^2+2ax+a^2-x^2+2a.x-a^2=8a^2$
»	5 ն.	$3 \quad \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$	$3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$
160	11 ն.	ուղիղ	ուրիշ
163	10 վ.	$7x-2(51) \ -4x) = 33$	$7x-2(51-4x) = 33$
165	18 վ.	սահնում	սահնում հնք

Եր.	Տող	Տպված է	Պետք է լինի
166	11 վ.	բազմապատկիչը	բազմապատիկը
167	7 ն.	$ax+(a+b)=3(a+b)$	$ax(a+b)=3(a+b)$
168	16 վ.	$xy\ \ 4x+y-4=$	$xy-4x+y-4=$
169	5 ն.	$\frac{x+y}{5}+\frac{x-y}{2}=6$	$\frac{x+y}{5}+\frac{x-y}{2}=6$
170	4 վ.	$(a+b)x\ \ (a-b)y=0$	$(a+b)x-(a-b)y=0$
172	16 վ.	ավարտել	ավարտվել
180	6 վ.	A_3Q	A_3G
183	7 վ.	նշում3	նշում
194	2 ն.	$A_1B_1C_1$	AB_1C_1
196	15 վ.	$BC \parallel B_1C_1$	$B_1C_1 \parallel BC$

38-րդ էջերի աղյուսակի թվերը ընդունել վերջից տասնորդական կոտորակներ։

51-րդ էջերի գծ. 102-ը տեղափոխել 75-րդ էջերի գծ. 112-ի տեղը, և ընդհակառակը գծ. 112-ը՝ գծ. 102-ի տեղը։

NL0243927
<< ცოტნისის ეკლესიის