Ա. ԿԻՍԵԼՅՈՎ

ԹՎԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

ԴԱՍԱԳԻՐՔ
ՎՈՉ ԼՐԻՎ ՄԻՋՆԱԿԱՐԳ ՅԵՎ ՄԻՋՆԱԿԱՐԳ
ԴՊՐՈՑԻ 5-ՐԴ ԴԱՍԱՐԱՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

ՊԵՏԱԿԱՆ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ՅԵՐԵՎԱՆ 1938

31 JAN 2018

Ա. ԿԻՍԵԼՅՈՎ

ԹՎԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

ԴԱՍԱԳԻՐՔ
ՎՈՉ ԼՐԻՎ ՄԻՋՆԱԿԱՐԳ ՅԵՎ ՄԻՋՆԱԿԱՐԳ
ԴՊՐՈՑԻ ՀԱՄԱՐ

Բնագիրը հաստատված է ՌՍՖՍՀ Լուսժողկոմատի կողմից

ՊԵՏԱԿԱՆ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ՅԵՐԵՎԱՆ 1938

ՎԵՐԱՄՇԱԿՈՂ ՀԵՂԻՆԱԿԻ ԱՌԱՋԱԲԱՆԸ

Այն բոլոր դժվար հարցերը, որոնք հանդես են գալիս յուրաքանչյուր դասագիրք կազմողի առջև, իրենց բավարար լուծման համար նախ և առաջ պահանջում են միասնական սկզբունքային դրվածք. Ա. Պ. Կիսելյովի Թվաբանության դասընթացը վերամշակելիս յես յելակետ եմ ունեցել այն սկզբունքը, որ յուրաքանչյուր դասագիրք, թեկուզ դա լինի միջնակարգ դպրոցի 5-րդ դասարանի համար, պետք ե հանդիսանա տրամաբանորեն սիստեմավորված մի միասնական ամբողջություն։ Այդ սկզբունքի կիրառումը պետք ե թողներ և թողեց վճռական ազդեցություն նյութի ընտրության և դասավորության վրա։

Նյութի ընտրության տեսակետից յես հնարավոր չհամարեցի սահմանափակվել լոկ նրանով, ինչ կարող ե և պետք ե յուրացնի 5-րդ դասարանի յուրաքանչյուր աշակերտ։ Տրամաբանական ամբողջականության պահանջն ստիպեց դասագրքի մեջ մտցնել և այնպիսի նյութեր, որոնք որպես կանոն, պատշաճ ձևով կարող են յուրացնել միայն բարձր դասարանների սովորողները, դասընթացը կրկնելիս։ Այդ տեսակետից ամբողջ նյութը զատված ե մանր տառերով, և դասագրքի կառուցվածքն այնպես ե, որ մանր տառերով շարվածները կարելի յե բաց թողնել, առանց վնասելու հետագա նյութը հասկանալուն։ Յես չեմ կամենում ուսուցչին խորհուրդ տալ, որ նա առանց յերկար մտածելու բաց թողնի բոլոր մանր տառերով տպվածները. այստեղ անհրաժեշտ ե տարբեր մոտեցում, կախված դասարանի զարգացման մակարդակից, և չի կարելի սուր գիծ անցկացնել 5-րդ դասարանի աշակերտին մատչելի և ոչ մատչելի նյութերի միջև։

Մյուս կողմից, տարրական և տրամաբանական միասնության պահանջը հարկադրում բավականաչափ կրճատել և յերբեմն բոլորովին բաց թողնել մի շարք բաժիններ, վորոնք ըստ տրադիցիայի սովորաբար մտցնում են թվաբանության դասագրքերի մեջ. այդպիսին է, օրինակ, պարզ յեռից կանոնի, խառնուրդի, ձուլվածքի վերաբերյալ և այլ խնդիրների տեսական քննարկումը: Տարրական թվաբանությունը ռացիոնալ թվերով կատարվող գործողությունների ուսմունքն է: Միջնակարգ դըպրոցի յուրահատուկ պահանջներն ստիպում են այս սահմանումը լայնորեն հասկանալ և թվաբանության դասընթացի մեջ մտցնել մեծությունների չափումների և համեմատական մեծությունների ուսմունքները: Սա վորոշ չափով խախտում է դասընթացի ամբողջականությունը, չառաջացնելով, սակայն, եյական թերություն, վորովհետև թվաբանությանն ուղղակի միացվում է մի քանի, շատ թե քիչ չափով ավարտված, լրացուցիչ գլուխներ: Բայց այդպիսի դասընթացի մեջ գործնականում պատահող առանձին տիպերի խնդիրների լուծման յեղանակներ մտցնելը, վորոնք համախմբված չեն վոչ մի ընդհանուր տեսական հիմնավորումով, կնշանակեր գիտական ձեռնարկը վերածել «աշխատանքի գրքի»: Այդպիսի խնդիրների տեղը պետք է լինի խընդրագիրքը և վոչ թե տեսական ձեռնարկը:

Հիմնական սկզբունքի կիրառումն նույնպես արտահայտվեց նաև նյութի դասավորության մեջ: Այսպես, մեծությունների չափման վերաբերյալ ուսմունքը, չափման և անվանական թվերի հասկացողությունը վորպես առանձին բաժին, բնականաբար, իր տեղը գտավ ամբողջ թվերի ուսմունքից հետո, կոտորակներից առաջ: Իհարկե, այդ չի նշանակում, վոր մանկավարժական կենդանի պրոցեսում մետրների և կիլոմետրների մասին պետք է առաջին անգամ հիշատակել ամբողջ թվերն անցնելուց հետո, ներառյալ թվերի բաժանելիության տեսությունը: Հասկանալի յե, վոր արդեն ամբողջ թվերի վերաբերյալ աշխատանքը կատարելիս սովորողները պետք է ծանոթանան հիմնական չափերին: Ամենևին վատ չի լինի, յեթե ամբողջ թվերն ուսումնասիրելիս սովորողները կարդան չափերին և չափումներին վերաբերող այս կամ այն հատվածը, բայց դասագիրքը, վորպես ամբողջական և սիստեմատիկ ձեռնարկ, չի կարող և չպետք է

ճշտությամբ վերարտադրի մանկավարժական կենդանի պրոցեսը, վորովհետև հենց այդ ել նրան կիջեցներ մինչև «աշխատանքի գրքի» մակարդակը:

Գաղափարների հենց այդ կարգով յես անհրաժեշտ համարեցի դասագրքից հանել տոկոսներին վերաբերող հատուկ բաժինը: Ընդվորում, յես յելա այն համոզմունքից, վոր այդ բաժինը, վորը պարունակում է մաթեմատիկորեն տարբեր խնդիրներ համախմբված միայն գործնական հանգամանքով, հանդիսանում եր «կոմպլեքսային» մեթոդի մնացուկներից մեկը և նրա հենց այդ բնույթն է, վոր ստեղծում եր բավականաչափ յուրահատուկ դժվարություններ տոկոսներ հաշվելու բնագավառում ունակություններ ձեռք բերելիս: Բնականաբար, սովորողների մեջ ստեղծվում եր այն պատկերացումը, վոր իբր թե տոկոսային հաշվումները, կոտորակային թվերի գործողությունների համեմատությամբ, հանդիսանում են սկզբունքորեն ինչվոր նոր բան. և այդ պատկերացումը դժվարացնում եր արդեն ձեռք բերած ունակությունները կիրառել ձևով նոր, բայց բովանդակությամբ վոչ մի նոր բան չներկայացնող խնդիրների նկատմամբ:

Սակայն այն ուսուցիչը, վորը կցանկանար տոկոսային հաշվումներն անցնել իբրև առանձին բաժին, լիակատար հնարավորություն ունի այդ անելու ներկա դասագրքով: Դրա համար պետք է միայն գրքի IV և V բաժիններից առանձնացնել այն բոլոր հատվածները, վորոնք վերաբերում են տոկոսներին, և այդ հատվածները նույն կարգով, վորպես առանձին բաժին, զետեղել գրքի վերջում:

Կիսելյովի դասագրքի ամբողջ բնագիրը յենթարկված է մանրակրկիտ վերամշակման՝ գիտական պարզության և շարադրանքի մատչելիության տեսակետից: Շատ տեղերում մեջ բերված օրինակները փոխարինված են նորերով, և օրինակների թիվն ավելացված է: Բայց և այնպես, գրքի կառուցվածքը և վոճը հիմնականում կանխորոշված եյին նրա սկզբնական բնագրով: Վերամշակող հեղինակը չեր կարող իր առջև նպատակ դնել նոր դասագիրք ստեղծելու:

Իմ աշխատանքում ինձ խիստ եյական օժանդակություն ցույց է տվել միջնակարգ դպրոցի Կենտրոնական ինստիտուտի մաթեմատիկայի խմբի ամբողջ կոլեկտիվը։ Մի շարք արժեքավոր խորհուրդներ ստացա նաև Մոսկվայի ուսուցիչների ակտիվի ներկայացուցիչներից։ Այդ բոլոր ընկերներին հայտնում եմ իմ անկեղծ շնորհակալությունը։

Ա. ԽԻՆՉԻՆ

ԱՌԱՋԻՆ ԲԱԺԻՆ

ԱՄԲՈՂՋ ԹՎԵՐ

I. ԱՄԲՈՂՋ ԹՎԵՐ, ՆՐԱՆՑ ԱՆՎԱՆՈՒՄԸ ՅԵՎ ՆՇԱՆԱԿՈՒՄԸ

1. *ԱՄԲՈՂՋ ԹՎԻ ՀԱՍԿԱՑՈՂՈՒԹՅՈՒՆԸ։* Մեկ առարկա և մեկ առարկա կազմում են յերկու առարկա. յերկու առարկա և մեկ առարկա կազմում են յերեք առարկա, յերեք և մեկ կազմում են չորս և այլն։ Մեկ, յերկու, յերեք, չորս և այլն կոչվում են ամբողջ թվեր։

Մեկ թիվը այլ կերպ կոչվում է **միավոր**։ Յերկու թիվը կարելի յե դիտել վորպես յերկու միավորների հավաք (համախումբ), յերեք թիվը՝ վորպես յերեք միավորների հավաք և այլն։ Այսպիսով, յուրաքանչյուր **ամբողջ թիվ կամ միավոր է կամ մի քանի միավորների հավաք**։

Բացի ամբողջ թվերից թվաբանությունն ուսումնասիրում է նաև ուրիշ թվեր։ Այդ թվերին կծանոթանանք հետագայում։

2. *ԹՎԵՐԻ ԲՆԱԿԱՆ ՇԱՐՔԸ։* Յեթե միավորին ավելացնենք ևս մեկ միավոր, ստացված թվին ավելացնենք դարձյալ մեկ միավոր, ապա ևս մեկ միավոր և այսպես շարունակ, կստացվի **թվերի բնական շարքը**—մեկ, յերկու, յերեք, չորս, հինգ, վեց, յոթ և այլն։

Այդ շարքում ամենափոքր թիվը միավորն է. ամենամեծ թիվ չկա, վորովհետև յուրաքանչյուր թվի, վորքան էլ մեծ լինի նա, կարելի յե ելի միավոր ավելացնել և ստանալ ավելի մեծ թիվ։ Նշանակում է՝ բնական շարքը կարելի յե շարունակել անվերջ, ուստի և ասում են, վոր **թվերի բնական շարքն անվերջ է**։

Յերեք թիվը ավելի փոքր է, քան հինգը, վորը բնական շարքում գտնվում է յերեքից հետո, իսկ, հինգ թիվը ստանալու համար պետք է այն յերեք միավորին, վորոնցից կազմված է յերեք թիվը, ավելացնենք ելի յերկու միավոր։ Ընդհանրապես, յերկու տարբեր թվերից միշտ փոքրը կլինի այն, վորը բնական շարքում ավելի առաջ է գտնվում. իսկապես, այդ թվից յերկրորդ թիվն ստանալու համար, վորը բնական շարքում գտնըվում է ավելի հետո, պետք է առաջին թվին ավելացնենք ելի մեկ կամ մի քանի միավոր, այսինքն, մեծացնենք այն. ուստի յերկրորդ թիվն ավելի յե առաջինից։

Յերկու թվերից փոքրն է այն, վորը բնական շարքում ավելի շուտ է պատահում յեվ մեծն է այն, վորը բնական շարքում ավելի ուշ է պատահում։

3. ՀԱՄՐԱՆՔ։ Իմանալու համար, թե դասարանում քանի սեղան կա կամ այգում քանի ծառ, մենք պետք է նրանց **համրենք**։ Համրանքն այն է, վոր առանձնացնելով առարկաները մեկը մյուսի հետևից (իրապես կամ միայն մտքով), ամեն անգամ մենք անվանում ենք առանձնացված առարկաների թիվը։ Այսպես, համրելով դասարանում յեղած սեղանները, մենք մտովին առանձնացնում ենք մի սեղանը մյուսի հետևից և ասում. մեկ, յերկու, յերեք, չորս և այլն։ Յեթե վերջին սեղանն առանձնացնելիս ասացինք, որինակ, ութ, ապա նշանակում է, վոր դասարանում կա ութ սեղան, այդ դեպքում ութ թիվը հանդիսանում է **համրանքի արդյունքը**:

Մենք ընդունում ենք վորպես ակնհայտ ճշմարտություն այն, վոր համրանքի արդյունքը կախված չէ առարկաները համրելու կարգից։ Այսպես, համրելով դասարանի սեղանները, ստանում ենք միևնույն թիվը, անկախ այն բանից, առաջին նստարաններից ենք համրելով գնում դեպի հետևի նստարանները, թե, ընդհակառակը, հետևի նստարաններից դեպի առաջինները։ Կարևոր է միայն այն, վոր համրելիս վոչ մի սեղան բաց չթողնվի և վոչ էլ յերկրորդ անգամ համրվի։

4. ԹՎԵՐԻ ԱՆՈՒՆՆԵՐԸ ՄԻՆՉԵՎ ՀԱԶԱՐ։ Բնական շարքի առաջին տասը թվերը կրում են հետևյալ անունները. մեկ, յերկու, յերեք, չորս, հինգ, վեց, յոթ, ութ, ինն, տաս (կամ տասնյակ)։

Այս և մի քանի այլ անունների միջոցով կարելի յե ար-

տահայտել նաև մյուս թվերը։ Դիցուք, ցանկանում ենք անվանել այստեղ դրված գծիկների թիվը։

տասնյակ տասնյակ տասնյակ տասնյակ յերեք

Դրա համար համրում ենք տասը գծիկներ և առանձնացնում մնացածներից, ապա դարձյալ համրում ենք տասը գծիկներ և առանձնացնում մնացածներից։ Այսպես շարունակում ենք տաս-տաս համրել այնքան, մինչև վոր այլևս վոչ մի գծիկ չի մնա կամ կմնա տասից պակաս։ Ապա համրում ենք տասնյակները և մնացած գծիկները (կամ միավորները). քանի վոր տասնյակները չորս են, իսկ մնացած գծիկները յերեք, ապա այդ բոլոր գծիկների թիվը կարող յենք անվանել այսպես.

չորս տասնյակ յերեք միավոր։

Յերբ թվի մեջ տասից ավելի տասնյակներ լինեն, վարվում են այսպես. համրում են տասը տասնյակ, ապա կրկին տասը տասնյակ, այնուհետև ելի տասը տասնյակ և այլն այնքան ժամանակ, ինչքան վոր կարելի յե։ Յուրաքանչյուր տասը տասնյակը մի բառով անվանում են **հարյուր** կամ **հարյուրյակ**։ Դիցուք, թե վորևէ թվի մեջ կա յերեք հարյուրյակ, մնացած տասնյակները հինգ են, իսկ միավորները՝ յոթը. այդպիսի թիվը կարելի յե անվանել այսպես.

յերեք հարյուրյակ հինգ տասնյակ յոթ միավոր։

Յեթե թվի մեջ հարյուրյակները տասից ավելի յեն, ապա այդ հարյուրյակները նույնպես հաշվում են տասնյակներով։ Յուրաքանչյուր տաս հարյուրյակը մի բառով անվանում են հազար։

5. ՄԻ ՔԱՆԻ ԱՆՈՒՆՆԵՐԻ ԿՐՃԱՏՈՒՄԸ։ Մեր լեզվի մեջ գործածական են թվերի մի քանի կրճատ անուններ։ Այսպես, յերկու տասնյակը կոչվում է քսան, յերեք տասնյակը — յերեսուն, չորս տասնյակը քառասուն և այլն։

6. ԹՎԵՐԻ ԳՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՄԻՆՉԵՎ ՀԱԶԱՐ։ Առաջին

երին թվերը նշանակում են առանձին նիշերով կամ թվանշաններով՝

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9։

Այս ինն թվանշանների և տասներորդի՝ 0-ի (զերո)—որը նշում է թվի բացակայությունը—միջոցով կարելի է արտահայտել յուրաքանչյուր թիվ։

Դրա համար պայմանավորվել են գրել աջից առաջին տեղում՝ հասարակ միավորները, աջից երկրորդ տեղում՝ տասնյակները, երրորդ տեղում՝ հարյուրյակները, օրինակ՝

քառասուն երկու թիվը կարտահայտվի . . .	42
քառասուն »	40
երեք հարյուր քառասուն հինգը կարտահայտվի	345
երեքհարյուր քառասունը »	340
երեքհարյուր յոթը »	307
երեքհարյուրը »	300

Բոլոր թվանշանները, բացի զերոյից, կոչվում են իմաստավոր թվանշաններ։

Վերևում բերված օրինակները ցույց են տալիս զերոյի ներմուծման անհրաժեշտությունը։ Այսպես, երեքհարյուր քառասուն (340) թիվը նշանակելիս չի կարելի բաց թողնել զերոն, որովհետև 34 նշանակում է երեսուն չորս։ Ընդհակառակը, առաջին իմաստավոր թվի ձախ կողմում գտնվող զերոները կարելի է բաց թողնել և համարյա միշտ էլ բաց են թողնվում. 045-ը նշանակում է նույնը՝ ինչ 45-ը, 007-ը նույնը՝ ինչ ուղղակի 7-ը։ Շնորհիվ այդ պայմանի՝ մի թվանշանով արտահայտվող թիվը կոչվում է միանիշ, երկու թվանշանով արտահայտվողը՝ երկանիշ, երեք թվանշանով՝ եռանիշ թիվ և այլն։

7. ՀԱԶԱՐԻՑ ԱՆՑՆՈՂ ԹՎԵՐԻ ԱՆՈՒՆՆԵՐԸ։ Եթե հաշվի ենթակա առարկաները հազարից ավելի են, ապա դրանցից կազմում են այնքան հազար, որքան կարելի է. ապա հաշվում են հազարները և մնացած միավորները և անվանում թե մեկի և թե մյուսի թվերը. օրինակ, երկուհարյուր քառասուն հազար հինգ հարյուր վաթսուն երկու միավոր։

Հազար հազարը կազմում է միլիոն, հազար միլիոնը՝ միլիարդ (բիլիոն), հազար միլիարդը՝ տրիլիոն և այլն[1])։

8. ՀԱԶԱՐԻՑ ԱՆՑՆՈՂ ԹՎԵՐԻ ՆՇԱՆԱԿՈՒՄԸ։ Ասենք թե, պահանջվում է գրել երեսուն հինգ միլիարդ ութ հարյուր վեց միլիոն յոթը հազար վաթսուն երեք միավոր թիվը։ Այդ կարելի է թվանշանների և բառերի միջոցով գրել այսպես.

35 միլիարդ 806 միլիոն 7 հազար 63 միավոր։

Որպեսզի հնարավոր լինի գրել առանց բառերի, պայմանավորվել են նախ՝ միլիարդների, միլիոնների, հազարների և հասարակ միավորների թվերը գրել շարքով մի տողի վրա ձախից դեպի աջ, և երկրորդ՝ այդ թվերից յուրաքանչյուրն արտահայտել միշտ երեք թվանշաններով, այսինքն 63 միավորի փոխարեն գրել 063, 7 հազարի փոխարեն գրել 007 և այլն։ Այն ժամանակ մեր թիվը կարտահայտվի այսպես.

035 806 007 063։

Ըստ որում, այստեղ էլ ձախ կողմի զերոները չեն գրում, այսինքն՝ մեր թիվն արտահայտում են այսպես՝

35 806 007 063։

Վերջապես, նույն թիվը հաճախ գրում են և առանց ընդմիջումների.

35806007063։

Ընդսմին հիշում են, որ աջից առաջին երեք թվանշանները նշանակում են միավորների թիվը, հետևյալ դեպի ձախ գտնվող երեք թվանշանները նշանակում են հազարների թիվը, սրանց հաջորդող հետևյալ երեք թվանշանները՝ միլիոնների թիվը և այլն։ Օրինակ՝

567002301-ը նշանակում է	567 միլիոն 2 հազար 301 միավոր
15000026-ը . . »	15 միլիոն 26 միավոր
2008001020-ը . . »	2 միլիարդ 8 միլիոն 1 հազար 20 միավոր և այլն։

1) Այնուհետև հաջորդում են հետևյալ անունները. կվադրիլիոն (հազար տրիլիոն), քվինտիլիոն (հազար կվադրիլիոն), սեքստիլիոն (հազար քվինտիլիոն) և այլն։

9. ԻՆՉՊԵՍ ՊԵՏՔ Է ԿԱՐԴԱԼ ԱՅՆ ԹԻՎԸ, ՎՈՐԸ ԳՐՎԱԾ Է ԹՎԱՆՇԱՆՆԵՐԻ ՅԵՐԿԱՐ ՇԱՐՔՈՎ։ Թվանշանների յերկար շարքով արտահայտված թիվը, որինակ, 518300056702 9-ը հեշտ կարդալու համար, նրա մեջ աջից մտավոր կերպով (որինակ, վերևից գըված ստորակետներով) անջատում են յերեքական միավորներ այնքան, վորքան հնարավոր է.

5’183’000’567’029։

Աջից առաջին ստորակետը փոխարինում է «հազար» բառին, յերկրորդը՝ «միլիոն», յերրորդը՝ «միլիարդ», չորրորդը՝ «տրիլիոն» բառին։ Ուրեմն, մեր թիվը պետք է կարդալ այսպես.

5 տրիլիոն 183 միլիոն 567 հազար 29։

Սովորաբար վերջին թվին «միավոր» բառը չեն ավելացնում։

Յեթե միևնույն թիվը գրված է այնպես, վոր աջից հաշված, յուրաքանչյուր յերեք թվանշանից հետո արանք է թողնված,

5 183 000 567 029,

ապա այդ կարելի յե հեշտ կարդալ և առանց ստորակետներ դնելու։

10. ԹՎԱՆՇԱՆՆԵՐԻ ԶԲԱՂԵՑՐԱԾ ՏԵՂԻ ՆՇԱՆԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ։ Թվերի գրության այդ յեղանակի դեպքում թվանշանի զբաղեցրած յուրաքանչյուր տեղ ունի հատուկ նշանակություն, այն է.

Աջից	1-ին	տեղում գրվում են	հասարակ միավորները
»	2-րդ	»	» տասնավորները
»	3-րդ	»	» հարյուրավորները
»	4-րդ	»	» հազարավորները
»	5-րդ	»	» տաս հազարավորները
»	6-րդ	»	» հարյուր հազարավորները
»	7-րդ	»	» միլիոնավորները
»	8-րդ	»	» տաս միլիոնավորները
»	9-րդ	»	» հարյուր միլիոնավորները
»	10-րդ	»	» միլիարդավորները և այլն։

Այսպիսով, տեսնում ենք, վոր մեր գրության սիստեմը հիմնված է տասը թվանշան գործածելու վրա, վորոնց վերագըրվում է կրկնակի նշանակություն. մեկը կախված է թվանշանի տեսքից, մյուսը նրա գրաված տեղից. այսինքն՝ նույն շարքում գրված յերկու թվերից այն, վորը ձախ կողմն է գտնվում, նշանակում է 10 անգամ ավելի շատ միավորներ քան աջում գտնըվողը։

11. ՄԻԱՎՈՐՆԵՐԻ ԿԱՐԳԵՐԸ։ Միավորները, տասնավորները, հարյուրավորները, հազարավորները և այլն յերբեմն ավելի հարմար է այլ կերպ անվանել, այսինքն՝ միավորները կոչվում են 1-ին կարգի միավորներ (կամ հասարակ միավորներ), տասնավորները կոչվում են 2-րդ կարգի միավորներ, հարյուրավորները 3-րդ կարգի միավորներ և այլն։

Բոլոր միավորները, բացի հասարակ միավորներից (1-ին կարգի միավորներից), կոչվում են բաղադրական միավորներ։ Այսպես, տասնավորը, հարյուրավորը հազարավորը — բաղադրական միավորներ են։

Յուրաքանչյուր բաղադրական միավոր, համեմատած իրենից փոքր մյուս միավորի հետ, կոչվում է բարձր կարգի միավոր, իսկ իրենից մեծ միավորի նկատմամբ կոչվում է ստորին կարգի միավոր. այսպես, հարյուրավորը բարձր կարգի միավոր է տասնավորից և ստորին կարգի միավոր է հազարավորի նկատմամբ։

Յուրաքանչյուր բաղադրական միավոր պարունակում է հաջորդ ստորին կարգի 10 միավոր, որինակ, հարյուր հազարավորը պարունակում է 10-ը տասհազարավոր, տասհազարավորը 10-ը հազարավոր և այլն։

12. ՄԻԱՎՈՐՆԵՐԻ ԴԱՍԵՐԸ։ Միավորների կարգերը խըմբավորում են նաև դասերով. 1-ին դասին վերաբերում են առաջին յերեք կարգերը՝ հարյուրավորները, տասնավորները և միավորները. 2-րդ դասին վերաբերում են հետևյալ յերեք կարգերը հազարավորները, տաս հազարավորները և հարյուր հազարավորները և այլն։ 1-ին դասը միավորների դասն է (վորը պարունակում է հարյուրավորներ, տասնավորներ և միավորներ), 2-րդ դասը՝ հազարավորների դասն է (վորը պարունակում է հարյուր հազարավորներ, տասհազարավորներ և հազարավորներ) և այլն։

13. ԻՆՉՊԵՍ ՊԵՏՔ Է ԻՄԱՆԱԼ, ԹԵ ԹՎԻ ՄԵՋ ԻՆՉՔԱՆ

ԵՆ ՏՎՅԱԼ ԿԱՐԳԻ ԲՈԼՈՐ ՄԻԱՎՈՐՆԵՐԸ։ Դիցուք, պահանջվում է իմանալ, թե 56284-ի մեջ ընդամենը քանի հարյուրավոր կա, այսինքն՝ քանի հարյուրավոր է պարունակվում տված թվի տասհազարավորների, հազարավորների և հարյուրավորների մեջ միասին վերցրած։

Հասարակ հարյուրավորները գրվում են աջից հաշված երրորդ տեղում. տված թվի մեջ երրորդ տեղում գրված է 2 թվանշանը, կնշանակի, այդ թվի մեջ կա երկու հասարակ հարյուրավոր։ Դեպի ձախ գտնվող հաջորդ թվանշանը՝ 6-ը ցույց է տալիս հազարներ, բայց յուրաքանչյուր հազարավորի մեջ պարունակվում է 10 հարյուրավոր. կնշանակի 6 հազարավորի մեջ կա 60 հարյուրավոր։ Դեպի ձախ գտնվող հետևյալ թվանշանը՝ 5-ը ցույց է տալիս տասհազարավորները, բայց յուրաքանչյուր տասհազարավոր պարունակում է 10 հազարավոր և, հետևապես, 100 հարյուրավոր, ուրեմն, 5 տասհազարավորների մեջ պարունակվում է 500 հարյուրավոր։ Այսպիսով, տված թվի մեջ պարունակվում է ընդամենը 500 և էլի 60 ու դարձյալ 2, այսինքն 562 հարյուրավոր։

Նույն ձևով կարող ենք իմանալ, որ տված թվում բոլոր տասնյակները 5628 են։

ԿԱՆՈՆ։ Իմանալու համար, թե թվի մեջ տվյալ կարգի բոլոր միավորները քանիսն են, պետք է դեն գցել ստորին կարգերի միավորները նշող բոլոր թվանշանները և կարդալ մնացած թվանշաններով արտահայտված թիվը։

II. ԹՎԱՐԿՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐԲԵՐ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐ

ՀՌՈՄԵԱԿԱՆ ԹՎԱՆՇԱՆՆԵՐ

14. ՀԱՍԿԱՑՈՂՈՒԹՅՈՒՆ ԹՎԱՐԿՈՒԹՅԱՆ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ։ Թվերի անվանման և նշման յուրաքանչյուր ընդհանուր եղանակ կոչվում է **թվարկության սիստեմ**։ Մեր թվարկության սիստեմը կոչվում է **տասնորդական**, որովհետև, ըստ այդ սիստեմի, մի կարգի 10 միավորները կազմում են հետևյալ բարձր կարգի մեկ միավոր։ Ուստի և 10 թիվը կոչվում է թվարկության տասնորդական սիստեմի **հիմք**։ Ըստ այդ սիստեմի՝ յուրաքանչյուր N թիվ պատկերացվում է վերլուծված հասարակ միավորների տասնավորների, հարյուրավորների, հազարավորների և այլն, ընդ որում յուրաքանչյուր կարգի միավորների թիվը փոքր է 10-ից։ Եթե ենթադրենք, որ N թիվը պարունակում է a թվով հասարակ միավորներ, b տասնավորներ,

c հարյուրավորներ, d հազարավորներ և այլն, ապա այդ թիվը հանդիսանում է

$$N=a+b.10+c\cdot 10^2+d\cdot 10^3+\dots$$ գումարը։

Կարելի է պատկերացնել նաև ուրիշ սիստեմներ, որտեղ որպես հիմք ընդունված է որևէ այլ թիվ։ Եթե, օրինակ, որպես հիմք ընդունենք 5 թիվը, ապա կստացվի թվարկության հնգյակային սիստեմ, որի համաձայն մի կարգի 5 միավորները պետք է կազմեն հետևյալ բարձր կարգի մեկ միավոր։ Այսպիսով, ըստ հնգյակային սիստեմի 2-րդ կարգի միավորը պետք է լինի հնգյակը, 3-րդ կարգի միավորը՝ հինգ հնգյակը կամ 5^2, 4-րդ կարգի միավորը՝ 5 անգամ 5-ական հնգյակ, կամ 5^3 և այլն։ Այդ սիստեմի համաձայն N թիվը կպատկերանար այսպես.

$$N=a+b.5+c.5^2+d.5^3+e\cdot 5^4+\dots$$

Որտեղ a, b, c, d, e,... թվերից յուրաքանչյուրը 5-ից պակաս կլիներ։

15. ՏՎԱԾ ՍԻՍՏԵՄՈՎ ԹՎԵՐԸ ՊԱՏԿԵՐԱՑՆԵԼՈՒ ՀԱՄԱՐ ԱՆՀՐԱԺԵՇՏ ԹՎԱՆՇԱՆՆԵՐԻ ԹԻՎԸ։ Թվերը տասնորդական սիստեմով գրավոր պատկերացնելու համար գործածվում են 10-ը տարբեր նիշեր։ Թվարկության ուրիշ սիստեմի համար կպահանջվեր թվանշանների այլ թիվ։ Օրինակ, հնգյակային սիստեմի համար բավական կլինեին հետևյալ հինգ թվանշանները. 1, 2, 3, 4, 0։ Իսկապես, այդ սիստեմով 5 թիվը կներկայացներ 2-րդ կարգի 1 միավոր և, հետևապես, կպատկերացվեր այսպես՝ 10։ 6 թիվը կներկայացներ 2-րդ կարգի 1 միավոր (հնգյակ) և 1-ին կարգի մեկ միավոր և, հետևապես, կպատկերացվեր այսպես — 11 և այլն։ Թվերը 10-ից բարձր հիմունք ունեցող սիստեմով գրելու համար մեր թվանշանները չէին բավականացնի։ Օրինակ, տասներկուական սիստեմի համար անհրաժեշտ կլիներ մտածել հատուկ նիշեր, արտահայտելու 10 և 11 թվերը, որովհետև այդ թվերի համար ունեցած մեր նշումներն այն ժամանակ կարտահայտեին ուրիշ թվեր. 10-ը կներկայացներ 2-րդ կարգի 1 միավորը, այսինքն դյուժին, իսկ 11-ը կնշանակեր 2-րդ կարգի 1 միավոր և 1-ին կարգի մեկ միավոր, այսինքն՝ 13։

16. ԹՎԱՐԿՈՒԹՅԱՆ ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ՍԻՍՏԵՄՈՎ ԳՐՎԱԾ ԹԻՎԸ ՊԱՏԿԵՐԱՑՆԵԼ ՈՒՐԻՇ ՍԻՍՏԵՄՈՎ։ Օրինակի համար ընդունենք, որ 1766 թիվը պետք է արտահայտել հնգյակային սիստեմով՝ 0, 1, 2, 3, 4 հինգ նշանների միջոցով։ Դրա համար նախ իմանանք, թե 1766-ի մեջ 2-րդ կարգի քանի միավոր, այսինքն՝ հնգյակ է պարունակվում։ Պարզվում է, որ 353, ընդ որում մնում է 1-ին կարգի 1 միավոր։ Այժմ իմանանք, թե 353 հնգյակում 3-րդ կարգի քանի միավոր է պարունակվում։ Քանի որ 3-րդ կարգի միավորը պարունակում է 2-րդ կարգի 5 միավոր, ապա, ուրեմն, պետք է 353-ը բաժանել 5-ի վրա։ Բաժանելով կիմանանք, որ 353 հնգյակում պարունակվում է 3-րդ կարգի 70 միավոր և 2-րդ կարգի 3 միավոր։ 3-րդ կարգի 70 միավորը

դարձնում ենք 4-րդ կարգի միավորներ, իսկ այդ վերջիններս՝ 5-րդ կարգի միավորներ և այլն։

```
1766 5
 26  353  5
  16   3  70| 5
   1      20 14 | 5
           0  4   2
```

Այսպիսով գտնում ենք, վոր 1766-ը պարունակում է 5-րդ կարգի 2 միավոր, 4-րդ կարգի 4 միավոր, 2-րդ կարգի 3 միավոր և 1-ին կարգի 1 միավոր, հետևապես 1766-ը հնգյակային սիստեմով կարտահայտվի այսպես՝—24031։

Ասենք, թե ելի պահանջվում է 121380-ը պատկերացնել տասնյերկյակային սիստեմով.

```
121380 | 12
 13      10115| 12
  18       51   842 | 12
   60      35     2   70| 12
    0      11         10   5
```

10-ը թիվը նշանակենք a-ով, իսկ 11-ը b-ով, կգտնենք, վոր տված թիվը կպատկերացվի այսպես. 5a2b0։

17. ԹՎԱՐԿՈՒԹՅԱՆ ՎՈՐԵՎԷ ՍԻՍՏԵՄՈՎ ԳՐՎԱԾ ԹԻՎԸ ՊԱՏԿԵՐԱՑՆԵԼ ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ՍԻՍՏԵՄՈՎ։ Դիցուք, ութնյակային սիստեմով գրված 5623 թիվը պահանջվում է փոխանցել տասնորդական սիստեմի։ Այդ կարելի յե կատարել, հաշվելով հետևյալ գումարը.

$$N=3+2.8+6.8^2+5.8^3=3+16+384+2560=2963։$$

Բայց ավելի հեշտ կլինի այսպես վարվել. 4-րդ կարգի միավորները վերածենք 3-րդ կարգի միավորների, վորի համար 5-ը բազմապատկենք 8-ով (վորովհետև 4-րդ կարգի միավորը պարունակում է ութնյակային սիստեմի 3-րդ կարգի 8 միավոր). ստացված թվին կավելացնենք տվյալ թվում գտնվող 3-րդ կարգի 6 միավորները։ 2-րդ կարգի միավորները վերածենք 1-ին կարգի միավորների. ստացված թվին ավելացնենք տվյալ թվում գտնվող 1-ին կարգի 3 միավորները։ Կստանանք 2963։

```
  5623
  ·8
  ----
 +40
   6
  ----
  46
  ·8
  ----
 +368
    2
  ----
  370
  ·8
  ----
 2960
 +  3
  ----
 2963
```


Դիտողություններ։ 1) Թվարկության տասնորդական սիստեմը տարածված է համարյա ամենուրեք։ Այդ տարածման պատճառը շատերը համարում են այն, վոր յուրաքանչյուր մարդ մանկությունից վարժվում է հաշվել յերկու ձեռքի տասը մատների միջոցով։ Սակայն թվարկության տասնորդական սիստեմը չի հանդիսանում վորպես ամենահարմարը։ Օրինակ, վորոշ տեսակետներից ավելի հարմար կլիներ տասներկուական սիստեմը, վորը, թվեր պատկերացնելու համար մեծ թվով թվանշաններ չպահանջելով, ունի այն կարևոր հատկությունը, վոր այդ սիստեմի հիմքն առանց մնացորդի բաժանվում է 2-ի 3-ի. 4-ի և 6-ի վրա, այնինչ մեր սիստեմի հիմքը բաժանվում է միայն 2-ի և 5-ի վրա։ Հավանական է, վոր նման նկատառումներն են հիմք ծառայել թվարկության վաթսունային սիստեմի, վորը գործածվել է հին Բաբելոնում։ Տեսական հետազոտությունների համար ամենանպատակահարմարն է հանդիսանում յերկյակային սիստեմը, վորը, սակայն գործնական նպատակների համար բոլորովին անհարմար է, քանի վոր այդ սիստեմով նույնիսկ փոքր թիվն արտահայտվում է թվանշանների յերկար շարքով (օրինակ, 70-ն արտահայտվում է այսպես. 1000110)։

2) Մեր կողմից գործածվող թվանշանները և թվերի նշման հենց սիստեմը յեվրոպացիները վերցրել են արաբներից (մոտավորապես XII դարում)։ Ահա թե ինչու այդ թվանշանները կոչվում են արաբական։ Բայց հիմք կա կարծելու, վոր արաբներն էլ իրենց հերթին այդ սիստեմը վերցրել են հնդիկներից։

18. ՀՌՈՄԵԱԿԱՆ ԹՎԱՆՇԱՆՆԵՐ։ Քանի վոր հռոմեական թվանշանները ներկայումս էլ յերբեմն գործածվում են թվեր նշելու համար, ապա օգտակար է ծանոթանալ նրանց։ Հռոմայեցիք թվերը նշելու համար օգտագործում էին միայն հետևյալ յոթը նշանները՝

I=1, V=5, X=10, L=50, C=100, D=500, M=1000։

Թվերը արտահայտելու նրանց յեղանակը էապես տարբերվում էր մերինից։ Մեզ մոտ թվանշանները փոխելով իրենց տեղը փոխում են և իրենց նշանակությունը, իսկ հռոմեական թվագրության մեջ թվերն ամեն տեղ էլ պահպանում են իրենց նշանակությունը։ Յերբ մի քանի հռոմեական թվանշաններ գրված են մի շարքում ապա նրանցով արտահայտված թիվը հավասար է յուրաքանչյուր թվանշանով արտահայտված թվերի գումարին, օրինակ, XXV նշանակում է 10+10+5 գումարը, այսինքն 25. CLXV նշանակում է 100+50+10+5 գումարը, այսինքն 165, և այլն։ Այս կանոնից բացառություն կազմում են միայն հետևյալ 6 թվերը՝

4=IV, 9=IX, 40=XL, 90=XC, 400=CD, 900=CM։

Այս պատկերացումների մեջ ձախ կողմում գտնվող թվանշանի նշանակությունը հանվում է աջ կողմում գտնվողի նշանակությունից: Դրանից հետո հասկանալի կլինեն թվերի հետևյալ պատկերացումները.

$$\mathrm{I}=1,\ \mathrm{II}=2,\ \mathrm{III}=3,\ \mathrm{IV}=4,\ \mathrm{V}=5,\ \mathrm{VI}=6,\ \mathrm{VII}=7,\ \mathrm{VIII}=8,\ \mathrm{IX}=9,\ \mathrm{X}=10,$$
$$\mathrm{XI}=11,\ \mathrm{XII}=12,\ \mathrm{XIV}=14,\ \mathrm{XVIII}=18,\ \mathrm{XIX}=19,\ \mathrm{XX}=20,\ \mathrm{XXIX}=29,$$
$$\mathrm{XLII}=42\ \ \mathrm{LXXXIV}=84,\ \mathrm{XCV}=95\ \ \mathrm{CCC}=300\ \ \mathrm{MCMXXXVII}=1937.$$

Հազարավորների թիվը գրում են այնպես, ինչպես միավորների թիվը, միայն աջ կողմից ներքևում դնում են m տառը (mille—հազար): Օրինակ՝

$$\mathrm{CLXXX}m\mathrm{CCCLXIV}=180\ 364$$

III. ԳՈՒՄԱՐՈՒՄ

19. *ԻՆՉ Է ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ:* Այն միավորները, վորոնցից կազմված են մի քանի թվեր, կարելի յե համախմբել միասին: Այն թիվը, վոր կստացվի այդ համախմբված միավորները հաշվելուց հետո, կոչվում է **գումար**, իսկ այն թվերը, վորոնք համախմբվում են միասին, կոչվում են **գումարելիներ**: Այսպես, 5 լուցկին, 7 լուցկին և 2 լուցկին կարելի յե միացնել և ստանալ 14 լուցկուց կազմված մի հավաք: 14 թիվը յերեք գումարելիների 5-ի, 7-ի, և 2-ի գումարն է: Գումարելիների թիվը կարող է լինել 2, 3 և ավելի:

Գումարելիները կարելի յե դիտել վորպես գումարի մասեր:

Տված մի քանի թվերի միջոցով մի նոր թիվ գտնելը կոչվում է **թվաբանական գործողություն** (կարճության համար մենք ուղղակի կանվանենք **գործողություն**):

Այն գործողությունը, վորով մի քանի թվերից կազմում ենք գումար, կոչվում է այդ թվերի գումարում:

Գումարման նշանն է + (պլյուս). այսպես, յեթե գրված է՝ 5+7+2, ապա այդ նշանակում է 5, 7 և 2 թվերի գումար:

Գումարման գործողությունը միշտ հնարավոր է (ուզած թվերը կարելի յե միացնել մի խմբի մեջ) և միշտ տալիս է միակ արդյունքը:

20. *ԳՈՒՄԱՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ: ԳՈՒՄԱՐԸ ՉԻ ՓՈԽՎՈՒՄ ԳՈՒՄԱՐԵԼԻՆԵՐԻ ԿԱՐԳԻ ՓՈՓՈԽՈՒՄՆԵՐԻՑ:*

Այսպես, 5+7+2 գումարը միշտ հավասար է 14-ի, ինչ կարգով էլ կատարենք գումարումը.

$$5+7+2=2+7+5=7+5+2=14:$$

Այս հատկությունն ընդունված է անվանել **գումարման տեղափոխման օրենք**, վորովհետև այդ օրենքի էությունն այն է, վոր գումարելիները կարելի յե տեղափոխել, առանց փոխելու գումարը: Յերեք գումարելիների համար այդ հատկությունը ընդհանուր ձևով կարելի յե գրել այսպես.

$$a+b+c=a+c+b=b+a+c=b+c+a=c+a+b=c+b+a,$$

վորտեղ տառերի տակ հասկացվում են ուզած թվերը:

2) ԳՈՒՄԱՐԸ ՉԻ ՓՈԽՎԻ, ՅԵԹԵ ԳՈՒՄԱՐԵԼԻՆԵՐԻ ՎՈՐԵՎԷ ԽՈՒՄԲ ՓՈԽԱՐԻՆԵՆՔ ՆՐԱՆՑ ԳՈՒՄԱՐՈՎ:

Օրինակ՝ 5+7+2 գումարը չի փոխվի յեթե 7 և 2 գումարելիները փոխարինենք իրենց գումարով.

$$5+7+2=5+9=14:$$

Այդ հատկությունը կոչվում է **գումարման զուգորդական օրենք**, վորովհետև ըստ այդ օրենքի կարող ենք ուզած գումարելիները զուգորդել (միացնել) մի թվում (մի խմբի մեջ):

Յերեք գումարելիների համար այդ հատկությունն ընդհանուր ձևով կարելի յե գրել այսպես.

$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c),$$

վորտեղ փակագծերով ցույց է տրված, թե ինչ կարգով պետք է կատարել գումարումը. նախ պետք է կատարել փակագծի ներսում նշված գումարումը, ապա փակագծից դուրս նշվածը:

21. *ԻՆՉՊԵՍ ԹՎԻՆ ԱՎԵԼԱՑՆԵԼ ԳՈՒՄԱՐ ՅԵՎ ԳՈՒՄԱՐԻՆ ԹԻՎ:* Գումարի հիմնական հատկություններից կարելի յե յեզրակացնել հետևյալ յերկու կանոնները:

1) ՎՈՐԵՎԷ ԹՎԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ԹՎԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՆ ԱՎԵԼԱՑՆԵԼՈՒ ՀԱՄԱՐ ԿԱՐԵԼԻ ՅԵ ԱՅԴ ԹՎԻՆ ԱՎԵԼԱՑՆԵԼ ՅՈՒՐԱՔԱՆՉՅՈՒՐ ԳՈՒՄԱՐԵԼԻՆ ՄԵԿԸ ՄՅՈՒՍԻՑ ՀԵՏՈ:

Այսպես՝

$$100+(20+7+3)=100+20+7+3$$ [1]:

1) Փակագծերն ( ) այստեղ և հետագայում ցույց են տալիս, վոր փակագծի մեջ յեղած գործողությունները պետք է կատարել ամենից առաջ: Փակագծերի գործածության մասին ավելի մանրամասն տես § 42:

Իսկապես, 2-րդ հատկության (§ 20) հիման վրա գրված հավասարության աջ մասը չի փոփոխվի, յեթե նրա 20, 7 և 3 գումարելիները միացնենք մի խմբի մեջ, բայց այդ կատարելով մենք կստանանք հենց գրված հավասարության ձախ մասը։

2) ԳՈՒՄԱՐԻՆ ՎՈՐԵՎԵ ԹԻՎ ԱՎԵԼԱՑՆԵԼՈՒ ՀԱՄԱՐ ԿԱՐԵԼԻ ՅԵ ԱՅԴ ԹԻՎՆ ԱՎԵԼԱՑՆԵԼ ԳՈՒՄԱՐԵԼԻՆԵՐԻՑ ՎՈՐԵՎԵ ՄԵԿԻՆ, ՄՅՈՒՍՆԵՐԸ ԹՈՂՆԵԼՈՎ ԱՆՓՈՓՈԽ։

Այսպես՝

$$(35+15+20)+10=(35+10)+15+20=$$
$$=35+(15+10)+20=\ldots$$

Այս բոլոր գումարները հավասար են $35+15+20+10$ գումարին, միայն վոմանց մեջ գումարելիները տեղափոխված են և գումարելիներից մի քանիսը միացված են մի խմբի մեջ։ Ուստի, 1) և 2) (§ 20) հատկությունների հիման վրա այդ բոլոր գումարները հավասար են $35+15+20+10$ գումարին և, ուրեմն, իրար հավասար։

22. ՅԵՐԿՈՒ ՄԻԱՆԻՇ ԹՎԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ։ Յերկու միանիշ թվերի գումարը գտնելու համար բավական է նրանցից մեկին ավելացնել մյուսի բոլոր միավորները։ Այսպես, 7-ին ավելացնելով 5 թվի բոլոր միավորները, գտնում ենք նրանց գումարը — 12։

Ամեն տեսակ թվերի գումարումն արագ կատարելու համար անհրաժեշտ է հիշել յերկու միանիշ թվերի գումարից ստացվող բոլոր գումարները։

Դիտողություն։ Քանի վոր զերոն ցույց է տալիս միավորների բացակայությունը, ապա $5+0=5$ (յեթե 5-ին վոչինչ չավելացնենք, ապա կմնա 5-ը) և $0+5=5$ (յեթե միավորներ չենք ունեցել և շարունակել ենք ավելացնել 5 միավոր, ապա և 5 միավոր ել կստացվի)։ Ընդհանրապես, վորևե թիվ զերոյին գումարելիս կամ զերոն վորևե թվի գումարելիս միշտ ել ստացվում է նույն թիվը։

23. ԲԱԶՄԱՆԻՇ ԹԻՎԸ ՄԻԱՆԻՇ ԹՎԻՆ ԳՈՒՄԱՐԵԼԸ։ Դիցուք, պահանջվում է գումարել 37-ը և 8-ը։ Դրա համար 37-ից կառանձնացնենք 7 միավորը և կգումարենք 8-ին, կստանանք 15։ Այդ 15 միավորը կավելացնենք 30-ին. բայց 15-ը միևնույնն

է, ինչ 10 և 5։ 30-ին 10 ավելացնելով կստանանք 40, վորին 5 ել ավելացնելով կստանանք 45։

Կարելի յե և այսպես վարվել։ Նկատելով, վոր 37-ին պետք է 3 ավելացնել՝ 40 ստանալու համար, 8 միավորից կառանձնացնենք 3 միավոր և կավելացնենք 37-ին, այն ժամանակ կստանանք 40 և ելի 5 միավոր, վոր մնացել եր 8-ից, այսինքն, կստանանք 45։

Հարկավոր է վարժվել այդ գործողությունները մտքում կատարելու, և այն ել արագ։

Այդ պարագրաֆում նշված գումարման յերկու յեղանակն ել ներկայացնում են § 21-ում ասված կանոնների կիրառումը, ինչպես այդ յերևում է հետևյալ հավասարություններից.

$$37+8=(30+7)+8=30+(7+8)=30+15=30+(10+5)=$$
$$=(30+10)+5=40+5=45,$$

կամ

$$37+8=37+(3+5)=(37+3)+5=40+5=45։$$

24. ԲԱԶՄԱՆԻՇ ԹՎԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ։ Դիցուք, պահանջվում է գտնել հետևյալ չորս թվերի գումարը. 13653, 22409, 1608 և 346։ Դրա համար նախ կգումարենք բոլոր գումարելիների հասարակ միավորները, հետո նրանց տասնավորները, ապա հարյուրավորները և այլն։ Տարբեր կարգի միավորները չշփոթելու համար տված թվերը կգրենք մեկը մյուսի տակ այնպես, վոր միավորները գտնվեն միավորների տակ, տասնավորները տասնավորների, հարյուրավորները հարյուրավորների տակ և այլն. վերջին գումարելիի տակ կտանենք մի գիծ.

$$\begin{array}{r} 13653 \\ +\;22409 \\ 1608 \\ 346 \\ \hline 38016 \end{array}$$

Գումարելով միավորները՝ կստանանք 26, այսինքն 2 տասնավոր և 6 միավոր, 2 տասնավորը կպահենք մտքում, տրված թվերի տասնավորներին գումարելու համար, իսկ 6-ը կգրենք գծի տակ, գումարելիների միավորների տակ։ Գումարելով տասնավորները (միավորների գումարումից ստացված 2 տասնավորնեգի 5-ու միասին) կստանանք 11 տասնավոր, այսինքն՝ 1 հարյուրավոր և 1 տասնավոր, 1 հարյուրավորը կպահենք մտքում հարյուրավորներին գումարելու համար, իսկ 1 տասնավորը կգրենք գծի տակ տասնավորների տեղում։ Հարյուրավորների գումարումից կստանանք 20 հարյուրավոր, այսինքն, ճիշտ 2 հազար, այդ 2 հազարը կպահենք մտքում, հազարավորներին գումարելու համար, իսկ գծի տակ հարյուրավորների տեղում կգրենք զերո։ Յեվ այսպես շարունակում ենք գործողությունը։

Դիտողություն։ Յեթե վորևե սյունակի թվերը գումարելիս (օրինակ, մեր տված օրինակի մեջ տասնավորների սյունակում) պատահի զերո թվանշանը, ապա նրա վրա ուշադրություն չենք դարձնում, վորովհետև, § 22-ի վերջում արած դիտողության հիման վրա, զերոյի ավելացումից ունեցած թվի միավորները չեն փոփոխում։

25. ԶԵՐՈՆ ԹԻՎ Է։ Տեսանք, վոր գումարման ժամանակ գումարելիների մեջ կարող է զերո պատահել. հետագայում կտեսնենք, վոր զերոյով կարելի կլինի կատարել և ուրիշ թվաբանական գործողություններ։ Ուստի, պայմանավորվենք **զերոն համարելու թիվ** մյուս թվերին հավասար. ակնհայտ է, վոր **զերոն փոքր է մյուս բոլոր թվերից**։

26. ԹԻՎԸ ՄԻ ՔԱՆԻ ՄԻԱՎՈՐՈՎ ՄԵԾԱՑՆԵԼԸ։ Վորևե թիվ մի քանի միավորով մեծացնել նշանակում է այդ թվին ավելացնել այդ մի քանի միավորները։ Յեթե, օրինակ, պահանջվում է 80-ը մեծացնել 25-ով, ապա այդ նշանակում է, վոր 80-ին պետք է ավելացնել 25 (կստանանք 105)։ Այսպիսով, թիվը մի քանի միավորով մեծացնելը կատարվում է գումարման միջոցով։

27. ԳՈՒՄԱՐԻ ՓՈՓՈԽՎԵԼԸ ԳՈՒՄԱՐԵԼԻՆԵՐԻ ՓՈՓՈԽՄԱՆ ՀԵՏԵՎԱՆՔՈՎ։ Քանի վոր գումարն իր մեջ պարունակում է գումարելիների բոլոր միավորները, ապա ակներև է, վոր **յեթե գումարելիներից մեկին ավելացնենք մի քանի միավոր (իսկ մյուս գումարելիները թողնենք անփոփոխ), գումարն էլ կմեծանա նույնքան միավորով։**

Այսպես, $5+8=13$. յեթե առաջին գումարելիին ավելացնենք 4, ապա կստանանք $(5+4)+8=9+8=17$. յեթե յերկրորդ

գումարելիին ավելացնենք 4 (իսկ առաջին գումարելին թողնենք անփոփոխ), ապա կստացվի՝

$$5+(8+4)=5+12=17.$$

Այսպիսով, գումարելիներից մեկին 4 ավելացնելով, գումարը մեծանում է 4 միավորով (քանի վոր 17-ը 13-ից մեծ է 4 միավորով)։

Յեթե վորևէ գումարելիից հանենք մի քանի միավոր (իսկ մյուս գումարելիները թողնենք անփոփոխ), ապա գումարը կփոքրանա նույնքան միավորով։

Յեթե գումարելիներից վորևէ մեկին ավելացնենք մի քանի միավոր, իսկ մյուս գումարելիից հանենք նույնքան միավոր, ապա գումարը կմնա անփոփոխ։

IV. ՀԱՆՈՒՄ

28. ԻՆՉ Է ՀԱՆՈՒՄԸ։ Աշակերտն ուներ 7 տետր. դրանցից 3-ը նա տվեց յեղբորը. իմանալու համար, թե քանի տետր մնաց նրա մոտ, պետք է 7 տետրից վերցնել 3 տետր (կմնա 4 տետր)։

Այն գործողությունը, վորի միջոցով մի թվից հանվում է այնքան միավոր, վորքան միավոր պարունակվում է տված մյուս թվի մեջ, կոչվում է հանում։

Մեր բերած օրինակում 7 թվից պետք է հանել 3-ը, ստացվում է 4 թիվը։

Այն թիվը, վորից հանում են, կոչվում է **նվազելի**. այն թիվը, վորը հանում են, կոչվում է **հանելի**. այն թիվը, վորն ստացվում է հանելուց հետո, կոչվում է **մնացորդ**։ Մնացորդն այլ կերպ կոչվում է **տարբերություն**, վորովհետև նա ցույց է տալիս նվազելիի և հանելիի միջև յեղած տարբերությունը։ Մեր բերած օրինակում նվազելին—7-ն է, հանելին—3-ը և մնացորդը կամ տարբերությունը—4-ը։

Հանման նշանն է — (մինուս), վորը դրվում է նվազելիի (ձախից) և հանելիի (աջից) միջև։

Այսպես, $7-3=4$։

Ակնհայտ է, վոր տված թվից կարելի յե հանել նրանից փոքր կամ նրան հավասար ամեն մի թիվ, բայց վոչ մի թվից չի կարելի հանել նրանից ավելի մեծ թիվ։ Ուստի, հանելին չի կարող ավելի մեծ լինել նվազելիից։

29. ԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ԲԱՂԴԱՏՈՒՄԸ ՀԱՆՄԱՆ ՀԵՏ։ Հանում կատարելիս թվերից մեկը, այն է նվազելին, վերլուծվում է յերկու թվի։ Օրինակ, յեթե 9-ից հանելով 5, գտանք, վոր մնաց 4, ապա նշանակում է՝ մենք 9-ը վերածեցինք յերկու թվի. 5 (հանված միավորները) և 4 (մնացած միավորները)։ Ակնհայտ է, վոր յեթե այդ թվերը միացնենք, ապա կստանանք այն 9-ը թիվը, վորը վերածեցինք. ուրեմն, նվազելին հավասար է հանելիին ավելացրած մնացորդը. այլ կերպ ասած՝ նվազելին գումարն է, իսկ հանելին և մնացորդը—գումարելիները։

Գումարման ժամանակ տված են լինում գումարելիները, վորոնում ենք գումարը. իսկ հանման ժամանակ տված է լինում գումարը և գումարելիներից մեկը, վորոնում ենք մյուս գումարելին։

Ուրեմն, այն թիվը, վորը գումարման ժամանակ վորոնում են, հանման ժամանակ տրվում է, և ընդհակառակը. ուստի ասում են՝ հանումը գումարման հակադարձ գործողություն է։

30. ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ 1) Հանումը կարելի յեր միանգամից սահմանել վորպես գումարման հակադարձ գործողություն, վորով տված գումարով և տված գումարելիով գտնում են մյուս գումարելին։ Սակայն թվաբանության տարրական շարադրանքի հենց սկզբին ավելի պարզ ու դյուրին չի լինում հանումը սահմանել վորպես նվազելիի պակասեցում այնքան, վորքան հանելին է և ապա ցույց տալ հանման և գումարման միջև յեղած առնչությունը (ինչպես այդ արված է § 29-ում)։

2) Հանման գործողությունը միշտ հնարավոր է և տալիս է միակ արդյունքը, յեթե միայն հանելին նվազելուց մեծ չէ։ Յեթե օրինակ, պահանջվում է a-ից հանել b, ապա այդ մենք կարող ենք կատարել՝ a-ից հաջորդաբար մեկը մյուսից հետո հանելով այնքան միավոր, վորքան պարունակվում է b-ի մեջ։ Հանելով մեկ միավոր, մնացորդում կստանանք միակ a—1 թիվը, վորը բնական շարքում անմիջականորեն նախորդում է a թվին. հանելով մյուս միավորը, դարձյալ կստանանք միակ a—1—1 թիվը, վորն անմիջականորեն նախորդում է, a—1 թվին և այլն։ Յեթե b<a, ապա հանելով b միավոր կստանանք բնական շարքի վորևէ (և միայն մեկ) թիվ, վորն և կլինի մնացորդը. յեթե b=a, ապա հանելուց հետո վոչ մի թիվ չի մնա, ուրիշ խոսքով, մնացորդը կլինի զերո. վերջապես, յեթե b>a—ից, ապա հանումն անհնարին է

31. ՄԻԱՆԻՇ ԹՎԻ ՀԱՆՈՒՄԸ։ Առանց դժվարության մի թիվ մյուսից հանելու համար պետք է նախ սովորել մտքում

հանել միանիշ թիվը միանիշ և յերկանիշ թվից։ Վերոնիշյալ տարբերությունը հեշտ է գտնվում գումարման միջոցով։ Օրինակ՝ իմանալու համար, թե ինչի յէ հավասար 15-ն առանց 8-ի, հիշենք, թե վոր թիվն է, վոր 8-ին գումարելիս տալիս է 15. 8-ը և 7-ը կազմում են 15, ուրեմն, 15-ն առանց 8-ի կլինի 7։

Հարկավոր է վարժվել այդ հանումը կատարելու մտքում, և այն էլ արագ։

Դիտողություն։ 7—0=7 (յեթե 7 միավորից վոչինչ չհանենք, ապա կմնա 7 միավոր), ընդհանրապես, զերոն վորևէ թվից հանելիս միշտ ստացվում է հենց այդ նույն թիվը։

8—8=0 (յեթե 8 միավորից հանենք 8 միավոր, ապա վոչինչ չի մնա). ընդհանրապես, յերկու նույնանիշ թվերի տարբերությունը միշտ հավասար է զերոյի։

Զերոյից չի կարելի վոչ մի այլ թիվ հանել, վորովհետև բոլոր մյուս թվերը զերոյից մեծ են։

32. ԲԱԶՄԱՆԻՇ ԹՎԻ ՀԱՆՈՒՄԸ։ Օրինակ, 60072-ից հանենք 7345-ը. թվերը դասավորենք այնպես, ինչպես և գումարման ժամանակ՝

$$\begin{array}{rl} 60072 & \text{նվազելի} \\ -\ 7345 & \text{հանելի} \\ \hline 52727 & \text{մնացորդ} \end{array}$$

Կպահպանենք նույն կարգը, ինչպես և գումարելիս, այսինքն կսկսենք հանել միավորները միավորներից, տասնավորները տասնավորներից և այլն։ 5 միավորը 2 միավորից չի կարելի հանել, դրա համար 7 տասնավորներից վերցնում ենք 1 տասնավոր, վորը պարունակում է 10-ը միավոր դրանք միացնում ենք նվազելիի 2 միավորին. ստացվում է 12 միավոր. դրանցից հանում ենք հանելիի 5 միավորը, մնացորդում ստանում ենք 7 միավոր։ Այժմ անցնում ենք տասնավորներին։ Նվազելիի 7 տասնավորներից 1 տասնավորն արդեն օգտագործել ենք միավորները հանելիս (այդ չմոռանալու համար տասնավորների 7 թվանշանի գլխին դրենք մի կետ) մնում է 6 տասնավոր. դրանցից հանում ենք հանելիի 4 տասնավորը, մնացորդում ստացվում է 2 տասնավոր։ Անցնենք հարյուրավորներին։ Նվազելիի մեջ հարյուրավորներ չկան. դիմում ենք հազարավորներին և տեսնում, որ նվազելիի մեջ հազարավորներ էլ չկան, ուստի անցնում ենք առաջ—դիմում ենք տասը հազարավորներին, որոնց թիվը նվազելիի մեջ 6—է. վերցնում ենք այդ 6 տասը հազարավորներից մեկը (և իբրև նշան 6-ի գլխին դնում կետ) նա պարունակում է 10 հազարավոր. վերցնում ենք այդ հազարավորներից մեկը, նա պարունակում է 10 հարյուրավոր, որոնցից հանում ենք հանելիի 3 հարյուրավորը և մնացորդում ստանում 7 հարյուրավոր։ Մենք դեռ ունենք 9 հազարավոր, նրանցից հանում ենք հանելիի 7 հազարավորը և մնացորդում ստանում 2 հազարավոր։ Վերջապես նվազելիի մնացած 5 տասը հազարավորը անփոփոխ տեղափոխվում է մնացորդի մեջ, քանի որ դրանցից ոչինչ չի հանվում։

Այսպիսով, մնացորդը կազմում է 52727։

Ահա հանման վերաբերյալ էլի օրինակներ.

$$
\begin{array}{r}
\dot{6}0\dot{0}\dot{0}227 \\
-\;4320423 \\
\hline
1679804
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\dot{5}0\dot{0}000 \\
-\;17236 \\
\hline
482764
\end{array}
$$

Ամենից հարմար է հանման գործողությունն սկսել ստորին կարգերից և գնալ դեպի բարձրը, որովհետև այդ ընթացքով կարիք յեղած դեպքում միշտ կարող ենք բարձր կարգից վերցնել 1 միավոր՝ վերածելու ստորին կարգի միավորների։

33. ԻՆՉՊԵՍ ՊԵՏՔ Է ԹՎԻՑ ԳՈՒՄԱՐ ՀԱՆԵԼ ՅԵՎ ԳՈՒՄԱՐԻՑ ԹԻՎ։ Նախորդ պարագրաֆում բազմանիշ թվերը հանելիս միավորները հանում եյինք միավորներից, տասնավորները տասնավորներից և այլն, ոգտվելով հետևյալ կանոններից։

1) Թվից գումար հանելու համար կարելի յե հանել յուրաքանչյուր գումարելին առանձին-առանձին մեկը մյուսից հետո։

Այսպես, 325 թիվը, այսինքն $5+20+300$ գումարը հանելու համար կարելի յե առանձին-առանձին հանել 5, 20 և 300 գումարելիները։

Այս կանոնը ընդհանուր ձևով կարելի յե արտահայտել այսպիսի հավասարությունով.

$$a-(b+c+d+\ldots)=a-b-c-d-\ldots$$

2) Գումարից մի թիվ հանելու համար կարելի յե այդ թիվը հանել որևէ մեկ գումարելիից։

Այսպես՝

$$(30+20)-10=50-10=40,$$

կամ

$$(30+20)-10=(30-10)+20=20+20=40,$$

կամ

$$(30+20)-10=30+(20-10)=30+10=40;$$

Ընդհանրապես

$$(a+b+c+\ldots)-m=(a-m)+b+c+\ldots=$$
$$=a+(b-m)+c+\ldots$$

Հանելին դիտելով որպես հասարակ միավորների, տասնավորների, հարյուրավորների և այլն գումար, մենք նախ առանձին հանում ենք միավորները, հետո տասնավորները, ապա հարյուրավորները և այլն։ Միավորները հանելու համար նվազելին դիտում ենք իբրև կարգերի գումար և հանելիի միավորները հանում ենք այդ գումարի գումարելիներից մեկից, այն է միավորներից։ Յեթե այդ անկարելի յե անել, վերցնում ենք նվազելիի տասնավորներից մեկը, այն վերածելով հասարակ միավորների՝ միացնում ենք նվազելիի միավորներին և ապա հանում հանելիի միավորները։ Յեթե նվազելիի մեջ տասնավորներ չլինեն, վերցնում ենք 1 հարյուրավոր և այն վերածում ենք տասնավորների և այլն։

34. ԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ՍՏՈՒԳՈՒՄԸ։ Համոզվելու համար, որ գործողությունը ճիշտ է կատարված, պետք է այն ստուգել։ Գումարման ստուգման համար սովորաբար գումարելիները գումարում են յերկրորդ անգամ, բայց այս անգամ ոչ այն կարգով, ինչ որ առաջին անգամ, օրինակ, ներքևից վերև։ Յեթե յերկրորդ գումարման ժամանակ նույն թիվն է ստացվում, ապա միանգամայն հավանական է, որ գումարումը ճիշտ է կատարված։

Մյուս կողմից, գումարումը կարելի յե ստուգել և հանման միջոցով. դրա համար պետք է ստացված գումարից հանել գումարելիներից որևէ մեկը, յեթե տարբերությունը հավասար լինի մնացած գումարելիների գումարին, ապա կարելի յե հավանական համարել, որ գործողությունը ճիշտ է կատարված։

35. ՀԱՆՄԱՆ ՍՏՈՒԳՈՒՄԸ ԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ՄԻՋՈՑՈՎ։ Քանի որ նվազելին գումար է, իսկ հանելին և մնացորդը—գումաբելիներ, ապա հանման ստուգման համար բավական է գումարել հանելին և մնացորդը. յեթե ստացված թիվը հավասար է նվազելիին, ապա միանգամայն հավանական է, վոր գործողությունը ճիշտ է կատարված:

Մյուս կողմից, քանի վոր հանելին և մնացորդը գումարելիներ են, իսկ նվազելին նրանց գումարը, և քանի վոր գումարելիների տեղափոխումից գումարը չի փոխվում, ապա հանումը կարելի յե ստուգել և հանման միջոցով. դրա համար պետք է նվազելիից հանել մնացորդը, յեթե ստացվի հանելին, ապա կարելի յե հավանական համարել, վոր գործողությունը ճիշտ է կատարված:

36. ԹԻՎԸ ՄԻ ՔԱՆԻ ՄԻԱՎՈՐՈՎ ՊԱԿԱՍԵՑՆԵԼԸ: Վորևե թիվ մի քանի միավորով պակասեցնել նշանակում է նրանից հանել այդ միավորները: Այսպես, յեթե պահանջվում է 100-ը պակասեցնել 30-ով, ապա այդ նշանակում է, վոր պահանջվում է 100-ից հանել 30 (կստանանք 70):

37. ՅԵՐԿՈՒ ԹՎԵՐԻ ԲԱՂԴԱՏՈՒՄԸ: Ցանկանալով յերկու թիվ բաղդատել իրար հետ, մենք հարց ենք առաջադրում, թե մի թիվը քանի միավորով մեծ է կամ փոքր է մյուսից: Այդ իմանալու համար պետք է մեծ թվից հանել փոքր թիվը: Օրինակ, իմանալու համար, թե 20-ը քանի միավորով փոքր է 35-ից (կամ քանի միավորով 35-ը մեծ է 20-ից), պետք է 35-ից հանել 20-ը. այն ժամանակ կիմանանք, վոր 20-ը 35-ից փոքր է (կամ 35-ը 20-ից մեծ է) 15 միավորով:

38. ՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅԱՆ ՓՈՓՈԽՎԵԼԸ ՏՎԱԾ ԹՎԵՐԻ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ կարելի յե արտածել իբրև գումարի փոփոխության հետևանք, քանի վոր նվազելին գումար է, իսկ հանելին և մնացորդը—գումարելիներ:

Ուստի, յերբ նվազելիին ավելացնենք մի քանի միավոր, ապա մնացորդն էլ կավելանա այդքան միավորով:

Յերբ նվազելուց հանենք մի քանի միավոր, ապա մնացորդն էլ կպակասի այդքան միավորով:

Յերբ հանելիին ավելացնենք մի քանի միավոր, ապա մնացորդն էլ կպակասի այդքան միավորով:

Յերբ հանելիից հանենք մի քանի միավոր, ապա մնացորդն էլ կմեծանա այդքան միավորով:

Օգտակար է հատուկ ուշադրություն դարձնել այն բանի վրա, **վոր մնացորդը չի փոխվի, յերբ նվազելին յեվ հանելին միաժամանակ մեծացնենք կամ փոքրացնենք միևնույն թվով:**

Այսպես՝

$$(11+6)-(3+6)=11-3=8.$$

39. ԻՆՉՊԵՍ ՊԵՏՔ Է ԹՎԻՑ ՀԱՆԵԼ ՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆԸ: Դիցուք, պահանջվում է 30-ից հանել 12—8 տարբերությունը: Փոխանակ սկզբից այդ տարբերությունը գտնելու (վորը կլինի 4) և ապա 30-ից հանելու (կստանանք 26), կարող ենք վարվել այսպես՝ 8-ով կմեծացնենք թե 30 նվազելին և թե 12—8 հանելին, այն ժամանակ 30-ի փոխարեն կունենանք 38, իսկ 12—8 տարբերության փոխարեն կստանանք 12: Այժմ 38-ից հանենք 12, կստանանք 26: Այդ էլ հենց կլինի վորոնելի թիվը, վորովհետև մենք նվազելին և հանելին մեծացրինք միևնույն թվով, վորից տարբերությունը չի փոխվի:

Կարելի յե վարվել և այսպես. 30-ից կհանենք վոչ թե 12-ը առանց 8-ի, այլ ուղղակի—12 (կստանանք 18): Բայց մենք հանեցինք 8-ով ավելի, քան պահանջվում էր, վորից մնացորդը փոքրացավ 8 միավորով. նշանակում է, յեթե 18-ը մեծացնենք 8-ով, ապա կգտնենք վորոնելի մնացորդը—26: Այսպիսով.

տարբերությունը հանելու համար կարելի յե ավելացնել հանելին յեվ ապա հանել նվազելին, կամ թե հանել նվազելին[1]), ապա ավելացնել հանելին:

Ընդհանուր ձևով այդ կանոնը կարելի յե արտահայտել այսպիսի հավասարություններով.

$$a-(b-c)=a+c-b;\ a-(b-c)=a-b+c.$$

V. ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅԱՆ ՆՇԱՆՆԵՐԸ: ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅԱՆ ՅԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅԱՆ ՆՇԱՆՆԵՐԸ: ՓԱԿԱԳԾԵՐ

40. ՆՇԱՆՆԵՐԸ: Խնդիրներ լուծելիս յերբեմն կարիք է լինում առանց իսկապես գործողություններ կատարելու՝ միայն նշաններով ցույց տալ, թե տված թվերի նկատմամբ ինչ գործողություններ պիտի կատարել: Ընդունենք, թե պետք է ցույց տալ,

[1]) Յեթե այդ հնարավոր է, այսինքն յեթե նվազելին մեծ չէ այն թվից, վորից պետք է հանել տարբերությունը:

վոր 10, 15 և 20 թվերը պահանջվում է գումարել։ Այն ժամանակ տված գումարելիները գրում են մի տողում և նրանց մեջ դնում գումարման նշան՝ 10+15+20։

Յեթե պետք է ցույց տալ, վոր մի թվից պահանջվում է հանել մյուսը, ապա նվազելին և հանելին գրում են մի տողում և նրանց մեջ դնում—նշանը։ Այսպես, 10—8 արտահայտությունը ցույց է տալիս, վոր 10-ից պետք է հանել 8-ը։

10+15+20 արտահայտությունը կարդացվում է այսպես. 10 գումարած 15, գումարած 20, կամ թե 10-ի, 15-ի և 20-ի գումարը։ 10—8 արտահայտությունը կարդացվում է այսպես՝ 10-ից հանած 8 կամ թե 10-ի և 8-ի տարբերությունը։

Գործածվում են նաև =, > և < նշանները, վորոնցից մենք արդեն ոգտվել ենք։ Առաջինը կոչվում է հավասարության նշան և փոխարինում է «հավասար է» բառին, մյուս յերկուսը կոչվում են անհավասարության նշաններ և ցույց տալիս՝ > նշանը «մեծ է», իսկ < նշանը—«փոքր է». որինակ, 7+8=15, 7+8>10 և 7+8<20 արտահայտությունները կարդացվում են այսպես. 7 գումարած 8 հավասար է 15-ի, 7 գումարած 8 մեծ է 10-ից, 7+8 փոքր է 20-ից։ Անհրաժեշտ է հիշել, վոր > և < նշանները իրենց սուր անկյունով ուղղված են դեպի փոքր թիվը։

Պատահում են նաև ≠ (հավասար չէ), ≦ (փոքր է կամ հավասար), ≧ (մեծ է կամ հավասար) նշանները։

41. ՓԱԿԱԳԾԵՐ։ ԲԱՆԱՁԵՎ։ Խնդիրներ լուծելիս շատ ոգտակար է նախքան գործողությունները կատարելը ցույց տալ, թե տված թվերով ինչ գործողություններ պիտի կատարել և ինչ հաջորդականությամբ, առաջադրված հարցի պատասխանը ստանալու համար։ Ընդունենք, որինակ, վորևէ խնդիր լուծելու համար նախ պետք է գումարել 35-ը և 20-ը, ապա այդ գումարը հանել 200-ից։ Այդ ցույց տալու համար գրում են այսպես.

$$200-(35+20)\text{։}$$

Այստեղ փակագծերը, վորոնք դրված են—նշանից հետո, ցույց են տալիս, վոր 200-ից պետք է հանել 35+20 գումարը, այսինքն 55։

Յերբեմն այն արտահայտությունը, վոր փակագծերի մեջ է առնված, կարելի է լինում մտցնել նոր փակագծերի մեջ, այդպիսի դեպքում գործածում են տարբեր ձևի փակագծեր, նրանց իրարից տարբերելու համար, որինակ՝

$$100+\{160-[60-(7+8)]\}$$

Այս արտահայտությունը նշանակում է, 7-ին գումարել 8 (կստանանք 15). ստացված գումարը (15) հանել 60-ից (կստանանք 45). գտած թիվը (45) հանել 160-ից (կստանանք 115). ստացված թիվը գումարել 100-ին (կստանանք 215)։ Ըստ վորում գործողությունների հաջորդականությունը յենթադրվում է այնպես, վոր նախ կատարվում է ամենաներսի փակագծերում նշված գործողությունը և այլն։

Նկատենք, վոր հաջորդական գումարումներն ու հանումները նշանակելիս, այսինքն, յերբ գործողությունները պետք է կատարվեն այն կարգով, ինչպես վոր գրված են, սովորաբար փակագծեր չեն դրվում։ Այսպես, յեթե գրված է

$$20-2+4-5,$$

ապա դա նշանակում է նույնն, ինչ և

$$[(20-2)+4]-5,$$

այսինքն, վոր 20-ից հանվում է 2, ստացված տարբերությանն ավելացվում է 4 և այդ գումարից հանվում է 5։

Այն արտահայտությունը, վորը ցույց է տալիս, թե տված թվերով ինչ գործողություններ և ինչ կարգով պետք է կատարել՝ վորոնելի թիվն ստանալու համար, կոչվում է բանաձև։

Հաշվել բանաձևը—նշանակում է գտնել այն թիվը, վորը կստացվի բանաձևի մեջ նշված բոլոր գործողությունները կատարելուց հետո։

VI. ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄ

ԽՆԴԻՐ։ Գնեցին 6 քանոն, յուրաքանչյուրը 85-ական կոպեկով։ Ինչքա՞ն վճարեցին բոլոր քանոններին։

Այս խնդիրները լուծելու համար պետք է գտնենք 6 իրար հավասար գումարելիների գումարը՝

$$85+85+85+85+85+85=510\ (=5\ ռ.\ 10\ կոպ.)\text{։}$$

Մեր խնդրում այդ գումարը գտնում ենք սովորական գումարման միջոցով։ Բայց յերբ հավասար գումարելիների թիվը մեծ է, գումարման միջոցով գումարը գտնում է հոգնեցուցիչ։

Բայց քանի վոր հավասար գումարելիներ գումարելը շատ հաճախ է պատահում, դրա համար թվաբանությունը մշակում է այդ գումարները գտնելու ավելի արագ յեղանակներ։

Յերբ կատարվում է հավասար գումարելիների գումարում, այսինքն, յերբ միևնույն թիվը վորպես գումարելի կրկնվում է մի քանի անգամ, ապա ասում են, վոր այդ թիվը բազմապատկվում է (վերցվում է շատ անգամ)։ Յերբ նա կրկնվում է 6 անգամ, ասում են, վոր բազմապատկվում է 6-ով, յեթե կրկնվում է 20 անգամ, ապա ասում են, վոր նա բազմապատկվում է 20-ով և այլն։

42. ԻՆՉ Է ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ։ Բազմապատկում կոչվում է հավասար գումարելիների գումարումը։

Ըստ վորում այն թիվը, վորը կրկնվում է վորպես գումարելի, կոչվում է բազմապատկելի (նա բազմապատկվում է), իսկ այն թիվը, վորը ցույց է տալիս, թե քանի այդպիսի հավասար գումարելիներ է վերցվում, կոչվում է բազմապատկիչ։

Բազմապատկումից հետո ստացված թիվը կոչվում է արտադրյալ։ Օրինակ, յերբ 85-ը բազմապատկվում է 6-ով, ուրեմն 85-ը բազմապատկելին է, 6-ը—բազմապատկիչը, իսկ բազմապատկելուց հետո ստացված 510 թիվը — արտադրյալը։ Բազմապատկելին և բազմապատկիչը միաժամանակ կոչվում են արտադրիչներ։

Ընդունված է բազմապատկումը նշել առանձին նշանով։ Յեթե, օրինակ, 85-ը պետք է բազմապատկել 6-ով, ապա գրում են այսպես՝ 85.6 այսինքն գրում են բազմապատկելին, նրանից աջ դնում են բազմապատկման նշանը (կետ), իսկ նշանից աջ՝ բազմապատկիչը։ Այդպիսի նշանակումը փոխարինում է $85+85+85+85+85+85$ գումարին։ Յեթե արտադրյալը գտնված է, ապա կարելի յե գրել $85.6=510$[1]) հավասարությունը։

Այս հավասարությունը կարելի յե կարդալ տարբեր ձևով.

---

1) Կետի փոխարեն վորպես բազմապատկման նշան գործածվում է նաև թեք խաչը (×)։

6 հավասար գումարելիների գումարը, գումարելիներ, վորոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է 85-ի, կազմում է 510.

85-ը բազմապատկած 6-ով, կազմում է 510.

85-ի և 6-ի արտադրյալը հավասար է 510ի-։

Դիտողություններ. 1) Քանի վոր բազմապատկումը գումարման մասնավոր դեպքն է, ապա այն միշտ հնարավոր է կատարել և տվյալ արտադրիչների դեպքում տալիս է միակ արդյունքը։

2) Յերբ արտադրիչները նշանակված են տառերով, ապա նրանց բազմապատկումը հաճախ նշվում է առանց վորևե նշանի (ուղղակի արտադրիչները զետեղում են իրար մոտ)։ Այսպես, յեթե գրված է ab, ապա այդ նշանակում է, վոր a թիվը բազմապատկվում է b թվով։ Նույնպես վոչ մի նշան չեն դնում, յեթե արտադրիչներից միայն մեկն է նշանակված տառով, օրինակ, $5a$։

3) Բազմապատկելին կարող է նշել ուզած անվան միավորները, օրինակ մետրներ ռուբլիներ, ժամեր և այլն։ Արտադրյալը պետք է ցույց տա այն նույն անվան միավորները, ինչ վոր բազմապատկելին։ Այսպես, յեթե 7-ը ռուբլին բազմապատկվում է 4-ով, ապա ստացվում է 28 ռուբլի։

Բազմապատկիչը, նշելով, թե քանի միատեսակ գումարելիներ է վերցրած, անուն չունի. այսպես, կարելի յե 7 ռուբլին բազմապատկել 4-ով, բայց չի կարելի բազմապատկել 4 ռուբլով կամ 4 մետրով։ Կիրառական գիտությունների մեջ (օրինակ, ֆիզիկայի մեջ) հաճախ իրարով բազմապատկվում են անվանական թվերը ընդ վորում արտադրյալի անունը դիտվում է վորպես արտադրիչների անունների արտադրյալ։

43. ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԱՌԱՆՁՆԱՀԱՏՈՒԿ ԴԵՊՔԵՐԸ։ 1) Յերբ բազմապատկելին միավոր է, ապա արտադրյալը հավասար է բազմապատկիչին, այսպես, $1.5=5$, վորովհետև $1+1+1+1+1$ գումարը կազմում է 5։

2) Յերբ բազմապատկելին զերո յե, ապա արտադրյալն էլ հավասար է զերոյի։ Օրինակ, $0.4=0$, վորովհետև $0+0+0+0$ գումարը, ինչպես արդեն պայմանավորվել ենք (§ 24), պետք է ընդունել հավասար զերոյի։

3) Յերբ բազմապատկիչը միավոր է, ապա արտադրյալը ընդունվում է հավասար բազմապատկելիին. օրինակ, $5.1=5$ (յեթե 5-ը վերցնենք 1 անգամ կստանանք 5)։

4) Յերբ բազմապատկիչը զերո յե, ապա արտադրյալն ընդունվում է հավասար զերոյի։ Օրինակ, $5.0=0$ (յեթե 5-ը վոչ մի անգամ վերցնենք, ապա վոչինչ չենք ստանա)։

44. ԹԻՎԸ ՄԻ ՔԱՆԻ ԱՆԳԱՄ ՄԵԾԱՑՆԵԼԸ։ Թիվը 2 անգամ, 3 անգամ, 4 անգամ և ավելի անգամ մեծացնել, նշանա-

կում է կազմել տված թվին հավասար յերկու, յերեք, չորս և այլն գումարելիների գումարը։ Օրինակ, 10-ը 5 անգամ մեծացնել նշանակում է վերցնել 5 գումարելիներ, վորոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է 10-ի. գումարը, այսինքն, 10-ը բազմապատկել 5-ով։ Այսպիսով, թիվը մի քանի անգամ մեծացնելը կատարվում է բազմապատկման միջոցով (մինչդեռ թվի մեծացումը վորևէ թվով կատարվում է գումարման միջոցով)։

45. *ԱՐՏԱԴՐԻՉՆԵՐԻ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒՄԻՑ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ ՉԻ ՓՈԽՎՈՒՄ։* Դիցուք, ցանկանում ենք հաշվել այստեղ բերված գծիկները՝

I I I I I I I
I I I I I I I
I I I I I I I

Առաջին տողում գծիկները 7 հատ են, յերկրորդում և յերրորդում նույնպես 7-ական, ուրեմն, բոլոր գծիկները կլինեն 7+7+7, այսինքն 7.3։ Բայց նույն գծիկները կարելի յե հաշվել ուղղաձիգ սյունակներով. առաջին սյունակում 3 գծիկներ են, յերկրորդում՝ 3, յերրորդում 3 և այլն. քանի վոր սյունակների թիվը 7 է, ապա գծիկները կլինեն 3+3+3+3+3+3+3, այսինքն, 3.7։ Բայց գծիկների թիվը կախված չէ այն բանից, թե մենք ինչ կարգով ենք հաշվում, ուրեմն, 7.3=3.7։

Նույն ձևով կարելի յե համոզվել, վոր 8.5=5.8, 20.15=15.20 և այլն։ Ընդհանրապես.

Արտադրյալը չի փոխվում յերբ բազմապատկելին տեղափոխում ենք բազմապատկիչի տեղը, իսկ բազմապատկիչը—բազմապատկելիի տեղը։

Այս հատկությունը կոչվում է **բազմապատկման տեղափոխման օրենք**։ Ընդհանուր ձևով այդ կարելի յե արտահայտել․

$$ab=ba$$

հավասարությունով։

Դիտողություն. Բազմապատկման այդ հատկությունն ունի այն ժամանակ, յերբ բազմապատկիչը միավոր է, կամ զերո, այսպես, 1.5=5 և 5.1=5, 0.4=0 և 4.0=0։

46. *ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ԱՂՅՈՒՍԱԿԸ։* Ուզած թվերի բազմապատկումն արագ կատարել կարողանալու համար պետք է,

ենել **միանիշ** թվերի բոլոր արտադրյալները։ Դրա համար կազմում են (գումարման միջոցով) այսպես կոչված **բազմապատկման աղյուսակը** և այն անգիր սովորում։

47. *ԱՅՆ ԿԱՐԳԸ, ՎՈՐՈՎ ՊԵՏՔ Է ՔՆՆԱՐԿԵԼ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ։*

Մենք կնշենք, թե ինչպես է կատարվում բազմապատկումը, ինչ հաջորդականությամբ.

1) բազմանիշ թվի բազմապատկումը միանիշ թվով.

2) ուզած թվի բազմապատկումն այնպիսի թվով, վորն արտահայտվում է 1 թվանշանով և մեկ կամ մի քանի զերոներով.

3) ուզած թվի բազմապատկումն այնպիսի թվով, վորն արտահայտվում է վորևէ իմաստավոր թվանշանով և մեկ կամ մի քանի զերոներով.

4) բազմանիշ թվի բազմապատկումը բազմանիշ թվով.

5) զերոներով վերջացող թվերի բազմապատկումը։

48. *ԲԱԶՄԱՆԻՇ ԹՎԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ ՄԻԱՆԻՇ ԹՎՈՎ։* Դիցուք, պահանջվում է 846-ը բազմապատկել 5-ով։ Ընդունված է գործողությունը դասավորել այսպես՝

$$\begin{array}{r}846\\ \cdot\ 5\\ 4230,\end{array}$$

այսինքն, գրում են բազմապատկելին, նրա տակ բազմապատկիչը. բազմապատկչի տակ քաշում են գծիկ։ Գծիկի տակ գրում են արտադրյալի թվանշանները նույն կարգով, ինչ կարգով վոր ստացվում են դրանք։

846-ը բազմապատկել 5-ով, նշանակում է գումարել 5 թիվ, վորոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է 846-ի։ Դրա համար բավական է նախ վերցնել 5 անգամ 6-ական միավոր, ապա 5 անգամ 4-ական տասնավոր և վերջապես 5 անգամ 8-ական հարյուրավոր։

Ամեն անգամ արտադրյալը կգտնենք բազմապատկման աղյուսակով։

5 անգամ 6-ական միավոր=30 միավորի, այսինքն, 3 տասնավորի, գծիկի տակ միավորների տեղը կգրենք զերո, իսկ 3 տասնավորը մտքում կպահենք. 5 անգամ 4-ական տասնավոր=20 տասնավորի, 3 տասնավոր էլ=23 տասնավորի։

այսինքն, 2 հարյուրավորի և 3 տասնավորի։ Գծիկի տակ տասնավորների տեղը կգրենք 3, իսկ 2 հարյուրավորները մտքում կպահենք։

5 անգամ 8-ական հարյուրավոր=40 հարյուրավորի, ևս 2 հարյուրավոր=42 հարյուրավոր, գծիկի տակ կգրենք 42 հարյուրավոր, այսինքն, 4 հազարավոր և 2 հարյուրավոր։

Այսպիսով, 846-ի և 5-ի արտադրյալը դառնում է հավասար 4230-ի։

49. ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄ ԱՅՆՊԻՍԻ ԹՎՈՎ, ՎՈՐՆ ԱՐՏԱՀԱՅՏՎՈՒՄ Է ՄԻԱՎՈՐՈՎ ՅԵՎ ՄԵԿ ԿԱՄ ՄԻ ՔԱՆԻ ԶԵՐՈՆԵՐՈՎ։ Դիցուք, թե պահանջվում է 358-ը բազմապատկել 10-ով, այսինքն, գումարել 10 այնպիսի թվեր, վորոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է 358-ի։ Յեթե 10 անգամ վերցնենք մեկական միավոր, կստացվի 1 տասնավոր. կնշանակի, յեթե 10 անգամ վերցնենք 358-ական միավոր, կստացվի, 358 տասնավոր, վորը կազմում է 3580 միավոր։ Վերցնենք մի ուրիշ որինակ ևս՝ 296 1000։

Մեկ միավորը, վորպես գումարելի կրկնված 1000 անգամ, կազմում է 1 հազար. հետևաբար, 296 միավորը, կրկնված 1000 անգամ, կազմում է 296 հազար, վորը գրվում է այսպես. 296 000։

Կանոն։ Ուզած թիվը մեկով յեվ զերոներով արտահայտվող թվով բազմապատկելու համար բավական է միայն բազմապատկելիին աջից կցագրել այնքան զերո, վորքան զերո կա բազմապատկիչի մեջ։

50. ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄ ԱՅՆՊԻՍԻ ԹՎՈՎ, ՎՈՐՆ ԱՐՏԱՀԱՅՏՎՈՒՄ Է ՎՈՐԵՎԷ ԻՄԱՍՏԱՎՈՐ ԹՎՈՎ ՄԵԿ ԿԱՄ ՄԻ ՔԱՆԻ ԶԵՐՈՆԵՐՈՎ։ Ասենք, թե պահանջվում է 248-ը բազմապատկել 30-ով, այսինքն, գումարել 30 միատեսակ գումարելիներ, վորոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է 248-ի։ Յենթադրենք, վոր այդ 30 գումարելիները միացված են 10-ը միանման խմբերի մեջ, յուրաքանչյուրում 3-ական գումարելի.

248	248	248	248	248	248	248	248	243	248
248	248	248	248	248	248	248	248	248	248
248	248	248	248	248	248	248	248	248	248
744	744	744	744	744	744	744	744	744	744

Այսպիսով, մենք կարող ենք վերցնել 3 անգամ 248-ական, և այդ գործողության արդյունքը (744 թիվը) բազմապատկել 10-ով։ Ուրիշ խոսքով, վորևէ թիվ 30-ով բազմապատկելու համար բավական է այդ թիվը բազմապատկել 3-ով և ստացված արտադրյալը բազմապատկել 10-ով, (վորի համար ստացված թվին աջից կցագրել մեկ զերո).

248.3=744, 744.10=7440։

Վերցնենք մի ուրիշ օրինակ ևս՝ 895.400։

Այս որինակում պահանջվում է գումարել 400 թիվ, վորոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է 895-ի։

400 գումարելիները կարելի յե միացնել 100 խմբում, յուրաքանչյուրը 4-ական գումարելիներով։ Իմանալու համար, թե այդ խմբերից մեկում քանի միավոր կա, պետք է 895-ը բազմապատկել 4-ով (կստանանք 3580). այնուհետև իմանալու համար, թե քանի միավոր կա բոլոր խմբերում, պետք է 3580-ը բազմապատկել 100-ով (վորի համար բավական է 3580 թվին աջից կցագրել յերկու զերո)։

Կանոն։ Ուզած թիվը վորևէ իմաստավոր թվանշանով յեվ զերոներով արտահայտվող թվով բազմապատկելու համար բավական է բազմապատկելին բազմապատկել այդ իմաստավոր թվով յեվ ստացված արտադրյալին աջից կցագրել այնքան զերո, վորքան զերո կա բազմապատկիչի մեջ։

51. ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄ ԲԱԶՄԱՆԻՇ ԹՎՈՎ։ Դիցուք, թե պահանջվում է կատարել հետևյալ բազմապատկումը՝

3826.472,

այսինքն, գումարել 472 միատեսակ թվերը, վորոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է 3826-ի։ Դրա համար բավական է նախ գումարել 2 այդպիսի թվեր, հետո էլ 70, ապա էլի 400, և վերջապես, ստացված բոլոր գումարները միացնել, այսինքն, պահանջվում է 3826 թիվը վորպես գումարելի կրկնել 472 անգամ։ Դրա համար բավական է 3826-ը վորպես գումարելի կրկնել 2 անգամ, հետո 70 անգամ, ապա 400 անգամ և ստացված գումարելիները միացնել, այլ խոսքով, բավական է 3826-ը բազմապատկել 2-ով, հետո 70-ով, ապա 400-ով և ստացված արտադրյալները գումարել։

Գործողությունը կդասավորենք այսպես. կգրենք բազմապատկելին, նրա տակ բազմապատկիչը և վերջինիս տակ կքաշենք մի գիծ։

$$\begin{array}{r} 3826\\ \cdot\ 472 \\ \hline 7652\\ 267820\\ 1530400\\ \hline 1805872\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} 3826\\ \cdot\ 472\\ \hline 7652\\ 26782\\ 15304\\ \hline 1805872\end{array}$$

Բազմապատկելին բազմապատկում ենք 2-ով և ստացված արտադրյալը գրում գծի տակ. դա կլինի առաջին մասնակի արտադրյալը (այն է 7652)։

Բազմապատկելին բազմապատկում ենք 70-ով։ Դրա համար բավական է բազմապատկելին բազմապատկել 7-ով և արտադրյալին աջից կցագրել զերո. ուստի զերոն գրում ենք առաջին մասնակի արտադրյալի միավորների տակ, իսկ այն թվանշանները, որ ստացվում են բազմապատկելին 7-ով բազմապատկելուց, գրում ենք նրանց ստացման կարգով առաջին մասնակի արտադրյալի տասնավորների, հարյուրավորների և մյուս կարգերի թվանշանների տակ։ Դա կլինի երկրորդ մասնակի արտադրյալը (267820)։

Բազմապատկելին բազմապատկում ենք 400-ով։ Դրա համար բավական է 3826-ը բազմապատկել 4-ով և արտադրյալին աջից կցագրել երկու զերո։ Այդ երկու զերոները գրում ենք երկրորդ մասնակի արտադրյալի միավորների և տասնավորների տակ, իսկ այն թվանշանները, որոնք ստացվում են բազմապատկելին 4-ով բազմապատկելուց, գրում ենք հաջորդաբար երկրորդ մասնակի արտադրյալի հարյուրավորների, հազարավորների և մյուս կարգերի թվանշանների տակ։ Այն ժամանակ ստանում ենք երրորդ մասնակի արտադրյալը (1530400)։

Վերջին մասնակի արտադրյալի տակ գիծ ենք քաշում և գումարում բոլորը. ստանում ենք լրիվ արտադրյալը։

Գրության կրճատման համար զերոները, որ ցույց ենք

տվել թավ նիշերով, չեն գրում, բայց պետք է հիշել միայն, որ բազմապատկելին բազմապատկիչի տասնավորներով բազմապատկելիս, պետք է ստացված առաջին թվանշանը գրել առաջին մասնակի արտադրյալի տասնավորների տակ, բազմապատկելին բազմապատկելով բազմապատկիչի հարյուրավորների թվանշանով, ստացված առաջին թվանշանը գրում ենք նախորդ մասնակի արտադրյալների հարյուրավորների տակ և այլն։

Դիտողություններ։ 1) Եթե բազմապատկիչի թվանշանների մեջ կա միավոր, ապա այդ թվով բազմապատկելիս պետք է հիշել, որ երբ բազմապատկիչը միավոր է, ապա արտադրյալը հավասար է բազմապատկելիին։

2) Երբ բազմապատկիչի մեջ պատահում են զերոներ, ապա դրանցով չեն բազմապատկում, այլ ուղղակի բազմապատկում են բազմապատկիչի հետևյալ իմաստավոր թվով։ Օրինակ՝

$$\begin{array}{r} 470827\\ \cdot\ 60013\\ \hline 1412481\\ 470827\\ 2824962\\ \hline 28255740751\end{array}$$

Վերջին մասնակի արտադրյալը, որը ստացվում է բազմապատկելին 6 տասհազարավորով բազմապատկելուց, իհարկե գրվում է այնպես, որ նրա միավորների թվանշանը (2) լինի տասհազարավորների կարգում։

3) Եթե բազմապատկիչի մեջ ավելի թվանշաններ կան, քան բազմապատկելիի մեջ, ապա մասնակի արտադրյալների թիվը պակասեցնելու համար ավելի լավ է բազմապատկիչը վերցնել որպես բազմապատկելի, իսկ բազմապատկելին՝ որպես բազմապատկիչ։ Օրինակ, 378.27468 արտադրյալը գտնելու համար 27468-ը բազմապատկում են 378-ով։

52. ԶԵՐՈՆԵՐՈՎ ՎԵՐՋԱՑՈՂ ԹՎԵՐԻ ԿՐՃԱՏ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ։ Նախ վերցնենք մի օրինակ, որտեղ միայն բազմապատկելին է վերջանում զերոներով.

$$2700.15։$$

2700-ը բազմապատկել 15-ով նշանակում է գումարել 15 թիվ, որոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է 2700-ի։ Եթե այդ գումարը սկսենք գտնել սովորական գումարման միջոցով,

$$+\left.\begin{array}{r}2700\\2700\\\cdots\\\cdots\\\cdots\\\cdots\\2700\end{array}\right\}\text{15 անգամ}$$
$$\overline{00}$$

ապա, ինչպես ակնհայտ է, գումարելիների զրոները կանցնեն գումարի մեջ և բավական կլինի 15 անգամ վերցնել 27-ական հարյուրավոր։ Ուրեմն, 2700-ը 15-ով բազմապատկելու համար բավական է 27-ը բազմապատկել 15-ով և արտադրյալին կցագրել երկու զրո։

Ամենահարմարն է գործողությունը դասավորել այսպես՝

$$\begin{array}{r}2700\\ \cdot 15\\ \hline 135\\ 27\\ \hline 40500,\end{array}$$

այսինքն բազմապատկիչը գրվում է այնպես, որ բազմապատկելիի զրոները գտնվեն բազմապատկիչի աջ կողմում, ապա կատարում են բազմապատկումը, ուշադրություն չդարձնելով բազմապատկելիի զրոների վրա, իսկ արտադրյալին աջից կցագրում են զրոները։

Այժմ վերցնենք մի օրինակ, որտեղ միայն բազմապատկիչն է վերջանում զրոյով՝

358.23 000։

Այդ նշանակում է, որ պետք է գումարել 23 000 թիվ, որոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է 358-ի։ Բայց 23000 գումարելիները կարելի է համախմբել 1000 հավասար խմբերում, յուրաքանչյուրում 23-ական գումարելի։ Իմանալու համար, թե քանի միավոր կա յուրաքանչյուր խմբում, պետք է 358-ը բազմապատկել 23-ով, իսկ բոլոր խմբերի մեջ եղած միավորների թիվը իմանալու համար պետք է մի խմբում եղած միավորների թիվը բազմապատկել 1000-ով (որի համար բավական է այդ թվին աջից կցագրել 3 զրո)։ Գործողությունը սովորաբար դասավորում են այսպես՝

$$\begin{array}{l}358\\ .23000\\ \hline 1\,74\\ 716\\ \hline 8234000\end{array}$$

Վերջապես քննարկենք մի օրինակ, որտեղ տված երկու թվերն էլ վերջանում են զրոներով։

57 000.3200։

57 000-ը որևէ թվով բազմապատկելու համար պետք է 57-ը բազմապատկել այդ թվով և արտադրյալին կցագրել երեք զրո։ Բայց 57-ը 3200-ով բազմապատկելու համար պետք է 57-ը բազմապատկել 32-ով և արտադրյալին կցագրել երկու զրո։ Ուստի.

Երբ բազմապատկելին և բազմապատկիչը վերջանում են զրոներով, բազմապատկումը կատարում են, ուշադրություն չդարձնելով զրոների վրա և արտադրյալին կցագրվում է այնքան զրո, որքան զրո կա բազմապատկելիի և բազմապատկիչի մեջ միասին վերցրած։

Գործողությունը դասավորում են այսպես.

$$\begin{array}{l}57000\\ \cdot 3200\\ \hline 114\\ 171\\ \hline 182400000\end{array}$$

53. ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԻ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՐՏԱԴՐԻՉՆԵՐԻ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏԵՎԱՆՔՈՎ

1) Եթե բազմապատկիչը մեծացնենք մի քանի անգամ, ապա արտադրյալն էլ կմեծանա այդքան անգամ։

Այսպես, եթե

15.3=45

օրինակի մեջ բազմապատկիչը մեծացնենք, յենթադրենք, 4 անգամ, ապա կստանանք $15 \cdot 12=180$ արտադրյալը։ Նոր արտադրյալը նախորդից մեծ է 4 անգամ։ Այդպես էլ պետք է լինի՝ վորովհետև առաջին արտադրյալը յերեք գումարելիների՝

$15+15+15$-ի գումարն է,

իսկ նոր արտադրյալը—12 այդպիսի գումարելիների գումարը՝

$$15+15+15+15+15+15+15+15+15+15+15+15։$$

Օգտվելով գումարման զուգորդման օրենքից, կարող ենք վերջին գումարում յուրաքանչյուր յերեք գումարելին միացնել մի խմբի մեջ.

$$(15+15+15)+(15+15+15)+(15+15+15)+(15+15+15)$$

և այն ժամանակ կպարզվի, վոր նոր արտադրյալը հավասար է 4 թվերի գումարին, վորոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է նախկին արտադրյալին, այսինքն, նոր արտադրյալը նախկինից մեծ է 4 անգամ։

2) Յերբ բազմապատկելին մեծացնենք մի քանի անգամ, ապա արտադրյալն էլ կմեծանա այդքան անգամ։

Այսպես, յեթե միևնույն օրինակում բազմապատկելին մեծացնենք, յենթադրենք 6 անգամ, ապա կստանանք $90 \cdot 3=270$։ Նոր արտադրյալը մեծ է նախկինից 6 անգամ։ Այդպես էլ պետք է լինի, վորովհետև բազմապատկելին և բազմապատկիչը կարող են իրենց տեղերը փոխել, առանց փոխելու արտադրյալը, իսկ ինչպես տեսանք, բազմապատկիչը մի քանի անգամ մեծացնելով արտադրյալն էլ մեծանում է այդքան անգամ։

1) և 2) դեպքերի վերաբերյալ ասածներից հետևում է

3) Յերբ բազմապատկելին կամ բազմապատկիչը փոքրացնենք մի քանի անգամ, ապա արտադրյալն էլ կփոքրանա այդքան անգամ։

Օրինակ՝

$$20 \cdot 2=40,\ 10 \cdot 2=20,\ 5 \cdot 2=10$$ և այլն

Յեթե յերկու արտադրիչն էլ միաժամանակ փոփոխվեն, ապա

արտադրյալը յերբեմն կմեծանա, յերբեմն էլ կփոքրանա, կամ թե կմնա անփոփոխ։

Վորպեսզի նախապես հնարավոր լինի վորոշել, թե արտադրիչների միաժամանակ փոփոխվելու դեպքում ինչ փոփոխություն կկրի արտադրյալը, հարկավոր է յենթադրել, վոր նախ փոփոխվել է միայն բազմապատկելին ապա և բազմապատկիչը։

Օրինակ, $15 \cdot 6=90$ արտադրյալի մեջ բազմապատկելին կմեծացնենք 3 անգամ, իսկ բազմապատկիչը՝ 2 անգամ.

$$15 \cdot 6=90;\ 45 \cdot 12=?$$

Արտադրյալի փոփոխությունն իմանալու համար դատում ենք այսպես՝ բազմապատկելին 3 անգամ մեծացնելիս արտադրյալը կմեծանա 3 անգամ, այսինքն կլինի վոչ թե 90, այլ $90+90+90$։ Այնուհետև բազմապատկիչը յերկու անգամ մեծացնելիս արտադրյալը 2 անգամ էլ կմեծանա, ուրեմն, նա այժմ կլինի

$$(90+90+90)+(90+90+90),$$

այսինքն, սկզբնական արտադրյալի հետ համեմատած նա կմեծանա կրկնակի յերեք անգամ, այսինքն, 6 անգամ։

Նույն օրինակում բազմապատկելին կմեծացնենք 8 անգամ, իսկ բազմապատկիչը կփոքրացնենք 2 անգամ,

$$15 \cdot 6=90;\ 120 \cdot 3=?$$

Բազմապատկելին 8 անգամ մեծացնելով արտադրյալը կմեծանա 8 անգամ, իսկ այնուհետև բազմապատկիչը 2 անգամ փոքրացնելով այդ 8 անգամ մեծացած արտադրյալը կփոքրանա 2 անգամ։ Նշանակում է այդ յերկու փոփոխությունից հետո արտադրյալը կմեծանա միայն 4 անգամ։

$$120 \cdot 3=360=90 \cdot 4։$$

4) Յերբ արտադրիչներից մեկը մեծացնենք մի քանի անգամ, իսկ մյուսը փոքրացնենք նույնքան անգամ, ապա արտադրյալը չի փոխվի վորովհետև արտադրիչներից մեկի մեծացումով արտադրյալը կմեծանա, իսկ մյուսի փոքրացումով՝ արտադրյալը կփոքրանա նույնքան անգամ։

$$15 \cdot 6=90;\ 30 \cdot 3=90;\ 5 \cdot 18=90։$$

54. ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ՊԱՐԶԱՑՈՒՄԸ ՎՈՐՈՇ ԴԵՊՔԵՐՈՒՄ։
Իմանալով արտադրյալի փոփոխությունը կախված արտադրիչների փոփոխությունից, մենք կարող ենք բազմապատկումը յերբեմն պարզեցնել։ Դիցուք, օրինակ, պետք է 438-ը բազմապատկել 5-ով։ Բազմապատկիչը կմեծացնենք 2 անգամ, այսինքն՝ 5-ի փոխարեն կվերցնենք բազմապատկիչ 10։ Այն ժամանակ արտադրյալը կգտնենք միանգամից, դա կլինի 4380։ Բայց մեծացնելով բազմապատկիչը 2 անգամ, մենք արտադրյալը մեծացրինք 2 անգամ, հետևապես, վորոնելի արտադրյալը պետք է 4380-ից կրկնակի փոքր լինի, այսինքն, նա պետք է լինի 2190։ Նույն ձևով. յեթե պահանջվում է բազմապատկել 25-ով, կարող ենք բազմապատկել 100-ով և ստացված արտադրյալը փոքրացնել 4 անգամ։

Յերբեմն պարզացումը ստացվում է յելնելով էլ ավելի հասարակ դատողությունից։ Դիցուք, պահանջվում է 56-ը բազմապատկել 11-ով։ 56-ը բազմապատկելով 10-ով ստանում ենք 560, մնում է էլի 1 անգամ ավելացնել 56. կստանանք 616։

Նման ձևով էլ կարելի յե ուզած ամեն թիվ բազմապատկել 19-ով։ Դրա համար բավական է դա բազմապատկել 20-ով և ապա հանել բազմապատկելին։

55. ՅԵՐԵՔ ՅԵՎ ԱՎԵԼԻ ԱՐՏԱԴՐԻՉՆԵՐԻ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ։
Դիցուք, ունենք մի քանի թվեր, օրինակ՝ 7, 5, 3 և 4, վորոնք տված են վորոշ կարգով, օրինակ, այնպես, ինչպես մեզ մոտ գրված է։ Այդ թվերից կազմենք արտադրյալ հետևյալ ձևով. առաջին թիվը բազմապատկելով յերկրորդ թվով, կստանանք 35. բազմապատկելով 35-ը յերրորդ թվով, կստանանք 105. բազմապատկելով 105-ը չորրորդ թվով, կստանանք 420։ 420-ը կոչվում է 7, 5, 3 և 4 արտադրիչների արտադրյալը։ Նման ձևով կարելի յե գտնել հինգ, վեց և ավելի թվով արտադրիչների արտադրյալը։

Այդպիսի հաջորդական բազմապատկումը նշանակելու համար տված թվերը գրում են մի տողում այն կարգով, ինչ կարգով վոր պետք է բազմապատկել, և նրանց միջև դնում են բազմապատկման նշան։ Այսպիսով,

$$3.4.2.7$$

արտահայտությունը հավասարազոր է

$$[(3.4).2].7,$$

արտահայտության, այսինքն դա նշանակում է, վոր 3-ը բազմապատկվում է 4-ով, ստացված արտադրյալը—2-ով և այս վերջին արտադրյալը—7-ով։

56. ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ ՉԻ ՓՈԽՎՈՒՄ ԱՐՏԱԴՐԻՉՆԵՐԻ ԿԱՐԳԸ ՓՈԽԵԼՈՒՑ։ *Արտադրյալի այն հատկությունը, վորին համոզվեցինք § 45-ում, ճիշտ է նաև յերեք, չորս և ավելի արտադրիչների արտադրյալի համար. այսինքն, արտադրյալը չի փոխվում արտադրիչների կարգը փոխելուց (ինչքան էլ լինեն դրանք)։*

Օրինակ. *հաշվելով արտադրյալներից յուրաքանչյուրը,*

$$2.5.3.4.7;\quad 2.3.4.5.7;\quad 4.7.3.2.5;\quad 7.2.3.4.5,$$

վորոնք միմյանցից տարբերվում են միայն արտադրիչների կարգով, կստանանք միևնույն թիվը—840։

57. ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԻ ԱՐՏԱԴՐԻՉՆԵՐԸ ԿԱՐԵԼԻ ՅԵ ԽՄԲԱՎՈՐԵԼ ՈՒԶԱԾ ՁԵՎՈՎ.

Օրինակ՝

$$3.4.5.2$$

արտադրյալի մեջ վերջին յերկու արտադրիչները միացնենք մի խմբի մեջ՝ 3.4.(5.2) և հաշվենք այդ արտահայտությունը՝ 3.4=12-ի; 5.2=10-ի; 12.10=120-ի։ Ստացանք միևնույն թիվը, ինչ կստանայինք յեթե բազմապատկումը կատարեյինք առանց խմբավորելու արտադրիչները. 3.4=12-ի; 12.5=60-ի; 60.2=120-ի։

Այդ հատկությունը կոչվում է բազմապատկման զուգորդման օրենք։ Սա կարելի յե դիտարկել վորպես տեղափոխման օրենքի հետևանք։ Իսկապես, համաձայն այդ օրենքի կարող ենք 5 և 2 արտադրիչները տեղափոխել շարքի սկիզբը, այսինքն արտադրյալը գրել այսպես՝ 5.2.3.4։ Այստեղ 5 և 2 արտադրիչները կազմում են մի խումբ, քանի վոր § 56-ի սահմանման համաձայն 5.2.3.4 արտահայտությունը նշանակում է (5.2).3.4 արտադրյալը։ Այժմ կարելի յե այդ խմբի միացած յուրաքանչյուր արտադրիչի տեղը փոխել։ Ուրեմն

$$(5.2).3.4=3.(5.2).4=3.4.(5.2).$$

Բազմապատկման զուգորդման օրենքը ընդհանուր ձևով կարելի է արտահայտել (երեք արտադրիչների համար) այսպես՝

$$abc=(ab)c=a(bc)$$ ։

58. ԻՆՉՊԵՍ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿԵԼ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼՈՎ ԵՎ ԻՆՉՊԵՍ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿԵԼ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ։ 1) Տեսանք § 50-ում, որ եթե պահանջվում է որևէ թիվ բազմապատկել 30-ով (այսինքն 3.10 արտադրյալով), ապա բավական է բազմապատկելին բազմապատկել 3-ով և այնուհետև ստացված թիվը՝ 10-ով։ Նույնպես և որևէ թիվ 400-ով (այսինքն 4.100 արտադրյալով) բազմապատկելու համար կարելի է այդ թիվը բազմապատկել 4-ով և ապա ստացված թիվը՝ 100-ով։

Յուրաքանչյուր բազմապատկիչով հաջորդաբար բազմապատկելու այդ եղանակն առանձին գործադրվում է նաև չորս, հինգ և ավելի արտադրիչներ ունեցող արտադրյալների նկատմամբ։

Այսպես՝

$$7.(3.5.8)=7.3.5.8=[(7.3).5].8,$$

որովհետև համաձայն § 57-ի 3, 5 և 8 բազմապատկիչները կարող են միացվել մի խմբի մեջ։

Այսպիսով,

արտադրյալով բազմապատկելու համար, կարելի է նախ բազմապատկել առաջին արտադրիչով, հետո ստացած արտադրյալը բազմապատկել երկրորդ արտադրիչով, ապա երրորդով և այլն։

2) Դիցուք, պահանջվում է 7.3.4 արտադրյալը բազմապատկել 8-ով։ Փոխանակ նախ հաշվելու 7.3.4 արտադրյալները (որը հավասար է 84-ի), և ապա 8-ով բազմապատկելու (կստանանք 672), կարող ենք 7, 3 կամ 4 արտադրիչներից մեկը բազմապատկել 8-ով, մյուսները թողնելով անփոփոխ և ապա վերաբազմապատկել նրանց։ Օրինակ, 3 արտադրիչը բազմապատկենք 8-ով, կունենանք՝ $7.(3.8).4=7.24.4=672$-ի. ստացանք նույն թիվը, ինչ և առաջ։

Այսպիսով,

արտադրյալը մի որևէ թվով բազմապատկելու համար

կարելի է այդ թվով բազմապատկել արտադրիչներից մեկը, մյուսները թողնելով անփոփոխ։

Այսպես՝

$$(5.4.8).3=(5.3).4.8=5.(4.3).8=5.4.(8.3)=480$$ ։

Այս կանոնը հանդիսանում է տեղափոխման և զուգորդման օրենքների միասին հետևանքը։

59. ԻՆՉՊԵՍ ՊԵՏՔ Է ԳՈՒՄԱՐԸ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿԵԼ ՈՐԵՎԷ ԹՎՈՎ։ Երբ առաջ (§ 48-ում) 846 թիվը (այսինքն, 6 միավորների 4 տասնավորների և 8 հարյուրավորների գումարը) բազմապատկում էինք 5-ով, մենք 5-ով առանձին-առանձին բազմապատկում էինք միավորները, տասնավորները և հարյուրավորները ստացված թվերը գումարում։ Այդ եղանակով կարելի է վարվել միշտ, երբ պահանջվում է գումարը բազմապատկել որևէ թվով։ Դիցուք, պետք է $10+7+5+9$ գումարը բազմապատկել 3-ով։ Այդ նշանակում է, որ պահանջվում է գտնել

$$(10+7+5+9)+(10+7+5+9)+(10+7+5+9)$$

գումարը։

Բայց գումարներն ավելացնելու համար կարելի է առանձին գումարել յուրաքանչյուր գումարելին մեկը մյուսից հետո (§ 21)։ Ուստի, հենց այժմ գրված գումարը կարելի է փոխարինել

$$10+7+5+9+10+7+5+9+10+7+5+9$$

գումարով։

Այդ գումարի անդամները խմբավորենք այսպես՝

$$(10+10+10)+(7+7+7)+(5+5+5)+(9+9+9),$$

այն ժամանակ կստանանք

$$10.3+7.3+5.3+9.3$$ ։

Այս դատողությունը կարելի է կրկնել ուզած ուրիշ թվերի համար։

Այսպիսով.

գումարը որևէ թվով բազմապատկելու համար պետք է

այդ թվով բազմապատկել յուրաքանչյուր գումարելին առանձին յեվ արդյունքները գումարել։

Քանի վոր արտադրիչների տեղափոխումից արտադրյալը չի փոխվում, ապա այստեղից յեզրակացրած կանոնից հետևում է՝

վորեվե թիվ գումարով բազմապատկելու համար կարելի յե այդ թիվը բազմապատկել յուրաքանչյուր գումարելիով առանձին յեվ արդյունքները գումարել։

Այդպես էլ վարվեցինք, յերբ (§ 51) 3826 թիվը բազմապատկեցինք 472-ով, այսինքն, 2+70+400 գումարով։

Այս հատկությունը կոչվում է բազմապատկման բաշխական օրենք (գումարման նկատմամբ), քանի վոր ըստ այդ օրենքի գումարի նկատմամբ կատարված բազմապատկումը կարելի յե բաշխել առանձին գումարելիների միջև։ Ընդհանուր ձևով այդ օրենքը կարելի յե արտահայտել այսպես.

$$(a+b+c+\dots)\,m=am+bm+cm+\dots$$

կամ

$$m(a+b+c+\dots)=ma+mb+mc+\dots$$

Դիտողություն։ Թյուրիմացություններից խուսափելու համար $am+bm+cm+\dots$ արտահայտությունը պետք է գրել այսպես. $(am)+(bm)+(cm)+\dots$

Բայց գրության կարճության համար պայմանավորվել ենք, վոր յեթե արտահայտության մեջ նշված են գումարման, հանման և բազմապատկման գործողություններ, և փակագծեր չեն գրված, ապա նախ պետք է կատարել բազմապատկումը, իսկ հետո գումարումը և հանումը։ Այդ դեպքում և առանց փակագծերի պարզ կլինի, թե $am+bm+cm+\dots$ արտահայտության մեջ գործողությունները ինչ կարգով պիտի կատարել։

VII. ԲԱԺԱՆՈՒՄ

60. Մինչև հիմա մենք ընդունում եյինք բոլոր արտադրիչները վորպես տվյալներ, իսկ արտադրյալը՝ վորոնելի։ Բայց կան շատ խնդիրներ, վորոնց մեջ, ընդհակառակը, յերկու թվերի արտադրյալը տված է, իսկ այդ թվերից մեկն անհայտ է։

Խնդիր 1. Դասարանում բաժանեցին 75 տետր, յուրաքանչյուր աշակերտին տալով 3-ական տետր։ Քանի՞ աշակերտ կա դասարանում։

Յեթե յուրաքանչյուր աշակերտի ստացած տետրերի թիվը (այսինքն 3-ը) բազմապատկենք աշակերտների անհայտ թվով, ապա պետք է ստանանք բաժանված տետրերի ընդհանուր թիվը (այսինքն, 75)։ Այսպիսով, այստեղ տված են արտադրյալը

(75) և արտադրիչներից մեկը (3), իսկ մյուս արտադրիչը վորոնում ենք։ Աշակերտների վորոնելի թիվը հավասար է 25-ի, քանի վոր 3.25=75-ի։

Խնդիր 2. Դասարանում կա 30 աշակերտ. յերբ նրանց հավասար չափով բաժանեցին 120 թերթ թուղթ, վորքա՞ն կստանա յուրաքանչյուրը։

Յեթե յուրաքանչյուր աշակերտի ստացած անհայտ թվով թերթերի քանակը բազմապատկենք աշակերտների թվով (30), ապա պետք է ստանանք բաժանված թղթի թերթերի թիվը (այսինքն՝ 120)։ Այսպիսով այստեղ դարձյալ տված են արտադրյալը (120) և արտադրիչներից մեկը (30), պետք է գտնել մյուս արտադրիչը։ Յուրաքանչյուր աշակերտ կստանա 4 թերթ, վորովհետև 4.30=120-ի։

61. ԱՅՆ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆԸ ՎՈՐՈՎ ԳՏՆՈՒՄ ԵՆՔ ԱՐՏԱԴՐԻՉՆԵՐԻՑ ՄԵԿԸ, ՅԵՐԲ ՏՎԱԾ ԵՆ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼՆ ՈՒ ՄՅՈՒՍ ԱՐՏԱԴՐԻՉԸ, ԿՈՉՎՈՒՄ Է ԲԱԺԱՆՈՒՄ։

Ըստ վորում տված արտադրյալը կոչվում է բաժանելի, տված արտադրիչը—բաժանարար իսկ վորոնելի արտադրիչը—քանորդ։

Առաջին խնդիրը լուծելու համար պետք է 75-ը բաժանել 3-ի, այստեղ բաժանելին—75 է, բաժանարարը—3, քանորդը—25։

Յերկրորդ խնդիրը լուծելու համար պետք է 120-ը բաժանել 30-ի։ Այստեղ բաժանելին 120 է, բաժանարարը—30, քանորդը—4, բաժանումը նշանակում են կամ : նշանով, վորը բաժանում է բաժանելին և բաժանարարը (ձախ կողմում՝ բաժանելին, իսկ աջ կողմում—բաժանարարը) կամ հորիզոնական գծով, վորը նույնպես բաժանելին բաժանում է բաժանարարից (բաժանելին գրում են գծի վերևում, իսկ բաժանարարը—ներքևում)։

Այսպիսով, $75:3=25$, $\frac{75}{3}=25$ հավասարություններից յուրաքանչյուրը նշանակում է, վոր 75-ը 3-ի վրա բաժանելիս ստացվում է 25։

62. Ծանոթություն։ Քանի վոր արտադրիչների տեղափոխումից արտադրյալը չի փոխվում (բազմապատկման տեղափոխման օրենք), ապա բաժանման արդյունքի համար վոչ մի նշանակություն չունի, թե յերկու արտադրիչներից—բազմապատկելին կամ բազմապատկիչը—վորն է տված և վորը պետք է

գտնել։ Բայց յեթե ցանկանում ենք հաշվի առնել լուծվող խնդրի առարկայական բովանդակությունը, ապա այդ յերկու դեպքում նա կարող է լինել բոլորովին տարբեր։ Այսպես, առաջին խնդրի մեջ որոնվում է, թե քանի անգամ պետք է վերցնել 3 (մետր), որ ստացվի 75 (մետր)․ այստեղ տված է բազմապատկելին (3), պետք է գտնել բազմապատկիչը։ Ընդհակառակը, յերկրորդ խնդրում պետք է գտնել, թե ինչ թիվ (թերթ թուղթ) պետք է վերցնել 30 անգամ, որ ստացվի 120 (թերթ)․ այստեղ տված է բազմապատկիչը՝ 30, պետք է գտնել բազմապատկելին։

Այսպիսով, կարելի յե ասել, որ թվաբանական միևնույն գործողության—բաժանման—միջոցով լուծվում են իրենց բովանդակությամբ, յերկու տարբեր խնդիրներ։

63. ԶԵՐՈՅԻ ՎՐԱ ԲԱԺԱՆԵԼ ՉԻ ԿԱՐԵԼԻ։ Բաժանման ժամանակ ամեն մի թիվ կարող է լինել բաժանարար, բացի զերոյից։ Զերոյի վրա բաժանել չի կարելի։

Քննարկենք, թե ինչու յե այդ այդպես։ Յեթե բաժանելին զերոյից տարբեր մի որևէ ուրիշ թիվ է, օրինակ՝ 5, ապա այդ թիվը բաժանել զերոյի վրա կնշանակեր գտնել այնպիսի թիվ, որը զերոյով բազմապատկելիս տալիս է 5․ բայց այդպիսի թիվ չկա, որովհետև ամեն մի թիվ զերոյով բազմապատկելիս տալիս է նորից զերո։ Իսկ յեթե բաժանելին նույնպես հավասար է զերոյի, ապա բաժանելը հնարավոր է, սակայն քանորդ կարող է լինել ամեն մի թիվ, որովհետև այս դեպքում ամեն մի թիվ բաժանարարով (0) բազմապատկելիս տալիս է բաժանելին (այսինքն, դարձյալ 0)։ Այսպիսով, այս դեպքում չնայած բաժանումը հնարավոր է, բայց չի բերում միակ որոշ արդյունքի։

Ուստի և զերոն բաժանարար լինել չի կարող։

64. ԲԱԺԱՆՈՒՄ ՄՆԱՑՈՐԴՈՎ։ Յերկու թվերի բաժանում միշտ հնարավոր չէ։ Այսպես, 27-ը չի կարելի բաժանել 6-ի վրա, որովհետև չկա այնպիսի ամբողջ թիվ, որը 6-ով բազմապատկելիս տար 27։ Ասում են, որ 27-ը չի բաժանվում 6-ի վրա։

Յեթե ցանկանում ենք, օրինակ, 27 մետրը բաժանել 6 աշակերտի վրա հավասարապես, ապա այդ անել հնարավոր չէ․ մենք կարող ենք աշակերտներին բաժանել 4-ական մետր, որը կազմում է 24 մետր, և 3 մետրն էլ կմնա առանց բաժանելու։

Պայմանավորվել են այս դեպքում էլ խոսել 27-ը 6-ի վրա

բաժանելու մասին։ Առաջվա պես 27-ը կոչվում է բաժանելի, 6-ը բաժանարար, 4-ը վոչ լրիվ քանորդ, իսկ 3-ը բաժանման մնացորդ։ Այս դեպքում բաժանումն ինքը կոչվում է բաժանում մնացորդով։ Այսպիսով, մնացորդով բաժանման ժամանակ վոչ լրիվ քանորդ կոչվում է այն ամենամեծ թիվը, որը բաժանարարով բազմապատկելիս տալիս է մի արտադրյալ, որը չի անցնում բաժանելիից։ Բաժանելիի և այդ արտադրյալի միջև յեղած տարբերությունը կոչվում է մնացորդ։

Այստեղից հետևում է, որ մնացորդը միշտ էլ փոքր է բաժանարարից։

Մնացորդով բաժանումը կարելի յե գրել այսպես․

27 : 6 = 4 (մնացորդ 3)։

Մնացորդով բաժանելու էլի մի քանի օրինակներ $\frac{32}{5}$ =6մնացորդ 2), 100 : 9 = 11 (մնացորդ 1)։

65. ԱՄԲՈՂՋ ԹՎԵՐԻ ԲԱԺԱՆՄԱՆ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ։ Ամբողջ թվերի բնագավառում առանց մնացորդի և մնացորդով բաժանմանը կարելի յե տալ հետևյալ ընդհանուր սահմանումը․ a (բաժանելի) թիվը բաժանել b-ի (բաժանարար) վրա նշանակում է գտնել յերկու այնպիսի թիվ՝ q (քանորդ) և r (մնացորդ), որոնք բավարարեն

$a=bq+r$ և $r<b$ առաջադրություններին։

Քանի որ $a=bq+r$ հավասարությունը արտահայտում է, որ

$$a=(\overbrace{b+b+b+\dots b}^{q\ \text{գումարելիներ}})+r$$

և քանի որ $r<b$, ապա q քանորդը, ակնհայտաբար ցույց է տալիս, թե ինչպիսի ամենամեծ թիվ անգամ բաժանարարը պարունակվում է բաժանելիի մեջ։

Հեշտ է համոզվել, որ յեթե b բաժանարարը հավասար չէ զերոյի, ապա այս ձևով սահմանված բաժանման գործողությունը միշտ հնարավոր է և միշտ տալիս է միակ արդյունքը։ Իսկապես․

1) յեթե $a<b$, ապա $q=0$ և $r=a$ և միայն թվերի այս զույգը բավարարում է սահմանմանը․

2) յեթե $a=b$, ապա $q=1$ և $r=0$ և թվերի ուրիշ վոչ մի զույգ չի բավարարում սահմանմանը և վերջապես,

3) յեթե $a>b$, ապա q քանորդը, ինչպես տեսանք, ցույց է տալիս, թե քանի ամենամեծ թիվ անգամ b բաժանարարը պարունակվում է a բաժանելիի մեջ, ուստի յեթե միայն b-ն հավասար չէ զերոյի, այդ քանորդը միշտ գոյություն ունի և պարզ է, որ քանորդը կարող է լինել միայն մեկ թիվ

բայց այդ դեպքում մնացորդն էլ՝ r-ը գոյություն ունի (նա հավասար է a—bq տարբերությանը) և նույնպես կարող է լինել միայն մեկը: Նշենք, որ b թվի վրա բաժանելիս, որպես մնացորդ կարող է լինել

$$0, 1, 2, .., b-1$$

թվերից յուրաքանչյուր թիվ:

Այստեղից հետևում է, որ b-ի վրա բաժանելիս կարող են ստացվել b թվով տարբեր մնացորդներ:

66. ԲԱԺԱՆՄԱՆ ԲԱՂԴԱՏՈՒՄԸ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ՀԵՏ:

Երկու թվեր բազմապատկելիս ուզում ենք գտնել նրանց արտադրյալը, իսկ բաժանելիս (առանց մնացորդի) արտադրյալը տված է, ուզում ենք գտնել այն թիվը, որը բազմապատկելիս տված է լինում (բազմապատկելին կամ բազմապատկիչը): Ուրեմն, բաժանումը բազմապատկման հակադարձ գործողություն է (և բազմապատկումը հակադարձ բաժանմանը):

Եթե բաժանելիս ստացվում է մնացորդ, ապա բաժանելին հավասար չէ բաժանարարի և քանորդի արտադրյալին, այլ հավասար է այդ արտադրյալի և մնացորդի գումարին: Այսպես՝ $27=6.4+3$:

67. ԲԱԺԱՆՄԱՆ ՄԻՋՈՑՈՎ ԼՈՒԾՎՈՂ ԽՆԴԻՐՆԵՐ:

Ահա մի քանի տիպական խնդիրներ, որոնք լուծվում են բաժանման միջոցով:

1) Երբ պետք է իմանալ, թե մեծ թիվը իր մեջ քանի անգամ է պարունակում փոքր թիվը, կամ որ միևնույնն է, քանի անգամ մի թիվ մեծ կամ փոքր է մյուսից, օրինակ, 20 ռուբլին իր մեջ քանի անգամ 5 ռուբլի է պարունակում:

2) Երբ պահանջվում է տված թիվը բաժանել մի քանի հավասար մասերի, օրինակ, երբ պահանջվում է 60 թերթ թուղթը բաժանել 12 հավասար մասի (կարճ՝ գտնել 60 թերթի տասներկուերորդ մասը):

3) Երբ տված թիվը պետք է փոքրացնել մի քանի անգամ, փոխարեն փոքրացնել, օրինակ, 60 թերթ թուղթը 12 անգամ, նշանակում է 60 թերթի փոխարեն վերցնել նրա մեկ տասներկուերորդ մասը:

68. Բաժանումը կարելի է կատարել գումարման, հանման և բազմապատկման միջոցով: Դիցուք, պահանջվում է 212-ը բաժանել 53-ի վրա: Որոնելի քանորդը կարող ենք գտնել՝

1) Գումարման միջոցով.

$$53+53=106;\ 106+53=159;\ 159+53=212:$$

Պարզվում է, որ 53-ը որպես գումարելի պետք է կրկնել 4 անգամ, 212 ստանալու համար: Ուրեմն, որոնելի քանորդը 4 է:

2) Հանման միջոցով.

$$-\begin{array}{r}212\\53\\\hline 159\end{array}\qquad -\begin{array}{r}159\\53\\\hline 106\end{array}\qquad -\begin{array}{r}106\\53\\\hline 53\end{array}\qquad -\begin{array}{r}53\\53\\\hline 0\end{array}$$

Պարզվում է, որ 212-ից 53-ը կարելի է հանել 4 անգամ, ուրեմն, որոնելի քանորդը 4 է:

3) Բազմապատկման միջոցով

$$53.2=106;\ 53.3=159;\ 53.4=212:$$

Որոնելի քանորդը 4 է:

Սակայն այս եղանակներն անհարմար են, եթե քանորդը մեծ թիվ է. Թվաբանությունը նշում է ավելի պարզ եղանակ, որը և այժմ կքննարկենք:

69. ԻՆՉՊԵՍ ՊԵՏՔ Է ԻՄԱՆԱԼ, ՔԱՆՈՐԴԸ ՄԻԱՆԻՇ ԿԼԻՆԻ, ԹԵ ՈՉ: Դրա համար բավական է միայն բաժանարարը բազմապատկել (մտքում) 10-ով և ստացած արտադրյալը բաղդատել բաժանելիի հետ:

1-ին օրինակ $534 : 68=?$

Եթե 68-ը բազմապատկենք 10-ով (այսինքն, 68-ին կցագրենք զերո), ապա կստանանք 680. բայց 534-ը փոքր է 680-ից, ուստի քանորդը փոքր պիտի լինի 10-ից, ուրեմն և նա պետք է լինի միանիշ թիվ:

2-րդ օրինակ $534 : 37=?$

Եթե 37-ը բազմապատկենք 10-ով, ապա կստանանք 370, բայց 534-ը մեծ է 370-ից, ուստի քանորդը չի կարող 10-ից փոքր լինել, նա չի կարող միանիշ թիվ լինել:

70. ՄԻԱՆԻՇ ՔԱՆՈՐԴԻ ԳՏՆԵԼԸ: Քննարկենք երկու դեպք

երբ բաժանարարը նույնպես միանիշ է և երբ բաժանարարը բազմանիշ է։

1) Երբ բաժանարարը և քանորդը երկուսն էլ միանիշ թվեր են, ապա քանորդը գտնում են բազմապատկման աղյուսակով։ Օրինակ, 56-ը 8-ի վրա բաժանելուց քանորդը կլինի 7-ը, որովհետև յոթն անգամ ութը հավասար է հենց 56-ի։

42-ը 9-ի վրա բաժանելուց ստացված քանորդը հավասար է 4-ի, որովհետև չորս անգամ ինն հավասար է 36-ի, որը 42-ից փոքր է, իսկ հինգ անգամ ինն հավասար է 45-ի, որը 42-ից մեծ է, ուրեմն, քանորդում պետք է վերցնել 4, ընդ որում մնացորդում կստացվի 42—36=6։

2) Երբ բաժանարարը կազմված է մի քանի թվանշաններից, իսկ քանորդը՝ մեկ թվանշանից, ապա քանորդը գտնում են մեկ կամ մի քանի թվանշաններ փորձելու միջոցով։

Օրինակ. 43530 : 6837։

Նախ և առաջ (§ 69-ում նշված յեղանակով համոզվում ենք, որ քանորդը միանիշ է։ Այնուհետև մտավոր կերպով բաց ենք թողնում բաժանարարի բոլոր թվանշանները, բացի ձախից առաջինը, այսինքն, բաժանարարի մեջ թողնում ենք միայն 6 հազար։ Բաժանելիի աջ կողմից բաց ենք թողնում այնքան թվանշան, որքան բաց ենք թողել բաժանարարի մեջ, այսինքն նրա մեջ կթողնենք միայն 43 հազար։ Այժմ հարց է ծագում, թե ինչ թվով պետք է բազմապատկել 6-ը, որպեսզի ստացվի 43 կամ 43-ից փոքր, բայց նրան հնարավոր չափով մոտ թիվ։ Բազմապատկման աղյուսակից գտնում ենք, որ այդ թիվը 7-ն է, քանի որ յոթ անգամ վեց հավասար է 42-ի, իսկ ութ անգամ վեց հավասար է 48-ի։ Ուրեմն, որոնելի քանորդը պետք է լինի 7 կամ նրանից փոքր թիվ (կարող է պատահել 7-ից փոքր լինի, որովհետև մենք բաժանելիից և բաժանարարից մի շարք թվանշաններ բաց թողինք)։ Սկսենք փորձել 7 թվից։ Դրա համար 6837-ը կբազմապատկենք 7-ով. յեթե ստանանք 43530-ից մեծ թիվ, ապա 7 թիվը անպետք է. այն ժամանակ փորձում ենք հետևյալ փոքր թիվը՝ 6-ը։

$$\begin{array}{r} 6837 \\ \cdot\ 7 \\ \hline 47859 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6837 \\ \cdot\ 6 \\ \hline 41022 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43530 \\ -\ 41022 \\ \hline 2508 \end{array}$$

6837.7 արտադրյալը 43530-ից մեծ յեղավ, իսկ 6837.6 արտադրյալն այդ թվից փոքր է. ուրեմն, քանորդը պետք է լինի 6, ընդ որում մնացորդ կստացվի 2508-ը[1])։ Դիտողություն։ Որոշ դեպքերում փորձելու համար վերցվող առաջին թվանշանը ավելի հարմար է գտնել այլ կերպ։ Այսպես, նկատելով, որ մեր վերցրած օրինակում 6837 բաժանարարը քիչ է տարբերվում 7 հազարից (համենայն դեպս ավելի քիչ, քան 6 հազարից), իմանում ենք, թե ինչ թվով պետք է բազմապատկել 7-ը, որ ստացվի 43-ին հնարավոր չափով մոտ թիվ։ Բազմապատկման աղյուսակով գտնում ենք, որ այդպիսի թիվը 6-ն է։ Ուրեմն քանորդը պետք է լինի 6 կամ 6-ից ավելի, (որովհետև բաժանարարը փոքր է 7 հազարից)։ Սկսենք փորձել 6 թվից։ Դրա համար բաժանարարը կբազմապատկենք 6-ով և արտադրյալը կհանենք բաժանելիից. յեթե 6837-ից ավելի մնա, ապա 6 թիվը քիչ է և այդ դեպքում պետք է փորձել 7-ը, իսկ յեթե 6837-ից քիչ մնա, ապա 6 թիվը ճիշտ է գտնված։ Մնացորդ ստացվեց 2508, ուրեմն, 6 թիվը ճիշտ է գտնված։

Օգտակար է այսպես վարվել այն ժամանակ յերբ, բաժանարարի յերկրորդ թվանշանը 5-ից մեծ է։ Օրինակ, 6837 բաժանարարը շնորհիվ այն հանգամանքի, որ նրա յերկրորդ թվանշանը 5-ից մեծ է, ավելի մոտենում է 7000-ին, քան 6000-ին։

71. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԴԵՊՔՈՒՄ ՔԱՆՈՐԴԻ ԳՏՆԵԼԸ։ Դիցուք, թե պահանջվում է 64528-ը բաժանել 23-ի վրա։ Ավելի պարզ լինելու համար այս գործողությունը կպատկերացնենք 64528-ը որպես 23 հավասար մասերի վերածում։

1) Նախ մեզ տված թվից վերցնենք 64 հազարը և փորձենք վերածել դա 23 հավասար մասերի, յուրաքանչյուր մասում կստացվի 2 հազար և չբաժանված կմնա եւս 18 հազար։

2) Այդ մնացած 18 հազարը կազմում է 180 հարյուրավոր, որան կավելացնենք տված թվում գտնվող 5 հարյուրավորը,

---

1). Աշխատանքի կարճության համար, նախքան քանորդում փորձարկվող թիվը գրելը և ամբողջ բաժանարարով բազմապատկելը, յերբեմն ավելի նպատակահարմար է լինում այդ թիվը մտքում բազմապատկել բաժանարարի միայն սկզբի 2 թվանշանները և ստացված արտադրյալը բաղդատել բաժանելիի համապատասխան կարգի թվանշանների հետ այժմ ստացված 185 հարյուրավորը նորից կփորձենք վերածել 23 հավասար մասերի, յուրաքանչյուր մասում ստացվում է 8 հարյուրավոր և 1 հարյուրավոր մնում է չբաժանված։

3) Այդ մնացած հարյուրավորը կազմում է 10 տասնավոր, սրանց ավելացնում ենք տված թվում յեղած յերկու տասնավորը և ստացված 12 տասնավորը աշխատում ենք վերածել 23 հավասար մասերի, ընդ վորում յուրաքանչյուր առանձին մասում վոչ մի տասնավոր չի ստացվում, այլ բոլոր 12 տասնավորները մնում են առանց բաժանվելու։

4) Այդ մնացած 12 տասնավորները կազմում են 120 միավոր, սրանց մենք կավելացնենք մեր թվում յեղած 8 միավորը։ Ստացված 128 միավորը փորձում ենք վերածել 23 հավասար մասերի, ըստ վորում յուրաքանչյուր մասում ստացվում է 5 միավոր և 13 միավոր մնում է առանց բաժանվելու։

Այսպիսով, յուրաքանչյուր մասում ընդամենը ստացվում է 2 հազարավոր, 8 հարյուրավոր և 5 միավոր, ընդ վորում 13 միավոր մնում է չբաժանված։ Այդ նշանակում է, վոր 64528-ը 23-ի վրա բաժանելուց քանորդում ստացվում է 2805, իսկ մնացորդում՝ 13։

Սովորաբար գործողությունը դասավորում են այսպես,

```
64528 |23
46    | 2805
---
 185
 184
 ---
   128
   115
   ---
    13
```

Միաժամանակ տեսնում ենք, վոր 1) այն թվերը, վորոնցից հաջորդաբար կազմվում է քանորդը, իրենցից ներկայացնում են տարբեր կարգի միավորներ (2 հազարավոր, 8 հարյուրավոր, զերո տասնավոր, 5 միավոր). ուստի, փոխանակ այդ թվերը լրիվ գրելու (2000+800+5), կարող ենք ուղղակի համապատասխան թվանշանները գրել մեկը մյուսից հետո, ինչպես այդ ցույց է տրված վերևի գրածում. ընդամին ամեն անգամ, յերբ բաժանելիս իմաստավոր թվանշան չի ստացվում, անհրաժեշտ

է քանորդում զերո նշանակել (մեր օրինակի մեջ տասնավորները)։ 2) վերևի բաժանումից ստացված մնացորդը (օրինակ, այս դեպքում առաջին բաժանումից ստացված 18-ը) հետևյալ ստորին կարգի միավորների վերածելու և բաժանելիի մեջ գտնվող այդ կարգի թիվը ավելացնելու համար, կարող ենք բաժանելիի համապատասխան թվանշանը ուղղակի «ցած բերել» և գրել ստացված մնացորդի աջ կողմում. ինչպես այդ մեր գրածի մեջ ցույց է տված կետագծով։

Շնորհիվ այս պարզեցումների, վորոշ ունակություններ ձեռք բերելուց հետո, բաժանումը կարելի յե կատարել մեծ արագությամբ։

Ահա բաժանման եվս յերեք օրինակ.

```
1470035 |7               3480000|15
14      |210005          30     |232000
--                       --
  7                       48
  7                       45
  ----                    --
  0035                     30
    35                     30
    --                     ---
     0                     000
```

```
130987 |929
 929   |140
 ----
 3808
 3716
 ----
   927
```

72. ՄԻԱՆԻՇ ԹՎԻ ՎՐԱ ԲԱԺԱՆԵԼՈՒ ԿՐՃԱՏ ՅԵՂԱՆԱԿ։ Յերբ բաժանարարն միանիշ է, ապա գրության կարճության համար օգտակար է վարժվել բոլոր հանումները կատարելու մտքում, գրելով միայն մնացորդները։

Օրինակ, այսպես.

```
563087 |6        կամ ավելի կարճ՝   563087 |6
 23    |93847                      ------ |93847
  50                                    5
   28
    47
     5
```

Այստեղ գծի տակ գրված 5 թիվը նշում է վերջին մնացորդը։

73. ԱՅՆ ԴԵՊՔԸ ՅԵՐԲ՝ ԲԱԺԱՆԱՐԱՐԸ ՎԵՐՋԱՆՈՒՄ Է ԶԵՐՈՆԵՐՈՎ։ Բաժանումն ավելի հեշտանում է այն դեպքում, յերբ բաժանարարը վերջանում է մեկ կամ մի քանի զերոներով։ Նախ վերցնենք այն դեպքը, բաժանարարը սկսվում է մեկով և վերջանում է զերոներով։ Վորևէ թիվ 10-ի, 100-ի, 1000-ի վրա և այլն բաժանել նշանակում է իմանալ, թե այդ թվում քանի տասնավոր, հարյուրավոր, հազարավոր և այլն է պարունակվում։ Բայց այդ հեշտ է իմանալ թվարկության կանոններից, վորը նշել ենք առաջ (§ 13)։ Օրինակ.

54634 : 10=5463 (4 մնացորդ)

54634 : 1000=54 (634 մնացորդ)

Կանոն: Վորևէ թիվ մեկով սկսվող յեվ զերոներով վերջացող թվի վրա բաժանելու համար բավական է բաժանելիի աջ մասից անջատել այնքան թվանշան, վորքան զերո կա բաժանարարի մեջ. այն ժամանակ բաժանելիի մնացած թվանշանները կհանդիսանան քանորդը, իսկ անջատվածները՝ մնացորդը։

Այժմ վերցնենք այն դեպքը, յերբ բաժանարարը զերոներով վերջացող վորևէ թիվ է։ Օրինակ՝

$$
\begin{array}{r|l}
389224 & 7300 \\
\cline{2-2}
365 & 53 \\
\hline
242 & \\
219 & \\
\hline
2324 &
\end{array}
$$

Բաժանարարը ներկայացնում է 73 հարյուրավոր։ Իմանալու համար, թե բաժանելիի մեջ քանի անգամ 73 հարյուրավոր է պարունակվում, այն բաժանում ենք 2 մասի՝ հարյուրավորների և միավորների։ Առաջին մասը—3892 հարյուրավոր է, իսկ յերկրորդ մասը—24 միավոր։ 73 հարյուրավորները կարող են պարունակվել այդ մասերից միայն մեկում, այն է հարյուրավորների մեջ։

Բայց 73 հարյուրավորը 3892 հարյուրավորների մեջ պարունակվում է այնքան անգամ, վորքան անգամ 73 վորևէ միավորներ պարունակվում են 3892 նույնպիսի միավորների մեջ։ Ուստի, 3892-ը բաժանում ենք 73-ի վրա, առանց ուշադրություն դարձնելու այն բանի վրա, վոր դրանք հարյուրավորներ են։

Բաժանելով գտնում ենք, վոր 73 հարյուրավորը 3892 հարյուրավորի մեջ պարունակվում է 53 անգամ, բայց 23 հարյուրավոր մնում է։ 23 հարյուրավորի մոտ գրելով բաժանելիի 24 միավորները, կստանանք 2324. այս թվում 73 հարյուրավորը վոչ մի անգամ չի պարունակվի, հետևապես, 2324-ը կլինի մնացորդ։

Մի օրինակ ևս, վորտեղ թե բաժանելին և թե բաժանարարը վերջանում են զերոներով՝

$$
\begin{array}{r|l}
35000 & 7300 \\
\cline{2-2}
292 & 4 \\
\hline
5800 &
\end{array}
$$

Կանոն: Յերբ բաժանարարը վերջանում է զերոներով, ապա մտավոր կերպով նրա զերոները բաց ենք թողնում, նաև բաժանելիի աջից բաց թողնելով այնքան թվանշան, վորքան զերո բաց է թողնված բաժանարարի մեջ. մնացած թիվը բաժանում ենք յեվ մնացորդի մոտ ցած բերում բաժանելիի բաց թողած թվանշանները։

74. *ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ՍՏՈՒԳՈՒՄԸ։* Քանի վոր արտադրիչների տեղափոխությունից արտադրյալը չի փոխվում, ապա բազմապատկումն ստուգելու համար կարելի յե նույն գործողությունը կատարել յերկրորդ անգամ, բազմապատկիչը բազմապատկելով բազմապատկելիով։ Օրինակ.

Բազմապատկում.	Ստուգում.
$\begin{array}{r} 532 \\ \times 145 \\ \hline 2660 \\ 2128 \\ 532 \\ \hline 77140 \end{array}$	$\begin{array}{r} 145 \\ \times 532 \\ \hline 290 \\ 435 \\ 725 \\ \hline 77140 \end{array}$

Յերկու արտադրյալն էլ ստացվեց նույնը, հետևապես, շատ հավանական է, վոր գործողությունը ճիշտ է կատարված։

Բազմապատկումը կարելի յե ստուգել նաև բաժանման միջոցով։ Դրա համար պետք է ստացված արտադրյալը բաժանել արտադրիչներից վորևէ մեկի վրա. յեթե քանորդում ստացվի մյուս արտադրիչը, ապա կարելի յե հավանական համարել, վոր բազմապատկումը ճիշտ կատարված է։

75. *ԲԱԺԱՆՄԱՆ ՍՏՈՒԳՈՒՄԸ։* Բաժանումը կարելի յե ստուգել բազմապատկման միջոցով, հիմնվելով այն բանի վրա, վոր բաժանելին պետք ե հավասար լինի բաժանարարի և քանորդի արտադրյալին (գումարած մնացորդը, յեթե կա)։

Օրինակ.

Բաժանում	8375	42	Ստուգում	199
	42	199		42
	417			398
	378			796
	395			8358
	378		+	17
	17			8375

Քանորդը՝ 199-ը բազմապատկեցինք բաժանարարով՝ 42-ով և ստացած արտադրյալին գումարեցինք 17-ը՝ մնացորդը։ Քանի վոր այս կատարելուց հետո ստացվեց բաժանելին հավասար թիվ, ապա շատ հավանական ե, վոր գործողությունը ճիշտ ե կատարված։

Յեթե բաժանումը կատարված ե առանց մնացորդի, ապա այն կարելի յե ստուգել նաև բաժանման միջոցով։ Իսկապես քանի վոր բաժանելին բաժանարարի և քանորդի արտադրյալն ե, ապա բաժանելին քանորդի վրա բաժանելիս պետք ե ստացվի բաժանարարը։ Օրինակ.

Բաժանում.	544	17	Ստուգում	544	32
	51	32		32	17
	34			224	
	34			224	

76. *ԻՆՉՊԵՍ ՊԵՏՔ Ե ԲԱԺԱՆԵԼ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԻ ՎՐԱ։* Դիցուք թե պահանջվում ե 60-ը բաժանել 5.3 արտադրյալի, այսինքն 15-ի վրա։ Դրա համար բավական ե 60-ը բաժանել 5-ի վրա և ապա ստացված քանորդը կրկին բաժանել 3-ի վրա.

$$60 : 5 = 12, \quad 12 : 3 = 4.$$

Թե ինչու այսպիսի կրկնակի բաժանումը (5-ի և ապա 3-ի վրա) ճիշտ արդյունք ե տալիս, շատ հեշտ կբացատրվի, յեթե բաժանումը գիտենք վորպես բաժանելիի վերածում հավասար

մասերի։ Այն ժամանակ կարելի յե ասել, վոր առաջին բաժանման միջոցով (5-ի վրա) 60-ը վերածում ենք 5 հավասար մասի, յուրաքանչյուր մասում ստանալով 12. յերկրորդ բաժանումով (3-ի վրա) 12-ը վերածում ենք 3 հավասար մասի, յուրաքանչյուր մասում ստանալով 4-ական։ Այդ կարելի յե դիտելի ձևով պատկերացնել այսպես.

$$\overbrace{\overbrace{4+4+4}^{12}+\overbrace{4+4+4}^{12}+\overbrace{4+4+4}^{12}+\overbrace{4+4+4}^{12}+\overbrace{4+4+4}^{12}}^{60}$$

Այստեղից յերևում ե, վոր այդ յերկու բաժանումից հետո 60-ը վերածված ե 15 հավասար մասերի։

Նույն ձևով կարող ենք բացատրել, վոր 300-ը յերեք արտադրիչների՝ 3.5·4 արտադրյալի վրա բաժանելու համար կարելի յե 300-ը բաժանել 3-ի վրա (կստանանք 100), ապա այդ քանորդը բաժանել 5-ի վրա (կստանանք 20) և վերջապես, վերջին քանորդը բաժանել 4-ի վրա (կստանանք 5)։ Այսպիսով՝

վորևե թիվ արտադրյալի վրա բաժանելու համար կարող ենք այդ թիվը բաժանել առաջին արտադրիչի վրա, ստացված քանորդը բաժանել յերկրորդ արտադրիչի վրա, այդ քանորդը յերրորդի վրա և այլն (յենթադրվում ե, վոր յուրաքանչյուր բաժանում կատարվում ե առանց մնացորդի)։

Այս հատկությունից կարելի յե յերբեմն օգտվել բանավոր բաժանման ժամանակ. օրինակ՝ 1840-ը 20-ի վրա բաժանելու համար մենք ուշադրություն ենք առնում այն, վոր 20=10.2 և 1840-ը բաժանում ենք 10-ի վրա (ստանում ենք, 184) և ստացած թիվը բաժանում 2-ի վրա (կստանանք 92)։ Նման ձևով վորևե թիվ 8-ի վրա բաժանելու համար, այսինքն 2. 2. 2 արտադրյալի վրա, կարելի յե բաժանելին բաժանել 2-ի, հետո ելի 2-ի և նորից 2-ի վրա։

77. *ԲԱԺԱՆԵԼԻԻ ՅԵՎ ԲԱԺԱՆԱՐԱՐԻ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏԵՎԱՆՔՈՎ ՔԱՆՈՐԴԻ ՓՈՓՈԽՎԵԼԸ։*

1) Յերբ բաժանելին մեծացնենք (կամ փոքրացնենք) մի քանի անգամ, ապա քանորդը կմեծանա (կամ կփոքրանա) նույնքան անգամ։

Այսպես, յեթե 20 : 5=4 օրինակի մեջ բաժանելին, մեծացնենք, յենթադրենք 3 անգամ, այսինքն 20-ի փոխարեն վերցնենք $20+20+20$, ապա կստանանք՝ $60:5=12$-ի։ Նոր քանորդը 3 անգամ մեծ է նախկինից, վորովհետև յեթե 5-ը 20-ի մեջ պարունակվում է 4 անգամ, ապա $20+20+20$ գումարի մեջ դա պետք է պարունակվի 4 անգամ, ելի 4 անգամ և դարձյալ 4 անգամ, այսինքն 3 անգամ ավելի, քան 20-ի մեջ։

2) Յերբ բաժանարարը մեծացնենք (կամ փոքրացնենք) **մի քանի անգամ, ապա քանորդը կփոքրանա** (կամ կմեծանա) **նույնքան անգամ։**

Այսպես, յեթե $60:5=12$ օրինակի մեջ բաժանարարը մեծացնենք, յենթադրենք 3 անգամ, այսինքն 5-ի փոխարեն բաժանարար ընդունենք 15, ապա կստանանք $60:15=4$-ի։ Նոր քանորդը նախորդից փոքր է 3 անգամ։ Այդպես էլ պետք է լինի, վորովհետև 15-ը հավասար է $5 \cdot 3$ արտադրյալին, իսկ արտադրյալի վրա բաժանելու համար կարելի յե բաժանելին բաժանել նախ առաջին արտադրիչի (5-ի վրա) ապա ստացած թիվը (12) բաժանել յերկրորդ արտադրիչի (3-ի) վրա, վորից քանորդը կփոքրանա (3 անգամ)։

Այս դեպքում յենթադրվում է, վոր բաժանումը կատարվում է առանց մնացորդի։

Իսկ յեթե մնացորդ կա, ապա քանորդը կարող է փոխվել այլ կերպ, քան հենց նոր նշվեց։ Օրինակ, վերցնենք այսպիսի բաժանում, $23:5=4$ (3 մնացորդ) և բաժանելին մեծացնենք 3 անգամ։ Կստանանք՝ $69:5=13$ (4 մնացորդ)․ քանորդը մեծացավ ավելի քան 3 անգամ։

Դիտողություն։ Յերբ բաժանելին և բաժանարարը փոփոխվում են միաժամանակ, ապա քանորդը յերբեմն կարող է մեծանալ, յերբեմն փոքրանալ և կամ թե անփոփոխ մնալ։ Նախապես իմանալու համար, թե ինչպես կփոփոխվի քանորդը, պետք է յենթադրել, վոր նախ փոփոխված է միայն բաժանելին, իսկ հետո և բաժանարարը (համեմատեցեք § 53-ի հետ)։

Պետք է հատուկ ուշադրություն դարձնել այն դեպքերի վրա, յերբ քանորդը մնում է անփոփոխ։

3) Քանորդը չի փոխվում, յերբ բաժանելին յեվ բաժանարարը մեծացնում ենք միեվնույն թիվ անգամ, վորովհետև

բաժանելին մեծացնելիս քանորդը մեծանում է, իսկ բաժանարարը մեծացնելիս նա փոքրանում է նույնքան անգամ։ Այսպես, յեթե $60:15=4$ օրինակի մեջ բաժանելին և բաժանարարը մեծացնենք 5 անգամ, ապա կստանանք $300:75=4$-ի։

4) Քանորդը չի փոխվում, յերբ բաժանելին յեվ բաժանարարը փոքրացված են միեվնույն թիվ անգամ,

վորովհետև բաժանելին փոքրացնելիս քանորդը փոքրանում է, իսկ բաժանարարը փոքրացնելիս նա նույնքան անգամ մեծանում է։ Այսպես, յեթե նույն օրինակում բաժանելին և բաժանարարը փոքրացնենք 5 անգամ, կստանանք $12:3=4$-ի։

78․ *ԻՆՉՊԵՍ ՊԵՏՔ Է ԲԱԺԱՆԵԼ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ։* Դիցուք թե պահանջվում է $8.12.20$ արտադրյալը բաժանել 4-ի վրա։ Փոխանակ նախ այդ արտադրյալը հաշվելու (դա հավասար է 1920-ի) և ապա 4-ի վրա բաժանելու (կստանանք 480), կարող ենք 4-ի վրա բաժանել արտադրիչներից մեկը, մյուսները թողնելով անփոփոխ և ապա հաշվել արտադրյալը։ Այսպես, դիցուք բաժանենք 12-ը 4-ի վրա, իսկ 8-ը և 20-ը թողնենք անփոփոխ, կստանանք $8.3.20=480$-ի, այսինքն կստանանք այն նույն թիվը ինչ ստացանք առաջ։ Այդպես էլ պետք է լիներ, վորովհետև բաժանել 4-ի վրա նշանակում է թիվը փոքրացնել 4 անգամ իսկ արտադրյալը կփոքրանա 4 անգամ, յեթե այդքան անգամ փոքրացնենք արտադրիչներից մեկը։ Այսպիսով․

արտադրյալը վորեվե թվի վրա բաժանելու համար կարելի յե այդ թվի վրա բաժանել արտադրիչներից մեկը, մյուսները թողնելով անփոփոխ։

79․ *ԻՆՉՊԵՍ ՊԵՏՔ Է ԲԱԺԱՆԵԼ ԳՈՒՄԱՐԸ ՅԵՎ ԻՆՉՊԵՍ ԲԱԺԱՆԵԼ ՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆԸ։* **1) Գումարը վորեվե թվի վրա բաժանելու համար կարելի յե այդ թվի վրա բաժանել յուրաքանչյուր գումարելին առանձին յեվ ստացած քանորդները գումարել** (յենթադրվում է, վոր բոլոր բաժանումները կատարվում են առանց մնացորդի)։

Այսպես, $21+14+35$ գումարը 7-ի վրա բաժանելու համար (այսինքն՝ իմանալու համար, թե այդ գումարի մեջ քանի անգամ 7 է պարունակվում), կարող ենք իմանալ, թե քանի անգամ 7 է պարունակվում 21-ի մեջ (3 անգամ), հետո 14-ի մեջ (2 անգամ), ապա 35-ի մեջ (5 անգամ), և ստացված թվերը գումարել 3+2+5=10։

2) Տարբերությունը որևէ թվի վրա բաժանելու համար կարելի է այդ թվի վրա առանձին առանձին բաժանել նվազելին ու հանելին և հետո առաջին քանորդից հանել երկրորդը։ Այսպես՝

(40—25) : 5=(40 : 5)—(25 : 5)=8—5=3։

Այդպես էլ պետք է լինի, որովհետև 40-ը պարունակում է 8 հնգյակ, 25-ը՝ 5 հնգյակ, իսկ 8 հնգյակից հանած 5 հնգյակ, ակնհայտ է, կմնա 3 հնգյակ։

80. ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԻ ՄԵՋ ՆՇՎԱԾ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿԱՐԳԻ ՄԱՍԻՆ։ Ընդունված է գումարումը և հանումը անվանել առաջին աստիճանի գործողություններ, իսկ բազմապատկումը և բաժանումը—երկրորդ աստիճանի գործողություններ։ Գործողությունների կարգը նշելու նպատակով փակագծերին դիմելու դեպքերը պակասեցնելու համար պայմանավորվեցինք.

Եթե փակագծեր չունեցող արտահայտության մեջ նշված են միայն մի աստիճանի գործողություններ, ապա դրանք կատարվում են այն կարգով, ինչ կարգով որ գրված են (ձախից աջ)։ Այսպես՝

40—10+15—8

արտահայտությունը նշանակում է, որ 40-ից հանվում է 10 (կստանանք 30), ստացված թվին ավելացվում է 15 (կստանանք 45) և ապա հանվում է 8 (կստանանք 37)։ Կամ

400 : 4.5 : 2

արտահայտությունը նշանակում է, որ 400-ը բաժանվում է 4-ի վրա (կստանանք 100), քանորդը բազմապատկվում է 5-ով)կստանանք 500) և այդ արտադրյալը բաժանվում է 2-ի վրա (կստանանք 250)։

Իսկ եթե փակագծեր չունեցող արտահայտության մեջ նշված են տարբեր աստիճանի գործողություններ, ապա նախ կատարվում են երկրորդ աստիճանի գործողությունները (բազ-

մապատկումը կամ բաժանումը), իսկ հետո—առաջին աստիճանի գործողությունները (գումարումը կամ հանումը)։ Օրինակ

6+20.4—10 : 2

արտահայտությունը նշանակում է, որ 20-ը պետք է բազմապատկել 4-ով (կստանանք 80), ապա 10-ը բաժանել 2-ի վրա (կստանանք 5), հետո 6-ին գումարել 80 (կստանանք 86) և, վերջապես, հանել 5 (կստանանք 81)։

Շեղումներն այս կարգից նշվում են փակագծերի միջոցով։ Այսպես, եթե գրված է.

6+(20·4—10) : 2,

ապա այդ նշանակում է՝ 20-ը բազմապատկել 4-ով, հանել 10 բաժանել 2-ի վրա և գումարել 6 (կստանանք 41)։

ՅԵՐԿՐՈՐԴ ԲԱԺԻՆ

ԹՎԵՐԻ ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

81. ՆԱԽՆԱԿԱՆ ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ Թվաբանական չորս գործողություններից յերկուսը — գումարումը և հանումը — միշտ հնարավոր է կատարել (այսինքն ամեն ուզած թվերով)։ Չնայած հանումը միշտ էլ հնարավոր չէ կատարել, բայց նրա հնարավորության հատկանիշը շատ հասարակ է. նվազելին չպետք է մեծ լինի հանելիից, ուստի, յեթե տված է յերկու թիվ, անմիջապես կարող ենք իմանալ, թե հնարավոր է արդյոք առաջինից հանել յերկրորդը։

Բաժանման նկատմամբ խնդիրն ուրիշ կերպ է դրված։ Գիտենք, վոր բաժանումը (առանց մնացորդի) միշտ հնարավոր չէ կատարել, բայց յերբեմն շատ դժվար է լինում, առանց բաժանում կատարելու, իմանալ, արդյոք մի թիվ մյուսի վրա բաժանվում է, թե վոչ։ Ուստի բաժանման գործողության հետ կապված են թվաբանության ամենադժվար հարցերը։ Այդ հարցերից մի քանիսը քննության կառնենք այս բաժնում։

Յերբ մի թիվ մյուսի վրա բաժանվում է առանց մնացորդի, ապա կարճության համար ուղղակի ասում են, վոր առաջին թիվը բաժանվում է յերկրորդի վրա։ Այդ դեպքում ասում են նաև, վոր առաջին թիվը յերկրորդի բազմապատիկն է, իսկ յերկրորդն՝ առաջինի բաժանարարը։ Այսպես, 15-ը 3-ի բազմապատիկն է, իսկ 3-ը՝ 15-ի բաժանարարը։

Նկատենք, վոր զերոն բաժանվում է ամեն մի թվի վրա (բացի զերոյից), վորի ժամանակ քանորդը նույնպես հավասար է զերոյի։ Իսկապես, քանի վոր $a \cdot 0=0$, ինչպիսին էլ վոր լինի a թիվը, ապա $0 : a=0$։

I. ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՏԿԱՆԻՇՆԵՐԸ

Գոյություն ունեն հատկանիշներ, վորոնցով իսկապես առանց բաժանման գործողություն կատարելու, յերբեմն հեշտությամբ կարելի յե իմանալ՝ տված թիվը վորևէ ուրիշ թվի վրա բաժանվում է, թե վոչ։ Այդ հատկանիշներն էլ հենց այժմ կքննարկենք։

82. ԳՈՒՄԱՐԻ ՅԵՎ ՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅԱՆ ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆԸ։ Բաժանելիության հատկանիշներն արտածելիս հաճախ պետք է օգտվենք գումարի և տարբերության հետևյալ հատկություններից.

1) յերբ յուրաքանչյուր գումարելին բաժանվում է միևնույն թվի վրա, ապա յեվ գումարը կբաժանվի այդ թվի վրա,

2) յերբ բոլոր գումարելիները, բացի մեկից, բաժանվում են վորևէ թվի վրա, ապա գումարը այդ թվի վրա չի բաժանվի,

3) յերբ նվազելին յեվ հանելին բաժանվում են վորևէ թվի վրա, ապա յեվ նրանց տարբերությունը կբաժանվի այդ թվի վրա։

1-ին և 3-րդ հատկություններն ակնհայտ են. յեթե, որինակ 5-ը ամբողջ թիվ անգամ (9) պարունակվում է 45-ի և ամբողջ թիվ անգամ (7) 35-ի մեջ, ապա ակնհայտ է, վոր նա ամբողջ թիվ անգամ կպարունակվի նրանց գումարի ($9+7=16$) և ամբողջ թիվ անգամ նրանց տարբերության ($9-7=2$) մեջ.

2-րդ հատկությունը հեշտությամբ ապացուցվում է յեթե 1-ին և 3-րդ հատկություններն արդեն հաստատված են։ Վերցնենք, որինակ, $45+35+22=102$ գումարը։ Այստեղ 45 և 35 գումարելիները բաժանվում են 5-ի վրա, իսկ վերջին 22 գումարելին չի բաժանվում։ Ցույց տանք, վոր գումարն էլ՝ 102-ը չի կարող բաժանվել 5-ի վրա։ Քանի վոր 45-ը և 35-ը բաժանվում են 5-ի վրա, ապա և նրանց գումարը՝ $45+35=80$-ը 1-ին հատկության հիման վրա, կբաժանվի 5-ի վրա։ Բայց $102=45+35+22$ հավասարությունից հետևում է $102-(45+35)=22$ կամ $102-80=22$։ Յեթե 102-ը բաժանվեր 5-ի վրա, ապա 3-րդ հատկության համաձայն $102-80=22$ տարբերությունը էլ պետք է բաժանվեր 5-ի վրա, քանի վոր 22-ը 5-ի չի բաժանվում, ապա նշանակում է, վոր 102-ն էլ 5-ի բաժանվել չի կարող։

83. 2-Ի ՎՐԱ ԲԱԺԱՆՎՈՂ ԹՎԵՐԻ ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՏԿԱՆԻՇԸ։ 2-ի վրա բաժանվող թվերը կոչվում են զույգ թվեր, իսկ չբաժանվողները—կենտ։ Բնական թվերի շարքում կենտ ու զույգ թվերն իրար հաջորդում են. այսպես, 1-ը կենտ թիվ է, 2-ը զույգ թիվ է, 3-ը կենտ է, 4-ը զույգ և այլն։

Զերոյով վերջացող ամեն մի թիվ իրենից ներկայացնում է տասնավորների գումար. որինակ, 320-ը 32 տասնավորի գումարն է։ Բայց տասնավորը բաժանվում է 2-ի վրա, դրա համար մի քանի տասնավորների գումարը ևս կբաժանվի 2-ի վրա (նա պարունակում է այնքան անգամ 5 յերկուսներ, վորքան նրա մեջ տասնավորներ կան)։ Ուրեմն, ամեն մի թիվ, վոր վերջանում է զերոյով, բաժանվում է 2-ի վրա։ Որինակ.

$$320 : 2 = 160։$$

Այժմ վերցնենք վորևե զույգ թվանշանով վերջացող թիվ, որինակ, 328-ը։ Այս թիվը կարելի յե ներկայացնել վորպես գումար այսպես.

$$328 = 320 + 8։$$

Գումարելիներից յուրաքանչյուրը՝ 320-ը և 8-ը բաժանվում է 2-ի վրա, ուրեմն 1-ին հատկության (§ 82) հիման վրա և 328-ը կբաժանվի 2-ի վրա և կլինի զույգ թիվ։ Ընդհակառակը այն թիվը, վոր կենտ թվանշանով է վերջանում, որինակ 329-ը 2-ի վրա բաժանվել չի կարող։

Իսկապես.

$$329 = 320 + 9,$$

և քանի վոր 320-ը բաժանվում է 2-ի, իսկ 9-ը չի բաժանվում, ապա 2-րդ հատկության (§ 82) հիման վրա 329-ը 2-ի վրա բաժանվել չի կարող։

Այսպիսով, 2-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն յեվ միայն այն թվերը, վորոնք վերջանում են զույգ թվանշանով։

Ծանոթություն։ 0 թվանշանը համարվում է զույգ, վորովհետև նա ներկայացնում է այնպիսի թիվ, վորը բաժանվում է 2-ի վրա (§ 81)։

84. 4-Ի ՎՐԱ ԲԱԺԱՆՎՈՂ ԹՎԵՐԻ ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՏԿԱՆԻՇԸ։ Յերկու զերոյով վերջացող յուրաքանչյուր թիվ իրենից ներկայացնում է հարյուրավորների գումար, որինակ, 2300-ը 23 հարյուրավորների գումարն է։ Բայց 100-ը բաժանվում է 4-ի վրա, դրա համար մի քանի հարյուրավորների գումարը ևս կբաժանվի 4-ի վրա (նա պարունակում է այնքան անգամ 25-ական չորսեր, վորքան հարյուրավոր կա նրանում)։ Ուրեմն, յերկու զերոյով վերջացող ամեն մի թիվ բաժանվում է 4-ի վրա։ Որինակ.

$$2300 : 4 = 575։$$

Այժմ վերցնենք յերկու այնպիսի թվեր, վորոնցից մեկի վերջին յերկու թվանշանով արտահայտվող թիվը բաժանվի 4-ի վրա, իսկ յերկրորդի վերջին յերկու թվանշանով արտայտվող թիվը չբաժանվի. որինակ՝ 2348-ը և 2350 (48-ը բաժանվում է 4-ի վրա, իսկ 50-ը՝ վոչ)։ Այդ թվերը կարելի յե ներկայացնել գումարի ձևով, այսպես.

$$2348 = 2300 + 48; \quad 2350 = 2300 + 50։$$

Առաջին որինակում յուրաքանչյուր գումարելին բաժանվում է 4-ի վրա, ուստի և գումարն էլ բաժանվում է 4-ի վրա, ուրեմն, 2348-ը բաժանվում է 4-ի վրա։ Յերկրորդ որինակում առաջին գումարելին բաժանվում է 4-ի վրա, իսկ յերկրորդը չի բաժանվում, ուստի 2350 գումարը չի բաժանվում 4-ի վրա։ Այսպիսով, **4-ի վրա բաժանվում են այն բոլոր յեվ միայն այն թվերը, վորոնց վերջին յերկու թվանշանով արտահայտվող թիվը բաժանվում է 4-ի վրա։**

Նույն յեղանակով հեշտ է ապացուցել, վոր 8-ի վրա բաժանվում են այն բոլոր և միայն այն թվերը, վորոնց վերջին յերեք թվանշաններով արտահայտվող թիվը բաժանվում է 8-ի վրա։

85. 5-Ի ՅԵՎ 10-Ի ՎՐԱ ԲԱԺԱՆՎՈՂ ԹՎԵՐԻ ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՏԿԱՆԻՇՆԵՐԸ։ Տասնավորը բաժանվում է 5-ի և 10-ի վրա, դրա համար էլ տասնավորներից կազմված, այսինքն զերոյով վերջացող թիվը բաժանվում է 5-ի և 10-ի վրա։ Յեթե թիվը զերոյով չի վերջանում, ապա նա 10-ի վրա չի բաժանվում, իսկ 5-ի վրա կբաժանվի միայն այն ժամանակ, յերբ նրա վերջին թվանշանը 5 է, վորովհետև բոլոր միանիշ թվերից միայն 5-ն է բաժանվում 5-ի վրա։ Յեվ այսպես.

5-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն յեվ միայն այն թվերը, վորոնք վերջանում են զերոյով կամ 5 թվանշանով։ 10-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն յեվ միայն այն թվերը, վորոնք վերջանում են զերոյով։

Դիտողություն։ Նման ձևով էլ կարելի յե համոզվել, վոր 25-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն և միայն այն թվերը, վորոնց վերջին յերկու թվանշանները կամ զերոներ են, կամ 25, կամ 50, կամ 75։

50-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն և միայն այն թվերը, վորոնց վերջին յերկու թվանշանները զերոներ են կամ 50։

86. 3-Ի ՅԵՎ 9-Ի ՎՐԱ ԲԱԺԱՆՎՈՂ ԹՎԵՐԻ ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՏԿԱՆԻՇՆԵՐԸ։ Նախապես նկատենք, վոր 3-ի և 9-ի վրա բաժանվում է ամեն մի թիվ, վորը գրված է միայն մի թվանշանի՝ 9-ի միջոցով, այսինքն 9, 99, 999 և այլն։ Իսկապես.

$$999 : 3 = 333 \qquad 9999 : 3 = 3333 \text{ և այլն}$$

$$999 : 9 = 111, \qquad 9999 : 9 = 1111 \text{ և այլն։}$$

Նկատելով այդ, վերցնենք վորևէ թիվ, օրինակ, 2457-ը և վերածենք տարբեր կարգի առանձին միավորների (բացի հասարակ միավորներից, վորոնց կթողնենք առանց վերածելու).

$$\begin{aligned} 2457 = {} & 1000 + 1000 + \\ & + 100 + 100 + 100 + 100 + \\ & + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 \\ & + 7 \end{aligned}$$

Յուրաքանչյուր հազարավորը կվերածենք 999-ի և 1-ի, յուրաքանչյուր հարյուրավորը՝ 99-ի և 1-ի, յուրաքանչյուր տասնավորը՝ 9-ի և 1-ի։ Այդ ժամանակ 2 հազարի փոխարեն կստանանք 2 անգամ 999 և 2 միավոր, 4 հարյուրի փոխարեն կստանանք 4 անգամ 99 և 4 միավոր, 5 տասնավորի փոխարեն՝ 5 անգամ 9 և 5 միավոր։

Հետևապես,

$$\begin{aligned} 2457 = {} & 999 + 999 && + 2 + \\ & + 99 + 99 + 99 + 99 && + 4 + \\ & + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 && + 5 + \\ & && + 7 \end{aligned}$$

999, 99 և 9 գումարելիները բաժանվում են 3-ի և 9-ի վրա, ուրեմն, տված թվի բաժանելիությունը 3-ի և 9-ի վրա կախում ունի միայն 2+4+5+7 գումարից. յեթե այդ գումարը բաժանվում է (չի բաժանվում) 3-ի և 9-ի վրա, ապա և տված թիվն էլ բաժանվում է (չի բաժանվում) այդ թվերի վրա։ 2+4+5+7 գումարը տված թվի թվանշաններով արտահայտվող թվերի գումարն է. կարճության համար ասում են, վոր դա տված թվի թվանշանների գումարն է։ Ուստի.

3-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն յեվ միայն այն թվերը, վորոնց թվանշանների գումարը բաժանվում է 3-ի վրա։

9-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն յեվ միայն այն թվերը, վորոնց թվանշանների գումարը բաժանվում է 9-ի վրա։

2457 թվի մեջ թվանշանների գումարը հավասար է 18-ի, 18-ը բաժանվում է 3-ի և 9-ի վրա, ուրեմն՝ 2457-ը նույնպես կբաժանվի և 3-ի և 9-ի վրա։ Իսկապես,

$$2457 : 3 = 819, \quad 2457 : 9 = 273\text{։}$$

Քանի վոր 9-ը բաժանվում է 3-ի վրա, ապա ուրեմն, 9-ի վրա բաժանվող ամեն մի թիվ կբաժանվի 3-ի վրա։ Բայց թիվը կարող է բաժանվել 3-ի վրա և միաժամանակ չբաժանվել 9-ի վրա։ Այսպես, 17331 թվի թվանշանների գումարը հավասար է 15-ի. քանի վոր 15-ը բաժանվում է 3-ի վրա, իսկ 9-ի վրա չի բաժանվում, ուստի և 17331-ը բաժանվում է 3-ի վրա, իսկ 9-ի վրա չի բաժանվում։

Դիտողություն։ Թվաբանության ձեռնարկներում գրված դասընթացներում կարելի յե գտնել 7-ի, 11-ի, 13-ի, 37-ի և այլ թվերի վրա բաժանվող թվերի բաժանելիության հատկանիշները, բայց դրանք այնքան բարդ են, վոր գործնականում դրանցից օգտվելը դժվար է, ուստի մենք դրանք չենք շարադրում։

87. 6-Ի, 12-Ի, 15-Ի ՎՐԱ ԲԱԺԱՆՎՈՂ ԹՎԵՐԻ ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՏԿԱՆԻՇՆԵՐԸ։ Յեթե վորևէ թիվ բաժան-

վում ե 6-ի վրա, ապա այն կարելի յե վերլուծել վեցյակների, այսինքն ներկայացնել.

$$6+6+6+6...+6$$

գումարի տեսքով։

Բայց յուրաքանչյուր վեցյակ կարելի յե վերլուծել յերկյակների (2+2+2) և յեռյակների (3+3), ուրեմն, նա և ամեն մի այդպիսի թիվ կարելի յե վերլուծել յերկյակների ու յեռյակների. հետևապես, այդ թիվը պետք ե միաժամանակ բաժանվի թե 2-ի և թե 3-ի վրա։ Այսպիսով.

Վորպեսզի թիվը 6-ի վրա բաժանվի, անհրաժեշտ ե, վոր նա բաժանվի 2-ի յեվ 3-ի վրա։

Որինակ, 3584-ը 6-ի վրա չի բաժանվում քանի վոր նա 3-ի վրա չի բաժանվում (թեպետ և 2-ի վրա բաժանվում ե)։ 3585-ը նույնպես չի բաժանվում 6-ի վրա, քանի վոր նա չի բաժանվում 2-ի վրա (թեպետ և 3-ի վրա բաժանվում ե)։

Բայց այս դատողությունը մեզ դեռ չի համոզում, վոր 6-ի վրա բաժանվող թվերի բաժանելիության այդ հատկանիշը բավարար ե, այսինքն, վոր ամեն մի թիվ, վորը բաժանվում ե 3-ի և 2-ի վրա, կբաժանվի նաև 6-ի վրա։ Այժմ ապացուցենք, վոր այդ այդպես ե։ Ընդունենք, վոր տված թիվը բաժանվում ե 3-ի և 2-ի վրա և համոզվենք, վոր այդ դեպքում նա կբաժանվի նաև 6-ի վրա։

Դիցուք, տված թիվը բաժանվում ե 3-ի և 2-ի վրա։ Այն ժամանակ այն կարելի յե վերածել թե յեռյակների և թե յերկյակների։ Ենթադրենք, թե այդ թիվը վերածեցինք յեռյակների.

$$3+3+3+3...+3։$$

Ձախից սկսած յուրաքանչյուր 2 յեռյակը կմիացնենք 1 վեցյակում։ Այն ժամանակ պետք ե ստացվի յերկուսից մեկը.

1) բոլոր յեռյակները կմիացվեն վեցյակներում, վոչ մի ավելորդ յեռյակ չի մնա. դա նշանակում ե, վոր մեր թիվը ներկայացվեց

$$6+6...+6$$

տեսքով, այսինքն վերածվեց վեցյակների, հետևապես, նա բաժանվում ե 6-ի վրա.

2) մի յեռյակ մնաց առանց զույգի, այսինքն տված թիվը ներկայացվեց հետևյալ տեսքով.

$$6+6+...+6+3։$$

Բայց այստեղ բոլոր գումարելիները, բացի վերջինից, բաժանվում են 2-ի վրա, ուրեմն, 2-րդ հատկության (§ 82) հիման վրա մեր թիվը չեր բաժանվի 2-ի վրա, բայց քանի վոր ըստ պայմանի նա բաժանվում ե 2-ի վրա, ապա այս դեպքը հնարավոր չե։

Այժմ կարող ենք պնդել, վոր վորևե թիվ 6-ի վրա բաժանվելու համար անհրաժեշտ ե և բավական, վոր նա բաժանվի 2-ի և 3-ի վրա, կամ, ավելի կարճ՝

6-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն յեվ միայն այն թվերը, վորոնք բաժանվում են թե՛ 2-ի յեվ թե՛ 3-ի վրա։

Որինակ, 13854 թիվը բաժանվում ե 6-ի վրա, քանի վոր նա բաժանվում ե 2-ի վրա (վերջանում ե զույգ թվանշանով) և միաժամանակ բաժանվում ե 3-ի վրա (նրա թվանշանների գումարը բաժանվում ե 3-ի վրա)։ Իսկապես՝ 13854 : 6 = 2309։

Նույն յեղանակով կարելի յե համոզվել, վոր **12-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն յեվ միայն այն թվերը, վորոնք բաժանվում են 3-ի յեվ 4-ի վրա։ 15-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն յեվ միայն այն թվերը, վորոնք բաժանվում են 3-ի յեվ 5-ի վրա։**

88. *ՆԱԽՈՐԴ ՏԻՊԻ ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՏԿԱՆԻՇՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՀԻՄՆԱՎՈՐՈՒՄԸ։* 6-ի, 12-ի, 15-ի և ուրիշ շատ թվերի բաժանելիության հատկանիշներն ունեն ընդհանուր տեսական հիմնավորում, վորը և այստեղ կշարադրենք։

Թեորեմ։ Յեթե a_1a_2 յերկու թվերի արտադրյալը բաժանվում ե p յերրորդ թվի վրա յեվ a_1 կամ a_2 թվերից մեկը p-ի հետ ընդհանուր բաժանարարներ չունի, բացի միավորից, ապա նրանցից մյուսը կբաժանվի p-ի վրա։

Ապացույց։ Դիցուք, a_1-ը p-ի հետ, բացի միավորից, ուրիշ ընդհանուր բաժանարարներ չունի. այդ դեպքում ապացուցենք, վոր a_2-ը պետք ե բաժանվի p-ի վրա։

a_1-ը բաժանենք p-ի և քանորդն ու մնացորդը համապատասխանաբար անվանենք q և r։ Այն ժամանակ

$$a_1 = pq + r$$

Այժմ r մնացորդի նկատմամբ համոզվենք, վոր նա 1) հավասար չե 0-ի և 2) p-ի հետ ընդհանուր բաժանարարներ չունի, բացի միավորից։ Իսկապես, յեթե

$r=0$, ապա $a_1=pq$ և այդ դեպքում a_1-ը կբաժանվի p-ի վրա և, հետևապես, a_1 և p թվերը կունենային ընդհանուր բաժանարար, միավորից տարբեր, վորը հակասում է թեորեմի պայմանին։ Այնուհետև յենթադրենք, վոր p-ն և r-ն ունեն վորևէ ընդհանուր բաժանարար $t>1$։ Այդ դեպքում a_1-ը կբաժանվեր t-ի վրա և, հետևապես, a_1-ը և p-ն կունենային ընդհանուր բաժանարար $t>1$, վորը հակասում է պայմանին։

Յեթե r մնացորդը հավասար չէ միավորի, ապա բաժանենք p-ն r-ի վրա և այդ բաժանումից ստացած քանորդը և մնացորդն անվանենք q_1 և r_1։ Այդ դեպքում՝

$$p=rq_1+r_1.$$

Քանի վոր p և r-ն ըստ ապացուցածի ընդհանուր բաժանարարներ չունեն բացի միավորից, ապա վերջին հավասարությունից համոզվում ենք, նախորդի նման, վոր 1) r_1-ը հավասար չէ զերոյի և 2) r-ը և r_1-ը ընդհանուր բաժանարարներ չունեն բացի միավորից։ Յեթե r_1-ը հավասար չէ միավորի, ապա r-ը կբաժանենք r_1-ի վրա, վորից կստանանք r_2-մնացորդը, վորը հավասար չէ զերոյի և r_1-ի հետ ընդհանուր բաժանարարներ չունի բացի միավորից։ Յեթե r_2-ը հավասար չէ միավորի, ապա r_1-ը կբաժանենք r_2-ի վրա և այլն. այդ ժամանակ կստանանք մի շարք հավասարություններ՝

$$\begin{aligned} a_1&=pq+r,\\ p&=rq_1+r_1,\\ r&=r_1q_2+r_2,\\ r_1&=r_2q_3+r_3,\\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

վորոնցից համոզվում ենք, վոր r, r_1, r_2 և այլն մնացորդները հավասար չեն զերոյի։ Քանի վոր ամեն մի բաժանման ժամանակ մնացորդը պետք է փոքր լինի բաժանարարից, հետևապես, $r<p$, $r_1<r$, $r_2<r_1$ և այլն։ Ուստի բավական թվով բաժանումներ կատարելով, վերջապես կստանանք այնպիսի մնացորդ, վորը հավասար է միավորի։

Դիցուք, $r_n=1$-ի։ Այն ժամանակ $r_{n-2}=r_{n-1}q_n+1$.

Ստացած հավասարություններից յուրաքանչյուրն անդամ առ անդամ բազմապատկենք a_2-ով.

$$\begin{aligned} a_1a_2&=pqa_2+ra_2,\\ pa_2&=rq_1a_2+r_1a_2,\\ ra_2&=r_1q_2a_2+r_2a_2,\\ &\dots\dots\dots,\\ r_{n-2}a_2&=r_{n-1}q_na_2+a_2. \end{aligned}$$

Ուշադրություն դարձնելով այդ հավասարություններից առաջինի վրա՝ գտնում ենք այսպես.

Քանի վոր a_1a_2 արտադրյալն ըստ պայմանի բաժանվում է p-ի վրա, ապա և pqa_2+ra_2 գումարը կբաժանվի p-ի վրա։ Այդ գումարի առաջին գումարելին բաժանվում է p-ի վրա, հետևապես, յերկրորդ գումարելին, այսինքն,

ra_2 արտադրյալն էլ կբաժանվի p-ի վրա։ Այնուհետև անցնելով յերկրորդ հավասարությանը, գտնում ենք, վոր pa_2 գումարը և գումարելիներից մեկը (ra_2) q_1 բաժանվում է p-ի վրա, վորտեղից յեզրակացնում ենք, վոր յերկրորդ գումարելին էլ՝ r_1a_2-ը կբաժանվի p-ի վրա։ Ապա անցնելով յերրորդ հավասարությանը, յերրորդից չորրորդին, չորրորդից հինգերորդին և այլն, վերջապես, կհասնենք վերջին հավասարությանը, վորտեղից կեզրակացնենք, վոր a_2-ը բաժանվում է p-ի վրա։

89. ՀԵՏԵՎՈՒԹՅՈՒՆ։ Յեթե a թիվը միաժամանակ բաժանվում է յերկու թվերի՝ p յեվ q-ի վրա, վորոնք ընդհանուր բաժանարարներ չունեն, բացի միավորից, ապա a-ն կբաժանվի նույնպես pq արտադրյալի վրա։

a-ն p-ի վրա բաժանելուց ստացած քանորդը նշանակենք Q-ով. այն ժամանակ

$$a=pQ.$$

Քանի վոր ըստ պայմանի a-ն բաժանվում է q-ի վրա, ապա այդ հավասարությունից յեզրակացնում ենք, վոր pQ բաժանվում է q-ի վրա։ Բայց p-ն q-ի հետ ընդհանուր բաժանարարներ չունի, բացի միավորից, ուրեմն, թեորեմի համաձայն, Q-ն պետք է բաժանվի q-ի վրա։ Դիցուք, այդ բաժանումից ստացած քանորդը Q_1 է. այդ դեպքում

$$Q=qQ_1.$$

Նախորդ հավասարության մեջ Q-ի փոխարեն դնելով նրան հավասար արտադրյալը կստանանք.

$$a=p(qQ_1)=(pq)Q_1,$$

վորտեղից յերևում է, վոր a թիվը (pq) և Q_1 բազմապատկիչների արտադրյալն է, ուրեմն a-ն կբաժանվի pq-ի։

Այսպիսով, յեթե թիվը բաժանվում է 2-ի և 3-ի վրա, ապա նա կբաժանվի 6-ի վրա. յեթե թիվը բաժանվում է 3-ի և 4-ի վրա, ապա նա կբաժանվի 12-ի վրա. յեթե բաժանվում է 3-ի և 5-ի վրա, ապա նա բաժանվում է 15-ի վրա և այլն։

Ծանոթություն. Յեթե p-ն և q-ն փոխադարձ պարզ թվեր չեն, ապա վորևէ թիվը p-ն և q-ի վրա բաժանելուց դեռ չի հետևում, վոր այդ թիվը կբաժանվի pq արտադրյալի վրա։ Այսպես, 36-ը բաժանվում է 4-ի և 6-ի վրա, բայց չի բաժանվում 4.6(=24) արտադրյալի վրա։

II. ԹՎԵՐԻ ՎԵՐԱԾՈՒՄԸ ՊԱՐԶ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿԻՉՆԵՐԻ

90. ՊԱՐԶ ՅԵՎ ԲԱՐԴ ԹՎԵՐ։ Անշուշտ, ամեն մի թիվ բաժանվում է միավորի և իրեն վրա։ Կան խիստ շատ թվեր, վորոնք վոչ միայն բաժանվում են միավորի և իրենց վրա, այլ ունեն նաև ուրիշ բաժանարարներ, օրինակ, 30-ը բացի միավորից ու 30-ից ունի նաև 2, 3, 5, 6 և 15 բաժանարարները։

Ամեն մի թիվ, բացի միավորից, վորը բաժանվում է միայն միավորի և իր վրա, կոչվում է պարզ (կամ բացարձակ պարզ, կամ նախնական) թիվ:

Այն թիվը, վորը բաժանվում է վոչ միայն միավորի և իր վրա, այլ և ուրիշ թվերի վրա, կոչվում է բաղադրական (կամ բարդ) թիվ:

1 թիվը չի դասվում վոչ պարզ և վոչ էլ բարդ թվերի շարքին. նա գրավում է հատուկ դիրք:

Կան 100-ից փոքր 25 պարզ թվեր, վորոնք են՝

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,
43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79 83, 89, 97:

Այս գրքի վերջում բերված է 6000-ից փոքր բոլոր պարզ թվերի աղյուսակը:

91. ԲԱՐԴ ԹՎԻ ՎԵՐԱԾՈՒՄԸ ՊԱՐԶ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿԻՉՆԵՐԻ:

Յուրաքանչյուր բարդ թիվ կարելի յե վերածել պարզ բազմապատկիչների, այսինքն կարելի յե ներկայացնել վորպես պարզ թվերի արտադրյալ: *Օրինակ, 12-ը վերածել պարզ բազմապատկիչների, նշանակում է այդ թիվը ներկայացնել այսպես. 12=2.2.3:*

Դիցուք, թե պահանջվում է վորևէ բարդ թիվ վերածել պարզ բազմապատկիչների, օրինակ, 420-ը: Դրա համար գտնում ենք (ըստ բաժանելիության հատկանիշների) այն ամենափոքր պարզ թիվը, վորի վրա բաժանվում է 420-ը. այդ թիվը 2-ն է. 420-ը բաժանենք 2-ի վրա.

$$420 : 2 = 210$$

ուրեմն

$$420 = 210 \cdot 2: \qquad (1)$$

Այժմ վորոնում ենք այն ամենափոքր պարզ թիվը, վորի վրա բաժանվում է 210 բարդ թիվը, այդ թիվը 2-ն է. 210-ը բաժանենք 2-ի՝

$$210 : 2 = 105,$$

ուրեմն

$$210 = 105.2:$$

(1) հավասարության մեջ 210-ը կփոխարինենք իրեն հավասար արտադրյալով՝

$$420 = 105.2.2, \qquad (2)$$

Այն ամենափոքր պարզ թիվը, վորի վրա բաժանվում է 105 բարդ թիվը, 3-ն է. 105-ը բաժանենք 3-ի վրա.

$$105 : 3 = 35:$$

ուրեմն

$$105 = 35.3:$$

(2) հավասարության մեջ 105-ը փոխարինենք իրեն հավասար արտադրյալով.

$$420 = 35.3.2.2: \qquad (3)$$

Այն ամենափոքր պարզ թիվը, վորի վրա բաժանվում է 35 բարդ թիվը, 5-ն է. 35-ը բաժանելով 5-ի վրա, ստանում ենք 7. ուրեմն, 35=7.5: (3) հավասարության մեջ 35-ը փոխարինելով իրեն հավասար 7.5 արտադրյալով, կստանանք

$$420 = 7.5.3.2.2:$$

Դա էլ հենց կլինի պահանջվող վերածումը, քանի վոր բոլոր արտադրիչները պարզ թվեր են:

Քանի վոր արտադրիչների տեղերը փոխելուց արտադրյալը չի փոխվում, ապա դրանց կարելի յե գրել ուզած դասավորությամբ. սովորաբար գրում են փոքրից դեպի մեծը, այսպես.

$$420 = 2.2.3.5.7:$$

Պարզ բազմապատկիչների վերածումն ավելի հարմար է գրել այսպես.

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

այսինքն՝ գրում են տված բարդ թիվը և նրա աջ կողմում տանում ուղղաձիգ գիծ: Գծից դեպի աջ գրում են այն ամենափոքր պարզ թիվը, վորի վրա բաժանվում է տված բարդ թիվը, և նրա վրա բաժանում են տված թիվը: Քանորդի թվանշանները գրում են բաժանելիի տակ: Այդ քանորդի հետ էլ վարվում են այնպես, ինչպես տված թվի հետ: Գործողությունը շա-

բաժանվում են այնքան, մինչև քանորդում ստացվի միավոր։ Այն ժամանակ գծի աջ կողմում գտնվող բոլոր թվերը կլինեն տված թվի պարզ բազմապատիկները։

Քննարկած օրինակում ամեն անգամ վերցնում էինք ստացված թվի ամենափոքր պարզ բաժանարարը։ Շատ հաճախ վերածման այս եղանակը ամենահարմարն է, որովհետև որքան թիվը փոքր է, այնքան հեշտ է նրա վրա բաժանելը. բացի այդ, փոքր բաժանարարների մեծ մասի համար կան բաժանելիության հատկանիշներ։ Բայց նշված ուղին պարտադիր չէ և հաճախ պարզ բազմապատիկների վերածել կարելի յե այլ կարգով և ավելի հեշտ։ Այսպես, հենց մեր օրինակում իսկույն նկատում ենք, որ 420-ը բաժանվում է 10=2.5-ի վրա։ Ուստի վերածումը կատարելով (մտքում)

42	2
21	3
7	7
1	

կարող ենք գրել.

$$420=10.42=2.5.2.3.7=2.2.3.5.7։$$

Յեթե պահանջվում է, օրինակ, 13 000-ը վերածել պարզ բազմապատիկների, ապա կարող ենք իսկույն նկատել, որ 13 000=13.1000, և քանի որ 13-ը պարզ թիվ է, ապա մնում է միայն 1000-ը վերածել պարզ բազմապատիկների.

$$1000=10.10.10=2.5.2.5.2.5,$$

և միանգամից ստանում ենք

$$13\,000=2.2.2.5.5.5.13։$$

Վերցնենք մի օրինակ ևս. 8874-ը վերածենք պարզ բազմապատիկների։

8874	2
4437	3
1479	3
493	17
29	29
1	

Հասնելով 493 քանորդին, դժվարանում ենք իմանալ, թե նա ինչ թվի վրա յե բաժանվում։ Այսպիսի դեպքերում դիմում ենք պարզ թվերի աղյուսակին (այս գրքի վերջում)։ Յեթե մեզ դժվարության առաջ կանգնեցնող թիվը գտնվում է աղյուսակի մեջ, ապա նա բաժանվում է միայն իր վրա։ 493-ը չի գտնվում պարզ թվերի աղյուսակում, նշանակի, այդ թիվը բարդ է. ուստի և փորձում ենք բաժանել 7-ի, 11-ի, 13-ի և այլ պարզ թվերի վրա այնքան, մինչև որ բաժանումը կատարվի առանց մնացորդի։ Պարզվում է, որ 493-ը բաժանվում է 17-ի վրա և քանորդում ստացվում է 29։ Այժմ կարող ենք վերածումը վերջացնել։

Այս օրինակից յերևում է, որ յերբեմն բարդ թվերի վերածումը շատ դժվար է կատարել, քանի որ վերածելիս կարող ենք ստանալ այնպիսի մեծ թիվ, որի բարդ կամ պարզ լինելը դժվար է վորոշել. իսկ յեթե նա բարդ է, ապա միշտ հեշտ չէ գտնել նրա ամենափոքր պարզ բազմապատիկը։

92. ԱՍՏԻՃԱՆ ԲԱՐՁՐԱՑՆԵԼԸ։ Թվերը բազմապատիկների վերածելիս, նույնպես և ուրիշ շատ դեպքերում, հաճախ ստիպված ենք լինում մի քանի միատեսակ արտադրիչներ գրել իրար մոտ, օրինակ, 2.2.2.2 կամ 5.5.5։ Ինչպես հավասար գումարելիներ գումարելիս մենք ներմուծեցինք հատուկ անվանում (բազմապատկում) և հատուկ նշանակում (2.4 փոխանակ 2+2+2+2), այնպես և հավասար արտադրիչներ բազմապատկելիս օգտակար է ներմուծել հատուկ անվանում և հատուկ նշանակում։

Միատեսակ արտադրիչների արտադրյալը կոչվում է աստիճան։ Այսպես, 2.2.2.2-ը 2-ի չորրորդ աստիճանն է։ Այդ գրվում է այսպես՝

$$2.2.2.2=2^4;$$

ընդ որում 2-ը կոչվում է աստիճանի հիմք, իսկ 4-ը — աստիճանի ցուցիչ։ Գործողությունն ինքը կոչվում է 2-ը բարձրացնել չորս աստիճան։ Ճիշտ նույն ձևով էլ

$$5.5.5=5.^3;$$

կարդացվում է այսպես՝ 5-ը յերրորդ աստիճան. այստեղ 5-ը հիմքն է, իսկ 3-ը — աստիճանի ցուցիչը։

Յերկրորդ աստիճանը ավելի կարճ անվանում են տված հիմքի քառակուսին, *իսկ յերրորդ աստիճանը — տված հիմքի* խորանարդը: *Այսպես, 7^2-ն կարդացվում ե «7-ի քառակուսին», իսկ 5^3-ը — «5-ի խորանարդը»: Թվի առաջին աստիճանը անվանում ենք հենց այդ թիվը. $3^1=3$: Այսպիսի նշանակման միջոցով թվերի պարզ բազմապատկիչների վերածումը կարելի յե գրել ավելի կարճ. այսպես § 91-ում քննարկած որինակներում կարող ենք գրել՝*

$$420=2^2.3.5.7,$$
$$13\,000=2^3.5^3.13:$$

Յերբեմն այդ կրճատումը լինում ե շատ նկատելի, որինակ,

$$1536=2.2.2.2.2.2.2.2.2.3=2^9.3:$$

93. *ԲԱՐԴ ԹԻՎԸ ՎԵՐԱԾՎՈՒՄ Ե ՊԱՐԶ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿԻՉՆԵՐԻ ՄԻԱՅՆ ՄԵԿ ՇԱՐՔԻ:* *Հեշտ ե ապացուցել, վոր 91-րդ պարագրաֆում նկարագրած յեղանակով ամեն մի թիվ կարելի յե վերածել պարզ բազմապատկիչների: Բայց կիրառելով այդ յեղանակը, մենք կարող ենք վերև նշված կարգին անպայման չհետևել, այսինքն վերածումը կարող ենք սկսել վոչ թե այն* ամենափոքր *պարզ թվից, վորի վրա բաժանվում ե բարդ թիվը, այլ վորևե այլ հաջորդականությամբ (և նույնիսկ կարող ենք, ինչպես այդ տեսանք, նախ բարդ թիվը վերածել բարդ բազմապատկիչների և ապա դրանք վերածել պարզերի): Ուստի, հարց ե ծագում, թե արդյոք չի՞ կարող յերբեմն միևնույն բարդ թվի համար տարբեր պարզ բազմապատկիչների յերկու (կամ ավելի) շարքեր ստացվել, վորոնք իրարից տարբերվեն կամ հենց բազմապատկիչներով, կամ հավասար բազմապատկիչների թվով: Որինակ, 14 000-ը ունի հետևյալ վերածումը՝ $2^4. 5^3. 7$: Նա չի՞ կարող, արդյոք, ունենալ մի այլ վերածում ևս, վորտեղ մտնի վորևե ուրիշ պարզ բազմապատկիչ, բացի 2, 5, 7-ից կամ վորտեղ այդ բազմապատկիչները կրկնվեն մի այլ թիվ անգամ, քան $2^4, 5^3. 7$ վերածման մեջ: Ապացուցված ե, վոր այդ չի կարող լինել, այսինքն, վոր բարդ թիվը, ինչպես էլ վերածենք այն, տալիս ե պարզ բազմապատկիչների մի շարք միայն (ի հարկե այդ բազմապատկիչները կարելի յե տեղափոխել):*

Թվերը պարզ արտադրիչների վերածելու հնարավորության յեվ միակության ապացույցը: *Խստորեն ապացուցելու համար վոր ամեն մի թիվ (բացի միավորից) կարելի յե պարզ բազմապատկիչների վերածել և այն էլ միայն մի յեղանակով, նախ ապացուցենք հետևյալ յերկու թեորեմները:*

1. ԹԵՈՐԵՄ: Ամեն մի թիվ, բացի միավորից, ունի առնվազն մեկ պարզ բաժանարար:

Ապացույց: *Դիցուք, $a\neq1$. յեթե a-ն պարզ թիվ ե, ապա հենց այդ թիվն ինքը կլինի իր պարզ բաժանարարը, և թեորեմը ապացուցված ե. իսկ յեթե a-ն բարդ թիվ ե, ապա նա ունի a-ից և միավորից տարբեր բաժանարարներ. Դիցուք, թե այդ բաժանարարներից ամենափոքրը b-ն ե. այդ դեպքում b-ն չի կարող բարդ թիվ լինել, քանի վոր յեթե նա բաժանվեր c-ի վրա, վորը իրենից և միավորից տարբեր ե, ապա այդ c թվի վրա կբաժանվեր նաև a թիվը, և, ուրեմն, b-ն չեր լինի a-ի ամենափոքր բաժանարարը: Ուստի b-ն պարզ թիվ ե, իսկ քանի վոր նա a-ի բաժանարարն ե, ապա, ուրեմն, թեորեմն ապացուցված ե:*

2 ԹԵՈՐԵՄ. Մի քանի արտադրիչների՝ $a_1\ a_2\ a_3 \dots a_n$ արտադրյալը p պարզ թվի կարող ե բաժանվել միայն այն դեպքում, յերբ արտադրիչներից առնվազն մեկը բաժանվում ե p-ի վրա:

Ապացույց: *Տված արտադրյալը դիտելով միայն յերկու՝ a_1 և $(a_2a_3 \dots a_n)$ արտադրիչների արտադրյալ կարող ենք դատել այսպես. յեթե a-ն չի բաժանվում p պարզ թվի վրա, ապա այդ նշանակում ե, վոր a_1-ը և p-ն, բացի միավորից, ուրիշ ընդհանուր բաժանարարներ չունեն. այդ դեպքում էլ 88-ում ապացուցված թեորեմի համաձայն $(a_2, a_3 \dots a_n)$ թիվը պետք ե բաժանվի p-ի վրա: Դրա նման կհամոզվենք, վոր յեթե a_2 չի բաժանվում p-ի վրա. ապա $(a_3\ a_4 \cdots a_n)$ թիվը պետք ե բաժանվի p-ի վրա: Շարունակելով այս դատողությունները, կգտնենք, վոր յեթե $a_1, a_2, a_3 \dots a_{n-1}$ թվերից վոչ մեկը p-ի վրա չի բաժանվում, ապա a_n-ը բաժանվում ե p-ի վրա: Յեվ այսպես, $a_1, a_2\ a_3 \dots a_n$ թվերից վորևե մեկը բաժանվում ե p-ի վրա:*

Այժմ ապացուցելու համար վոր յուրաքանչյուր թիվ, բացի միավորից հնարավոր ե վերածել պարզ բազմապատկիչների, վարվում ենք այսպես. Դիցուք $a\neq1$. յեթե a-ն պարզ թիվ ե, ապա պնդումն ապացուցված ե. իսկ յեթե a-ն բարդ թիվ ե, ապա 1-ին թեորեմի համաձայն նա ունի p_1 պարզ բաժանարարը:

Դիցուք

$$a=p_1a_1$$

յեթե a_1-ը պարզ թիվ ե, ապա թեորեմն ապացուցված ե, իսկ յեթե բարդ ե, ապա, համաձայն 1-ին թեորեմի, նա ունի p_2 պարզ բաժանարար:

Դիցուք $a_1=p_2a_2$,

այնպես վոր

$$a=p_1p_2a_2.$$

յեթե a_2-ը պարզ թիվ ե, ապա թեորեմն ապացուցված ե. իսկ յեթե բարդ ե, ապա շարունակում ենք մեր դատողությունը նշված յեղանակով:

Քանի որ $a>a_1, a_1>a_2$ և այլն, ապա մեր վերածումը վաղ թե ուշ պետք է վերջանա. ուրեմն այդ վերջանալ կարող է միայն այն դեպքում, յերբ վերջին a_n կհանդիսանա պարզ թիվ (յեթե նա բարդ է, ապա կարող ենք շարունակել վերածումը)։ Ուստի,

$$a=p_1p_2\cdots p_{n-1}a_n$$

վերածումը հանդիսանում է a թվի վերածումը պարզ բազմապատկիչների որի հնարավորությունն, այսպիսով, ապացուցված է։

Վերածման միակությունը (յեզակիությունը) ապացուցելու համար կդատենք այսպես. ասենք, թե որևէ թվի համար ունենք յերկու վերածում (միատեսակ կամ տարբեր) պարզ բազմապատկիչների.

$$abc\ldots \text{ և } a_1b_1c_1\ldots$$

այդ դեպքում

$$abc\ldots=a_1b_1c_1\ldots$$

Այս հավասարության ձախ մասը բաժանվում է a-ի վրա, ուրեմն աջ մասն էլ պետք է բաժանվի a-ի վրա։ Բայց a-ն պարզ թիվ է, ուստի $a_1b_1c_1\ldots$ արտադրյալը միայն այն ժամանակ կբաժանվի a-ի վրա, յեթե նրա բազմապատկիչներից մեկը բաժանվում է a-ի վրա (2-րդ թեորեմ). ուրեմն պարզ թիվը մի ուրիշ պարզ թվի վրա, միավորից տարբեր, կբաժանվի միայն այն դեպքում, յերբ այդ թվերը հավասար են։ Նշանակում է, $a_1b_1c_1\ldots$ թվերից որևէ մեկը հավասար է a-ի։ Դիցուք, $a_1=a$։ Հավասարության յերկու մասերը բաժանելով a-ի վրա կստանանք

$$bc\ldots=b_1c_1\ldots$$

Նախորդի նման դատելով կհամոզվենք, որ $b_1c_1\ldots$ բազմապատկիչներից որևէ մեկը հավասար է b-ի։ Ընդունենք, թե $b_1=b$, այդ դեպքում $cd\ldots=c_1d_1\ldots$ այս դատողությունները շարունակելով, կտեսնենք, որ առաջին շարքի բոլոր բազմապատկիչները մտնում են նույնպես և յերկրորդ շարքը։ Հավասարության յերկու մասերը բաժանելով a_1-ի վրա, կհամոզվենք, որ առաջին շարքում կա a_1 բազմապատկիչը։ Այսպիսով նախորդի նման կգտնենք, որ յերկրորդ շարքի բոլոր բազմապատկիչները մտնում են առաջին շարքը։ Այստեղից հետևում է, որ այդ յերկու շարքերը կարող են տարբերվել միայն բազմապատկիչների կարգով և ոչ թե բազմապատկիչներով-բռնեցով. ուրիշ խոսքով այդ յերկու շարքերը ներկայացնում են միևնույն շարքը։ Այդ կերպ՝ յուրաքանչյուր թիվ (բացի միավորից) կարելի յե վերածել պարզ բազմապատկիչների յեվ այն էլ միայն մեկ յեղանակով։

94. ՄԻ ՔԱՆԻ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՊԱՐԶ ԹՎԵՐԻ ՄԱՍԻՆ։ Հեշտ է համոզվել, որ գոյություն ունեն անթիվ բազմությամբ պարզ թվեր։ Իսկապես, ընդունենք հակառակը, այսինքն, որ պարզ թվերը վերջավոր թվով են։ Այդ դեպքում պետք է գոյություն ունենա ամենամեծ պարզ թիվ։ Թող այդ թիվը լինի a-ն։ Մեր արած յենթադրությունը հերքելու համար պատկերացնենք մի նոր N թիվ, կազմված

$$N=(2.3.5.7\ldots a)+1,$$

բանաձևով, այսինքն՝ պատկերացնենք մի այնպիսի N թիվ, վորը կստացվի յեթե 2-ից մինչև a-ն ներառյալ բոլոր պարզ թվերը բազմապատկենք և արտադրյալին ավելացնենք մեկ միավոր։ Քանի վոր, ինչպես ակնհայտ է N-ը մեծ է a-ից և a-ն, համաձայն մեր յենթադրության, պարզ թվերից ամենամեծն է. ապա N պետք է լինի բարդ թիվ։ Բայց բարդ թիվը բաժանվում է վորևէ պարզ թվի վրա (§ 93, 1-ին թեորեմ)։ Հետևապես, N բաժանվում է 2, 3, 5, 7, 11,...,) a շարքի վորևէ թվի վրա։ Բայց այդ լինել չի կարող, քանի վոր N-ը յերկու այնպիսի գումարելիների գումարն է, վորոնցից առաջինը (2, 3, 5,...a արտադրյալը) բաժանվում է 2, 3, 5,...a շարքի ամեն մի թվի վրա իսկ յերկրորդը (1) չի բաժանվում այդ թվերից և վոչ մեկի վրա։ Նշանակի ամենամեծ պարզ թիվ գոյություն չունի, իսկ յեթե ամենամեծ պարզ թիվ չկա, ապա պարզ թվերի շարքն անվերջ է։

Դեռ հնագույն ժամանակներից սկսած պարզ թվերը յեղել են բազմաթիվ հետազոտությունների առարկա։ Իմիջի այլոց, գիտնականները ձգտել են գտնել այն օրենքը, վորով կառուցված են պարզ թվերը և վորը հնարավորություն կտար պարզ թվերը արտահայտել մեկ կամ մի քանի բանաձևերով, կամ ձգտել են գտնել գոնե մի այնպիսի բանաձև, վորը թեկուզ և չեր արտահայտի բոլոր պարզ թվերը, բայց հնարավորություն կտար գտնելու ցանկացած չափով մեծ պարզ թիվ։ Այդ իմաստով հատկապես հետաքրքրական է XVII դարի ֆրանսիացի հռչակավոր մաթեմատիկոս Ֆերմայի (Fermat) կատարած փորձը։ Նա գտավ, վոր 2^n+1 բանաձևը տալիս է պարզ թվեր, յերբ n-ը հավասար է $2^0=1$, $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$ արժեքներին։ Իսկապես n-ի այդ արժեքների համար ստացվում են հետևյալ պարզ թվերը՝

$$3,\ 5\ \ 17,\ 257.$$

Հիմնվելով այս դիտողության վրա (և նկատի ունենալով թվերի մի քանի հատկությունները), Ֆերման այն յենթադրությունն արեց, վոր 2^n+1 բանաձևը պետք է տա պարզ թվեր ամեն մի n-ի ժամանակ, յերբ դա հավասար է 2 ի վորևէ աստիճանին։ Այս կարծիքը յերկար ժամանակ չեր հերքվում, վորովհետև (մինչև Էյլերը) չեր հաջողվում վոչ վոքի ցույց տալ թեկուզ մի դեպք, յերբ n-ը հավասար լիներ 2-ի վորևէ աստիճանին, 2^n+1 բանաձևը տար բարդ թիվ[1]։ Ֆերմայի հիպոթեզը առաջին անգամ հերքեց հռչակավոր Էյլերը (XVIII-րդ դարում), ապացուցելով, վոր յերբ $n=2^5=32$ 2^n+1 բանաձևը տալիս է այնպիսի թիվ, վորը բաժանվում է 641-ի վրա։

Ֆերմայի կատարած այս սխալը հանդիսանում է մի ուսանելի օրինակ թե մաթեմատիկայի մեջ ինչքան անզգուշորեն կարելի յե մասնավորից ընդհանուր յեզրակացություններ հանելը, (կամ ինդուկտիվ մեթոդը)։

---

[1]) n-ն աճելիս 2^n+1 բանաձևը տալիս է չափազանց արագ աճող թվեր օրինակ. յերբ $n=2^4$ ստացվում է 65537. յերբ $n=2^5$ ստացվում է 4294967297 թիվը։ XVII և XVIII դարերի գիտության վիճակում դժվար եր այդպիսի մեծ թվերի մասին ասել, պարզ են այդ թվերը թե բարդ։

Բոլոր պարզ թվերն արտահայտող բանաձևեր չունենալու պատճառով, կարիք է զգացվում հատուկ եղանակով (փորձնական ճանապարհով) կազմել մի շարք բոլոր հաջորդող պարզ թվեր 2-ից մինչև վորևե վորոշ a մեծ թվով։ Այդպիսի շարք կազմելու ամենապարզ և միաժամանակ ամենահին եղանակը պատկանում է ալեքսանդրիացի մաթեմատիկոս Էրատոսթենեսին (վորն ապրել է մեր թվագրությունից 3 դար առաջ)։ Էրատոսթենեսի եղանակն այն է, վոր 2-ից մինչև a (այն թիվը, վորով ուզում են սահմանափակել շարքը) յեղած բնական թվերի շարքից նախ դուրս են թողնում բոլոր այն թվերը, վորոնք բաժանվում են 2-ի վրա (բացի 2-ից), ապա այն բոլոր թվերը, վորոնք բաժանվում են 3-ի վրա (բացի 3-ից), ապա այն բոլոր թվերը, վորոնք բաժանվում են 5-ի, 7-ի, 11-ի վրա, և այլն (բացի այդ նույն թվերից)։ Այդ արվում է շատ հասարակ ձևով. 3-ից մինչև a յեղած կենտ թվերը գրելով մի շարքում նրա մեջ ջնջում են 2-ից հետո յեկող ամեն մի յերրորդ թիվ, 5-ից հետո՝ ամեն մի հինգերորդ թիվ, 7-ից հետո՝ ամեն մի յոթերորդ թիվ և այլն։

Ներկայումս գոյություն ունեն 9000000-ից փոքր բոլոր պարզ թվերի աղյուսակներ։

Յեթե ձեռքի տակ չունենք գրված պարզ թվերի շարքը կամ յեթե տված N թիվը գերազանցում է գրված շարքի ամենամեծ թվից, ապա հարց է ծագում, թե ինչպես իմանանք՝ N-ը պարզ, թե բարդ թիվ կլինի։ Դրա համար ամենապարզ եղանակը հետևյալն է. նախորոք գտնելով $\sqrt{N}$-ը, գրում են այն բոլոր պարզ թվերը, վորոնք փոքր են այդ արմատից։ Դիցուք, թե դրանք հետևյալ թվերն են.

$$2, 3, 5, 7, \ldots, a։$$

Այնուհետև N-ը բաժանում են 2-ի, 3-ի, 5-ի... և a-ի ...վրա։ Յեթե N-ն այդ թվերից վոչ մեկի վրա չի բաժանվում, ապա առանց շարունակելու հետագա բաժանումները, կարող ենք պնդել, վոր N-ը պարզ թիվ է։ Իսկապես քանի վոր $N=\sqrt{N}.\sqrt{N}$, ապա ակնհայտ է, վոր N-ը $\sqrt{N}$-ից ավելի մեծ թվերի վրա բաժանելիս պետք է ստացվեն $\sqrt{N}$-ից փոքր քանորդներ։ Ուստի, յեթե N-ը կարողանար բաժանվել $\sqrt{N}$-ից վորևե մեծ թվի վրա, ապա նա կբաժանվեր նաև $\sqrt{N}$-ից փոքր թվերի վրա։ Յեթե N-ը մեծ թիվ է ապա այս եղանակը կարող է լինել հոգնեցուցիչ այսպես, յեթե $N>1000000$, ապա $\sqrt{N}>1000$, իսկ 1000-ից փոքր կան 168 պարզ թվեր. հետևապես, այդպիսի թիվ ստուգելու համար կարիք կլիներ յերբեմն կատարել 168 բաժանումներ։ Թվերի տեսության մեջ նշվում են այնպիսի եղանակներ, վորոնց միջոցով կարելի յե տված թվի ստուգման համար պահանջվող բաժանումների քանակը բավականաչափ փոքրացնել. սակայն այդ դեպքում էլ տված թվի պարզ թե բարդ լինելու հարցի վորոշումը մինչև հիմա էլ յերբեմն հսկայական դժվարություններ է ներկայացնում։

III. ԲԱՐԴ ԹՎԻ ԲԱԺԱՆԱՐԱՐՆԵՐԸ ԳՏՆԵԼԸ

95. ԻՆՉ Է ԹՎԻ «ԲԱԺԱՆԱՐԱՐԸ»։ Հիշեցնենք, վոր տված թվի բաժանարար կոչվում է այն թիվը, վորի վրա տված թիվը բաժանվում է։

Ամեն պարզ թիվ, որինակ, 11-ը, ունի միայն յերկու բաժանարար՝ միավորը և հենց ինքը։

Ամեն բարդ թիվ ունի յերկուսից ավելի բաժանարարներ. որինակ, 6 թիվն ունի 4 բաժանարար՝ 1, 2, 3 և 6. դրանցից 2-ը և 3-ը պարզ են, իսկ 6-ը՝ բարդ։

96. ՏՎԱԾ ԹՎԻ ԲԱԺԱՆԱՐԱՐՆԵՐԸ ԳՏՆԵԼԸ։ Դիցուք, պահանջվում է գտնել 420-ի բաժանարարները։ Դրա համար այդ թիվը կվերածենք պարզ բազմապատկիչների՝

$$420=2.2.3.5.7։$$

Ակնհայտ է, վոր 420-ը կբաժանվի այդ բազմապատկիչներից յուրաքանչյուրի վրա. հեշտ է տեսնել, վոր 420-ը կբաժանվի նաև իր յերկու, յերեք և ավելի բազմապատկիչներից կազմված արտադրյալի վրա։ Որինակ, 420-ը կբաժանվի 3.7 արտադրյալի, այսինքն՝ 21-ի վրա, քանի վոր 3 և 7 բազմապատկիչները տեղափոխելով շարքի սկիզբը, կստանանք

$$420=3.7.2.2.5=21.2.2.5,$$

վորտեղից և յերևում է, վոր 420-ը բաժանվում է 21-ի վրա։

ԿԱՆՈՆ։ Տված բարդ թվի բաժանարարները գտնելու համար նախապես այդ թիվը վերածում են պարզ բազմապատկիչների. այդ բազմապատկիչներից յուրաքանչյուրը կլինի տված թվի պարզ բաժանարարը, իսկ պարզ բազմապատկիչների յերկ-յերկու, յերեք-յերեք, չորս-չորս յեվ այլն վերաբազմապատկումից կստացվեն տված թվի բարդ բաժանարարները։

Դիտողություն։ Բարդ թվի իր բաժանարարներից վորևե մեկի վրա բաժանելուց ստանալիք քանորդը գտնելու համար բավական է այդ թվի պարզ բազմապատկիչներից բաց թողնել այն բազմապատկիչները, վորոնց արտադրյալը կազմում է տված բաժանարարը, և իրար հետ վերաբազմապատկել մնացած բազմապատկիչները։

Օրինակ, 420-ը 21-ի վրա բաժանելուց ստանալիք քանորդը գտնելու համար 420=2.2.3.5.7 վերածումից բաց կթողնենք 3 և 7 բազմապատկիչները, որոնց արտադրյալը կազմում է 21, և մնացած բազմապատկիչները կվերաբազմապատկենք (կստանանք 20)։

Նշված կանոնով կարելի յե ստանալ տված թվի բոլոր բաժանարարները։ Իսկապես, ընդունենք, թե a-ի բաժանարարը b-ն է, իսկ c-ն a-ն b-ի վրա բաժանելուց ստացված քանորդը, այնպես որ

a=bc։

Եթե b-ն և c-ն վերածենք պարզ բազմապատկիչների, և այդ վերածումները տեղադրենք գրված հավասարության մեջ, ապա ակներևաբար կստանանք a-ի վերածումը պարզ բազմապատկիչների, ընդ որում b թիվը կստացվի որպես այդ արտադրիչներից մի քանիսի արտադրյալ։ Այսպիսով, տված թվի որևէ բաժանարարը, իսկապես, կարելի յե ստանալ վերևում նշված կանոնի համաձայն։

IV. ՄԻ ՔԱՆԻ ԹՎԵՐԻ ԱՄԵՆԱՄԵԾ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲԱԺԱՆԱՐԱՐԸ

97. *ԻՆՉ Է ԱՄԵՆԱՄԵԾ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲԱԺԱՆԱՐԱՐԸ*։ **Մի քանի թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար կոչվում է այն ամենամեծ թիվը, որի վրա բաժանվում են տված բոլոր թվերը։**

Օրինակ, յերեք թվերի՝ 18-ի, 30-ի և 24-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը 6-ն է, որովհետև 6-ն այն ամենամեծ թիվն է, որի վրա բաժանվում են այդ բոլոր թվերը։

Այն յերկու թվերը, որոնց համար ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը միավորն է, կոչվում են փոխադարձաբար պարզ թվեր *(կամ համարաբերական պարզ)։ Այդպիսին են, օրինակ, 14 և 15 թվերը։*

Նշենք մի քանի թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելու յերկու յեղանակ։

98. *ԱՌԱՋԻՆ ՅԵՂԱՆԱԿ՝ ՊԱՐԶ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱԾԵԼՈՒ ՄԻՋՈՑՈՎ։ Դիցուք, թե պահանջվում է գտնել 180-ի և 126-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։ Դրա համար այդ թվերը նախապես կվերածենք պարզ բազմապատկիչների՝*

180=2.2.3.3.5   126=2.3.3.7։

Բաղդատելով այդ թվերի բազմապատկիչները, նկատում ենք, որ դրանց միջև կան ընդհանուր բազմապատկիչներ, այն է՝ 2, 3, 3։ Այդ ընդհանուր բազմապատկիչներից յուրաքանչյուրը կլինի 180-ի ու 126-ի ընդհանուր բաժանարարը։ Ընդհանուր բարդ բաժանարարներ ստանալու համար պետք է ընդհանուր բազմապատկիչները վերաբազմապատկել յերկու-յերկու և յերեք-յերեք։ Պարզ է, որ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը կստացվի, յեթե վերաբազմապատկենք բոլոր ընդհանուր բազմապատկիչները.

2.3.3=18։

Դիցուք, որ պահանջվում է գտնել յերեք թվերի՝ 210-ի, 1260-ի և 245-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։ Այդ թվերը վերածենք պարզ բազմապատկիչների.

210	2	1260	2	245	5
105	3	630	2	49	7
35	5	315	3	7	7
7	7	105	3	1	
1		35	5		
		7	7		
		1			

Այժմ տեսնում ենք, որ այդ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հավասար է 5 և 7 ընդհանուր բազմապատկիչների արտադրյալին, այսինքն հավասար է 35-ի։

Նման ձևով կարելի յե գտնել չորս, հինգ և ավելի շատ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։

ԿԱՆՈՆ։ **Մի քանի թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելու համար բավական է այդ թվերը վերածելով պարզ բազմապատկիչների՝ վերաբազմապատկել այդ բազմապատկիչներից նրանք, որոնք ընդհանուր են տված բոլոր թվերի համար։**

Ծանոթություն։ *Այստեղ պետք է հիշել, որ յեթե որևէ պարզ բազմապատկիչ այդ բոլոր թվերի վերածումների մեջ մի քանի անգամ է մտնում, ապա դա նույնքան անգամ էլ պետք է մտնի և ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի մեջ։*

Օգտվելով § 92-ում ունեցած աստիճանի նշանակումից, կարող ենք քննարկած օրինակներից առաջինում տված թվերի պարզ բազմապատկիչների վերածումը գրել այսպես.

$$180=2^2.3^2.5, \qquad 126=2.3^2.7$$

այս թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի մեջ բոլորովին չեն մտնի 5 և 7 բազմապատկիչները, քանի վոր 5-ը չի մտնում յերկրորդ թվի մեջ, իսկ 7-ը չի մտնում առաջին թվի մեջ: 2 բազմապատկիչը կմտնի 1 անգամ, վորովհետև յերկրորդ թվի վերածման մեջ նա մտնում ե միայն 1 անգամ: Իսկ բազմապատկիչը 3-ը ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի մեջ կմտնի 2 անգամ (այսինքն յերկրորդ աստիճան), քանի վոր տված յերկու թվերի մեջ նա մտնում ե յերկու անգամ. այսպիսով, տված թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն ե՝

$$2.3^2=18:$$

Այսպիսով, վերոհիշյալ կանոնը կարելի յե արտահայտել նաև այսպես. **մի քանի թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելու համար այդ թվերը վերածում են պարզ բազմապատկիչների յեվ վերցնում տված բոլոր թվերի կազմի մեջ գտնվող տարբեր պարզ բազմապատկիչների աստիճանների արտադրյալը. յուրաքանչյուր բազմապատկիչ վերցվում ե այն ամենափոքր աստիճանացույցով, վորով նա յերեվան ե գալիս տված թվերի կազմի մեջ:**

Օրինակ. $9000=2^3.3^2.5^3$ և $1350=2.3^3.5^2$

թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հավասար ե

$$2.3^2.5^2=450:$$

99. ՅԵՐԿՐՈՐԴ ՅԵՂԱՆԱԿԸ՝ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆ ԲԱԺԱՆՄԱՆ ՄԻՋՈՑՈՎ: Նախ կբացատրենք այս յեղանակի կիրառումը յերկու և ապա յերեք, չորս և ավելի թվերի նկատմամբ:

Այս յեղանակը հիմնված ե հետևյալ յերկու կանոնների վրա.

I. Յերբ տված յերկու թվերից մեծը բաժանվում ե փոքրի

վրա, ապա փոքր թիվը հանդիսանում ե այդ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը:

Օրինակ, վերցնենք յերկու թիվ՝ 54 և 18, վորոնցից մեծը բաժանվում ե փոքրի վրա: Քանի վոր 54-ը բաժանվում ե 18-ի վրա, և 18-ը բաժանվում ե 18-ի վրա, ապա ուրեմն, 18-ը 54-ի և 18-ի ընդհանուր բաժանարարն ե: Այդ բաժանարարը միաժամանակ և ամենամեծն ե, վորովհետև 18-ը չի կարող բաժանվել 18-ից մեծ վորևե թվի վրա:

II. **Յերբ տված յերկու թվերից մեծը չի բաժանվում փոքրի վրա, ապա այդ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հավասար ե յերկու ուրիշ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարին, այսինքն՝ տված թվերից փոքրի յեվ մեծ թվի փոքրի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարին:**

Դիցուք, թե տված ե յերկու թիվ՝ 85 և 30, վորոնցից մեծը փոքրի վրա չի բաժանվում: Առաջին թիվը բաժանելով յերկրորդի վրա, ստանում ենք՝ 85 : 30=2 (մնացորդ՝ 25). այդ դեպքում 85-ի և 30-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը պետք ե լինի յերկու ուրիշ թվերի, այն ե՝ 30-ի և 25-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը (դա 5-ն ե):

Իսկապես, բաժանելուց ստանում ենք՝

$$85=30.2+25, \text{ վորտեղից } 25=85-30.2:$$

Գումարի և տարբերության մեջ հայտնի (§ 82) հատկությունների հիման վրա այս հավասարություններից կարելի յե հանել յերկու այսպիսի յեզրակացություն.

1) 30-ի և 25-ի ամեն մի ընդհանուր բաժանարար պետք ե լինի նաև 85-ի բաժանարարը:

2) 85-ի և 30-ի ամեն մի ընդհանուր բաժանարար պետք ե լինի նաև 25 մնացորդի բաժանարարը:

Այսպիսով, պարզվում ե, վոր

$$\overbrace{85 \text{ և } 30} \qquad \overbrace{30 \text{ և } 25}$$

2 զույգ թվերը պետք ե ունենան միևնույն ընդհանուր բաժանարարները, ուրեմն և նրանց ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը պետք ե լինի միևնույնը:

Այժմ տեսնենք, թե յերկու թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելու համար ինչպես կարելի է օգտվել այդ կանոններից։

Դիցուք, պահանջվում է գտնել 391-ի և 299-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։

```
    391|299
    299|---
        1
  299|92
  276|--
      3
92|23
92|--
--  4
 0
```

391-ը բաժանենք 299-ի վրա, վորպեսզի իմանանք, թե 299-ը չի լինի արդյոք ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը (I կանոնի հիման վրա)։ Տեսնում ենք, վոր 391-ը 299-ի վրա չի բաժանվում (մնացորդ է ստացվում՝ 92), ուստի, 299-ը ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար չէ։ II կանոնի հիման վրա պնդում ենք, վոր 391-ի և 299-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը նույնպես ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար է ավելի փոքր թվերի՝ 299-ի և 92-ի համար։ Կսկսենք վորոնել այդ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։ Դրա համար 299-ը կբաժանենք 92-ի վրա, իմանալու, թե 92-ը չի՞ լինի արդյոք ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը (I կանոն)։ Տեսնում ենք, վոր 92-ն ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար չէ (մնացորդ ստացվում է 23)։

Այժմ դարձյալ, II կանոնի հիման վրա, պնդում ենք, վոր 299-ի և 92-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը նույնպես ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար է ավելի փոքր թվերի, այն է՝ 92-ի և 23-ի։ Վորոնենք այդ բաժանարարը։ Դրա համար 92-ը բաժանում ենք 23-ի վրա։ Տեսնում ենք, վոր 23-ն ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է յերկու թվերի՝ 92-ի և 23-ի, հետևապես և 299-ի ու 92-ի, հետևապես և տված յերկու թվերի՝ 391-ի ու 299-ի։

ԿԱՆՈՆ։ Յերկու թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելու համար նրանցից մեծը բաժանում են փոքրի վրա, ապա փոքրն առաջին մնացորդի վրա, հետո առաջին մնացորդը բաժանում են յերկրորդ մնացորդի վրա, յերկրորդը յերրորդի վրա յեվ այլն այնքան, մինչև վոր մնացորդում ստացվի զերո, այն ժամանակ վերջին բաժանարարը կլինի տված թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։

100. ՅԵՐԿՐՈՐԴ ՅԵՂԱՆԱԿԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՅԵՐԵՔ ՅԵՎ ԱՎԵԼԻ ՇԱՏ ԹՎԵՐԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ։ Ընդունենք այժմ, վոր պահանջվում է գտնել յերեք թվերի՝ 78-ի, 130-ի և 195-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։ Դրա համար նախ կգտնենք այդ թվերից վորևե յերկուսի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը, օրինակ, 78-ի և 130-ի.

```
    130| 78
     78|---
         1
  78| 52
  52|---
      1
52| 26
52|---
--  2
 0
```

Պարզվում է, վոր այդ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հավասար է 26-ի։

Այժմ վորոնենք 26-ի և տված յերրորդ թվի՝ 195-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։

```
  195| 26
  182|---
        7
26| 13
26|---
--   2
 0
```

Այսպիսով ստացած 13 թիվը տված բոլոր յերեք թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է։

Բացատրելու համար, թե ինչու այդպես պետք է լինի, յերևակայենք, վոր տված թվերը վերածված են պարզ բազմապատկիչների և վոր ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն ուզում ենք գտնել առաջին յեղանակով։ Այն ժամանակ 26 թիվը լինելով 130-ի և 78-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը, պետք է իր մեջ պարունակի այդ թվերին ընդհանուր բոլոր պարզ բազմապատկիչները՝ 13 թիվը լինելով 26-ի և 195-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը, պետք է իր մեջ պարունակի այդ թվերին ընդհանուր բոլոր պարզ բազմապատկիչները: Հետևապես, 13 թիվը իր մեջ պարունակում է բոլոր յերեք թվերի՝ 130-ի, 78-ի և 195-ի համար ընդհանուր պարզ բազմապատկիչները. ուրեմն, 13-ն այդ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է:

Իսկ յեթե բացի նշված յերեք թվերից ունենայինք և չորրորդ թիվը, ապա պետք էր նույն յեղանակով գտնել 13-ի և այդ չորրորդ թվի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը և այլն:

ԿԱՆՈՆ: Յերեք յեվ ավելի թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հաջորդական բաժանման յեղանակով գտնելու համար նախ գտնում են տված թվերից վորեվե յերկուսի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը, ապա գտած բաժանարարի յեվ տված վորեվե յերրորդ թվի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը, յեվ այնուհետեվ վերջին բաժանարարի յեվ տված չորրորդ թվի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը յեվ այլն:

V. ՄԻ ՔԱՆԻ ԹՎԵՐԻ ԱՄԵՆԱՓՈՔՐ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲԱԶՄԱՊԱՏԻԿԸ

101. *ԻՆՉ Է ԱՄԵՆԱՓՈՔՐ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲԱԶՄԱՊԱՏԻԿԸ*

Տված մի քանի թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկ կոչվում է այն ամենափոքր թիվը, վոր բաժանվում է այդ թվերից յուրաքանչյուրի վրա:

Այսպես, յերեք թվերի 6-ի, 15-ի և 20-ի համար ամենափոքր բազմապատիկը 60-ն է, քանի վոր 60-ից փոքր վոչ մի թիվ չի բաժանվում 6-ի, 15-ի և 20-ի վրա, իսկ 60-ը բաժանվում է այդ թվերի վրա: Նշենք մի քանի թվերի ամենափոքր բազմապատիկը գտնելու յերկու յեղանակ:

102. *ԱՌԱՋԻՆ ՅԵՂԱՆԱԿ՝ ՊԱՐԶ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱԾԵԼՈՒ ՄԻՋՈՑՈՎ:* Դիցուք, պահանջվում է գտնել 100-ի, 40-ի և 35-ի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը: Դրա համար այդ թվերից յուրաքանչյուրը կվերածենք պարզ բազմապատկիչների.

$$100=2\cdot2.5\cdot5;\qquad 40=2\cdot2.2.5;\qquad 35=5\cdot7;$$

Վորպեսզի վորևէ թիվ բաժանվի 100-ի, 40-ի և 35-ի վրա, անհրաժեշտ է և բավական, վոր նրա մեջ մտնեն այդ բաժանարարների բոլոր պարզ բազմապատկիչները: Կգրենք 100-ի բոլոր բազմապատկիչները և դրանց կավելացնենք 40-ի այն բազմապատկիչները, վորոնք 100-ի վերածման մեջ պակասում են: Այն ժամանակ կստանանք $2\cdot2\cdot5\cdot5.2$ արտադրյալը, վորը կբաժանվի թե 100-ի և թե 40-ի վրա: Այժմ այդ արտադրյալին կավելացնենք 35-ի այն բազմապատկիչները, վորոնք պակասում են արտադրյալում: Այն ժամանակ կստանանք

$$2\cdot2.5\cdot5\cdot2\cdot7=1400$$

արտադրյալը, վորը բաժանվում է և՛ 100-ի և՛ 40-ի, և՛ 35-ի վրա: Այդ էլ հենց տված թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է, վորովհետև յեթե նրանից դուրս թողնենք թեկուզ մի արտադրիչ, կստանանք մի այնպիսի թիվ, վորը չի բաժանվի տված թվերից վորևէ մեկի վրա:

Ուշադրություն դարձնենք այն բանի վրա, վոր քննարկած օրինակում 100-ի պարզ բազմապատկիչներին ավելացնելով 40-ի այն բազմապատկիչները, վորոնք չկային նրանց մեջ, ավելացրինք 2 բազմապատկիչը: Թեպետ 100-ի վերածման մեջ 2 կա, բայց այնտեղ այդ բազմապատկիչը հանդես է գալիս ընդամենը 2 անգամ, իսկ 40-ի վերածման մեջ—3 անգամ, ուստի և 100-ի վերածման մեջ 2-ը պետք է համարեյինք «պակասող» բազմապատկիչ:

ԿԱՆՈՆ: Տված մի քանի թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը գտնելու համար այդ բոլոր թվերը վերածվում են պարզ բազմապատկիչների, ապա վերցնելով նրանցից վորեվե մեկի բազմապատկիչները, դրանց կցագրում են մյուս թվի այն բազմապատկիչները, վորոնք այդտեղ պակասում են, այդ արտադրյալին կցագրում են յերրորդ թվի այն բազմապատկիչները վորոնք այդտեղ պակասում են, յեվ այսպես շարունակ մինչեվ վերջին թիվը: Այս ձեվով ստացած արտադրյալը կլինի տված թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը:

Օգտվելով § 92-ում ներմուծած աստիճանի նշանակումից, կարող ենք մեր որինակի մեջ տված թվերի վերածումները գրել այսպես.

$$100=2^2.5^2; \qquad 40=2^3.5; \qquad 35=5.7$$

Ակներև է, վոր տված թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը պետք է պարունակի 2, 5 և 7 բազմապատկիչները, ընդ վորում 2-ը պետք է մտնի յերրորդ աստիճանով, վորովհետև փոքր աստիճանացույցի դեպքում ստացած թիվը 40-ի վրա չէր կարող բաժանվել: 5 բազմապատկիչը պետք է մտնի յերկրորդ աստիճանով, վորովհետև հակառակ դեպքում ստացած թիվը 100-ի վրա չէր բաժանվի, իսկ 7 բազմապատկիչը բավական է վերցնել առաջին աստիճանով: Այսպիսով, վորոնելի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է՝

$$2^3.5^2.7=1400:$$

Յեվ այսպես, նշված կանոնը կարելի յե արտահայտել նաև այսպես. **մի քանի թվերի ամենափոքր բազմապատիկը գտնելու համար այդ բոլոր թվերը վերածում են պարզ բազմապատկիչների յեվ կազմում տված թվերի վերածումների մեջ գտնվող բոլոր տարբեր բազմապատկիչների աստիճանների արտադրյալը, ընդ վորում յուրաքանչյուր բազմապատկիչ վերցվում է այն ամենամեծ աստիճանացույցով, վորով նա հանդես է գալիս այդ վերածումների մեջ:**

103. ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՏՈՒԿ ԴԵՊՔԵՐ: Քննության առնենք յերկու այնպիսի դեպքեր, վորոնց ժամանակ ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը կարելի յե գտնել շատ հեշտ:

Առաջին դեպք, յերբ տված թվերի վոչ մի զույգ ընդհանուր բազմապատկիչներ չունի: Դիցուք, տված են յերեք թվեր՝ 20, 49 և 33, վորոնցից վոչ մի զույգը ընդհանուր բազմապատկիչներ չունի, ինչպես այդ յերևում է վերածումներից.

$$20=2.2.5; \quad 49=7.7; \quad 33=3.11.$$

Այս դեպքի նկատմամբ կիրառելով ընդհանուր կանոնը, կհանգենք այն յեզրակացության, վոր **բոլոր տված թվերը պետք է փոխբազմապատկել.**

$$2.2.5.7.7.3.11=20.49.33=32340.$$

Մասնավորապես այսպես պետք է վարվել, յերբ պահանջվում է գտնել մի քանի փոխադարձաբար պարզ թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը: Օրինակ, 3, 7 և 11 թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը հավասար է. 3.7.11=231.

Յերկրորդ դեպք, յերբ տված թվերից մեծը բաժանվում է մնացած բոլոր թվերի վրա: Այդ դեպքում ամենամեծ թիվը հենց կլինի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը: Դիցուք, թե տված են 5, 12, 15 և 60 չորս թվերը, վորոնցից մեծը՝ 60-ը բաժանվում է 5-ի, 12-ի և 15-ի վրա: Քանի վոր նա, իհարկե, բաժանվում է նաև հենց իր վրա, ապա և նա էլ ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է:

104. ՅԵՐԿՐՈՐԴ ՅԵՂԱՆԱԿ, ԱՄԵՆԱՄԵԾ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲԱԺԱՆԱՐԱՐԸ ԳՏՆԵԼՈՒ ՄԻՋՈՑՈՎ: Դիցուք պահանջվում է գտնել 336-ի և 1260-ի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը: Այդ թվերը վերածելով պարզ բազմապատկիչների, գտնում ենք $347=2^4.3.7$ և $1260=2^2.3^2.5.7$: Այդ թվերի արտադրյալը հավասար է.

$$336.1260=(2^4.3.7).(2^2.3^2.5.7): \qquad (1)$$

Այժմ վերհիշենք, թե ինչպես են կազմում տված յերկու թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը: Տված թվերի պարզ բազմապատկիչների վերածման մեջ պատահող յուրաքանչյուր պարզ թիվ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի մեջ մտնում է ստացած յերկու աստիճանացույցներից ամենափոքրով, իսկ ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի մեջ—ամենամեծով: Այսպիսով ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի մեջ կմտնի 2^2-ն, իսկ ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի մեջ՝ 2^4-ը. ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի մեջ կմտնի 3-ը, իսկ ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի մեջ—3^2-ն: 5 արտադրիչը, վորը մտնում է տված յերկու թվերից միայն մեկի վերածման մեջ, կմտնի նրանց ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի մեջ, իսկ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի մեջ չի մտնի: Վերջապես 7 բազմապատկիչը, վորը տված թվերից յուրաքանչյուրի մեջ մտնում է 1 աստիճանացույցով, այդ աստիճանացույցով կմտնի և ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի, և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի մեջ:

Այսպիսով, տված թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է $2^2.3.7=84$, իսկ նրանց ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը՝ $2^4.3^2.5.7=5040$։ Տեսնում ենք, որ տված թվերի բոլոր բազմապատկիչները, որոնք գտնվում են (1) հավասարության աջ մասում, բաշխվեցին այսպես. նրանց մի մասը մտավ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի մեջ, իսկ մնացածները — ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի մեջ։ Ուստի, տված թվերի՝ 336-ի և 1260-ի արտադրյալը հավասար է նրանց ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի՝ 84-ի և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի՝ 5040-ի արտադրյալին։ Այստեղից կըստանանք.

ԿԱՆՈՆ։ Յերկու թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը հավասար է այդ թվերի արտադրյալին՝ բաժանած նրանց ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի վրա։

Այս նկատելով, կարող ենք յերկու թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը գտնել և առանց այդ թվերը պարզ բազմապատկիչների վերածելու։ Իսկապես, տված թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը կարելի յե գտնել հաջորդական բաժանման յեղանակով։ Ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելուց հետո տված թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը հեշտ է գտնվում հենց նոր բերած կանոնի համաձայն։

105. ՅԵՐԵՔ ՅԵՎ ԱՎԵԼԻ ԹՎԵՐԻ ԴԵՊՔԸ. Դիցուք, թե պահանջվում է գտնել յերեք թվերի՝ 336-ի, 1260-ի և 350-ի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը։ Նախ կգտնենք 336-ի և 1260-ի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը, որը հավասար է 5040-ի, ինչպես այդ տեսանք § 104-ում։ Այժմ գտնենք 5040-ի և տված յերրորդ թվի՝ 350-ի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը։ Այս թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հեշտ է գտնել (օրինակ, հաջորդական բաժանման յեղանակով). դա հավասար է 70-ի։ Ուրեմն, ըստ § 104-ում նշած կանոնի, 5040-ի և 350-ի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը հավասար է

$$\frac{5040.350}{70}=25200.$$

Այդ թիվը հենց կլինի տված յերեք թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը։

Նման ձևով էլ կարելի յե գտնել չորս, հինգ և ավելի շատ թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը։

ԿԱՆՈՆ։ Յերեք յեվ ավելի շատ թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը գտնելու համար նախ գտնում են նրանցից վորեվե յերկուսի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը, հետո — այդ ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի յեվ տված վորեվե յերրորդ թվի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը, ապա — այս ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի յեվ տված չորրորդ թվի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը յեվ այլն։

ՅԵՐՐՈՐԴ ԲԱԺԻՆ

ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՉԱՓՈՒՄԸ։ ՉԱՓԵՐԻ ՄԵՏՐԱԿԱՆ ՍԻՍՏԵՄԸ

106. ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ։ Մինչև այժմ մենք գործ ունեյինք միայն ամբողջ թվերի հետ։ Ամբողջ թվերի ներմուծման հիմքը պատմականորեն յեղել ե նախ և առաջ հաշվելու պահանջը. և այդ պահանջներին ամբողջ թվերը միանգամայն բավարարում են։ Բայց դեռ շատ հին դարերում մարդու գործունեյությունը ստեղծել ե այնպիսի պահանջներ, վորոնց բավարարման համար միայն ամբողջ թվերը բավական չեն յեղել։ Առաջացել ե նոր թվերի ներմուծման անհրաժեշտությունը, և թվաբանությունը սկսել ե զբաղվել այդ թվերի հատկություններ և նրանց նկատմամբ կատարվելիք գործողությունների ուսումնասիրությամբ։

Մարդկային պրակտիկայի հիմնական տեսակներից այն, վորը բերում ե թվերի ավելի ընդարձակ դասերի քննարկման անհրաժեշտությանը, հանդիսանում ե մեծությունների չափումը։ Ուստի, նախ քան այդ թվերի ուսումնասիրության անցնելը, պետք ե կանգ առնենք մեծությունների չափման եյության և այդ պրոցեսի հետ կապված ամենակարևոր հասկացողությունների վրա։

107. ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՉԱՓՈՒՄԸ։ Դիցուք, ցանկանում ենք մի վորևե սենյակի յերկարության մասին կազմել ճիշտ պատկերացում. այն ժամանակ սենյակի յերկարությունը չափում ենք մի ուրիշ յերկարության միջոցով, վորը մեզ լավ հայտնի յե, օրինակ, մետրի միջոցով։ Դրա համար մետրը դնում ենք մեր սենյակի յերկարությամբ այնքան անգամ, վորքան հնարավոր ե։ Յեթե մետրն այդ յերկարությամբ տեղավորվում ե ճիշտ 10 անգամ, ապա սենյակի յերկարությունը հավասար ե 10 մետրի։ Դրա նման, վորևե առարկայի քաշը չափելու համար

վերցնում ենք մի ուրիշ քաշ, վորը մեզ լավ հայտնի յե, օրինակ, գրամը, և իմանում (կշեռքի միջոցով), թե կշռվող առարկայի քաշի մեջ գրամը քանի անգամ ե պարունակվում։ Դիցուք, դա պարունակվում ե ճիշտ 5 անգամ. ուրեմն առարկայի քաշը հավասար ե 5 գրամի։

Մեզ հայտնի այն մեծությունը, վորը գործածում ենք ուրիշ մեծություններ չափելու համար, կոչվում ե այդ տեսակի մեծությունների միավոր։ Այսպես, մետրը յերկարության միավոր ե, գրամը քաշի միավոր ե և այլն։

Յուրաքանչյուր տեսակի մեծությունների համար սովորաբար ընտրում են մի քանի միավորներ, մի քանիսն ավելի խոշոր, մի քանիսն ավելի մանր։ Այսպես, քաշը չափելու համար բացի գրամից գործածում են նաև կիլոգրամ, տոնն, միլիգրամ և այլն։

Չափել վորևէ մեծություն, նշանակում է գտնել, թե նրա մեջ քանի անգամ է պարունակվում նույնատեսակ մի այլ մեծություն, վորն ընդունված է վորպես միավոր։

108. ՉԱՓԵՐ։ Յուրաքանչյուր պետության մեջ կառավարությունը սահմանել ե վորոշ չափեր ամենագլխավոր մեծությունների համար։ Պատրաստված են նմուշային միավորներ՝ նմուշային մետր, նմուշային կիլոգրամ և այլն, վորոնց համաձայն պատրաստում են միավորներ՝ առօրյա գործածության համար։ Այն միավորները, վորոնք մտել են գործածության մեջ, կոչվում են չափեր։

Չափերը կոչվում են միատեսակ, յեթե նրանք ծառայում են մի տեսակի մեծությունները չափելու համար։ Այսպես, գրամը և կիլոգրամը միատեսակ չափեր են, քանի վոր նրանք ծառայում են առարկայի քաշը չափելու համար։

Յերկու միատեսակ չափերի հարաբերությունը կոչվում է այն թիվը, վորը ցույց է տալիս, թե փոքր չափը քանի անգամ է պարունակվում մեծի մեջ։ Այսպես, մետրի հարաբերությունը սանտիմետրին հանդիսանում է 100 թիվը։

109. ՉԱՓԵՐԻ ՄԵՏՐԱԿԱՆ ՍԻՍՏԵՄԸ։ Ներկայումս մեզ մոտ մտցված է չափերի մետրական սիստեմը, վորն ընդունված է նաև մի շարք այլ յերկրներում։

Այդ սիստեմում վորպես յերկարության միավոր ընդունված է մետրը։

1889 թվին տեղի ունեցած չափ ու կշռի Առաջին գլխավոր կոնֆերանսի կողմից որպես մետրի միջազգային նախատիպ ընդունված է պլատինի և իրիդիումի խառնուրդից ձուլված ակոսավոր մետրը, որը պահվում է Սևրում (Ֆրանսիայում) գտնվող չափ ու կշռի Միջազգային բյուրոյում։

ԽՍՀՄ-ի համար որպես մետրի նախատիպ ընդունված է պլատինի և իրիդիումի խառնուրդից ձուլված միջազգային մետրի պատճենը, որը կրում է № 28 նշանը և պահվում է Լենինգրադում՝ մետրոլոգիայի և ստանդարտիզացիայի Համամիութենական ինստիտուտում։

Մետրը բաժանվում է 10 հավասար մասերի, մետրի տասներորդ մասը—դարձյալ 10 հավասար մասի, մետրի հարյուրերորդ մասն, իր հերթին, բաժանվում է 10 հավասար մասի և այլն։ Մյուս կողմից, գործածվում են 10 մետրանոց, 100 մետրանոց և այլ չափեր։ Մետրի տասնորդական ենթաբաժանումներն անվանելու համար «մետր» բառի սկզբից ավելացնում են հետևյալ լատիներեն բառերը՝ «դեցի» (նշելու մեկ տասներորդ մասը), «ցենտի» (մեկ հարյուրերորդը), «միլի» (մեկ հազարերորդը)։ Այսպես, դեցիմետր նշանակում է մետրի մեկ տասներորդ մասը, ցենտիմետր—մետրի մեկ հարյուրերորդ մասը, միլիմետր—մետրի մեկ հազարերորդ մասը։

«Ցենտիմետր» բառը հաճախ փոխարինում են «սանտիմետր» ֆրանսերեն բառով։

Գծ. 1.

1-ին գծագիրը ցույց է տալիս սանտիմետրների և միլիմետրների բաժանված (բնական չափերով) մեկ դեցիմետրը։

Մետրին բազմապատիկ չափերը անվանում են հունարեն բառերով՝ դեկա (10), հեկտո (100), կիլո (1000)։ Այսպես, դեկամետր նշանակում է 10 մետր, հեկտոմետր—100 մետր, կիլոմետր—1000 մետր։ Ընդունված է մետրական չափերի անունները կրճատ նշանակել այսպես.

Մետրական չափերի անունները	Հայկական նշանակումները	Լատինական նշանակումները
Մետր	մ	m
Դեցիմետր	դմ	dm
Սանտիմետր	սմ	cm
Միլիմետր	մմ	mm
Կիլոմետր	կմ	km

Մակերեսներ չափելու համար գործածվում են քառակուսի չափեր. քառակուսի մետր, այսինքն այն քառակուսու մակերեսը, որի կողմը մեկ մետր երկարություն ունի, քառակուսի դեկամետր և այլն։ Այդպիսի չափերից յուրաքանչյուրը պարունակում է հետևյալ ցածր կարգի 100 միավոր. այսպես, քառակուսի դեցիմետրը պարունակում է 100 քառակուսի սանտիմետր։

Դաշտերի մակերեսները չափելու համար օգտագործում են ար և հեկտար։ Արը քառակուսի դեկամետրն է, հեկտարը հավասար է 100 արի և, ուրեմն, հավասար է քառակուսի հեկտոմետրի։

Ծավալները չափում են խորանարդ չափերով՝ խորանարդ մետր, այսինքն այն խորանարդի ծավալը, որի կողը 1 մ երկարություն ունի, խորանարդ դեցիմետր և այլն։ Այս չափերից յուրաքանչյուրն իր մեջ պարունակում է հետևյալ ցածր կարգի 1000 միավոր, այսպես, խորանարդ մետրը պարունակում է 1000 խորանարդ դեցիմետր։

Քաշի միավոր հանդիսանում է գրամը (գ)։ Գրամը մոտավորապես հավասար է Ցելսիուսի 4°-ի (կամ 3°,2 Ռեոմյուրի) ժամանակ անօդ տարածության մեջ մի խորանարդ սանտիմետր մաքուր թորած ջրի քաշին։ Գրամը բաժանվում է դեցիգրամների, սանտիգրամների և միլիգրամների։ Գրամին բազմապատիկ քաշերը կոչվում են՝ դեկագրամ, հեկտոգրամ և կիլոգրամ (որը կրճատ կոչվում է «կիլո» և նշանակվում է կգ)։

Գործածական են նաև հետևյալ չափերը. «տոննա», որը հավասար է 1000 կիլոգրամի և «ցենտներ», որը հավասար է 100 կիլոգրամի։

Անոթների տարողությունը (նաև հեղուկ և սորուն մարմինների ծավալները) չափելու համար գործածվում է լիտր (լ)։

Լիտրը մոտավորապես հավասար է մի խորանարդ դեցիմետրի ծավալին։ Ավելի ճիշտ, լիտրը մի կիլոգրամ թորած ջրի ծավալն է, նրա ամենամեծ խտության և նորմալ մթնոլորտային ճնշման ժամանակ։ Լիտրը հավասար է 1,000028 խորանարդ դեցիմետրի։ Գործածվում է նաև հեկտոլիտր, վորը հավասար է 100 լիտրի։

Գործածվում են նաև դեցիլիտրը, ցենտիլիտրը, դեկալիտրը և կիլոլիտրը։

110. ՄԵՏՐԱԿԱՆ ՍԻՍՏԵՄԻ ՀԱՐՄԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ։ Մետրական սիստեմն ունի հետևյալ յերեք կարևոր հարմարությունները. 1) տարբեր մեծությունների չափերը պարզ կախման մեջ են հիմնական չափից՝ մետրից. 2) հարևան կարգերին պատկանող չափերի հարաբերությունը միևնույնն է բոլոր կարգերի և բոլոր մեծությունների համար (բացի, իհարկե, մակերեսներից և ծավալներից). 3) այդ հարաբերությունը հավասար է մեր թվարկության սիստեմի հիմքին, վորի հետևանքով անվանական թվերով գործողությունները բավականաչափ հեշտանում են։

111. ԺԱՄԱՆԱԿԻ ՉԱՓԵՐ։ Ժամանակի յերկու հիմնական չափեր կան՝ օր և տարի։ Օրը—դա (մոտավորապես) այն ժամանակն է, վորի ընթացքում Յերկիրը լրիվ պտույտ է կատարում իր առանցքի շուրջը։ Օրը բաժանվում է 24 ժամի, վորոնք հաշվվում են կամ 1-ից մինչև 24, կամ 1-ից մինչև 12 և ապա դարձյալ 1-ից մինչև 12։ Վորպես սկիզբը ընդունում են կես գիշերը։ Ներկայումս հաղորդակցության ճանապարհների փոստ-հեռագրի, ավիահաղորդումների պրակտիկայում ընդունված է ժամերը հաշվել 0-ից մինչև 24 («կեսօրից հետո», «կես գիշերից հետո» բառերի ավելորդ հավելումից խուսափելու համար)։

Այսպես, «ցերեկվա ժամը 2-ի» փոխարեն ասում են «ժամը 14-ին», «յերեկոյան ժամը 7-ի» փոխարեն ասում են «ժամը 19-ին»։ Օրը բաժանվում է այսպես.

օրը=24 ժամի,
ժամը=60 րոպեի,
րոպեն=60 վայրկյանի։

Տարին (մոտավորապես) այն ժամանակն է, վորի ընթաց-

քում Յերկիրը լրիվ պտույտ է կատարում Արևի շուրջը։ Ընդունված է իրար հաջորդող 3 տարիներից յուրաքանչյուրը հաշվել 365 օր, իսկ նրանց հաջորդող չորրորդ տարին—366 օր։ Այն տարին, վորը պարունակում է 366 օր, կոչվում է նահանջ, իսկ այն տարիները, վորոնք պարունակում են 365-ական օր—հասարակ։ Չորրորդ տարվանն ավելացնում են մի ավելորդ օր հետևյալ պատճառով։ Այն ժամանակամիջոցը, վորի ընթացքում Յերկիրը պտտվում է Արևի շուրջը, վոչ թե ճիշտ 365 օր է, այլ 365 օր և 6 ժամ (մոտավորապես)։ Այսպիսով, հասարակ տարին իսկական տարուց կարճ է 6 ժամով, իսկ 4 հասարակ տարիները 4 իսկական տարիներից կարճ են 24 ժամով, այսինքն, մի օրով։ Այդ պատճառով յուրաքանչյուր չորրորդ տարվան ավելացնում են մի օր (փետրվարի 29-ը)։ Միաժամանակ նահանջ ընդունում են այն տարիները, վորոնց թվերը 4-ի վրա բաժանվում են առանց մնացորդի (օրինակ, 1936, 1940 և այլն)։

Տարին բաժանվում է 12 անհավասար մասերի, վորոնք կոչվում են ամիսներ։ Ահա ամիսների անունները կարգով. հունվար (31 օր), փետրվար (28 կամ 29 օր), մարտ (31), ապրիլ (30), մայիս (31), հունիս (30), հուլիս (31), օգոստոս (31), սեպտեմբեր (30), հոկտեմբեր (31), նոյեմբեր (30) և դեկտեմբեր (31)։

Այն ժամանակագրությունը, վորի համաձայն 3 տարին 365-ական օր ունի, իսկ չորրորդը՝ 366 օր, սահմանեց Հռոմի դիկտատոր Հուլիոս Կեսարը (46 թ. մեր թվականությունից առաջ), և այդ պատճառով էլ այն կոչվում է հուլյան կամ հին տոմար։ Մինչև հեղափոխությունը Ռուսաստանում այդ էր ընդունված, բայց Հոկտեմբերյան սոցիալիստական Մեծ հեղափոխությունից հետո դա փոխարինվեց միջազգային նոր տոմարով կամ գրիգորյան ժամանակագրությամբ (այսպես կոչված Հռոմի պապ Գրիգոր XIII-ի անունով, վորն այդ հաշվումը մտցրեց 1582 թ.)։ Ըստ այդ հաշվումի, ժամանակի հաշիվը XX դարում 13 օրով առաջ է հին տոմարից. այսպես, յերբ հին տոմարով, ասենք, դեկտեմբերի 10-ն է, ապա նոր տոմարով հաշվում են դեկտեմբերի 23-ը։ Այսպիսով, նոր տոմարից հինին անցնելու համար, պետք է նոր տոմարի ամսաթվից հանել 13 օր։ Օրինակ, յեթե մեզանում 1936 թ. մարտի 5-ն էր, ապա հին տոմարով այդ նշանակում էր նույն թվականի փետրվարի 21-ը, քանի որ մարտի 5 օրերը հանելով, մնացած 8-որն էլ պետք է հանել փետրվարից, իսկ 1936 թ. այդ ամիսն ուներ 29 օր։

112. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՔԵՐԸ։ Այն ժամանակը, որը ընթանում է գարնանային մեկ գիշերահավասարից մինչև հետևյալ գարնանային գիշերահավասարը, կոչվում է արեգակնային կամ արևադարձային տարի. այն ժամանակը, որն ընդունվում է տարի ըստ քաղաքացիական ժամանակագրության, կոչվում է քաղաքացիական տարի։ Քանի որ տարվա եղանակների փոփոխությունները, կախում ունեն Արեգակի նկատմամբ Երկրի ունեցած դիրքից, ապա արեգակնային տարին հանդիսանում է ժամանակի այն տևողությունը, որի ընթացքում բոլորովին ավարտվում են տարվա եղանակների փոփոխությունները։ Ուստի, ցանկալի է, որ քաղաքացիական տարին, որքան կարելի է, համընկնի արեգակնային տարվան. միայն այդ պայմանի դեպքում զանազան դարաշրջաններում տարվա եղանակները կընկնեն միևնույն ամիսներին։ Այն ժամանակագրությունը, որ մտցրեց Հուլիոս Կեսարը, դրան չէր հասնում լիովին։ Այդ հաշվումով քաղաքացիական տարին հաշվվում էր 365 օր և 6 ժամ, մինչդեռ արեգակնային տարին պարունակում է (մոտավորապես) 365 օր 5 ժամ 48 րոպե 48 վայրկյան, այնպես որ հուլյան հաշվումի տարին արեգակնային տարվանից երկար է (մոտավորապես) 11 րոպե 12 վայրկյանով, որը 400 տարում կազմում է մոտ երեք օր։ Հուլյան ժամանակագրությունն առաջին անգամ ուղղեց Գրիգոր XIII պապը 1582 թ. Այդ թվին քաղաքացիական և արեգակնային հաշվումների միջև տարբերությունը կազմում էր 10 օր, այնպես որ հաշվում էին, օրինակ, սեպտեմբերի 1-ը, երբ արեգակնային ժամանակով պետք էր հաշվել սեպտեմբերի 11-ը։ Քաղաքացիական ժամանակն արեգակնայինի հետ հավասարեցնելու համար Գրիգորն առաջարկեց 1582 թ. հոկտեմբերի 5-ը հաշվել հոկտեմբերի 15։ Բայց քանի որ նման ուշացումը պետք է կրկնվեր և հետագայում, ապա սահմանվեց, որ ապագայում քաղաքացիական հաշվումից յուրաքանչյուր 400 տարին կրճատվի երեք օրով։ Այդ կրճատումը պետք է տեղի ունենար այսպես։ Հուլյան հաշվումով այն տարիները, որոնց համարները ներկայացնում են լրիվ հարյուրակներ, համարվում են նահանջ. օրինակ, 1600, 1700 թ. թ. և այլն հուլյան հաշվումով պետք է համարվեն 366 օր։ Բայց Գրիգորն առաջարկեց, որ այդպիսի տարիները համարվեն հասարակ, բացի այն տարիներից, որոնց հարյուրակների թիվը բաժանվում է 4-ի վրա։ Դրա հետևանքով, ըստ գրիգորյան ժամանակագրության, 1600 թ. պետք է համարվեր նահանջ (16 ը բաժանվում է 4-ի վրա), իսկ 1700, 1800, 1900 թ. թ. հասարակ, այնինչ հուլյան հաշվումով այդ բոլոր 4 տարիները համարվում էին նահանջ։ Այսպիսով, յուրաքանչյուր 400 տարին կրճատվում է երեք օրով։ Այս հաշվումը, որ սահմանեց Գրիգոր XIII-ը, հայտնի է գրիգորյան անունով։ Ներկայումս դա ընդունված է համարյա ամբողջ Եվրոպայում։ Գրիգորյան հաշվումն այժմ կոչվում է նոր տոմար, իսկ հուլյանը՝ հին տոմար։ Քանի որ 1582 թ

նոր տոմարը հինի նկատմամբ առաջ է շարժվել 10 օրով, իսկ դրանից հետո էլի 3 օրով (1700, 1800, 1900 թ. թ.), ուստի ներկայումս հին տոմարը նորից հետ է մնում 13 օրով։

113. ԱՆՎԱՆԱԿԱՆ ԹՎԵՐ։ Ամբողջ թիվը, այդ թիվը կազմող միավորների անունների հետ միասին, կոչվում է անվանական թիվ։ Այսպես, 5 մատիտ, 3 մետր, 37 գրամ — անվանական թվեր են։ Իսկ եթե թվի մոտ չի նշված այն միավորների անվանումները, որոնցից նա կազմված է, ապա այդպիսի թիվը կոչվում է վերացական։ 5-ը, 3-ը, 37-ը — վերացական թվեր են։

«Անվանական թիվ» բառին երբեմն տրվում է ավելի ընդհանուր իմաստ։ Դիցուք, թե որևէ մարմնի քաշը չափելիս գտանք, որ այդ քաշը կազմում է 3 կգ և բացի դրանից նաև 350 գ. այն ժամանակ այդ մարմնի քաշը, որը գրվում է այսպես՝

3 կգ 350 գ,

նույնպես կոչվում է անվանական թիվ (թեպետ այստեղ իսկապես կան երկու տարբեր թվեր և երկու տարբեր չափեր)։ Նման ձևով էլ 12 մ 47 սմ կոչվում է անվանական թիվ։

Անվանական թիվը կոչվում է պարզ, եթե նրա մեջ մտնում են միայն մի անվան միավորներ, օրինակ, 3 կգ։

Անվանական թիվը կոչվում է բարդ, եթե նրա մեջ մտնում են տարբերանուն միավորներ, օրինակ, 3 կգ 350 գ։

Եթե երկու անվանական թվեր արտահայտում են միևնույն մեծությունը, ապա նրանք համարվում են հավասար։ Օրինակ, 2 կմ 25 մ բարդ անվանական թիվը հավասար է 2025 մ պարզ անվանական թվին, որովհետև այդ երկու թվերը արտահայտում են միևնույն երկարությունը։

Որևէ կարգի անվանական թիվը ցածր կարգի միավորներով արտահայտելը կոչվում է վերածում. իսկ, ընդհակառակը, բարձր կարգի միավորներով արտահայտելը — անդրադարձում։ Այսպես, 2 կմ 25 մ թվի ձևափոխությունը 2025 մետրի կլինի վերածում, իսկ 2025 մ հակառակ ձևափոխությունը՝ 2 կմ 25 մ-ի կլինի անդրադարձում։

114. ԻՆՉՈՒ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՉԱՓԵԼՈՒ ՀԱՄԱՐ ՊԵՏՔ Է ՈՒՆԵՆԱԼ ՆՈՐ ԹՎԵՐ։ Երբ մենք կամենում ենք հաշվել, թե դասարանում քանի սեղան կամ այգում քանի ծառ կա, ապա միշտ էլ կգտնվի այնպիսի ամբողջ թիվ, որը պատասխանի մեր

հարցին։ Ուստի առարկաներ հաշվելու համար բացի ամբողջ թվերից ուրիշ վոչ մի թիվ չի պահանջվում։

Բայց յերբ կամենում ենք չափել, որինակ, սենյակի յերկարությունը, ապա կամենում ենք իմանալ, թե յերկարության համար ընտրած միավորը, որինակ, մետրը քանի անգամ է պարունակվում այդ յերկարության մեջ։ Այստեղ կարող է պատահել, վոր մենք մետրը տեղադրենք 5 անգամ և նկատենք, վոր դեռ մնացել է յերկարության չչափված մաս, բայց այդ մասում մեր մետրը չի տեղավորվում, նա փոքր է մետրից։ Այդ նշանակում է, վոր չափելի յերկարությունը չափման միավորը (մետրը) պարունակում է 5-ից ավելի, իսկ 6-ից պակաս անգամ։ Ուրեմն, վոչ մի ամբողջ թիվ չի կարող պատասխան հանդիսանալ այն հարցին, թե չափելի յերկարությունը քանի մետր է պարունակում (վորովհետև չկա այնպիսի ամբողջ թիվ, վորը 5-ից մեծ լինի, իսկ 6-ից փոքր)։ Յեթե այնուամենայնիվ կամենում ենք մեր հարցի պատասխանն ստանալ վորևե թվի տեսքով, ապա պետք է մեր ուսումնասիրելի թվերի ընդգրկումն ընդարձակենք, այսինքն, բացի ամբողջ թվերից, մտցնենք նաև ուրիշ, նոր թվեր։ Այժմ հենց անցնում ենք այդ թվերի ուսումնասիրությանը։

ՉՈՐՐՈՐԴ ԲԱԺԻՆ

ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ (ՀԱՍԱՐԱԿ) ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐ

I. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍԿԱՑՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

115. *ՄԻԱՎՈՐԻ ՄԱՍԵՐԸ։* Մենք արդեն պատահեցինք չափման այնպիսի միավորների, վորոնք կարող են բաժանվել հավասար մասերի։ Այսպես, 1 մ կարող է բաժանվել 100 սմ-ի, 1 որը կարող է բաժանվել 24 ժամի։

Սանտիմետր անվանում ենք մետրի հարյուրերորդ մասը, ճիշտ այդպես էլ ժամ անվանում ենք որվա քսանչորսերորդ մասը։ Միլիմետրը կազմում է մետրի հազարերորդ մասը։ Որը կազմում է հասարակ տարվա (այսինքն վոչ նահանջ տարվա) յերեք հարյուր վաթսունհինգերորդ մասը։ Գրամը կիլոգրամի հազարերորդ մասն է, րոպեն ժամի վաթսուներորդ մասը։

Յերկրորդ մասը կարճ ասվում է կես, յերրորդ մասը՝ յերրորդ, չորրորդ մասը՝ քառորդ։

116. *ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ԹԻՎ։* Միավորի մի մասը կամ մի քանի հավասար մասերի խումբը կոչվում է կոտորակ։

Որինակ՝ 1 տասներորդը, 3 հինգերորդը, 12 յոթերորդը—կոտորակներ են։

Ամբողջ թիվը կոտորակի հետ միասին կազմում է խառը թիվ. որինակ, 3 ամբողջ 7 ութերորդ (այսինքն 3 ամբողջ միավոր, վորոնց ավելացրած է նաև միավորի 7 ութերորդ մասը)։

Կոտորակները և խառը թվերը կոչվում են կոտորակային թվեր, տարբերելու համար ամբողջ թվերից, վորոնք կազմված են ամբողջ միավորներից։

117. *ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ՊԱՏԿԵՐՈՒՄԸ։* Ընդունված է կոտորակը պատկերել այսպես, նախ գրում են այն թիվը, վորը ցույց է տալիս, թե կոտորակի մեջ քանի մաս է պարունակված, նրա տակ գիծ են քաշում, գծի տակ գրում են ուրիշ թիվ, վորը ցույց ե տալիս, թե քանի հավասար մասերի յե բաժանված միավորը, վորից վերցրած ե կոտորակը։ Որինակ, 3 հինգերորդը պատկերում են այսպես՝ $\frac{3}{5}$։

Գծից վերև գտնվող թիվը կոչվում ե կոտորակի **համարիչ**. նա ցույց ե տալիս այն մասերի թիվը, վորոնցից կազմված ե կոտորակը։ Գծի տակ գտնվող թիվը կոչվում ե կոտորակի **հայտարար**. նա ցույց ե տալիս, թե միավորը քանի հավասար մասերի յե բաժանված։ Այդ յերկու թվերը միասին կոչվում են **կոտորակի անդամներ**։

Խառը թիվը պատկերվում ե այսպես. գրում են ամբողջ թիվը և նրա աջ կողմում կցագրում են կոտորակը, որինակ՝ 3 ամբողջ և յերկու յոթերորդ թիվը պատկերում են այսպես $3\frac{2}{7}$։

118. ՉԱՓԵԼԻՍ ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ԹՎԵՐ ՍՏԱՆԱԼԸ։ Դիցուք ցանկանում ենք վորևե յերկարություն չափել մետրով։ Ընդունենք, թե մետրն այդ յերկարության մեջ տեղավորվում ե 7 անգամ, ընդ վորում ստացվում ե մետրից փոքր մնացորդ։ Այդ մնացորդը չափելու համար վերցնում ենք մետրի այնպիսի մասը, վորը, յեթե հնարավոր ե, մնացորդի մեջ տեղավորվի առանց նոր մնացորդի։ Դիցուք պարզվեց, վոր մետրի տասներորդ մասը մնացորդի մեջ տեղավորվում ե ճիշտ 3 անգամ։ Այն ժամանակ ասում ենք, վոր չափելիք յերկարությունը հավասար ե $7\frac{3}{10}$ մետրի։

Նման ձևով կոտորակային թվեր կարող են ստացվել նաև քաշը չափելիս (որինակ, $2\frac{1}{4}$ գրամ), կամ ժամանակը չափելիս (որինակ, $\frac{7}{10}$ ժամ) և այլն։

Այսպիսով, կոտորակային թիվ կարող ե ստացվել վորպես **չափման արդյունք**։

119. ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ԹՎԵՐԻ ՍՏԱՑՈՒՄՆ ԱՄԲՈՂՋ ԹՎԸ ՀԱՎԱՍԱՐ ՄԱՍԵՐԻ ԲԱԺԱՆԵԼԻՍ։ Դիցուք, պահանջվում ե 5 կգ

հացը բաժանել 8 հավասար մասերի։ Այդ բաժանումը կարող ենք կատարել այսպես. յենթադրենք, վոր յուրաքանչյուր կիլոգրամ հացը բաժանված ե 8 հավասար մասերի (ութերորդական մասերի). այն ժամանակ 5 կգ հացը կունենա $8 \cdot 5$, այսինքն 40 մաս, իսկ 5 կիլոգրամի մեկ ութերորդ մասում կլինի $40 : 8$, այսինքն 5 մաս։ Ուրեմն, 5 կիլոգրամի մեկ ութերորդ մասը հավասար ե մեկ կիլոգրամի $\frac{5}{8}$-ին (և ընդհանրապես վորևե 5 միավորի ութերորդ մասը հավասար ե մեկ այդպիսի միավորի $\frac{5}{8}$-ին)։

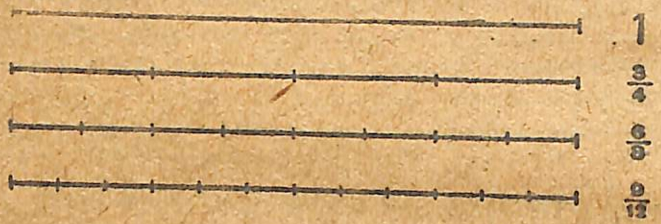
Վերցնենք մի այլ որինակ ևս. պահանջվում ե 28 թիվը փոքրացնել 5 անգամ, այսինքն 28-ի փոխարեն վերցնել այդ թվի մեկ հինգերորդ մասը։ 28-ը 25 և 3 թվերի գումարն ե։ 25-ի հինգերորդ մասը հավասար ե 5-ի։ 3-ի հինգերորդ մասը գտնելու համար յուրաքանչյուր միավորը բաժանենք 5 հավասար մասերի, յուրաքանչյուր միավորից վերցնելով $\frac{1}{5}$, կգտնենք, վոր յերեք միավորի հինգերորդ մասը կլինի $\frac{3}{5}$։ Ուրեմն, 28-ի հինգերորդ մասը հավասար ե $5\frac{3}{5}$-ի։

Սակայն 28-ի հինգերորդ մասը կարելի յե գտնել նաև այսպես. մեկ միավորի հինգերորդ մասը $\frac{1}{5}$ ե, մյուս միավորի հինգերորդ մասը նույնպես $\frac{1}{5}$ ե. յեթե այս ձևով 28-ի յուրաքանչյուր միավորից վերցնենք $\frac{1}{5}$-ական մասեր, ապա կստանանք $\frac{28}{5}$։ Այսպիսով՝ **ամբողջ թիվը մի քանի հավասար մասերի բաժանելու համար բավական ե այդ թիվը վերցնել վորպես կոտորակի համարիչ, իսկ հայտարար գրել մյուս թիվը, վորը ցույց ե տալիս, թե ամբողջ թիվը քանի հավասար մասերի յե բաժանվում։**

Որինակներ. 7-ի մեկ տասներկուերորդ մասը $\frac{7}{12}$ ե, 15-ի քառորդը $\frac{15}{4}$ ե, $\frac{8}{13}$ կոտորակը 8-ի տասներեքերորդ մասն ե, $\frac{29}{6}$ կոտորակը 29-ի մեկ վեցերորդ մասը։

Հետևություն։ Յուրաքանչյուր կոտորակ կարելի յե դիտել ոչ միայն որպես միավորի հավասար մասերի համախումբ, այլ և որպես մի քանի ամբողջ միավորների մեկ մասը: Այսպես, $\frac{5}{8}$ կոտորակը ոչ միայն կազմում է մեկ միավորի 5 ութերորդ մասը, այլ և 5 միավորի մեկ ութերորդ մասը:

120. ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ԹՎԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՅԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ: Յերկու կոտորակային թվեր համարվում են հավասար, յեթե այդ թվերի արտահայտած մեծությունները, չափված միևնույն միավորի ժամանակ, իրար հավասար են



Գծ. 2.

Վերցնենք որևէ կոտորակ, օրինակ, $\frac{3}{4}$ (դիցուք, թե դա 2-րդ գծագրում պատկերած յերկարության $\frac{3}{4}$ մասն է): Յուրաքանչյուր քառորդը կիսենք: Այն ժամանակ կստանանք ավելի մանր մասեր. մի քառորդում կա 2 այդպիսի մաս, ուրեմն միավորի մեջ կպարունակվի 2.4=8 այդպիսի մաս. հետևապես, դրանք ութերորդ մասեր են. այդ ութերորդական մասերը 3 քառորդում կպարունակվեն 2.3=6 անգամ, ուրեմն, $\frac{3}{4}$ կոտորակը հավասար է $\frac{6}{8}$ կոտորակին: Սրանով ուզում ենք ասել, որ յեթե յերկու յերկարություններից մեկը $\frac{3}{4}$ մետր է, իսկ մյուսը՝ $\frac{6}{8}$ մետր, դրանք հավասար են իրար. կամ յեթե յերկու քաշերից մեկը հավասար է $\frac{3}{4}$ կիլոգրամի, իսկ մյուսը՝ $\frac{6}{8}$ կիլոգրամի, դրանք իրար հավասար են և այլն:

Յերկու անհավասար կոտորակային թվերից մեծը համարվում է այն, որն ավելի մեծ մեծություն է արտահայտում

չափման միևնույն միավորի ժամանակ: Այսպես, յեթե ասում ենք, որ $\frac{1}{5}>$, ապա դրանով ցանկանում ենք արտահայտել, որ օրինակ, $\frac{1}{5}$ գրամն ավելի մեծ է քան $\frac{1}{8}$ գրամը, $\frac{1}{5}$ ժամն ավելի մեծ է, քան $\frac{1}{8}$ ժամ և այլն:

Իսկ յեթե յերկու կոտորակների համարիչները միևնույնն են, ապա մեծ կլինի այն կոտորակը, որի հայտարարն ավելի փոքր է, որովհետև նա պարունակում է հավասար թվով ավելի խոշոր մասեր, քան մյուսը: Այսպես, $\frac{2}{3}$-ն ավելի մեծ է, քան $\frac{2}{5}$-ը:

121. ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ՅԵՎ ԱՆԿԱՆՈՆ ԿՈՏՈՐԱԿ: Այն կոտորակը, որի համարիչը հայտարարից փոքր է, կոչվում է կանոնավոր. իսկ այն կոտորակը, որի համարիչը հայտարարից մեծ է կամ հավասար է նրան, կոչվում է անկանոն: Ակնհայտ է որ կանոնավոր կոտորակը միավորից փոքր է, իսկ անկանոն կոտորակը մեծ է կամ հավասար է նրան օրինակ.

$$\frac{7}{8}<1,\ \frac{8}{8}=1,\ \frac{9}{8}>1:$$

122. ԱՄԲՈՂՋ ԹԻՎՆ ԱՆԿԱՆՈՆ ԿՈՏՈՐԱԿ ԴԱՐՁՆԵԼԸ: Ամեն մի ամբողջ թիվ կարելի յե արտահայտել միավորի ինչպիսի մասերով ուզենանք: Դիցուք, պետք է 8-ն արտահայտել քսաներորդական մասերով: Մեկ միավորի մեջ կա 20 քսաներորդական մաս հետևապես, 8 միավորի մեջ կլինի 20.8 քսաներորդական, այսինքն 160 մաս: Ուրեմն.

$$8=\frac{20.8}{20}=\frac{160}{20}$$

Նման ձևով 25 թիվը քառորդ մասերով կարտահայտվի $\frac{100}{4}$, 100 թիվը, տասնյոթերորդական մասերով կարտահայտվի $\frac{1700}{17}$ տեսքով և այլն:

ԾԱՆՈԹ. Ամբողջ թիվը տված հայտարարն ունեցող անկանոն կոտորակի տեսքով արտահայտելու համար պետք է այդ հայտարարը բազմապատկել տված ամբողջ թվով և ստացած արտադրյալն ընդունել վորպես համարիչ, իսկ հայտարար գրել տվածը։

Դիտողություն։ Յերբեմն օգտակար է լինում ամբողջ թիվը պատկերացնել այնպիսի կոտորակի տեսքով, վորի համարիչը հավասար է այդ ամբողջ թվին, իսկ հայտարարը միավոր է։ Այսպես, 5-ի փոխարեն յերբեմն գրում են $\frac{5}{1}$ (հինգ մեկերորդ)։ Այսպիսի արտահայտություններն իմաստավորելու համար պայմանավորվում են, վոր թվի «առաջին» մասը հենց ինքը թիվն է։

123. ԽԱՌԸ ԹԻՎՆ ԱՆԿԱՆՈՆ ԿՈՏՈՐԱԿ ԴԱՐՁՆԵԼԸ։ Դիցուք, թե պահանջվում է $8\frac{3}{5}$ խառը թիվը դարձնել անկանոն կոտորակ։ Այդ նշանակում է իմանալ, թե քանի հինգերորդական մաս է պարունակվում ութ ամբողջ միավորի և նույն միավորի յերեք հինգերորդական մասերի մեջ միասին վերցրած։ Մի միավորի մեջ պարունակվում են 5 հինգերորդական մասեր, հետևապես ութը միավորի մեջ կպարունակվեն 5.8, այսինքն 40 այդպիսի մասեր. ուրեմն, 8-ը միավորի և յերեք հինգերորդի մեջ միասին կլինի 40+3, այսինքն 43 այդպիսի մաս։

Յեվ այսպես, $8\frac{3}{5}=\frac{43}{5}$։ Սրա նման՝

$$3\frac{7}{8}=\frac{8.3+7}{8}=\frac{31}{8};$$

$$10\frac{1}{4}=\frac{4.10+1}{4}=\frac{41}{4};$$

$$25\frac{2}{7}=\frac{7.25+2}{7}=\frac{177}{7}.$$

ԿԱՆՈՆ։ Խառը թիվն անկանոն կոտորակ դարձնելու համար ամբողջ թիվը բազմապատկում են հայտարարով, ստացած արտադրյալին ավելացնում են համարիչը և այդ թիվը վերցնում են վորպես վորոնելի կոտորակի համարիչ, իսկ հայտարար թողնում են նախկինը։

124. ԱՆԿԱՆՈՆ ԿՈՏՈՐԱԿԸ ԽԱՌԸ ԹԻՎ ԴԱՐՁՆԵԼԸ։ Դիցուք, պահանջվում է $\frac{100}{8}$ անկանոն կոտորակը դարձնել խառը թիվ, այսինքն, իմանալ, թե այդ անկանոն կոտորակի մեջ քանի ամբողջ միավոր է պարունակվում և ելի քանի ութերորդական մասեր, վորոնք միավոր չեն կազմում։ Քանի վոր միավորը պարունակում է 8 ութերորդական, ապա 100 ութերորդականի մեջ կպարունակվի այնքան միավոր, վորքան անգամ 8 ութերորդականը պարունակվում է 100 ութերորդականի մեջ։ 8 ութերորդականը 100 ութերորդականի մեջ պարունակվում է 12 անգամ, ընդ վորում 4 ութերորդական մնում է։ Ուրեմն 100 ութերորդականը պարունակում է 12 ամբողջ միավոր և ելի 4 ութերորդական մաս։ Յեվ այսպես՝

$$\frac{100}{8}=12\frac{4}{8};$$

Սրա նման.

$$\frac{59}{8}=7\frac{3}{8};\quad \frac{314}{24}=12\frac{14}{25};\quad \frac{85}{17}=5;\quad \frac{25}{25}=1.$$

ԿԱՆՈՆ։ Անկանոն կոտորակը խառը թիվ կամ ամբողջ թիվ դարձնելու համար համարիչը բաժանում են հայտարարի վրա, այդ բաժանման քանորդը ցույց կտա, թե խառը թվի մեջ քանի ամբողջ միավոր կա, իսկ մնացորդը՝ թե միավորի քանի մասեր յեվս։

Անկանոն կոտորակը խառը թիվ դարձնելը յերբեմն անվանում են նաև ամբողջ թվի անջատում այդ կոտորակից։

II. ԿՈՏՈՐԱԿԻ ՄԵԾՈՒԹՅԱՆ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆԸ ՆՐԱ ԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՓՈՓՈԽՄԱՆ ՀԵՏԵՎԱՆՔՈՎ

125. ԿՈՏՈՐԱԿԻ ՅԵՐԿՈՒ ԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՄԵԾԱՑՈՒՄԸ ԿԱՄ ՓՈՔՐԱՑՈՒՄԸ ՄԻԵՎՆՈՒՅՆ ԹԻՎ ԱՆԳԱՄ։ Նորից դիմենք 2-րդ գծագրին (եջ 112)։ § 120-ում մենք յուրաքանչյուր քառորդը բաժանեցինք յերկու հավասար մասի, և այսպիսով ստացանք ութերորդական մասեր. յերեք քառորդում պարու-

նակվում է 6 ութերորդական, և այդ պատճառով էլ, ինչպես տեսանք, $\frac{3}{4}$ կոտորակը հավասար է $\frac{6}{8}$ կոտորակին։

Եթե յուրաքանչյուր քառորդը երկուսի փոխարեն բաժանենք երեք հավասար մասերի, ապա կստանանք ավելի մանր մասեր, որոնցից ամբողջ թվի մեջ կլինի $3 \cdot 4$, այսինքն՝ 12 (ուրեմն, դրանք կլինեն տասներկուերորդական մասեր), իսկ 3 քառորդների մեջ կլինի $3 \cdot 3$, այսինքն՝ 9 մաս. այդ ժամանակ $\frac{3}{4}$-ի փոխարեն կստանանք $\frac{9}{12}$ կոտորակը, որն ըստ մեծության հավասար է $\frac{3}{4}$-ի։ Այսպիսով, յուրաքանչյուր քառորդ մաս, բաժանելով 2, 3, 4, 5 և այլն հավասար մասերի, կստանանք մի շարք այսպիսի հավասար կոտորակներ.

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\frac{15}{20}=\frac{18}{24}=\ldots$$

Այս կոտորակներից յուրաքանչյուրը, սկսած երկրորդից, ստացվում է առաջին կոտորակից՝ $\frac{3}{4}$-ից, նրա համարիչն ու հայտարարը միևնույն թվով 2-ով, 3-ով, 4-ով և այլն բազմապատկելուց հետո. ուրեմն, կոտորակի մեծությունը չի փոխվի երբ նրա համարիչն ու հայտարարը բազմապատկենք միևնույն թվով (կամ—որ նույնն է—մեծացնենք հավասար թիվ անգամ)։

Կոտորակի այս հատկությունը կարելի է ընդհանուր ձևով արտահայտել այսպես.

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}.$$

Այստեղից հետևում է, որ կոտորակի մեծությունը չի փոխվի նույնպես այն ժամանակ, երբ նրա համարիչն ու հայտարարը բաժանենք միևնույն թվի վրա (կամ, որ նույնն է, փոքրացնենք հավասար թիվ անգամ)։

Օրինակ, նկատելով, որ $\frac{30}{50}$ կոտորակի երկու անդամ-

ներն էլ բաժանվում են 10-ի վրա, կարող ենք այդ կոտորակը փոխարինել $\frac{3}{5}$ կոտորակով, որը կստացվի, եթե $\frac{30}{50}$ կոտորակի համարիչը և հայտարարը փոքրացնենք 10 անգամ։

126. ԿՈՏՈՐԱԿԻ ՄԻԱՅՆ ՄԻ ԱՆԴԱՄԻ ՄԵԾԱՑՈՒՄԸ ԿԱՄ ՓՈՔՐԱՑՈՒՄԸ ՄԻ ՔԱՆԻ ԱՆԳԱՄ։ **Եթե կոտորակի համարիչը մեծացնենք (կամ փոքրացնենք) մի քանի անգամ, ապա կոտորակը կմեծանա (կամ կփոքրանա) նույնքան անգամ։**

Օրինակ, $\frac{4}{10}$ կոտորակի համարիչը մեծացնելով 3 անգամ կստանանք $\frac{12}{10}$։ Այս կոտորակը նախկինից 3 անգամ մեծ է, որովհետև նրա մեջ մասերի թիվը 3 անգամ ավելի է, իսկ մասերը մնացել են նույնը։

Եթե կոտորակի հայտարարը մեծացնենք, (կամ փոքրացնենք) մի քանի անգամ. ապա կոտորակը կփոքրանա (կամ կմեծանա) նույնքան անգամ։ Օրինակ, $\frac{4}{10}$ կոտորակի հայտարարը մեծացնելով 5 անգամ, կստանանք $\frac{4}{50}$։ Այս կոտորակը նախկինից 5 անգամ փոքր է, որովհետև (§ 125-ի համաձայն) $\frac{4}{10}=\frac{4.5}{10.5}=\frac{20}{50}$, իսկ $\frac{20}{50}$-ը 5 անգամ մեծ է $\frac{4}{50}$։

127. ԿՈՏՈՐԱԿԻ ՄԵԾԱՑՈՒՄԸ ԿԱՄ ՓՈՔՐԱՑՈՒՄԸ ՄԻ ՔԱՆԻ ԱՆԳԱՄ։ Իմանալով, թե ինչպես է փոխվում կոտորակը, երբ փոխվում են նրա համարիչը և հայտարարը, կարող ենք արտածել հետևյալ **կանոնները**.

1) կոտորակը մի քանի անգամ մեծացնելու համար բավական է նույնքան անգամ մեծացնել նրա համարիչը կամ նույնքան անգամ փոքրացնել նրա հայտարարը.

2) կոտորակը մի քանի անգամ փոքրացնելու համար, բավական է նույնքան անգամ փոքրացնել նրա համարիչը, կամ նույնքան անգամ մեծացնել նրա հայտարարը։

Օրինակներ.

Մեծացնենք $\frac{7}{12}$-ը 5 անգամ. կստանանք $\frac{35}{12}$;

Մեծացնենք $\frac{7}{12}$-ը 6 անգամ. կստանանք $\frac{42}{12}$ կամ $\frac{7}{2}$:

Փոքրացնենք $\frac{8}{9}$-ը 7 անգամ. կստանանք $\frac{8}{63}$:

Փոքրացնենք $\frac{8}{9}$-ը 4 անգամ. կստանանք $\frac{8}{36}$ կամ $\frac{2}{9}$:

Իհարկե, համարիչի մի քանի անգամ փոքրացումը (կոտորակը փոքրացնելիս) կամ հայտարարի մի քանի անգամ փոքրացումը (կոտորակը մեծացնելիս) հնարավոր է վոչ բոլոր դեպքերում (ինչպես այդ յերևում է բերված օրինակներից), այլ միայն այն ժամանակ, յերբ համարիչը կամ հայտարարը բաժանվում են այն թվի վրա, վորը ցույց է տալիս, թե քանի անգամ պետք է փոքրացնել կամ մեծացնել կոտորակը:

123 *ԿՈՏՈՐԱԿԻ ՅԵՐԿՈՒ ԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՄԵԾԱՑՈՒՄԸ ԿԱՄ ՓՈՔՐԱՑՈՒՄԸ ՄԻԵՎՆՈՒՅՆ ԹՎՈՎ:* Ընդունենք, վոր $\frac{a}{b}$ կոտորակի յերկու անդամներին ավելացրել ենք միևնույն m թիվը, այն ժամանակ կստանանք $\frac{a+m}{b+m}$ նոր կոտորակը: Նոր կոտորակը բաղդատենք նախկինի հետ: Դրա համար նախկին կոտորակի յերկու անդամները կբազմապատկենք b+m-ով, իսկ նոր կոտորակի յերկու անդամները b-ով

$$\frac{a}{b}=\frac{a(b+m)}{b(b+m)};\quad \frac{a+m}{b+m}=\frac{(a+m)b}{(b+m)b}$$

Այժմ բաղդատենք այդ յերկու կոտորակների համարիչները, վորովհետև նրանց հայտարարները նույնն են.

$$a(b+m)=ab+am \text{ և } (a+m)b=ab+bm:$$

Ստացված ամեն մի գումարից հանելով ab, առաջին դեպքում կստանանք am և յերկրորդ դեպքում՝ bm: Յեթե վերցրած կոտորակը միավորից փոքր է, այսինքն, յեթե $a<b$, ապա այն ժամանակ $am<bm$. ուրեմն, մեր կատարած գործողության հետևանքով կանոնավոր կոտորակը մեծացավ: Իսկ յեթե տված կոտորակը միավորից մեծ է, այսինքն, յեթե $a>b$, ապա այն ժամանակ $am>bm$ նշանակում է, այդպիսի կոտորակը մեր կատարած գործողությունից փոքրացավ: Այսպիսով,

Կոտորակի անդամներին միևնույն թիվն ավելացնելուց կոտորակը, յերբ միավորից փոքր է, մեծանում է, իսկ այն կոտորակը, վորը միավորից մեծ է, փոքրանում է:

Օրինակ, յեթե վերցնենք $\frac{1}{2}$ կոտորակը և նրա համարիչին ու հայտարարին ավելացնենք մեկական միավոր, ապա կստանանք $\frac{1+1}{2+1}=\frac{2}{3}$ կոտորակը, վորը $\frac{1}{2}$-ից մեծ է, իսկ յեթե վերցնենք $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$ կոտորակը և նույնն անենք նրա հետ, կստացվի $\frac{3+1}{2+1}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$ կոտորակը, վորը $\frac{3}{2}$-ից փոքր է:

III. ԿՈՏՈՐԱԿԻ ԿՐՃԱՏՈՒՄԸ

129. *ԻՆՉՆ Է ԿՈՉՎՈՒՄ ԿՈՏՈՐԱԿԻ «ԿՐՃԱՏՈՒՄ»:* **Կոտորակի կրճատում կոչվում է կոտորակի փոխարինումը մի ուրիշ, իրեն հավասար կոտորակով, վորն ունի ավելի փոքր անդամներ և ստացվում է տված կոտորակի համարիչն ու հայտարարը միևնույն թվի վրա բաժանելով:**

Իհարկե, կրճատել կարելի յե միայն այնպիսի կոտորակը, վորի անդամներն ունեն վորևէ ընդհանուր բաժանարար, բացի միավորից. օրինակ, $\frac{8}{12}$ կոտորակը կարելի յե կրճատել, իսկ $\frac{9}{20}$-ը վոչ, քանի վոր առաջին կոտորակի համարիչը և հայտարարը բացի միավորից, ունեն նաև մի այլ ընդհանուր բաժանարար 4-ը (կրճատումից հետո ստացվում է $\frac{2}{3}$ կոտորակը), իսկ յերկրորդ կոտորակի համարիչն ու հայտարարը, բացի միավորից, վոչ մի ընդհանուր բաժանարար չունեն:

Այն կոտորակը, վորը չի կարելի կրճատել, կոչվում է **անկրճատելի:**

130. *ԿՐՃԱՏՄԱՆ ՅԵՐԿՈՒ ՅԵՂԱՆԱԿ:* Առաջին յեղանակը (**հաջորդական կրճատումն**) այն է, վոր ղեկավարվելով բաժանելիության հատկանիշներով, վորոշում են, թե տված կոտորակի համարիչը և հայտարարը չեն բաժանվում արդյոք վորևէ ընդհանուր բաժանարարի վրա (բացի միավորից). յեթե այդպիսի

բաժանարար գոյություն ունի, ապա դրանով կրճատում են կոտորակը։ Կրճատումից հետո ստացված կոտորակը, յեթե հնարավոր է, նորից նույն ձևով կրճատում են և այդպիսի հաջորդական կրճատումը շարունակում են այնքան, մինչև վոր ստացվում է անկրճատելի կոտորակ։

Որինակ.

$$\frac{\overset{10}{840}}{3600}=\frac{\overset{4}{84}}{360}=\frac{\overset{3}{21}}{90}=\frac{7}{30};$$

Հիշողության համար ոգտակար է սկզբում կոտորակի վերևը գրել այն թիվը, վորով կրճատում են։ Հետագայում, վորոշ ունակություններ ձեռք բերելուց հետո, այդ գրանցումը սովորաբար բաց են թողնում։

Յերկրորդ յեղանակը (լրիվ կրճատումը) այն է, վոր գտնում են կոտորակի անդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը և, յեթե դա լինի վոչ միավորը, այդ անդամները բաժանում են նրա վրա։ Որինակ, ասենք, թե պետք է կրճատել $\frac{391}{527}$ կոտորակը։ Դրա համար գտնում ենք 391 և 527 թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը (վորը հավասար է 17-ի) և նրանով կրճատում.

$$\frac{391}{527}=\frac{391:17}{527:17}=\frac{23}{31};$$

Այս դեպքում կրճատումից հետո ստացվում է անկրճատելի կոտորակ։ Իսկապես, կոտորակի անդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը պետք է պարունակի այդ անդամների մեջ գտնվող բոլոր ընդհանուր պարզ բազմապատկիչները, ուստի, յերբ նրա վրա բաժանենք համարիչը և հայտարարը, ապա ստացած քանորդներն արդեն իրենց մեջ վոչ մի ընդհանուր բազմապատիկ չեն կարող պարունակել (բացի միավորից), հետևապես, և վոչ մի ընդհանուր բաժանարար չեն կարող ունենալ։

131 ԱՆԿՐՃԱՏԵԼԻ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ ԹԵՈՐԵՄ։ Յեթե տված կոտորակը հավասար է վորևէ անկրճատելի կոտորակի ապա տված կոտորակի անդամները ստացվում են այդ անկրճատելի կոտորակի համապատասխան անդամներից, բազմապատկելով միևնույն ամբողջ թվով։

Ընդունենք, վոր

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1},$$

միաժամանակ ընդունենք, վոր առաջին կոտորակն անկրճատելի է, այսինքն, վոր նրա a և b անդամները ընդհանուր բաժանարարներ չունեն, բացի միավորից։ Պահանջվում է ապացուցել, վոր a_1-ը բազմապատիկ է a-ին և b_1-ը բազմապատիկ է b-ին և այն էլ հավասար թվով անգամ։ Ապացուցելու համար յերկրորդ կոտորակի յերկու անդամները բազմապատկենք b-ով, իսկ առաջինի անդամները — b_1-ով. քանի վոր կոտորակների մեծությունները դրանից չեն փոխվի, ապա կստանանք

$$\frac{ab_1}{bb_1}=\frac{a_1b}{b_1b}$$

հավասարությունը, վորտեղից գտնում ենք, վոր

$$ab_1=a_1b։$$

ab_1 արտադրյալը բաժանվում է a-ի վրա, ուրեմն, և a_1b արտադրյալը նույնպես բաժանվում է a-ի վրա, բայց, ըստ պայմանի b և a թվերը փոխադարձաբար պարզ են. ուրեմն, պետք է վոր a_1-ը բաժանվի a-ի վրա (§ 88)։ a_1-ը a-ի վրա բաժանելուց ստացված քանորդը նշանակելով m տառով, կարող ենք ընդունել $a_1=am$, վորից հետո վերջին հավասարումը տալիս է

$$ab_1=amb։$$

Այս հավասարության յերկու մասն էլ բաժանելով a-ի վրա, կստանանք

$$b_1=mb։$$

Այսպիսով, պարզվում է, վոր $a_1=am$ և $b_1=bm$, այն, ինչ վոր պահանջվում էր ապացուցել։

1-ին հետևություն։ Յերկու անկրճատելի կոտորակներ իրար հավասար են միայն այն ժամանակ, յերբ հավասար են նրանց համարիչները յեվ հավասար հայտարարները։

2-րդ հետևություն։ Յուրաքանչյուր կոտորակ հավասար է մեկ յեվ միայն մեկ անկրճատելի կոտորակի։

Իսկապես, կրճատման յերկրորդ յեղանակը (§ 130) ցույց է տալիս, վոր յուրաքանչյուր կոտորակ հավասար է վորևէ անկրճատելի կոտորակի. յեթե նա հավասար լիներ յերկու անկրճատելի կոտորակների, ապա, այդ կոտորակներն իրար հավասար կլինեյին, վորը հնարավոր չէ 1-ին հետևության ուժով։ Ուրեմն, տված կոտորակն իսկապես հավասար է միայն մեկ անկրճատելի կոտորակի։

IV. ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐՆ ԱՄԵՆԱՓՈՔՐ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՀԱՅՏԱՐԱՐԻ ԲԵՐԵԼԸ

132. *ԲԱՑԱՏՐՈՒԹՅՈՒՆ։* Օրինակի համար վերցնենք $\frac{5}{12}$ և $\frac{7}{15}$ կոտորակները և պարզենք այն հարցը, թե արդյոք չի կարելի այդ կոտորակներն արտահայտել միավորի միևնույն մասերով։ $\frac{5}{12}$ կոտորակն անկրճատելի յէ, ուստի այն կոտորակները, վորոնց կարող է հավասարվել $\frac{5}{12}$ կոտորակը պետք է ունենա 12-ին բազմապատիկ հայտարարներ։ Ուրիշ խոսքով, բացի տասներկուերորդական մասերից, մեր վերցրած $\frac{5}{12}$ կոտորակը, կարելի յէ արտահայտել քսանչորսերորդական, յերեսունվեցերորդական, քառասունութերորդական և այլ մասերով։ Նմանապես այն կոտորակների հայտարարները, վորոնց կարող է հավասարվել չկրճատվող $\frac{7}{15}$ կոտորակը, պետք է լինեն 15-ին բազմապատիկ թվեր. հետևապես, այդ յերկու կոտորակների ընդհանուր հայտարարը պետք է լինի 12-ի և 15-ի ընդհանուր բազմապատիկը, իսկ ընդհանուր հայտարարը պետք է լինի 12-ի և 15-ի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը։ Գտնենք այդ թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը՝

$$12=2.2.3$$
$$15=3.5$$

ամենափոքր ընդհ. բազ.$=2.2.3.5=60$։

Այդ էլ հենց կլինի $\frac{5}{12}$ և $\frac{7}{15}$ կոտորակների ամենափոքր ընդհանուր հայտարարը։ Այդ կոտորակներից յուրաքանչյուրը վաթսուներորդական մասերով արտահայտելու համար նրանց հայտարարների համար գտնենք այսպես կոչված լրացուցիչ բազմապատկիչներ, այսինքն. յուրաքանչյուր հայտարարի համար գտնենք այն թիվը, վորով պետք է բազմապատկել այն՝ ամենափոքր ընդհանուր հայտարարն ստանալու համար։ Քանի վոր $60=12.5=15.4$, ապա 60 ստանալու համար պետք է 12-ը բազմապատկել 5-ով, իսկ 15-ը 4-ով։ Կոտորակի մեծությունը չփոխելու համար պետք է յուրաքանչյուր կոտորակի համարիչը բազմապատկել այն նույն թվով, վորով բազմապատկում ենք նրա հայտարարը. ուստի.

$$\frac{5}{12}=\frac{5.5}{12.5}=\frac{25}{60},\quad \frac{7}{15}=\frac{7.4}{15.4}=\frac{28}{60}.$$

Դիցուք, թե պետք է $\frac{4}{90}$, $\frac{7}{20}$ և $\frac{8}{75}$ կոտորակները բերել ամենափոքր ընդհանուր հայտարարի։ Նրանցից առաջինը կրճատելի կոտորակ է, կրճատումից հետո նա տալիս է $\frac{2}{45}$, մնացած կոտորակներն անկրճատելի յեն։ Գտնենք բոլոր հայտարարների 45-ի, 20-ի և 75-ի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը։

45=3.3.5 45-ի համար լրացուցիչ բազմապատիկը հավասար է 20-ի
20=2.2.5 20-ի » » » » 45-ի
75=3.5.5 75-ի » » » » 12-ի

ամենափոքր ընդհ. բազմ.$=3\cdot3.5.2.2.5=900$

Այժմ յուրաքանչյուր կոտորակի յերկու անդամները բազմապատկենք նրա հայտարարի լրացուցիչ բազմապատկիչով.

$$\frac{2}{45}=\frac{2.20}{45.20}=\frac{40}{900};\quad \frac{7}{20}=\frac{7.45}{20.45}=\frac{315}{900};\quad \frac{8}{75}=\frac{8.12}{75.12}=\frac{96}{900}.$$

ԿԱՆՈՆ: **Կոտորակները ամենափոքր ընդհանուր հայտարարի բերելու համար նախապես (յերբ հնարավոր է) կրճատում են նրանց, ապա գտնում են բոլոր հայտարարների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը յեվ յուրաքանչյուր հայտարարի համար վորոշում են համապատասխան լրացուցիչ բազմապատկիչը. վերջապես, յուրաքանչյուր կոտորակի յերկու անդամները բազմապատկում են նրա հայտարարի լրացուցիչ բազմապատկիչով։**

133. *ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՏՈՒԿ ԴԵՊՔԵՐ։* 1-ին դեպք. յերբ հայտարարներից վոչ մի զույգը ընդհանուր բազմապատկիչներ չի պարունակում։

Օրինակ՝

$$\frac{3}{7},\quad \frac{4}{15},\quad \frac{5}{8}։$$

Քանի որ այս դեպքում հայտարարների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը հավասար է նրանց արտադրյալին, ապա յուրաքանչյուր կոտորակի յերկու անդամները պետք է բազմապատկել մնացած կոտորակների հայտարարների արտադրյալով.

$$\frac{3}{7}=\frac{3.15.8}{7.15.8}=\frac{360}{840};$$

$$\frac{4}{15}=\frac{4.7.8}{15.7.8}=\frac{224}{840};$$

$$\frac{5}{8}=\frac{5.7.15}{8.7.15}=\frac{525}{840}։$$

Մասնավորապես այսպես են վարվում, յերբ հայտարարները իրարից տարբեր պարզ թվեր են։

2-րդ դեպք. յերբ հայտարարներից ամենամեծը բաժանվում է մնացած հայտարարներից յուրաքանչյուրի վրա։ Օրինակ՝

$$\frac{3}{7},\quad \frac{7}{15},\quad \frac{8}{315}։$$

315 հայտարարը բաժանվում է 7-ի և 15-ի վրա։ Այս դեպքում ամենամեծ հայտարարը բոլոր հայտարարների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է, ուրեմն նա պետք է լինի ամենափոքր ընդհանուր հայտարարը. 7-ի համար լրացուցիչ բազմապատիկը հավասար է 45-ի.

$$\frac{3}{7}=\frac{3.45}{7.45}=\frac{135}{315};$$

15-ի համար լրացուցիչ բազմապատիկը հավասար 21-ի.

$$\frac{7}{15}=\frac{7.21}{15.21}=\frac{147}{315};\qquad \frac{8}{315}=\frac{8}{315}.$$

V. ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ԹՎԵՐՈՎ

ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ԹՎԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ

134. *ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ ՅԵՎ ԿԱՆՈՆԻ ՍՏԱՑՈՒՄԸ։* *Կոտորակային թվերի գումարումը կարելի յե սահմանել այնպես, ինչպես և ամբողջ թվերի գումարումը (§ 19), այն է.*

գումարումը այն գործողությունն է, վորով մի քանի տված թվեր *(գումարելիներ)* միացվում են մի թվի *(գումարի)* մեջ, վորը պարունակում է գումարելիների բոլոր միավորները յեվ բոլոր մասերը։

1) Դիցուք, պահանջվում է գտնել միեվնույն *հայտարարն ունեցող մի քանի կոտորակների գումարը, օրինակ, այսպիսի կոտորակների՝*

$$\frac{7}{11}+\frac{3}{11}+\frac{5}{11}։$$

Ակնհայտ է, վոր վորևէ միավորի 7 տասնմեկերորդական, և 3 տասնմեկերորդական, և էլի 5 տասնմեկերորդական մասերը կազմում են նույն միավորի 7+3+5 տասնմեկերորդականը, այսինքն

$$\frac{7}{11}+\frac{3}{11}+\frac{5}{11}=\frac{7+3+5}{11}=\frac{15}{11}=1\frac{4}{11}։$$

2) Դիցուք, թե պահանջվում է գումարել տարբեր *հայտարար ունեցող կոտորակներ, օրինակ՝*

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{10}+\frac{9}{16}։$$

Այն ժամանակ, բոլոր այդ կոտորակները բերելով ամենափոքր ընդհանուր հայտարարի, գումարումը կկատարենք այնպես, ինչպես առաջին դեպքում։

$$\frac{\overset{20}{\smile}\!\!\!3}{4}+\frac{\overset{8}{\smile}\!\!\!7}{10}+\frac{\overset{5}{\smile}\!\!\!9}{16}=\frac{60+56+45}{80}=\frac{161}{80}=2\frac{1}{80}։$$

Այն թիվը, վորը հիշելու համար գրված է յուրաքանչյուր կոտորակի վերևը, այն լրացուցիչ բազմապատիկն է, վորով պետք է բազմապատկել կոտորակի անդամները, այդ կոտորակը ընդհանուր հայտարարի բերելու համար։

ԿԱՆՈՆ։ Կոտորակները գումարելու համար պետք է նախապես դրանց բերել ընդհանուր հայտարարի, ապա գումարել համարիչները և գումարի տակ գրել ընդհանուր հայտարարը։

3) Դիցուք, վերջապես, պահանջվում է գումարել **խառը թվեր**.

$$4\frac{2}{15}+8\frac{9}{10}+3\frac{5}{6}.$$

Նախ կգումարենք կոտորակները.

$$\overset{2}{\frac{2}{15}}+\overset{3}{\frac{9}{10}}+\overset{5}{\frac{5}{6}}=\frac{4+27+25}{30}=\frac{56}{30}=1\frac{26}{30}=1\frac{13}{15},$$

Այնուհետև կգումարենք ամբողջ թվերը և նրանց գումարին կավելացնենք կոտորակների գումարումից ստացված միավորը՝

$$4+8+3+1=16.$$

Ուրեմն, լրիվ գումարը հավասար է $16\frac{13}{15}$.

Դիտողություն։ *Կոտորակային թվին զերո գումարելու դեպքում նույնն է, ինչ ասված է ամբողջ թվերը գումարելու վերաբերյալ. այսինքն,* **որևէ թվի զերո գումարել կամ զերոյին որևէ թիվ գումարել — նշանակում է այդ թիվը թողնել անփոփոխ։**

135. *ԳՈՒՄԱՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ։ Կոտորակային թվերի գումարն ունի նույն հատկությունները, ինչ որ ամբողջ թվերի գումարը (§ 20), այն է՝*

1) գումարելիների տեղափոխումից գումարը չի փոխվում և

2) գումարը չի փոխվի, եթե գումարելիների որևէ խումբը փոխարինենք նրանց գումարով։

Գումարելիների փոփոխությունից գումարի փոփոխվելը կոտորակային թվերի համար ևս մնում է (§ 28) նույնը, ինչ և ամբողջ թվերի համար, այսինքն.

եթե որևէ գումարելի մեծանա կամ փոքրանա որևէ թվով, ապա գումարը ևս կմեծանա կամ կփոքրանա միևնույն թվով։

ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ԹՎԵՐԻ ՀԱՆՈՒՄԸ

136. *ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ ԵՎ ԿԱՆՈՆԻ ՍՏԱՑՈՒՄԸ։* Հանումը մի գործողություն է, որտեղ տված մեծ թվից *(նվազելիից)* հանվում է նրա այն մասը, որը հավասար է տված փոքր թվին *(հանելիին)*։

Կարելի է նաև ասել, որ հանումը մի գործողություն է (գումարմանը հակադարձ), որով երկու գումարելիների տված գումարի և այդ գումարելիներից մեկի միջոցով գտնվում է մյուս գումարելին։

1) Դիցուք, տված են միևնույն հայտարարն ունեցող երկու կոտորակներ՝ իրարից հանելու համար, օրինակ.

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8},$$

Եթե 7 ութերորդականից անջատենք այն մասը, որը հավասար է 3 ութերորդականի, ապա, ակներև է, կմնա 7—3 ութերորդական.

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7-3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

2) Դիցուք, տված կոտորակներն ունեն տարբեր *հայտարարներ, օրինակ.*

$$\frac{11}{15}-\frac{3}{8}.$$

Այն ժամանակ, այդ կոտորակները բերելով ընդհանուր հայտարարի, հանումը կատարենք այնպես, ինչպես առաջ բացատրվեց.

$$\overset{8}{\frac{11}{15}}-\overset{15}{\frac{3}{8}}=\frac{88-45}{120}-\frac{43}{120}.$$

ԿԱՆՈՆ։ Կոտորակից կոտորակ հանելու համար պետք է նախապես դրանց բերել ընդհանուր ամենափոքր հայտարարի,

ապա նվազելիի համարիչից հանել հանելիի համարիչը յեվ նրանց տարբերության տակ գրել ընդհանուր հայտարարը։

3) Յեթե պետք է խառը թիվը մի ուրիշ խառը թվից հանել, ապա, յեթե հնարավոր է, կոտորակը հանում են կոտորակից, իսկ ամբողջն ամբողջից։ Օրինակ.

$$8\frac{\overset{4}{9}}{11} - 5\frac{\overset{11}{3}}{4} = 8\frac{36}{44} - 5\frac{33}{44} = 3\frac{3}{44}\text{։}$$

Իսկ յեթե հանելիի կոտորակը նվազելիի կոտորակից մեծ է, ապա նվազելիի ամբողջ թվից վերցնում են մեկ միավոր, վերածում են անհրաժեշտ մասերի և գումարում նվազելիի կոտորակին, վորից հետո վարվում են այնպես, ինչպես նկարագրված է վերևում։ Օրինակ.

$$10\frac{\overset{6}{3}}{11} - 5\frac{\overset{11}{5}}{6} = 10\frac{18}{66} - 5\frac{55}{66} = 9\frac{84}{66} - 5\frac{55}{66} = 4\frac{29}{66}\text{։}$$

Նույն ձևով կատարվում է կոտորակի հանումը ամբողջ թվից. օրինակ.

$$7 - 2\frac{3}{5} = 6\frac{5}{5} - 2\frac{3}{5} = 4\frac{2}{5},$$

$$10 - \frac{3}{17} = 9\frac{17}{17} - \frac{3}{17} = 9\frac{14}{17}\text{։}$$

Դիտողություն. 1) *Զերո հանելիս պահպանվում է նույն պայմանը, ինչ նշված է ամբողջ թվերը հանելիս,* այն է՝ վորեվե թվից զերո հանել, նշանակում է այդ թիվը թողնել անփոփոխ։ 2) Տված կոտորակային թվերը փոփոխելուց նրանց տարբերությունը փոխվում է նույնպես, ինչպես յեվ ամբողջ թվերի տարբերությունը, *այն է՝* յերբ նվազելին մեծացնենք *(կամ փոքրացնենք)* վորեվե թվով, ապա տարբերությունը յեվս կմեծանա *(կամ կփոքրանա)* միեվնույն թվով. յերբ հանելին մեծացնենք *(կամ փոքրացնենք)* վորեվե թվով, ապա տարբերությունը յեվս կփոքրանա *(կամ կմեծանա)* միեվնույն թվով։

ՏՎԱԾ ԹՎԻ ՄԱՍԸ ԳՏՆԵԼԸ։

137. *ՇԱՏ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԼՈՒԾԵԼԻՍ ԱՆՀՐԱԺԵՇՏ Է ԼԻՆՈՒՄ ԳՏՆԵԼ ՏՎԱԾ ԹՎԻ ՄԱՍԸ։ Օրինակ կարող են ծառայել հետևյալ խնդիրները.*

1. ԽՆԴԻՐ: Գնացքը շարժվում է հավասարաչափ, ժամում 40 կմ արագությամբ: Ինչքա՞ն ճանապարհ կանցնի նա $\frac{7}{8}$ ժամում:

Ակնհայտ է, վոր $\frac{7}{8}$ ժամում գնացքը կանցնի այնքան կիլոմետր, վորքան կիլոմետր պարունակվում է 40 կիլոմետրի $\frac{7}{8}$ մասում։ 40-ի $\frac{7}{8}$-ը գտնելու համար նախ գտնենք այդ թվի $\frac{1}{8}$-ը (այսինքն 40-ը փոքրացնենք 8 անգամ), և ապա ստացած արդյունքը մեծացնենք 7 անգամ.

40-ի $\frac{1}{8}$-ը կազմում է 5,

40-ի $\frac{7}{8}$-ը կազմում է $5\times7=35$։

Ուրեմն, գնացքը $\frac{7}{8}$ ժամում կանցնի 35 կմ.

Այս խնդրի մեջ գտանք 40-ի $\frac{7}{8}$-ը։

2. ԽՆԴԻՐ: Մեկ մետր կտորեղենն արժե $18\frac{1}{2}$ ռուբլի: Քանի՞ ռուբլի պետք է վճարել այդ կտորեղենի $1\frac{3}{4}$ մետրին (այսինքն $\frac{7}{4}$ մետրին):

Ակնհայտ է՝ վոր $\frac{7}{4}$ մետրն արժե այնքան ռուբլի, վորքան ռուբլի կա $18\frac{1}{2}$ ռուբլու $\frac{7}{4}$-ում։ Այդ իմանալու համար նախ կգտնենք այդ թվի $\frac{1}{4}$-ը (այսինքն $18\frac{1}{2}$-ը կփոքրացնենք 4 ան-

գամ), իսկ այնուհետև ստացած արդյունքը կմեծացնենք 7 անգամ.

$$18\frac{1}{2}\text{-ի } \left(\text{այսինքն } \frac{37}{2}\text{-ի}\right) \frac{1}{4}\text{-ը կազմում է } \frac{37}{2.4} \ (\S\ 127).$$

$$18\frac{1}{2}\text{-ի } \left(\text{այսինքն } \frac{37}{2}\text{-ի}\right) \frac{7}{4}\text{-ը կազմում է } \frac{37.7}{2.4}=\frac{259}{8}=32\frac{3}{8}:$$

Ուրեմն, $\frac{7}{4}$ մետրին պետք է վճարել $32\frac{3}{8}$ ռուբլի:

Այս խնդրում գտանք $18\frac{1}{2}$ թվի $\frac{7}{4}$-ը:

3. ԽՆԴԻՐ: Գտնել $\frac{5}{6}$ թվի $\frac{8}{3}$-ը:

Նախ կգտնենք $\frac{5}{6}$-ի $\frac{1}{3}$-ը (այսինքն $\frac{5}{6}$-ը կփոքրացնենք 3 անգամ), իսկ այնուհետև ստացած արդյունքը կմեծացնենք 8 անգամ:

$$\frac{5}{6}\text{-ի } \frac{1}{3}\text{-ը կազմում է } \frac{5}{6.3};$$

$$\frac{5}{6}\text{-ի } \frac{8}{3}\text{-ը կազմում է } \frac{5.8}{6.3}=\frac{40}{18}=2\frac{2}{9}:$$

Այս խնդրում գտանք $\frac{5}{6}$ թվի $\frac{8}{6}$-ը:

Այդ խնդիրներից յեզրակացնում ենք հետևյալ կանոնը. **տված թվի վորևէ կոտորակով արտահայտված մեծությունը գտնելու համար պետք է այդ թիվը փոքրացնել այնքան անգամ, վորքան միավոր կա կոտորակի հայտարարում յեվ ստացած արդյունքը մեծացնել այնքան անգամ, վորքան միավոր կա կոտորակի համարիչում:**

ՏՎԱԾ ԹՎԻ ՏՈԿՈՍՆԵՐԸ ԳՏՆԵԼԸ:

138. *ԻՆՉ Է ՏՈԿՈՍԸ:* Մենք արդեն գիտենք, վոր միավորի մի քանի ամենից ավելի գործածական մասերը ստացել են առանձին անուններ. մեկ յերկրորդը անվանում են կես, մեկ յերրորդ մասը—մեկ յերրորդ, մեկ չորրորդը—քառորդ: Շատ հաճախ (օրինակ. արտադրանքների վերաբերյալ և դրամական հաշվումներ անելիս) գործածվում են հարյուրերորդական մասեր, այդ պատճառով էլ դրանք նույնպես ստացել են առանձին անուն:

Վորևէ թվի հարյուրերորդական մասը կոչվում է այդ թվի տոկոս: Ուստի, օրինակ, վորևէ թվի 5 տոկոս նշանակում է նույնը, ինչ այդ թվի 5 հարյուրերորդականը (կամ մեկ քսաներորդականը):

Տոկոսը նշանակում են $^0/_0$ նշանով. այսպես, վորևէ թվի $17^0/_0$ նշանակում է այդ թվի 17 տոկոսը, այսինքն $\frac{17}{100}$ մասը:

Մեր պետական աշխատանքային խնայողական դրամարկղները ավանդատուներին տալիս են տարեկան $3^0/_0$ յեկամուտ. այդ նշանակում է, վոր խնայողական դրամարկղ դրված յուրաքանչյուր գումար մի տարվա ընթացքում մեծանում է $3^0/_0$-ով, այսինքն (այդ գումարի) $\frac{3}{100}$-ով. այդ $3^0/_0$-ը կազմում է ավանդատուի տարեկան յեկամուտը:

Յերբ ասում են, վոր ստախանովական բանվորը կատարել է նորման $250^0/_0$-ով, ապա այդ նշանակում է, վոր նրա մշակած արտադրանքը կազմում է $250^0/_0$, այսինքն նորմայի, այսինքն ստացած արտադրանքի $\frac{250}{100}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$ մասը, ուրիշ խոսքով, նա $2\frac{1}{2}$ անգամ ավելի շատ է արտադրել, քան յենթադրվում էր, ըստ նորմայի:

139. *ՏՎԱԾ ԹՎԻ ՏՈԿՈՍՆԵՐԸ ԳՏՆԵԼԸ:* Դիցուք, պահանջվում է գտնել 245 թվի $18^0/_0$-ը. քանի վոր $18^0/_0$ նշանակում է $\frac{18}{100}$ մաս, ապա խնդիրը լուծվում է § 137-ի կանոնով.

$$245\text{-ի } 18^0/_0\text{-ը կազմում է } \frac{245.18}{100}=44\frac{1}{10}:$$

Քննարկենք նաև հետևյալ յերեք խնդիրները:

1. ԽՆԴԻՐ: 240 ռուբլի արժողությամբ կոստյում պատվիրելիս

պատվիրատուն վորպես կանխավճար մուծեց 15%-ը. գտնել կանխավճարի գումարը։

Ակնհայտ է, վոր պետք է գտնենք 240-ի 15%-ը (այսինքն՝ $\frac{15}{100}$ մասը). § 137-ի կանոնի համաձայն

$$240\text{-ի } 15\%\text{-ը կազմում է } \frac{240.15}{100} = 36 \text{ (ռուբլի)։}$$

Այսպիսով, կանխավճարի գումարը հավասար է 36 ռուբլու։

2. ԽՆԴԻՐ։ Անտառահատների բրիգադն առաջադրանք ուներ 90 խորանարդ մետր փայտ պատրաստելու. առաջադրանքը գերակատարվեց 20%-ով։ Վորքա՞ն փայտ պատրաստեց բրիգադը.

ԼՈՒԾՈՒՄ.

$$90\text{-ի } 20\%\text{-ը կազմում է } \frac{90.20}{100} = 18 \text{ (խոր. մետր)։}$$

Հետեվապես, առաջադրանքը (90 խոր. մետրը) գերակատարված է 18 խոր. մետրով և ուրեմն, բրիգադը պատրաստել է $90+18=108$ (խոր. մետր)։

3. ԽՆԴԻՐ։ Պետական ներքին փոխառությունը բերում է տարեկան 4% յեկամուտ. քանի՞ տարուց հետո 300 ռուբլու պարտատոմսերի յեկամուտը կկազմի 42 ռուբլի։

ԼՈՒԾՈՒՄ.

Նախ կիմանանք, թե 300 ռուբլու պարտատոմսերը տարեկան ինչքան յեկամուտ են բերում. դրա համար պետք է գտնել 300-ի 4%-ը։

300-ի 4%-ը կազմում է $\frac{300.4}{100} = 12$ (ռուբլի)։ Ուրեմն, պարտատոմսերը տարեկան բերում են 12 ռուբլի յեկամուտ։ Ուստի, 42 ռուբլի յեկամուտ կստացվի $42:12=3\frac{1}{2}$ տարուց հետո։

ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ.

140. *ՍԱՀՄԱՆՈՒՄՆԵՐ։ 1) Կոտորակային թվի բազմապատկումն ամբողջ թվով սահմանվում է նույն ձևով, ինչպես և ամբողջ թվերի բազմապատկումը, այսինքն՝* վորևե թիվ *(բազմապատկելի)*

բազմապատկել ամբողջ թվով *(բազմապատկիչ)*—նշանակում է կազմել հավասար գումարելիների գումարը, վորտեղ յուրաքանչյուր գումարելին հավասար է բազմապատկելիին, իսկ գումարելիների թիվը—բազմապատկիչին։

Այսպես, $\frac{7}{8}$-ը բազմապատկել 5-ով—նշանակում է գտնել

$$\frac{7}{8}+\frac{7}{8}+\frac{7}{8}+\frac{7}{8}+\frac{7}{8}$$

գումարը։

2) Վորևե թիվ *(բազմապատկելի)* բազմապատկել կոտորակով *(բազմապատկիչ)*—նշանակում է գտնել բազմապատկելիի այդ կոտորակը։

Այսպես, 5-ը բազմապատկել $\frac{7}{8}$-ով նշանակում է գտնել հինգ միավորի $\frac{7}{8}$ մասը։

$\frac{3}{4}$-ը բազմապատկել $\frac{2}{3}$-ով—նշանակում է գտնել $\frac{3}{4}$-ի $\frac{2}{3}$-ը։

Այսպիսով, տված թվի կոտորակը գտնելը, վորը քննարկեցինք սրանից առաջ, այժմ կանվանենք բազմապատկում կոտորակով։

3) Վորևե թիվ *(բազմապատկելի)* բազմապատկել խառը թվով *(բազմապատկիչ)*—նշանակում է բազմապատկելին բազմապատկել նախ բազմապատկիչի ամբողջ թվով, հետո նրա կոտորակով, և այդ յերկու բազմապատկումների արդյունքները գումարել։

Որինակ՝

$$\frac{4}{5} \cdot 3\frac{2}{7} = \frac{4}{5} \cdot 3 + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{7}.$$

Այն թիվը, վոր ստացվում է բազմապատկումից հետո, այդ բոլոր դեպքերում կոչվում է արտադրյալ, *այսինքն նույնպես, ինչպես և ամբողջ թվերը բազմապատկելիս։*

Այս սահմանումներից յերևում է, վոր կոտորակային թվերի բազմապատկումը միշտ հնարավոր է և միշտ միարժեք գործողություն է։

141. ԱՅՍ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՆՊԱՏԱԿԱՀԱՐՄԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ։ *Թվաբանության մեջ բազմապատկման վերաբերյալ վերջին յերկու սահմանումների նպատակահարմարությունը պարզելու համար վերցնենք այսպիսի խնդիր.*

ԽՆԴԻՐ։ Գնացքը շարժվելով հավասարաչափ, մի ժամում անցնում ե 40 կմ։ Ինչպե՞ս պետք ե իմանալ, թե այդ գնացքը տվյալ ժամանակամիջոցում քանի՞ կիլոմետր անցնի։

Յեթե կանգ առնեինք բազմապատկման այն մի սահմանման վրա, վորը նշված ե ամբողջ թվերի թվաբանության մեջ (հավասար գումարելիների գումարումը), ապա մեր խնդիրը կունենար յերեք տարբեր լուծումներ, այն ե.

Յեթե տված ժամերի թիվն ամբողջ ե (որինակ, 5 ժամ), ապա խնդիրը լուծելու համար պետք ե 40 կմ *բազմապատկել ժամերի այդ թվով։*

Յեթե տված ժամերի թիվն արտահայտված ե կոտորակով (որինակ, $\frac{3}{4}$ ժամ), ապա պետք ե գտնել 40 կիլոմետրի $\frac{3}{4}$ մասի մեծությունը։

Վերջապես, յեթե տված ժամերի թիվը խառն ե (որինակ, $5\frac{3}{4}$ ժամ), ապա պետք ե 40 կմ *բազմապատկել խառը թվում գտնվող ամբողջ թվով և ստացած արդյունքին ավելացնել 40 կիլոմետրի այն մասը, վորքան խառը թվի կոտորակն ե։*

Սակայն մեր տված սահմանումները թույլ են տալիս այս բոլոր հնարավոր դեպքերի համար տալ մեկ ընդհանուր պատասխան.

պետք ե 40 կմ *բազմապատկել տված ժամերի թվով, ինչպիսին ել վոր լինի այն։*

Այսպիսով, յեթե խնդիրը ընդհանուր ձևով ներկայացնենք այսպես. Գնացքը, շարժվելով հավասարաչափ, մի ժամում անցնում ե v կմ։ *Քանի՞ կիլոմետր կանցնի գնացքը t ժամում.*
ապա, ինչպիսին ել վոր լինեն v և t թվերը, մենք կարող ենք տալ մի պատասխան, վոր վորոնելի թիվն արտահայտվում ե v.t բանաձևով։

Ծանոթություն։ *Գտնել տված թվի վորևե մասը, ըստ մեր սահմանման, նշանակում ե միևնույնը, ինչ տված թիվը բազմա-*

պատկել այդ մասն արտահայտող կոտորակով. ուստի, գտնել տված թվի, որինակ, 5%-ը (այսինքն հինգ հարյուրերորդականը) նույնն ե, ինչ տված թիվը բազմապատկել $\frac{5}{100}$-ով կամ $\frac{1}{20}$-ով. գտնել տված թվի 125%-ը միևնույնն ե, ինչ այդ թիվը բազմապատկել $\frac{125}{100}$-ով կամ $\frac{5}{4}$-ով, և այլն։

142. ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆ ԱՅՆ ՄԱՍԻՆ, ԹԵ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿԵԼՈՒՑ ՅԵՐԲ Ե ՄԵԾԱՆՈՒՄ ՅԵՎ ՅԵՐԲ Ե ՓՈՔՐԱՆՈՒՄ ԹԻՎԸ։ Կանոնավոր կոտորակով բազմապատկելուց թիվը փոքրանում ե, իսկ անկանոն կոտորակով բազմապատկելուց թիվը մեծանում ե, յերբ այդ անկանոն կոտորակը միավորից մեծ ե, և մնում ե անփոփոխ, յերբ այդ անկանոն կոտորակը հավասար ե միավորի։

Որինակ, $5\cdot\frac{7}{8}$ արտադրյալը պետք ե 5-ից փոքր լինի, քանի վոր դա ցույց ե տալիս 5 թվի $\frac{7}{8}$ մասը, իսկ հնգի $\frac{7}{8}$ մասն ավելի փոքր ե, քան հնգի $\frac{8}{8}$ մասը, այսինքն փոքր ե 5-ից։ $5\cdot\frac{9}{8}$ արտադրյալը պետք ե ավելի մեծ լինի, քան 5-ը, վորովհետև նա ցույց ե տալիս 5 թվի $\frac{9}{8}$ մասը, իսկ հնգի $\frac{9}{8}$ մասն ավելի մեծ ե, քան $\frac{8}{8}$ մասը, այսինքն ավելի յե 5-ից։ Վերջապես, $5\cdot\frac{8}{8}$ արտադրյալը, այսինքն հնգի $\frac{8}{8}$ մասը հավասար ե 5-ի։

Դիտողություն։ *Կոտորակային թվերը բազմապատկելիս, ինչպես և ամբողջ թվերը բազմապատկելիս, արտադրյալն ընդունվում ե հավասար զերոյի, յեթե արտադրիչներից վորևե մեկը հավասար ե զերոյի, այսպես, $0\cdot\frac{7}{8}=0$ և $\frac{7}{8}\cdot 0=0$։*

143. ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ԿԱՆՈՆՆԵՐԻ ՍՏԱՑՈՒՄԸ։ 1) Կոտորակի բազմապատկումն ամբողջ թվով։ *Դիցուք, պահանջվում ե $\frac{3}{10}$ կոտորակը բազմապատկել 5-ով։ Այդ նշանակում ե $\frac{3}{10}$-ը մե-*

ծացնել 5 անգամ։ Կոտորակը 5 անգամ մեծացնելու համար, բավական է նրա համարիչը մեծացնել 5 անգամ կամ հայտարարը փոքրացնել նույնքան անգամ (§ 127)։

Ուստի՝

$$\frac{3}{10}\cdot 5=\frac{3.5}{10}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2},\ \text{կամ}\ \frac{3}{10}\cdot 5=\frac{3}{10:5}=\frac{3}{2};$$

1 ԿԱՆՈՆ: Կոտորակն ամբողջ թվով բազմապատկելու համար պետք է այդ ամբողջ թվով բազմապատկել համարիչը, իսկ հայտարարը թողնել նույնը. սրա փոխարեն նույնպես կարելի յե տված թվի վրա բաժանել կոտորակի հայտարարը (յեթե այդ հնարավոր է), իսկ համարիչը թողնել նույնը։

Դիտողություն։ *Կոտորակի և նրա հայտարարի արտադրյալը հավասար է այդ կոտորակի համարիչին։*

Այսպես՝

$$\frac{5}{8}\cdot 8=\frac{5\cdot 8}{8}=5;$$

2) Ամբողջ թվի բազմապատկումը կոտորակով։ *Դիցուք, թե տված է 7-ը բազմապատկել $\frac{4}{9}$-ով։ Դա նշանակում է գտնել 7-ի $\frac{4}{9}$ մասը։ Դրա համար նախ կգտնենք 7-ի $\frac{1}{9}$-ը, իսկ հետո $\frac{4}{9}$-ը։*

7-ի $\frac{1}{9}$-ը կազմում է $\frac{7}{9}$ (§ 119);

7-ի $\frac{4}{9}$-ը կազմում է $\frac{7.4}{9}$ (§ 127)։

Ուրեմն,

$$7\cdot\frac{4}{9}=\frac{7.4}{9}=\frac{28}{9};$$

ԿԱՆՈՆ. Ամբողջ թիվը կոտորակով բազմապատկելու համար պետք է ամբողջ թիվը բազմապատկել կոտորակի համարիչով յեվ այդ արտադրյալը գրել համարիչ, իսկ հայտարար գրել տված կոտորակի հայտարարը։

3) Կոտորակի բազմապատկումը կոտորակով։ *Դիցուք, պետք է $\frac{3}{5}$-ը*

բազմապատկել $\frac{7}{8}$-ով։ Այդ նշանակում է գտնել $\frac{3}{5}$-ի $\frac{7}{8}$-ը։ Դրա համար նախ կգտնենք $\frac{3}{5}$-ի $\frac{1}{8}$-ը, իսկ այնուհետև $\frac{7}{8}$-ը.

$\frac{3}{5}$-ի $\frac{1}{8}$-ը կազմում է $\frac{3}{5.8}$ (§ 127);

$\frac{3}{5}$-ի $\frac{7}{8}$-ը կազմում է $\frac{3.7}{5.8}$;

Ուրեմն;

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{8}=\frac{3.7}{5.8}=\frac{21}{40};$$

3 ԿԱՆՈՆ։ Կոտորակը կոտորակով բազմապատկելու համար պետք է համարիչը բազմապատկել համարիչով, հայտարարը հայտարարով յեվ առաջին արտադրյալը գրել արտադրյալի համարիչ, իսկ յերկրորդը՝ հայտարար։

Դիտողություն: *Այս կանոնը կարելի յե կիրառել թե կոտորակն ամբողջով և թե ամբողջ թիվը կոտորակով բազմապատկելու համար, յեթե միայն ամբողջ թիվը դիտենք վորպես կոտորակ, վորի հայտարարը միավոր է։ Այսպես.*

$$\frac{3}{10}\cdot 5=\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{1}=\frac{3.5}{10.1}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2};$$

$$7\cdot\frac{4}{9}=\frac{7}{1}\cdot\frac{4}{9}=\frac{7\cdot 4}{1.9}=\frac{28}{9}=3\frac{1}{9};$$

Այսպիսով, հենց նոր մեկնաբանած յերեք կանոնները պարփակվում են մի կանոնի մեջ, վորն ընդհանուր տեսքով կարելի յե արտահայտել այսպես.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};$$

4) Խառը թվերի բազմապատկումը։

4 ԿԱՆՈՆ։ Խառը թվերը բազմապատկելու համար պետք է նրանց դարձնել անկանոն կոտորակներ յեվ այնուհետեվ բազմապատկել կոտորակների բազմապատկման կանոններով. *Օրինակ.*

1) $7 \cdot 5\frac{3}{4} = 7 \cdot \frac{23}{4} = \frac{7.23}{4} = \frac{161}{4} = 40\frac{1}{4}$;

2) $2\frac{3}{5} \cdot 4\frac{2}{3} = \frac{13}{5} \cdot \frac{14}{3} = \frac{13.14}{5.3} = \frac{182}{15} = 12\frac{2}{15}$.

144. *ԿՐՃԱՏՈՒՄ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ։* *Կոտորակները բազմապատկելիս, յեթե հնարավոր է, պետք է կատարել նախնական կրճատում, ինչպես այդ յերևում է հետևյալ օրինակներից.*

1) $12 \cdot \frac{7}{8} = \frac{12.7}{8} = \frac{3.7}{2} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$;

2) $\frac{16}{21} \cdot \frac{5}{28} = \frac{16.5}{21.28} = \frac{4.5}{21.7} = \frac{20}{147}$.

Այդպիսի կրճատում հնարավոր է կատարել, վորովհետև կոտորակի մեծությունը չի փոխվի, յեթե նրա համարիչն ու հայտարարը փոքրացնենք միևնույն թվով անգամ։

145. *ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԻ ՓՈՓՈԽՎԵԼԸ ԱՐՏԱԴՐԻՉՆԵՐԻ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏԵՎԱՆՔՈՎ։* *Արտադրիչները փոփոխելիս կոտորակային թվերի արտադրյալը փոփոխվում է բոլորովին նույն ձևով, ինչպես և ամբողջ թվերի արտադրյալը (§ 53), այն է.*

յերբ արտադրիչներից վորևէ մեկը մեծացնենք (կամ փոքրացնենք) մի քանի անգամ, ապա արտադրյալը յեվս կմեծանա (կամ կփոքրանա) նույնքան անգամ։

Այսպես, յեթե

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$$

օրինակում բազմապատկելին մեծացնենք, ընդունենք, թե 2 անգամ, այսինքն $\frac{3}{5}$-ի փոխարեն վերցնենք $\frac{3}{5} + \frac{3}{5}$, ապա նոր արտադրյալը կներկայացնի արդեն վոչ թե $\frac{3}{5}$-ի $\frac{4}{7}$ մասը, այլ այդ մասը վերցրած վորպես գումարելի յերկու անգամ, ուրեմն, նոր արտադրյալը պետք է նախորդից 2 անգամ մեծ լինի։ Յեվ իսկապես.

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{24}{35};\ \frac{24}{35}\text{-ը 2 անգամ մեծ է } \frac{12}{35}\text{-ից։}$$

Նույն օրինակի մեջ բազմապատկիչը մեծացնենք, ասենք թե, 3 անգամ, այսինքն $\frac{4}{7}$-ի փոխարեն վերցնենք $\frac{4}{7} + \frac{4}{7} + \frac{4}{7}$. Այն ժամանակ նոր արտադրյալը կհանդիսանա վոչ թե բազմապատկելիի $\frac{4}{7}$-ը, այլ նրա $\frac{4}{7}$-ը, վերցրած 3 անգամ. ուրեմն, նոր արտադրյալը պետք է նախորդից մեծ լինի 3 անգամ։ Յեվ իսկապես.

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{12}{7} = \frac{36}{35};\ \frac{36}{35}\text{-ը 3 անգամ մեծ է } \frac{12}{35}\text{-ից։}$$

146. *ՅԵՐԵՔ ՅԵՎ ԱՎԵԼԻ ՇԱՏ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ։* *Դիցուք, տված է վերաբազմապատկելու յերեք կոտորակներ՝ $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6}$, ընդ վորում յենթադրվում է, վոր բազմապատկումը պետք է կատարել այն հաջորդականությամբ, ինչպես վոր գրված են արտադրիչները, այսինքն՝ պահանջվում է $\frac{2}{3}$-ը բազմապատկել $\frac{7}{8}$-ով և ապա ստացած արտադրյալը բազմապատկել $\frac{5}{6}$-ով։ Բազմապատկելով առաջին յերկու կոտորակները, կստանանք $\frac{2.7}{3.8}$, այս թիվը բազմապատկելով յերրորդ կոտորակով, կգտնենք $\frac{2.7.5}{3.8.6} = \frac{1.7.5}{3.8.3} = \frac{35}{72}$։ Ուրեմն,*

մի քանի կոտորակներ իրար հետ բազմապատկելու համար պետք է նրանց համարիչները բազմապատկել առանձին ու հայտարարները առանձին յեվ առաջին արտադրյալը գրել արտադրյալի համարիչ, իսկ յերկրորդը — արտադրյալի հայտարար։

Դիտողություն. *Այս կանոնը կարելի յե կիրառել նաև այնպիսի արտադրյալների նկատմամբ, վորոնց մեջ մի քանի բազմապատկիչներ ամբողջ կամ խառը թվեր են, յեթե միայն ամբողջ* թիվը գրենք որպես կոտորակ միավոր հայտարարով, իսկ խառը թվերը նախօրոք դարձնենք անկանոն կոտորակներ։ Օրինակ․

$$\frac{3}{4}\cdot 5\cdot 1\frac{5}{6}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{1}\cdot\frac{11}{6}=\frac{3.5.11}{4.1.6}=\frac{5.11}{4.2}=\frac{55}{8}=6\frac{7}{8}:$$

147. ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ։

Բազմապատկման այն հատկությունները, որոնք նշել ենք ամբողջ թվերի համար (§ 56, 57, 59), պատկանում են նաև կոտորակային թվերի բազմապատկմանը։ Թվենք այդ հատկությունները.

1) Արտադրիչների տեղափոխությունից արտադրյալը չի փոխվում:

Օրինակ.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3},$$

Իսկապես, նախորդ պարագրաֆի կանոնի համաձայն առաջին արտադրյալը հավասար է $\frac{2.5.3}{3.6.4}$ կոտորակին, իսկ երկրորդը հավասար է $\frac{5.3.2}{6.4.3}$ կոտորակին։ Բայց այդ կոտորակներն իրար հավասար են, որովհետև նրանց անդամները իրարից տարբերվում են միայն ամբողջ արտադրիչների կարգով, իսկ արտադրիչների տեղափոխումից ամբողջ թվերի արտադրյալը չի փոխվում։

2) Արտադրյալը չի փոխվի, եթե արտադրիչների որևէ խումբ փոխարինենք նրանց արտադրյալով:

Օրինակ.

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}\right),$$

որովհետև՝

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}=\frac{5.3.2.1}{6.4.7.5}$$

և

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}\right)=\frac{5.3}{6.4}\cdot\frac{2.1}{7.5}=\frac{5.3.(2.1)}{6.4.(7.5)}=\frac{5.3.2.1}{6.4.7.5}.$$

Արդյունքները միևնույն են։

Բազմապատկման այս հատկությունից կարելի է դուրս բերել այսպիսի հետևություն.

Որևէ թիվ արտադրյալով բազմապատկելու համար կարելի է այդ թիվը բազմապատկել առաջին արտադրիչով, ստացված թիվը բազմապատկել երկրորդով և այլն:

Օրինակ.

$$10\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}\right)=10\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7},$$

քանի որ 2-րդ հատկության հիման վրա $10\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}\right)$ արտադրյալում փակագծի մեջ եղած թվով բազմապատկումը կարող ենք փոխարինել հաջորդական բազմապատկումով՝ $\frac{3}{4}$-ով և $\frac{5}{7}$-ով։

3. ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ԲԱՇԽԱԿԱՆ ՕՐԵՆՔԸ (ԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ)։

Գումարը որևէ թվով բազմապատկելու համար կարելի է յուրաքանչյուր գումարելին առանձին բազմապատկել այդ թվով և արդյունքները գումարել։

Այդ օրենքը բացատրեցինք ամբողջ թվերի նկատմամբ (§ 59)։ Այդ օրենքն առանց որևէ փոփոխությունների ճիշտ է նաև կոտորակային թվերի համար։

Ցույց տանք, իսկապես որ

$$(a+b+c+\ldots)m=am+bm+cm+\ldots$$

հավասարությունը (բազմապատկման բաշխական օրենքը գումարման վերաբերյալ) մնում է ճիշտ և այն ժամանակ, երբ տառերը նշում են կոտորակային թվեր։ Քննության առնենք երեք դեպք.

1) Նախ ենթադրենք, որ բազմապատկիչն ամբողջ թիվ է, օրինակ, m=3 (a, b, c տված որևէ թվեր են)։ Համաձայն ամբողջ թվով բազմապատկելու սահմանման, կարելի է գրել (պարզության համար վերցնում ենք երեք գումարելի) այսպես

$$(a+b+c)\cdot 3=(a+b+c)+(a+b+c)+(a+b+c).$$

Գումարման զուգորդման օրենքի հիման վրա կարող ենք աջ մասի փակագծերը բաց թողնել. կիրառելով գումարման տեղափոխման օրենքը, և հետո նորից զուգորդման օրենքը, կարող ենք հավասարության աջ մասը արտագրել այսպես.

$$(a+a+a)+(b+b+b)+(c+c+c).$$

Այն ժամանակ կստանանք.

$$(a+b+c)\cdot 3=a\cdot 3+b\cdot 3+c\cdot 3.$$

Ուրեմն, այս դեպքում բաշխական օրենքը հաստատվում է։

2) Այժմ յենթադրենք, վոր m բազմապատկիչը կոտորակ է միավոր համարիչով, օրինակ, $m=\frac{1}{8}$. $a+b+c$ գումարը բազմապատկել $\frac{1}{8}$-ով — նշանակում է գտնել նրա $\frac{1}{8}$ մասը։ Այդ մասը հավասար է $\frac{a}{8}+\frac{b}{8}+\frac{c}{8}$, վորին կարող ենք համոզվել, յեթե այդ արտահայտությունը բազմապատկենք 8-ով։ Իսկապես, քանի վոր 8-ն ամբողջ թիվ է, ապա առաջին դեպքում ապացուցածի համաձայն, բազմապատկումից հետո կստանանք.

$$\frac{a}{8}\cdot 8+\frac{b}{8}\cdot 8+\frac{c}{8}\cdot 8,$$

վորը կազմում է

$$a+b+c.$$

Ուրեմն, այդ գումարի ութերորդ մասն իսկապես հավասար է

$$\frac{a}{8}+\frac{b}{8}+\frac{c}{8},$$

վորը կարելի յե գրել այսպես՝

$$a\cdot\frac{1}{8}+b\cdot\frac{1}{8}+c\cdot\frac{1}{8}.$$

Հետևապես՝

$$(a+b+c)\cdot\frac{1}{8}=a\cdot\frac{1}{8}+b\cdot\frac{1}{8}+c\cdot\frac{1}{8}.$$

Մենք տեսնում ենք, վոր բաշխական օրենքը հաստատվում է նաև այս դեպքում։

3) Վերջապես, ընդունենք, վոր m բազմապատկիչը ուզած վորևէ համարիչով կոտորակ է, օրինակ, $m=\frac{9}{8}$ (սրան է վերաբերում նաև այն դեպքը, յերբ m-ը խառը թիվ է)։

$a+b+c$ գումարը բազմապատկել $\frac{9}{8}$-ով — նշանակում է գտնել այդ գումարի $\frac{9}{8}$-ը, վորի համար բավական է 9-ով բազմապատկել այդ գումարի

մեկ ութերորդը։ Բայց գումարի $\frac{1}{8}$-ը, ինչպես այժմ համոզվեցինք, հավասար է $\frac{a}{8}+\frac{b}{8}+\frac{c}{8}$, ուրեմն, նրա $\frac{9}{8}$ մասը կլինի.

$$\left(\frac{a}{8}+\frac{b}{8}+\frac{c}{8}\right)\cdot 9,$$

վորը, առաջին դեպքի համաձայն, հավասար է.

$$\frac{a}{8}\cdot 9+\frac{b}{8}\cdot 9+\frac{c}{8}\cdot 9,$$

այսինքն՝

$$a\cdot\frac{9}{8}+b\cdot\frac{9}{8}+c\cdot\frac{9}{8}.$$

Ուրեմն,

$$(a+b+c)\cdot\frac{9}{8}=a\cdot\frac{9}{8}+b\cdot\frac{9}{8}+c\cdot\frac{9}{8}.$$

Այսպիսով, բաշխական օրենքը հաստատվում է բոլոր դեպքերում։

ԳՏՆԵԼ ԱՆՀԱՅՏ ԹԻՎԸ, ՅԵՐԲ ՏՎԱԾ Է ՆՐԱ ՄԱՍԸ։

148. *ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՅԵՎ ԿԱՆՈՆ։* Նախքան կոտորակային թվերի բաժանմանն անցնելը, օգտակար է քննության առնել, թե ինչպես կարելի յե գտնել անհայտ թիվը, յերբ տված է նրա վորևէ մասի մեծությունը։ Պարզության համար այդ հարցը կբացատրենք հետևյալ պարզ խնդիրներով։

§ 137-ում տված խնդիրները կփոփոխենք այսպես.

1. ԽՆԴԻՐ։ Գնացքը, հավասարաչափ շարժվելով, $\frac{7}{8}$ ժամում անցավ 35 կմ։ Այդ գնացքը քանի՞ կիլոմետր կանցնի մի ժամում։

Իհարկե, գնացքը մի ժամում անցնում է այնքան կիլոմետրեր, վորոնց $\frac{7}{8}$ մասը կազմում է 35 կմ։ Ուրեմն, այս խնդրի մեջ մեզ տված է անհայտ թվի յոթ ութերորդ մասի մեծությունը (35 կմ), իսկ պահանջվում է գտնել այդ թիվը։

Քանի վոր 35 կմ կազմում է անհայտ թվի $\frac{7}{8}$-ը, ապա 35 կմ փոքրացնելով 7 անգամ, կգտնենք այդ անհայտ թվի $\frac{1}{8}$ մասը, իսկ այնուհետև մեծացնելով արդյունքը 8 անգամ, կստանանք այդ թվի $\frac{8}{8}$-ը, այսինքն, լրիվ թիվը։ Պարզության համար մեր դատողությունը կարտահայտենք ավելի մանրամասն գրությամբ.

անհայտ թվի $\frac{7}{8}$-ը կազմում է 35,

» » $\frac{1}{8}$-ը կազմում է $\frac{35}{7}$,

» » $\frac{8}{8}$-ը կազմում է $\frac{35 \cdot 8}{7} = \frac{5 \cdot 8}{1} = 40$։

Ուրեմն, գնացքը մի ժամում անցնում է 40 կմ։

2-րդ ԽՆԴԻՐ։ $1\frac{3}{4}$ մետր կտորեղենն արժե $32\frac{3}{8}$ ռուբլի։ Ի՞նչ արժե այդ կտորեղենի 1 մ։

Քանի որ $1\frac{3}{4}$ մետրը $= \frac{7}{4}$ մետրի և այդ $\frac{7}{4}$ մետրն արժե $32\frac{3}{8}$ ռուբլի, ապա $32\frac{3}{8}$ ռուբլին փոքրացնելով 7 անգամ, կիմանանք $\frac{1}{4}$ մետրի արժեքը, իսկ այնուհետև այդ արժեքը մեծացնելով 4 անգամ, կգտնենք ամբողջ մետրի արժեքը։ Այդ արտահայտենք մանրամասն գրությամբ.

$\frac{7}{4}$ մետրն արժե $32\frac{3}{8}$ ռուբլի $= \frac{259}{8}$ ռուբլի,

$\frac{1}{4}$ » » $\frac{259}{8 \cdot 7}$ ռուբլի,

$\frac{4}{4}$ » » $\frac{259 \cdot 4}{8 \cdot 7} = 18\frac{1}{2}$ ռուբլի։

3-րդ ԽՆԴԻՐ։ Գտնել այն թիվը, որի $\frac{8}{3}$-ը կազմում է $2\frac{2}{9}\left(=\frac{20}{9}\right)$։

Անհայտ թվի $\frac{8}{3}$-ը կազմում է $\frac{20}{9}$,

» » $\frac{1}{3}$-ը կազմում է $\frac{20}{9 \cdot 8}$,

» » $\frac{3}{3}$-ը կազմում է $\frac{20 \cdot 3}{9 \cdot 8} = \frac{5}{6}$։

Այս խնդիրներից յեզրակացնում ենք հետևյալ կանոնը. **անհայտ թիվը գտնելու համար, յերբ տված է նրա որևէ մասի մեծությունը, բավական է այդ մեծությունը փոքրացնել այնքան անգամ, որքան միավոր կա կոտորակի համարիչում յեվ արդյունքը մեծացնել այնքան անգամ, որքան միավոր կա այդ կոտորակի հայտարարում։**

149. ԹԻՎԸ ԳՏՆԵԼԸ, ՅԵՐԲ ՏՎԱԾ ԵՆ ՆՐԱ ՏՈԿՈՍՆԵՐԸ։

Դիցուք տված է, որ որևէ թվի 18%-ը կազմում է $14\frac{2}{5}$. այդ թիվը գտնելու համար նկատում ենք, որ $14\frac{2}{5}$-ը կազմում է այդ թվի $\frac{18}{100}$-ը. ուստի, նախորդ պարագրաֆի կանոնի համաձայն անհայտ թիվը կստացվի, յեթե $14\frac{2}{5} = \frac{72}{5}$-ը բաժանենք 18-ի վրա $\left(\text{կստանանք } \frac{4}{5}\right)$ և արդյունքը բազմապատկենք 100-ով (կստացվի 80)։

Քննարկենք յերկու խնդիր։

1-ին ԽՆԴԻՐ։ Խնայողական դրամարկղի ավանդատուի 4 տարվա յեկամուտը կազմում է 12 ռ. 84 կոպ.։ Գտնել ավանդի գումարը[1]։

ԼՈՒԾՈՒՄ։ 4 տարվա յեկամուտը կազմում է 12 ռ. 84 կոպ. կամ 1284 կոպ.։ Ուրեմն, 1 տարվա յեկամուտը կազմում է $1284 : 4 = 321$ կոպ.։ Քանի որ խնայդրամարկղը վճարում է տարեկան

[1]) Ենթադրվում է, որ յուրաքանչյուր տարվա վերջին ավանդատուն դրամարկղից վերցնում է իր յեկամուտը, այնպես որ դրված ավանդի գումարը հետևյալ տարին մնում է նույնը։

3%, ապա 321 կոպ. կազմում է ավանդ դրած գումարի 3%-ը: Այդ գումարը գտնելու համար, նախորդ պարագրաֆի կանոնի հիման վրա պետք է 321-ը բաժանել 3-ի վրա և արդյունքը բազմապատկել 100-ով.

$$\frac{321}{3}\cdot 100=10700 (=107 \text{ ռուբլի}):$$

2-րդ ԽՆԴԻՐ: Քաղաքի ազգաբնակությունը կազմում է 134 400 մարդ: Հոկտեմբերյան սոցիալիստական Մեծ հեղափոխությունից հետո նա աճել է 60%-ով: Որքա՞ն բնակիչ է ունեցել քաղաքը մինչև հեղափոխությունը:

ԼՈՒԾՈՒՄ. Բնակիչների անհայտ թիվն ավելացել է այդ թվի 60%-ը: Քանի որ յուրաքանչյուր թիվ կազմում է իր 100%-ը (հարյուր հարյուրերորդական մասը), ապա բնակիչների նոր թիվը (134 400) կազմում է նրանց նախկին թվի 160%-ը: Ուստի, բնակիչների նախկին թիվը գտնելու համար, նախորդ պարագրաֆի կանոնի համաձայն, պետք է 134 400-ը բաժանել 160-ի վրա և արդյունքը բազմապատկել 100-ով.

$$\frac{134400}{160}\cdot 100=84\,000 \text{ (մարդ)}:$$

ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ԹՎԵՐԻ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ

150. *ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ:* Բաժանումը մի գործողություն է (*բազմապատկմանը հակադարձ*), որով երկու արտադրիչների տված արտադրյալի (*բաժանելիի*) և արտադրիչներից մեկի (*բաժանարարի*) հիման վրա գտնում են մյուս արտադրիչը (*քանորդը*):

Օրինակ, $\frac{7}{8}$-ը բաժանել $\frac{3}{5}$-ի վրա—նշանակում է գտնել այնպիսի թիվ, որը բազմապատկելով $\frac{3}{5}$-ով՝ ստացվի $\frac{7}{8}$, կամ գտնել այնպիսի թիվ, որով պետք է բազմապատկել $\frac{3}{5}$-ը, $\frac{7}{8}$ ստանալու համար: Առաջին դեպքում քանորդը հանդիսանում

է որոնելի բազմապատկելին, իսկ երկրորդ դեպքում—որոնելի բազմապատկիչը:

Քանի որ բազմապատկելիի և բազմապատկիչի տեղերը կարելի է փոխել, ուստի, քանորդի մեծությունը անկախ է նրանից, քանորդը բազմապատկելի է թե բազմապատկիչ:

Դիտողություն: *1) Ամբողջ թվերի թվաբանության մեջ այդ սահմանումը կիրառելի է միայն առանց մնացորդի բաժանումների նկատմամբ, իսկ կոտորակային թվերի թվաբանության մեջ այդ սահմանումը, ինչպես կտեսնենք, միշտ կիրառելի է, բացառությամբ այն դեպքի, երբ բաժանարարը հավասար է զերոյի:*

2) Կանոնավոր կոտորակի վրա բաժանելիս թիվը մեծանում է, իսկ անկանոն կոտորակի վրա բաժանելիս փոքրանում, երբ այդ անկանոն կոտորակը միավորից մեծ է, և մնում է անփոփոխ, երբ նա հավասար է միավորի:

Օրինակ, $5 : \frac{7}{8}$ քանորդը պետք է 5-ից մեծ լինի, որովհետև քանորդը բազմապատկած $\frac{7}{8}$-ով պետք է կազմի 5, իսկ քանի որ $\frac{7}{8}$-ով բազմապատկելիս, ինչպես գիտենք, յուրաքանչյուր թիվ փոքրանում է, ապա ուրեմն քանորդը պետք է 5-ից մեծ լինի: Նույն ձևով բացատրվում է այն, որ $5 : \frac{9}{8}$ քանորդը պետք է 5-ից փոքր լինի (քանի որ $\frac{9}{8}$-ով բազմապատկելիս այդ քանորդը մեծանալով պիտի տա 5 թիվը):

151. *ԲԱԺԱՆՄԱՆ ԿԱՆՈՆՆԵՐԻ ՍՏԱՑՈՒՄԸ:* Բաժանման ժամանակ կարող են հանդես գալ հետևյալ հինգ դեպքերը.

1) Ամբողջ թվի բաժանումն ամբողջ թվի վրա: *Այսպիսի բաժանում քննարկեցինք ամբողջ թվերի թվաբանության մեջ: Բայց այնտեղ ճիշտ բաժանում միշտ հնարավոր չէր, քանի որ բաժանելին միշտ հավասար չէ բաժանարարի և ամբողջ թվի արտադրյալին, ուստի, ընդհանուր դեպքում պետք եղավ քննարկելու բաժանումը* մնացորդով: *Իսկ այժմ, ընդունելով կոտորակով բազմապատկումը, մենք ամբողջ թվերի բաժանման ամեն մի դեպք կարող ենք համարել հնարավոր, բացա-*

անհայտ քանորդի $\frac{7}{11}$-ը կազմում է $\frac{5}{6}$;

» » $\frac{1}{11}$-ը կազմում է $\frac{5}{6.7}$;

» » $\frac{11}{11}$-ը կազմում է $\frac{5.11}{6.7}$:

Ուրեմն.

$$\frac{5}{6}:\frac{7}{11}=\frac{5.11}{6.7}=\frac{55}{42}=1\frac{13}{42}:$$

4-րդ ԿԱՆՈՆ։ Կոտորակը կոտորակի վրա բաժանելու համար պետք է առաջին կոտորակի համարիչը բազմապատկել երկրորդ կոտորակի հայտարարով, իսկ առաջին կոտորակի հայտարարը երկրորդ կոտորակի համարիչով և առաջին արտադրյալը վերցնել որպես համարիչ, իսկ երկրորդը՝ հայտարար։

Դիտողություն։ *Այս կանոնին կարելի է ենթարկել նաև բոլոր դեպքերը, եթե միայն ամբողջ թիվը դիտենք որպես միավոր հայտարար ունեցող կոտորակ։ Այսպես՝*

$$5:7=\frac{5}{1}:\frac{7}{1}=\frac{5\cdot1}{1\cdot7}=\frac{5}{7};$$

$$\frac{8}{9}:4=\frac{8}{9}:\frac{4}{1}=\frac{8\cdot1}{9\cdot4}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9};$$

$$3:\frac{2}{5}=\frac{3}{1}:\frac{2}{5}=\frac{3\cdot5}{1\cdot2}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}:$$

Այսպիսով, կոտորակների բաժանման կանոնը բոլոր դեպքերում կարելի է արտահայտել այսպիսի տառային հավասարությամբ.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}:$$

5) Խառը թվերի բաժանումը։

5-րդ ԿԱՆՈՆ։ Խառը թվերը բաժանելու համար պետք է նրանց դարձնել անկանոն կոտորակներ և ապա բաժանել կոտորակների բաժանման կանոնների համաձայն։

Օրինակ.

$$8:3\frac{5}{6}=8:\frac{23}{6}=\frac{8.6}{23}=\frac{48}{23}=2\frac{2}{23};$$

$$7\frac{3}{4}:5\frac{1}{2}=\frac{31}{4}:\frac{11}{2}=\frac{31\cdot2}{4.11}=\frac{31}{22}=1\frac{9}{22}:$$

152. *ԲԱԺԱՆՄԱՆ ՓՈԽԱՐԻՆՈՒՄԸ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄՈՎ։* *Եթե տված կոտորակի համարիչը փոխադրենք հայտարարի տեղը, իսկ հայտարարը՝ համարիչի, ապա այդ տեղափոխությունից ստացված կոտորակը տվածի նկատմամբ կոչվում է* հակադարձ *կոտորակ։ Այսպես, $\frac{7}{8}$-ի համար հակադարձ կոտորակը կլինի $\frac{8}{7}$։ Ամբողջ թիվն էլ ունի հակադարձ կոտորակ, օրինակ, 5-ի կամ $\frac{5}{1}$-ի համար հակադարձ կոտորակը կլինի $\frac{1}{5}$։ Ուստի, հակադարձ կոտորակներն ավելի հարմար է անվանել* հակադարձ թվեր։ *Այն թիվը, որը հակադարձ է տվածին, կարելի է սահմանել նաև որպես քանորդ, ստացված միավորը տված թվի վրա բաժանելուց։ Այսպես, $\frac{7}{8}$-ին հակադարձ թիվն է.*

$$\frac{1}{\frac{7}{8}}=\frac{8}{7}:$$

Այս սահմանման համաձայն կարելի է գտնել նաև խառը թվերի հակադարձ թվերը։ Այսպես, $4\frac{5}{8}$-ի համար հակադարձ թիվը կլինի

$$\frac{1}{4\frac{5}{8}}=\frac{1}{\frac{37}{8}}=\frac{8}{37}:$$

Ակնհայտ է, որ յուրաքանչյուր թվի և նրա հակադարձ թվի արտադրյալը հավասար է միավորի։

Ղեկավարվելով սրանով, կարող ենք արտահայտել բաժանման այսպիսի կանոն.

Վորևէ թիվ մի այլ թվի վրա բաժանելու համար կարելի է բաժանելին բազմապատկել բաժանարարի հակադարձ թվով:

Այս կանոնի ճշտությանը կարելի է համոզվել հետևյալ օրինակներով.

$$8:9=\frac{8}{9} \text{ և } 8\cdot\frac{1}{9}=\frac{8}{9};$$

$$\frac{7}{8}:5=\frac{7}{40} \text{ և } \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{5}=\frac{7}{40};$$

$$5:\frac{7}{8}=\frac{40}{7} \text{ և } 5\cdot\frac{8}{7}=\frac{40}{7};$$

$$\frac{2}{7}:\frac{3}{5}=\frac{10}{21} \text{ և } \frac{2}{7}\cdot\frac{5}{3}=\frac{10}{21};$$

$$5:3\frac{1}{3}=\frac{3}{2} \text{ և } 5\cdot\frac{1}{3\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}:$$

153. *ԿՐՃԱՏՈՒՄԸ ԲԱԺԱՆՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ:* *Կոտորակային թվեր բաժանելիս, յեթե հնարավոր է, պետք է նախապես կատարել կրճատումներ, ինչպես այդ ցույց է տված հետևյալ օրինակներում.*

1) $12:\frac{8}{11}=\frac{12.11}{8}=\frac{3\cdot 11}{2}=\frac{33}{2}=16\frac{1}{2};$

2) $\frac{8}{9}:\frac{6}{7}=\frac{8\cdot 7}{9.6}=\frac{4.7}{9.3}=\frac{28}{27}=1\frac{1}{27};$

3) $\frac{5}{12}:\frac{7}{18}=\frac{5.18}{12.7}=\frac{5.3}{2.7}=\frac{15}{14}=1\frac{1}{14}:$

Այսպիսի կրճատում կարելի է անել, վորովհետև, յերբ կոտորակի համարիչը և հայտարարը փոքրացնում ենք միևնույն թիվ անգամ, նրա մեծությունը չի փոխվում:

154. *ԻՆՉՊԵՍ ՊԵՏՔ Է ԹԻՎԸ ԲԱԺԱՆԵԼ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԻ ՎՐԱ:* *Բաժանման (անմնացորդ) այն հատկությունը, վորը նշել ենք ամբողջ թվերի համար (§ 76), պատկանում է և՛ կոտորակային թվերին, այն է.*

Վորևէ թիվ մի քանի արտադրիչների արտադրյալի վրա բաժանելու համար կարելի է այդ թիվը բաժանել առաջին արտադրիչի վրա, ստացած արդյունքը բաժանել յերկրորդ արտադրիչի վրա և այլն:

Այսպես, $10:\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\right)=10:\frac{2}{3}:\frac{5}{7}$ *վորովհետև կոտորակների բազմապատկման և բաժանման կանոնների համաձայն կստանանք՝*

$$10:\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\right)=10:\frac{2.5}{3.7}=\frac{10.(3.7)}{2.5}=\frac{10.3.7}{2.5}$$

և

$$10:\frac{2}{3}:\frac{5}{7}=\frac{10.3}{2}:\frac{5}{7}=\frac{10.3.7}{2.5},$$

այսինքն, կստանանք միևնույն թիվը, ինչպես արտադրյալի վրա միանգամից բաժանելով, նույնպես և արտադրիչների վրա հաջորդաբար բաժանելով:

155. *ՔԱՆՈՐԴԻ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆԸ ՏՎԱԾ ԹՎԵՐԻ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏԵՎԱՆՔՈՎ:* *Բաժանելին և բաժանարարը փոփոխելիս կոտորակային թվերի քանորդը փոփոխվում է կատարելապես նույն ձևով, ինչպես ամբողջ թվերի քանորդը (§ 77), այն է.*

Յեթե բաժանելին մեծացնենք *(կամ փոքրացնենք)* **մի քանի անգամ, ապա քանորդը կմեծանա** *(կամ կփոքրանա)* **նույնքան անգամ. յեթե բաժանարարը մեծացնենք** *(կամ փոքրացնենք)* **մի քանի անգամ, ապա քանորդը կփոքրանա** *(կամ կմեծանա)* **նույնքան անգամ:**

Հատուկ ուշադրություն դարձնենք այն բանի վրա, վոր

յեթե և՛ բաժանելին և՛ բաժանարարը մեծացնենք կամ փոքրացնենք միևնույն թիվ անգամ, ապա քանորդը չի փոխվի.

Այսպես յեթե $\frac{5}{6}:\frac{7}{11}=\frac{55}{42}$ *օրինակի մեջ բաժանելին և բաժանարարը մեծացնենք, դիցուք, 3 անգամ, ապա կստանանք՝*

$$\frac{15}{6}:\frac{21}{11}=\frac{15.11}{6.21}=\frac{5.11}{6.7}=\frac{55}{42};$$

քանորդը մնաց միևնույնը:

Ընդհանուր ձևով այդ կարելի է արտահայտել այսպես.

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}=\frac{a:m}{b:m}$$

156. ԵՐԿՈՒ ԹՎԵՐԻ ՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆԸ։ Ինչպես տեսանք, կոտորակային թվեր մտցնելուց հետո բաժանումը դառնում է միշտ հնարավոր գործողություն (բացառությամբ զերոյի վրա բաժանելը)։ Ուրեմն, յեթե տված են յերկու թվեր, ապա գոյություն ունի առաջին թիվը յերկրորդի վրա բաժանելուց ստացվող քանորդը (յեթե միայն յերկրորդ թիվը զերո չէ)։

Մի թիվ մյուսի վրա բաժանելուց ստացվող քանորդն այլ կերպ կոչվում է այդ թվերի հարաբերություն։ Առաջին թիվը (բաժանելին) կոչվում է հարաբերության նախորդ անդամ, իսկ յերկրորդ թիվը (բաժանարարը) կոչվում է հարաբերության հետևորդ անդամ։

Այսպես, $2\frac{1}{2}$ և $\frac{1}{7}$ թվերի հարաբերությունը հանդիսանում է

$$\frac{2\frac{1}{2}}{\frac{1}{7}}=\frac{35}{2}=17\frac{1}{2}$$

քանորդը. $2\frac{1}{2}$-ը այդ հարաբերության նախորդ անդամն է, $\frac{1}{7}$-ը նրա հետևորդ անդամը։

Յեթե յերկու թվերի հարաբերությունն ամբողջ թիվ է, ապա նա ցույց է տալիս, թե հետևորդ անդամը քանի անգամ է պարունակվում նախորդ անդամի մեջ[1]. սակայն պայմանավորվել են արտահայտության այս ձևը օգտագործել նաև այն դեպքում, յերբ հարաբերությունը կոտորակային թիվ է։ Այսպես, վերևում քննարկած օրինակում ասում ենք, որ $\frac{1}{7}$-ը $2\frac{1}{2}$-ի մեջ պարունակվում է տասնյոթ և կես անգամ։

Կիրառությունների մեջ հաճախ պետք է լինում քննարկել միևնույն անունն ունեցող յերկու անվանական թվերի հարաբե-

1) Այսպես, § 108-ում մենք արդեն յերկու միատեսակ չափերի հարաբերություն անվանեցինք այն թիվը, վորը ցույց է տալիս, թե փոքր չափը քանի անգամ է պարունակվում մեծի մեջ։

րությունը։ Դիցուք, պահանջվում է իմանալ, թե $4\frac{1}{4}$ կգ քանի՞ անգամ է մեծ $2\frac{1}{2}$ կիլոգրամից։ Պատասխանը տրվում է $4\frac{1}{4}$ և $2\frac{1}{2}$ թվերի հարաբերությամբ, բայց այդ հարաբերության անդամները հաճախ գրում են իրենց անունների հետ միասին, այսինքն՝

$$\frac{4\frac{1}{4}\text{ կգ}}{2\frac{1}{2}\text{ կգ}}=1\frac{7}{10};$$

ըստ վորում ինքը $1\frac{7}{10}$ թիվը վերացական է, վորովհետև նա ցույց է տալիս, թե մի քաշը քանի՞ անգամ է պարունակվում մյուսի մեջ։

Քանի վոր թվերի հարաբերությունը այդ թվերի քանորդն է, վորտեղ վորպես բաժանելի հանդիսանում է նախորդ անդամը, իսկ բաժանարար—հետևորդը, ապա նա էլ ունի քանորդի բոլոր հատկությունները. այդ հատկություններից հիշենք հետևյալները.

1) Ամեն մի թիվ կարող է լինել հարաբերության նախորդ անդամ. հետևորդ անդամ կարող է լինել ամեն թիվ, բացի զերոյից։

2) Նախորդ անդամը հավասար է հետևորդ անդամի յեվ հարաբերության արտադրյալին։

3) Հետևորդ անդամը հավասար է նախորդին՝ բաժանած հարաբերության վրա։

4) Հարաբերությունը չի փոխվի, յերե հարաբերության յերկու անդամները բազմապատկենք կամ բաժանենք միևնույն թվի վրա։

4-րդ հատկությունից հետևում է, վոր **կոտորակային թվերի հարաբերությունը կարելի յե փոխարինել ամբողջ թվերի հարաբերությամբ։** Դիցուք, տված է $\frac{5}{12}:\frac{3}{8}$ հարաբերությունը.

այդ հարաբերության յերկու անդամները բազմապատկելով տված կոտորակների ամենափոքր ընդհանուր հայտարարով, այսինքն 24-ով, տված հարաբերությունը փոխարինում ենք նրան հավասար 10 : 9 հարաբերությամբ, որի անդամներն արդեն ամբողջ թվեր են։

Նման ձևով էլ.

$$3\frac{1}{4} : \frac{5}{6} = \frac{13}{4} : \frac{5}{6} = \left(\frac{13}{4}.12\right) : \left(\frac{5}{6}.12\right) = 39 : 10.$$

Դիտողություններ. 1. Յերկու թվերի հարաբերությունը, որ սահմանեցինք, յերբեմն անվանում են քանորդական կամ յերկրաչափական հարաբերություն, զանազանելու տարբերական կամ թվաբանական հարաբերությունից, որը սահմանվում է որպես այդ թվերի տարբերություն։ Այսուհետև հարաբերություն ասելով միշտ կհասկանանք քանորդական հարաբերություն։

2. Յեթե հարաբերության անդամները տեղափոխենք, այսինքն նախորդ անդամը դարձնենք հետնորդ և ընդհակառակը, ապա ստացված նոր հարաբերությունը կոչվում է հակադարձ նախկինին։

157. ՅԵՐԿՈՒ ԹՎԵՐԻ ՏՈԿՈՍԱՅԻՆ ՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Դիցուք, պետք է իմանալ, թե 250-ի որ տոկոսն է կազմում $42\frac{1}{2}$-ը։ 250-ի մեկ տոկոսը կազմում է $\frac{250}{100}$, այդ պատճառով $42\frac{1}{2}$-ը կազմում է 250-ի այնքան տոկոսը, որքան անգամ $42\frac{1}{2}$-ի մեջ պարունակվում է $\frac{250}{100}$ թիվը, այսինքն՝

$$42\frac{1}{2} : \frac{250}{100} = \frac{42\frac{1}{2}}{250}.100 = 17(\%).$$

Այն թիվը, որը ցույց է տալիս, թե տված թիվը մյուսի որ տոկոսն է կազմում, կոչվում է այդ թվերի տոկոսային հարաբերություն։ Քննարկված օրինակը ցույց է տալիս, որ յերկու թվերի տոկոսային հարաբերությունը գտնելու համար պետք է այդ թվերի հարաբերությունը բազմապատկել 100-ով։

Նույն յեզրակացության կարելի յե գալ նաև այլ ճանապարհով։ Գտնելու համար, թե 250-ի որ տոկոսն է կազմում $42\frac{1}{2}$ թիվը, պետք է $\frac{42\frac{1}{2}}{250}$ հարաբերությունն արտահայտել տոկոսներով, այսինքն հարյուրերորդական մասերով։ Բայց իմանալու համար, թե տված թվում քանի հարյուրերորդական մասեր են պարունակվում, պետք է այդ թիվը բազմապատկել 100-ով (այսպես, 5 թվի մեջ պարունակվում է $5 \cdot 100 = 500$ հարյուրերորդական մասեր, $\frac{1}{2}$ թվի մեջ՝ $\frac{1}{2}$, $100 = 50$ հարյուրերորդական մասեր և այլն)։ Այդ պատճառով $\frac{42\frac{1}{2}}{250}$ թիվը կազմում է $\frac{42\frac{1}{2}}{250}.100 = 17$ հարյուրերորդական մասեր, այսինքն 17 տոկոս։

Քննարկենք յերկու խնդիր։

1-ին ԽՆԴԻՐ։ Խորհտնտեսությունն ունի 80 000 հա հող, որից 69200 հա ցանված է ցորեն. ամբողջ մակերեսի ո՞ր տոկոսն են բռնում ցորենի դաշտերը։

Խնդիրը լուծելու համար պետք է գտնել, թե 69 200-ը 80 000-ի որ տոկոսն է կազմում, այլ խոսքով, պետք է գտնել 69200-ի և 80 000-ի տոկոսային հարաբերությունը։ Սահմանած կանոնի համաձայն գտնում ենք.

$$\frac{69200}{80000} \cdot 100 = 86\frac{1}{2}(\%).$$

2-րդ ԽՆԴԻՐ։ 325 կգ ալյուրից ստացված է 429 կգ հաց։ Գտնել աճի տոկոսը։

Լուծում. Աճը կազմում է 429—325=104 (կգ)։

Խնդիրը լուծելու համար պետք է գտնել 104-ի և 325-ի տոկոսային հարաբերությունը. ըստ սահմանած կանոնի գտնում ենք.

$$\frac{104}{325}\cdot 100=32\ (\%)\text{։}$$

ՀԻՆԳԵՐՈՐԴ ԲԱԺԻՆ

ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐ

I. ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

158. *ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ՄԱՍԵՐ։* Այն մասերը, վորոնք ստացվում են վորևե միավոր 10-ի, 100 ի, 1000-ի վրա, ընդհանրապես միավորով և մեկ կամ մի քանի զերոներով արտահայտվող թվի վրա բաժանելուց, կոչվում են տասնորդական մասեր։

Այսպես, հաջորդաբար փոքրացող տասնորդական մասեր կլինեն հետևյալները,

$$\frac{1}{10},\quad \frac{1}{100},\quad \frac{1}{1000},\quad \frac{1}{10000},\quad \frac{1}{100000},\quad \frac{1}{1000000}\ \text{և այլն։}$$

Յերկու վոչ հավասար տասնորդական մասերից մեծը կոչվում է բարձր կարգի տասնորդական մաս, իսկ փոքրը՝ ցածր կարգի տասնորդական մաս։ Յուրաքանչյուր տասնորդական մաս իր մեջ պարունակում է հաջորդ ցածր կարգի 10-ը տասնորդական մաս։ Այսպես՝

$$\frac{1}{10}=\frac{10}{100},\quad \frac{1}{100}=\frac{10}{1000},\quad \frac{1}{1000}=\frac{10}{10000}\ \text{և այլն։}$$

159. *ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿ։* Այն կոտորակը, վորի հայտարարը մեկ միավոր է մեկ կամ մի քանի զերոներով, կոչվում է տասնորդական. այդպիսին են, օրինակ

$$\frac{3}{10},\quad \frac{27}{100},\quad \frac{27401}{1000},\quad 3\frac{1}{1000}\ \text{և այլն}$$

կոտորակները։

Մյուս կոտորակները, որոնք ունեն ուզած ամեն տեսակ հայտարարներ, տասնորդական կոտորակներից տարբերելու համար կոչվում են **սովորական** կամ **հասարակ կոտորակներ**։

160. ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ՆՇԱՆՆԵՐ։ Ամբողջ թվի թվանշանային պատկերացման ժամանակ իրար մոտ գտնվող յերկու թվանշաններից աջ կողմինը միշտ ցույց է տալիս 10 անգամ ավելի փոքր միավորներ քան ձախը։ Պայմանավորվենք թվանշանների տեղի այս հատկությունը տարածել նաև այն թվանշանների վրա, որոնք գրված են հասարակ միավորի աջ կողմում։ Յենթադրենք,

$$63{,}48259\ldots$$

գրության մեջ 3 թվանշանը նշանակում է հասարակ միավորները։ Այն ժամանակ 4-ը նշանակում է հասարակ միավորից 10 անգամ փոքր միավորներ, այսինքն տասնորդական մասեր, 8-ը նշանակում է հարյուրերորդական մասեր, 2-ը՝ հազարերորդական, 5-ը՝ տասհազարերորդական, 9-ը՝ հարյուրհազարերորդական մասեր և այլն։ Տեղերի նշանակությունը չշփոթելու համար պայմանավորվենք ամբողջ թիվը տասնորդական մասերից անջատել ստորակետով։ Պակասող մասերի տեղը, նույնպես և ամբողջ թվի տեղը, յեթե այն չկա, կդնենք զերոներ։ Այս պայմաններում, օրինակ, 0,0203 արտահայտությունը նշանակում է՝ 2 հարյուրերորդ 3 տասհազարերորդ։

Նման ձևով էլ 25,703-ը նշանակում է 25 ամբողջ 7 տասնորդ 3 հազարերորդ, 0,82-ը նշանակում է 8 տասնորդ 2 հարյուրերորդ և այլն։

Այն թվանշանները, որոնք գտնվում են ստորակետից աջ, կոչվում են **տասնորդական նշաններ**։

161. ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿԻ ՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆ ԱՌԱՆՑ ՀԱՅՏԱՐԱՐԻ։ Ամեն մի տասնորդական կոտորակ կարող ենք գրել առանց հայտարարի։ Դիցուք, տված է $\frac{32736}{1000}$ տասնորդական կոտորակը։ Այդ կոտորակից նախ կանջատենք ամբողջ

թիվը, կստանանք $32\frac{736}{1000}$։ Ապա այդ կոտորակը պատկերացնենք այսպես՝

$$\frac{32736}{1000}=32+\frac{700}{1000}+\frac{30}{1000}+\frac{6}{1000}=32+\frac{7}{10}+\frac{3}{100}+\frac{6}{1000}.$$

Ուրեմն, այդ կոտորակը կարելի յե պատկերել այսպես․

$$\frac{32736}{1000}=32{,}736.$$

Այդ կարելի յե հեշտ ստուգել, վերածելով 32,736 թվի ամբողջ միավորներն ու բոլոր տասնորդական մասերն ամենափոքր մասերի (հազարերորդական), որն ամենից ավելի հեշտ է անել այսպես. քանի որ ամբողջ միավորը պարունակում է 10 տասնորդական, ապա 32 ամբողջը կազմում է 320 տասնորդական. սրանց ավելացնելով 7 տասնորդական, կստանանք 327 տասնորդական։ Քանի որ տասնորդական մասը պարունակում է 10 հարյուրերորդական. ապա 327 տասնորդականը կազմում է 3270 հարյուրերորդական, սրանց ավելացնելով 3 հարյուրերորդական, կստանանք 3273 հարյուրերորդական։ Քանի որ 1 հարյուրերորդականը=10 հազարերորդականի, ապա 3273 հարյուրերորդականը=32730 հազարերորդականի՝ այս թվին ավելացնելով էլի 6 հազարերորդական, կստանանք տված կոտորակը՝ 32736 հազարերորդական։

Դիցուք տված է $\frac{578}{100000}$ տասնորդական կոտորակը, որի մեջ ամբողջ թիվ չկա։ Այդ կոտորակը կարելի յե պատկերացնել այսպես․

$$\frac{578}{100000}=\frac{500}{100000}+\frac{70}{100000}+\frac{8}{100000}=\frac{5}{1000}+\frac{7}{10000}+\frac{8}{100000}.$$

Հետևապես, այդ կոտորակը կպատկերվի այսպես․

$$\frac{578}{100000}=0{,}00578.$$

ԿԱՆՈՆ։ Տասնորդական կոտորակն առանց հայտարարի գրելու համար բավական է գրել նրա համարիչը, և նրա մեջ աջ կողմից ստորակետով անջատել այնքան տասնորդական նշաններ, որքան զերո կա հայտարարում *(որի համար երբեմն կարիք է լինում համարիչի ձախ կողմում կցագրել մի քանի զերոներ)։*

Հետագա շարադրանքում միշտ կընդունենք (եթե հատուկ վերապահում չլինի), որ տասնորդական կոտորակը պատկերված է առանց հայտարարի։

Դիտողություն։ Տասնորդական կոտորակի *(առանց հայտարարի գրված)* **աջից կամ ձախից զերոներ կցագրելը չի փոխում նրա մեծությունը։** *Օրինակ, հետևյալ թվերից յուրաքանչյուրը*

7,05; 7,0500; 007,05

արտահայտում է միևնույն թիվը՝ 7 ամբողջ 5 հարյուրերորդական, որովհետև 500 տասհազարերորդականը հավասար է 5 հարյուրերորդականի, իսկ 007-ը արտահայտում է ուղղակի 7։

162. *ԻՆՉՊԵՍ Է ԿԱՐԴԱՑՎՈՒՄ ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿԸ։* *Նախ կարդում են ամբողջ թիվը (իսկ եթե ամբողջ թիվ չկա, ասում են «զերո ամբողջ»), ապա կարդում են այն թիվը, որը գրված է ստորակետից հետո, ինչպես եթե ամբողջ թիվ լիներ այն և վերջում ավելացնում են այն մասերի անունը, որոնցով վերջանում է կոտորակի տասնորդական պատկերումը. օրինակ, 0,00378-ը կարդացվում է՝ 0 ամբողջ 378 հարյուր հազարերորդական։ Ուրեմն, առանց հայտարարի գրած տասնորդական կոտորակը կարդացվում է այնպես, ինչպես կկարդացվեր, եթե նա գրված լիներ համարիչով և հայտարարով։*

Սակայն, այն տասնորդական կոտորակը, որը **խիստ շատ** *տասնորդական նշաններ ունի, գերադասում են կարդալ այլ կերպ. ստորակետից սկսած բոլոր տասնորդական նշանները բաժանում են մասերի, յուրաքանչյուրում 3-ական նշան (բացի վերջինից, որի մեջ կարող են լինել մեկ կամ երկու նշաններ) ապա յուրաքանչյուր մասը կարդում են որպես ամբողջ թիվ ավելացնելով առաջին մասի թվին «հազարերորդական» բառը երկրորդ մասին—«միլիոներորդական», երրորդին—«միլիարդերորդական» և այլն. վերջին մասի թվի անվանն ավելացնում են*

կոտորակի վերջին թվանշանով արտահայտվող մասերի անունը։ Այսպես՝

0, 028 306 000 07

կոտորակը կարդացվում է այսպես. 0 ամբողջ 28 հազարերորդական 306 միլիոներորդական 0 միլիարդերորդական 07 հարյուրմիլիարդերորդական։

163. *ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏՈՒՄ ԸՍՏ ՄԵԾՈՒԹՅԱՆ։* *Դիցուք, ցանկանում ենք իմանալ՝ հետևյալ թվերից որն է մեծ—*

0,735-ը, թե 0,7348-ը։

Դրա համար, քիչ տասնորդական նշաններ ունեցող թվի աջ կողմում կցագրում ենք (թեկուզ և միայն մտավորապես) այնքան զերո, մինչև որ երկու թվերի մեջ էլ տասնորդական նշանների թիվը լինի միևնույնը՝

0,7350; 0,7348.

Այժմ տեսնում ենք, որ առաջին թիվը պարունակում է 7350 տասհազարերորդական, իսկ երկրորդը՝ 7348 տասհազարերորդական. կոտորակների հայտարարները հավասարվեցին, ուրեմն դրանցից մեծ կլինի այն կոտորակը, որի համարիչը մեծ է. որովհետև 7350-ն ավելի մեծ է, քան 7348-ը, ապա և առաջին թիվը մեծ է երկրորդից։

Նման ձևով հեշտ է համոզվել, որ

3,01 > 2,998; 3,7 > 3,6874; 3,64 < 3,6985 *և այլն։*

ԿԱՆՈՆ։ Տված երկու տասնորդական կոտորակներից մեծ է այն, որի ամբողջների թիվն ավելի մեծ է. ամբողջների հավասարության դեպքում—այն կոտորակը, որի տասնորդական մասերի թիվն ավելի մեծ է. ամբողջների և տասնորդական մասերի հավասարության դեպքում—այն կոտորակը որի հարյուրերորդական մասերի թիվն ավելի մեծ է և այլն։

164. *ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿԻ ՄԵԾՈՒԹՅԱՆ ՓՈՓՈԽՈՒՄԸ ՍՏՈՐԱԿԵՏԻ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒՄԻՑ։* *Եթե 3,274 թվի մեջ ստորակետը մի թվանշանով տեղափոխենք դեպի աջ, կստանանք մի նոր թիվ՝ 32,74։ Առաջին թվի մեջ 3-ը նշանակում է հա-*

տարակ միավոր, իսկ յերկրորդ թվի մեջ—տասնավոր, հետևապես այդ թվանշանի նշանակությունը մեծացավ 10 անգամ։ Առաջին թվի մեջ 2 թվանշանը նշանակում է տասնորդական մասեր, իսկ յերկրորդի մեջ—հարյուրակ միավորներ, հետևապես սրա նշանակությունն էլ մեծացավ 10 անգամ։ Նույնպես տեսնում ենք, վոր մյուս թվանշանների նշանակությունն էլ մեծացավ 10 անգամ։ Այսպիսով,

ստորակետը մի թվանշանով դեպի աջ տեղափոխելուց տասնորդական կոտորակը մեծանում է 10 անգամ։

Այստեղից հետևում է, վոր ստորակետը յերկու թվանշանով դեպի աջ տեղափոխելուց տասնորդական կոտորակը մեծանում է 100 անգամ, յերեք թվանշանով տեղափոխելուց՝ 1000 անգամ և այլն։

Ընդհակառակը. **ստորակետը մի թվանշանով դեպի ձախ տեղափոխելուց տասնորդական կոտորակը փոքրանում է 10 անգամ։**

Հետևապես, ստորակետը յերկու թվանշանով դեպի ձախ տեղափոխելուց տասնորդական կոտորակը փոքրանում է 100 անգամ, յերեք թվանշան տեղափոխելուց՝ 1000 անգամ և այլն։

165. *ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿԻ ՄԵԾԱՑՆԵԼԸ ԿԱՄ ՓՈՔՐԱՑՆԵԼԸ 10 ԱՆԳԱՄ, 100 ԱՆԳԱՄ, 1000 ԱՆԳԱՄ ՑԵՎ ԱՅԼՆ։* Դիցուք պետք է 0,02 թիվը մեծացնել 10 000 անգամ։ Դրա համար բավական է նրա ստորակետը չորս թվանշանով դեպի աջ տեղափոխել։ Բայց տված թվի մեջ կա ընդամենը յերկու տասնորդական նշաններ։ Չորս նշաններ ունենալու համար աջ կողմում կկցագրենք յերկու զերո, վորից թվի մեծությունը չի փոխվի։ Ապա տեղափոխելով ստորակետը թվի վերջը, կստանանք 0200 ամբողջ թիվը կամ ուղղակի 200։

Դիցուք պետք է նույն 0,02 թիվը փոքրացնել 100 անգամ։ Դրա համար բավական է նրա ստորակետը յերկու թվանշանով տեղափոխել դեպի ձախ։ Բայց տված թվի մեջ ստորակետից դեպի ձախ գտնվում է միայն մի թվանշան։ Ձախ կողմից կկցագրենք 2 զերո, վորից թվի մեծությունը չի փոխվի։ Ապա ստորակետը տեղափոխելով յերկու թվանշանով դեպի ձախ կստանանք 0,0002։

Յուրաքանչյուր ամբողջ թիվ կարելի յե դիտել վորպես տասնորդական կոտորակ, վորի ստորակետից դեպի աջ գտնվում

են ցանկացած թվով զերոներ, ուստի ամբողջ թվի մեծացումը կամ փոքրացումը 10, 100, 1000 և այլն անգամ կատարվում է նույն ձևով, ինչպես և տասնորդական կոտորակում։ Օրինակ, յեթե 567, 000... ամբողջ թիվը փոքրացնենք 100 անգամ, կըստանանք 5,67։

Դիտողություն։ Տասնորդական կոտորակի նշված հատկությունը, ստորակետի տեղափոխության հետ իր մեծության փոփոխելը 10 անգամ, 100 անգամ և այլն, թույլ է տալիս մետրական չափերով արտահայտված տվյալ անվանական թիվը շատ արագ վերածել կամ անդրադարձնել։

Դիցուք, օրինակ, պետք է 3 մետր 8 դեցիմետր 4 սանտիմետր բարդ անվանական թիվն արտահայտել մետրներով։ Քանի վոր դեցիմետրը մետրի տասնորդական մասն է, իսկ սանտիմետրը՝ հարյուրերորդական մասը, ապա, ակներև է, վոր տված բարդ անվանական թիվը մետրներով կարտահայտվի այսպես՝ 3,84 մետր։ Այս տասնորդական կոտորակի ստորակետը տեղափոխելով դեպի աջ, կգտնենք, վոր 3,84 մետր=38,4 դեցիմետրի =384 սանտիմետրի։

Դիցուք, վերջապես, պետք է 8746 միլիգրամ պարզ անվանական թիվը դարձնել բարդ (այսինքն, արտահայտել բարձր կարգի միավորներով)։ Քանի վոր գրամը հավասար է 1000 միլիգրամի, ապա 8746 միլիգրամը=8,746 գրամի=8 գրամի 7 դեցիգրամի 4 սանտիգրամի և 6 միլիգրամի։

II. ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐՈՎ

ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ։

166. *ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ ԿԱՏԱՐՎՈՒՄ Է ԱՅՆՊԵՍ, ԻՆՉՊԵՍ ԱՄԲՈՂՋ ԹՎԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ։* Դիցուք, պետք է գումարել 2,078+0,75+13,5602 թվերը։ Այդ թվերը կգրենք իրար տակ այնպես, վոր ամբողջները լինեն ամբողջների տակ, տասնորդականները—տասնորդա-

կաններին, հարյուրերորդականները — հարյուրերորդականների տակ և այլն. ըստ վորում բոլոր ստորակետները դասավորվում են իրար տակ.

$$\begin{array}{r} 2{,}078 \\ +0{,}75 \\ 13{,}5602 \\ \hline 16{,}3882 \end{array}$$

Գումարումն սկսում ենք ամենափոքր մասերից։ Տասհազարերորդական մասերը գումարելիս կստանանք 2. այդ թիվը գրում ենք գծի տակ։ Հազարերորդական մասերը գումարելուց կստանանք 8, վորը գրում ենք գծի տակ։ Հարյուրերորդական մասերը գումարելուց կստանանք 18, բայց 18 հարյուրերորդականը=10 հարյուրերորդականի+8 հարյուրերորդական, տասը հարյուրերորդականը կազմում է մեկ տասներորդական. հիշենք այդ, գումարելիների տասներորդական մասերին գումարելու համար, իսկ 8 հարյուրերորդականը կգրենք գծի տակ։ Այսպես շարունակում ենք գործողությունը մինչև վերջ։ Գումարի մեջ ստորակետը գանվում է գումարելիների ստորակետների տակ։

ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ՀԱՆՈՒՄԸ։

167. *ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ՀԱՆՈՒՄԸ ԿԱՏԱՐՎՈՒՄ Է ԱՅՆՊԵՍ, ԻՆՉՊԵՍ ԱՄԲՈՂՋ ԹՎԵՐԻ ՀԱՆՈՒՄԸ։* Դիցուք, պետք է կատարել 5,709—0,3078 հանումը։ Հանելին կգրենք նվազելիի տակ այնպես, վոր միևնույն անվան միավորները լինեն իրար տակ.

$$\begin{array}{r} 5{,}709 \\ -0{,}3078 \\ \hline 5{,}4012 \end{array}$$

Հանելիի վերջին թվանշանը հանելու համար 9 հազարերորդականներից վերցնենք 1 հազարերորդականը և վերածենք տասհազարերորդական մասերի, կստանանք 10 տասհազարերորդական։ Ուրեմն, հանելիի 8 թվանշանը պետք է հանել 10-ից, իսկ 7 թվանշանը 8-ից։

Նույն ձևով էլ կատարվում է տասնորդական կոտորակի հանումն ամբողջ թվից, օրինակ.

$$\begin{array}{r} -\dot{3}\phantom{{,}000} \\ 1{,}873 \\ \hline 1{,}127 \end{array}$$

3 միավորից վերցնում ենք մեկը և վերածում տասներորդական մասերի, սրանցից վերցնում ենք մեկը և վերածում հարյուրերորդական մասերի, հարյուրերորդականներից վերցնում ենք 1 հարյուրերորդականը և վերածում հազարերորդական մասերի։ Սրա հետևանքով 3 ամբողջի փոխարեն կստանանք 2 ամբողջ 9 տասներորդական 9 հարյուրերորդական և 10 հազարերորդական։ Ուրեմն, հանելիի 3 թվանշանը պետք է հանել 10-ից, 7 և 8 թվանշանները 9-ից, իսկ 1 թվանշանը՝ 2-ից։

ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ

168. *Քննության առնենք յերկու դեպք. առաջին*—յերբ արտադրիչներից մեկն ամբողջ թիվ է, *յերկրորդ*—յերբ յերկու արտադրիչներն էլ տասնորդական կոտորակներ են։

Օրինակներ՝

1) 3,085.23; 2) 8,375.2,56։

Յեթե այս օրինակների մեջ տասնորդական կոտորակները պատկերացնեյինք համարիչի և հայտարարի միջոցով և գործողությունը կատարեյինք ըստ հասարակ կոտորակների բազմապատկման կանոնի, ապա կստանայինք՝

$$1)\ \frac{3085}{1000}\cdot 23=\frac{3085\cdot 23}{1000}=\frac{70955}{1000}=70{,}955;$$

$$2)\ \frac{8375}{1000}\cdot\frac{256}{100}=\frac{8375\cdot 256}{1000\cdot 100}=\frac{2144000}{100000}=21{,}44000=21{,}44։$$

ԿԱՆՈՆ։ Տասնորդական կոտորակները բազմապատկելու համար բավական է, առանց ուշադրություն դարձնելու ստորակետների վրա, նրանց բազմապատկել վորպես ամբողջ թվեր յեվ արտադրյալի աջ կողմից ստորակետով անջատել այնքան տասնորդական նշաններ, որքան նշաններ կան բազմապատկելիի և բազմապատկիչի մեջ միասին:

Ամենալավն է գործողությունը գրել այսպես.

```
×3,085        ×8,375
    23          2,56
  9255         50250
 6170         41875
70,955       16750
             21,44000
```

ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ

169. *ԲԱԺԱՆՈՒՄ ԱՄԲՈՂՋ ԹՎԻ ՎՐԱ: ՄՈՏԱՎՈՐ ՔԱՆՈՐԴ:* Դիցուք, պահանջվում է 39,47-ը բաժանել 8-ի վրա: Գործողությունը գրենք այնպես, ինչպես ընդունված է ամբողջ թվերը բաժանելիս:

$$\begin{array}{r|l} 39,47 & 8 \\ \underline{-\;\;\;\;} & \overline{4,93} \\ 74 & \\ \underline{-\;\;\;\;} & \\ 27 & \\ 3 & \end{array}$$

39 ամբողջը բաժանում ենք 8-ի վրա քանորդում ստանում ենք 4 ամբողջ և մնացորդում 7 ամբողջ: Մնացորդը վերածում ենք տասնորդական մասերի և ցած ենք բերում բաժանելիի 4 տասնորդականը, ստանում ենք 74 տասնորդական 74 տասնորդականը բաժանում ենք 8-ի վրա, քանորդում ստանում ենք 9 տասնորդական և մնացորդում 2 տասնորդական: Մնացորդը վերածում ենք հարյուրերորդական մասերի և բաժանելիի 7 հարյուրերորդականը ցած ենք բերում, ստանում ենք 27 հարյուրերորդական: Վերջիններս բաժանելով 8-ի վրա: քանորդում ստանում ենք 3 հարյուրերորդական և մնացորդում 3 հարյուրերորդական:

Ենթադրենք, թե, այստեղ ընդհատում ենք գործողությունը, Այն ժամանակ կստանանք 4,93 մոտավոր քանորդը: Իմանալու համար, թե նա ինչքանով է տարբերվում իսկական քանորդից

կգտնենք այդ իսկական քանորդը և կհամեմատենք մոտավոր քանորդի հետ: Իսկական քանորդը ստանալու համար, բավական է 4,93 թվին ավելացնել այն կոտորակը, որը կստացվի մնացորդը (3 հարյուրերորդականը) 8-ի վրա բաժանելուց: 3 միավորը 8-ի վրա բաժանելուց ստանում ենք միավորի $\frac{3}{8}$-ը, 3 հարյուրերորդականն 8-ի վրա բաժանելուց ստանում ենք $\frac{3}{8}$ հարյուրերորդական: Ուրեմն, իսկական քանորդը հավասար է $4,93+\frac{3}{8}$ հարյուրերորդական գումարին: Բաց թողնելով $\frac{3}{8}$ հարյուրերորդականը, մենք կանենք մի սխալ, որ լրիվ հարյուրերորդականից փոքր է: Այդ պատճառով ասում են, որ 4,93-ը մոտավոր քանորդն է $\frac{1}{100}$-ի ճշտությամբ: Եթե $\frac{3}{8}$ հարյուրերորդականը բաց թողնելու փոխարեն այդ կոտորակը լրացնենք մինչև լրիվ հարյուրերորդական մաս (մեծացնելով $\frac{5}{8}$ հարյուրերորդականով), ապա կկատարենք սխալ $\frac{1}{100}$-ից նույնպես փոքր. այն ժամանակ կստանանք մի ուրիշ մոտավոր քանորդ $4,93+0,01$, այսինքն 4,94, նույնպես $\frac{1}{100}$-ի ճշտությամբ: 4,93 թիվը իսկական քանորդից փոքր է, իսկ 4,94-ը մեծ, այդ պատճառով էլ ասում են, որ առաջին թիվը մոտավոր քանորդն է պակասորդով, իսկ երկրորդը—ավելցուկով:

Եթե գործողությունը շարունակելու լինենք, մնացորդները դարձնելով ավելի ու ավելի փոքր տասնորդական մասեր, ապա կստանանք մոտավոր քանորդներ ավելի մեծ ճշտությամբ: Այսպես, եթե 3 հարյուրերորդական մնացորդը դարձնենք հազարերորդական մասեր և 30 հազարերորդականը բաժանենք 8-ի վրա, ապա կստանանք 3,933 (պակասորդով) կամ 4,934 (ավելցուկով) մոտավոր քանորդը, ընդվորում սխալը 0,001-ից փոքր է։ Գործողությունը շարունակելով, կստանանք՝

```
39,47| 8
 74   4,93375
  27
   30
    60
     40
      0
```

Գործողությունը բավականաչափ յերկար շարունակելով, կարող ենք յերբեմն հասնել 0 մնացորդի (ինչպես մեր որինակում). այն ժամանակ կստանանք իսկական քանորդը։ Հակառակ դեպքում պետք է բավարարվենք մոտավոր քանորդով, ընդվորում սխալը կարելի յե կատարել ցանկացածի չափ փոքր։ Յեթե, որինակ, ցանկանում ենք մոտավոր քանորդը գտնել մեկ միլիոներորդականի ճշտությամբ, ապա գործողությունն ընդհատում ենք այն ժամանակ, յերբ քանորդում ստացվել է միլիոներորդական մասերն արտահայտող թվանշան։

ԿԱՆՈՆ։ Տասնորդական կոտորակի բաժանումն ամբողջ թվի վրա կատարվում է այնպես, ինչպես յեվ ամբողջ թվերի բաժանումը, ընդ վորում մնացորդները դարձնում են ավելի ու ավելի փոքր տասնորդական մասեր, յեվ գործողությունը շարունակում այնքան, մինչեվ վոր ստացվում է իսկական քանորդը, կամ մոտավոր քանորդում ստացվում է այն տասնորդական մասերի թվանշանը, վորոնցով ցանկանում են սահմանափակվել։

Նույն կերպ են վարվում ամբողջ թիվն ամբողջի վրա բաժանելիս, յեթե ցանկանում են քանորդը ստանալ տասնորդական կոտորակի տեսքով։ Որինակ, 123-ի բաժանումը 7-ի վրա կարելի յե կատարել այսպես.

```
123| 7
 53 17,57...
  40
   50
    1
```


Դիտողություն։ Ցույց տալու համար, վոր վորևէ հավասարություն ճիշտ չէ, այլ միայն մոտավոր է, յերբեմն գործածում են հավասարության կորացրած նշանը՝ $\approx$. այսպես, յեթե գրած է

$$39,47 : 8 \approx 4,93,$$

ապա դրանով ուզում են արտահայտել, վոր 39,47-ը 8-ի վրա բաժանելուց ստացված քանորդը մոտավորապես հավասար է 4,93-ի։

170. ՄՈՏԱՎՈՐ ՔԱՆՈՐԴԻ ՍԽԱԼԻ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆԸ։ **Յերկու մոտավոր քանորդներից** (միևնույն ճշտությամբ վերցրած)՝ **մեկն ավելցուկով, իսկ մյուսը պակասորդով, վորեվե մեկը միշտ ճիշտ է վերջին կարգի տասնորդական մասի $\frac{1}{2}$-ի չափ.** այդպիսի քանորդ կլինի պակասորդով քանորդը, յեթե մնացորդը բաժանարարի $\frac{1}{2}$-ից փոքր է, և ավելցուկով քանորդը, յեթե մնացորդը բաժանարարի $\frac{1}{2}$-ից մեծ է։ Քննության առնենք, որինակ, 39,47 : 8 բաժանումը (տես նախորդ պարագրաֆը)։ Ընդունենք, թե վերցնում ենք 4,93 մոտավոր քանորդը, վորտեղ 3 մնացորդը բաժանարարի կեսից փոքր է (4-ից փոքր է)։ Այն ժամանակ իսկական քանորդը կլինի $4,93 + \frac{3}{8}$ հարյուրերորդը, ուրեմն, նա 4,93-ից տարբերվում է $\frac{3}{8}$ հարյուրերորդով $\left(\frac{1}{2}\right.$ հարյուրերորդից փոքր$\left.\right)$, իսկ 4,94-ից տարբերվում է $\frac{5}{8}$ հարյուրերորդով $\left(\frac{1}{2}\right.$ հարյուրերորդից մեծ$\left.\right)$, (այս դեպքում ավելի ձեռնտու յե վերցնել պակասորդով քանորդը)

Շարունակենք բաժանումը․

```
39,47| 8
 74   4,933
  27
   30
    6
```

Նույն որինակի մեջ այժմ վերցնենք 4,933 մոտավոր քանորդը, վորտեղ 6 մնացորդը բաժանարարի կեսից մեծ է։ Իսկական քանորդը կլինի $4,933 + \frac{6}{8}$ հազարերորդը, ուրեմն, նա 4,933 թվից տարբերվում է $\frac{6}{8}$ հազարերորդով $\left(\frac{1}{2}\right.$ հազարերորդից մեծ$\left.\right)$, իսկ 4,934-ից տարբերվում է $\frac{2}{8}$ հազարերորդով

($\frac{1}{2}$ հազարերորդից փոքր)․ (այս վերջում, սակայն, ավելի ճշտությամբ չի վերցված նրա ավելցուկով քանորդը)։

Եթե մնացորդը բաժանարարի կեսից փոքր է, ապա քանորդի այս թվանշանը, վերջ պետք է համարել այն թվանշանին, որի վրա կանգ ենք առել, ուղղելու 5-ից փոքր կլինի, իսկ եթե մնացորդը բաժանարարի կեսից մեծ է, ապա այդ թվանշանը պետք է լինի 5 կամ 5-ից մեծ։

171. ԲԱԺԱՆՈՒՄ ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿԻ ՎՐԱ։ Դիցուք, թե պետք է 3,753-ը բաժանել 0,85-ի վրա։ Այդ նպատակի համար բաժանելիի և բաժանարարի մեջ ստորակետը տեղափոխենք այնքան միևնույն թվով տասնորդական թվանշաններով (մեր օրինակում 2-ով), որ բաժանարարը դառնա ամբողջ թիվ։ Քանի որ այդ դեպքում բաժանելին և բաժանարարը կմեծանան միևնույն թիվ անգամ (մեր օրինակում 100 անգամ), ապա դրանից քանորդը չի փոխվի (§ 155)։ Այսպիսով տասնորդական կոտորակի վրա բաժանումը կհանգեցնենք ամբողջ թվի վրա բաժանելուն.

$$375,3 : 85 \approx 4,415,$$

որը կատարվում է այնպես, ինչպես նշվեց առաջ։

Միշտ նույն ձևով են վարվում նաև ամբողջ թիվը տասնորդական կոտորակի վրա բաժանելիս, օրինակ.

$$7 : 0,325 = 7000 : 325 \approx 21,538.$$

ԿԱՆՈՆ։ Ամբողջ թիվ տասնորդական կոտորակի վրա բաժանելու համար պետք է վերացնենք բաժանարարի ստորակետը, բաժանելին մեծացնելով այնքան անգամ, որքան անգամ մեծացել է բաժանարարը ստորակետը վերացնելու հետևանքով, բաժանենք ամբողջ թվի վրա բաժանելու կանոնի համաձայն։

172. ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐՈՎ ՀԱՇՎԵԼՈՒ ՄԻ ՕՐԻՆԱԿ։ Դիցուք, պահանջվում է հաշվել

$$\frac{7,5 \cdot 0,09 \cdot 3,725}{0,18 \cdot 2,7 \cdot 3,2675}$$

կոտորակը։

Այդ կոտորակի մեջ վերացնենք բոլոր ստորակետները և տեսնենք, թե դրանից ինչպես կփոխվի կոտորակի մեծությունը։ Նրա

համարիչը կմեծանա 10.100.1000 անգամ, այսինքն 1000000 անգամ։ Հայտարարը կմեծանա 100.10.10000 անգամ, այսինքն 10000000 անգամ։ Որպեսզի չփոխվի կոտորակի մեծությունը, պետք է համարիչը մեծացնել ևս 10 անգամ, օրինակ, 0,09 կոտորակի ստորակետը վերացնելուց հետո ստացված 9-ի փոխարեն վերցնել 90։ Այժմ հաշվենք

$$\frac{75 \cdot 90 \cdot 3725}{18 \cdot 27 \cdot 32675}$$

արտահայտությունը, նախապես կրճատելով 75-ը և 18-ը 3-ով, 90-ը և 27-ը 9-ով ու 3725-ը և 32675-ը 25-ով, կստանանք.

$$\frac{25 \cdot 10149}{6 \cdot 3 \cdot 1307} = \frac{37250}{23526} \approx 1,58.$$

173. ՏՈԿՈՍԱՅԻՆ ՀԱՇՎՈՒՄՆԵՐ ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐՈՎ։ Տոկոսային հաշվումների ժամանակ, ինչպես տեսնում ենք, հաճախ կարիք է լինում բազմապատկել և բաժանել 100-ով. և քանի որ այդ գործողությունները հատկապես հեշտ են կատարվում տասնորդական կոտորակներով, ապա ամեն տեսակի տոկոսային հաշվումների ժամանակ տասնորդական կոտորակներից օգտվելը դառնում է շատ հարմար։ Քննության առնենք մի քանի խնդիրներ։

1-ին խնդիր։ Ինչքա՞ն տոկոս կբերի խնայողական դրամարկղ դրված 728 ռուբլի գումարը 2 տարի 3 ամսվա ընթացքում։

Քանի որ դրամարկղը բերում է տարեկան 3% տոկոս, ապա տարեկան տոկոսը կազմում է 728-ի 3%-ը, կամ 0,03 մասը, այսինքն

$$728 \cdot 0,03 = 21,84 \ (= 21 \text{ ռ. } 84 \text{ կ.})։$$

3 ամսվա տոկոսը, այսինքն 0,25 տարվա տոկոսը, կազմում է տարեկան տոկոսի 0,25 մասը, այսինքն

$$21,84 \cdot 0,25 = 5,46 \ (= 5 \text{ ռ. } 46 \text{ կ.})։$$

2 տարի 3 ամսվա տոկոսը կկազմի

$$21,84 \cdot 2 + 5,46 = 49,14 \ (= 49 \text{ ռ. } 14 \text{ կ.})։$$

2-րդ խնդիր։ Անհայտ թվի 3,4%-ը կազմում է 1,6388։ Գտնել այդ թիվը։

Ըստ § 149-ում նշված կանոնի, մենք պետք է 1,6388-ը բաժանենք 3,4-ի վրա և արդյունքը բազմապատկենք 100-ով։ Կգտնենք, վոր

$$\frac{1,6388}{3,4}\cdot 100=\frac{1638,8}{34}=48,2.$$

3-րդ խնդիր։ Խնայողական դրամարկղում դրված է ավանդ։ 9 ամսից հետո ավանդը հետ է վերցված, ընդվորում ավանդատուին տրված է 633 ռ. 95 կ.։ Գտնել սկզբնական ավանդի գումարը։

Ավանդատուի տարեկան յեկամուտը կազմում է անհայտ ավանդի 3%-ը կամ 0,03 մասը։ Ուրեմն, 9 ամսվա (այսինքն $\frac{3}{4}$ կամ 0,75 տարվա) յեկամուտը կազմում է անհայտ ավանդի

$$0,03\cdot 0,75=0,0225 \ (=2,25\%),$$

այսպիսով, ավանդատուի ստացած 633,95 ռուբլին կազմում է անհայտ ավանդի 1,0225 մասը (կամ 102,25%-ը)։ Այդ ավանդը գտնելու համար պետք է 633,95-ը բաժանենք 1,0225-ի վրա՝

$$\frac{633,95}{1,0225}=620 \ (\text{ռուբլի}).$$

4-րդ խնդիր։ Խանութի շրջանառությունը ըստ պլանի կազմում է 75 300 ռուբլի, բայց իրականում նա կազմեց 85 842 ռուբլի։ Քանի՞ տոկոսով է կատարված պլանը։

Այս խնդիրը լուծելու համար մենք պետք է գտնենք 85 842 և 75 300 թվերի տոկոսային հարաբերությունը, այսինքն $\frac{85842}{75300}$ հարաբերությունն արտահայտենք հարյուրերորդական մասերով։ Այդ նպատակով ամենապարզ միջոցն է տված թվերի բաժանումից ստացված քանորդն արտահայտել տասնորդական կոտորակներով, ինչպես այդ ցույց է տրված § 171-ում։

$$\frac{85842}{75300}=1,14,$$

այսպիսով պլանը կատարված է 114%-ով։

III. ՀԱՍԱՐԱԿ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԸ ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԴԱՐՁՆԵԼԸ

174. *ՆԱԽՆԱԿԱՆ ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։* *Քանի վոր տասնորդական կոտորակներով գործողությունները կատարվում են ավելի հեշտ, քան հասարակ կոտորակներով, ապա հաճախ օգտակար է լինում հասարակ կոտորակները դարձնել տասնորդական[1]։*

Նշենք այդպիսի ձևափոխման յերկու յեղանակ։

175. *ԱՌԱՋԻՆ ՅԵՂԱՆԱԿ. ՀԱՅՏԱՐԱՐԸ ՊԱՐԶ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԱԾԵԼՈՎ։* *Դիցուք, պահանջվում է $\frac{7}{40}$ կոտորակը դարձնել տասնորդական։ Դրա համար հարց ենք տալիս մեզ, թե արդյոք հնարավոր չէ այդ կոտորակը բերել այնպիսի հայտարարի, վորն արտահայտվի միավորով և զերոներով։ Յեթե այդ հնարավոր լիներ, ապա այն ժամանակ կստանայինք տասնորդական կոտորակ, գրված համարիչի և հայտարարի միջոցով, իսկ այդպիսի կոտորակ չեյինք դժվարանա գրել և առանց հայտարարի։ Անկրճատելի կոտորակը մի այլ հայտարարի բերելու համար պետք է նրա յերկու անդամները բազմապատկել միևնույն թվով (§ 132)։ Իմանալու համար, թե 40-ն ինչ թվով պետք է բազմապատկել, միավորով և զերոներով թիվ ստանալու համար, ուշադրության առնենք այն,* վոր միավորով և զերոներով արտահայտված ամեն մի թիվ վերածվում է միայն 2 և 5 բազմապատկիչների, ընդ վորում այդ բազմապատկիչները վերածման մեջ մտնում են միևնույն թիվ անգամ, այն է, այնքան անգամ, վորքան զերո կա միավորին կից։

Օրինակ.

$$1000=10.10.10=2.5.2.5.2.5,$$

$$10\,000=10.10\cdot 10.10.=2.5.2.5.2.5.2.5 \ \text{և այլն։}$$

---

[1] *Սակայն տասնորդական և հասարակ կոտորակների նկատմամբ միաժամանակ գործողություն կատարելիս միշտ չէ վոր նպատակահարմար է այդ կոտորակները բերել նույն տեսքի. օրինակ, յեթե պահանջվում է 0,567-ը բազմապատկել $\frac{3}{7}$-ով, ապա անհրաժեշտ չէ $\frac{3}{7}$-ը դարձնել տասնորդական կոտորակ, կարելի յե 0,567-ը բազմապատկել 3-ով և արդյունքը բաժանել 7-ի վրա։*

Նշանակում այս, 40-ը վերածենք պարզ բազմապատկիչների.

$$40=2.2.2.5:$$

Այս վերածումից տեսնում ենք, որ յեթե 40-ը յերկու անգամ բազմապատկենք 5-ով, ապա բազմապատկումից հետո կստացվի այնպիսի թիվ, վորի մեջ 2-ը և 5-ը վորպես բազմապատկիչներ կմտնեն միենույն թիվ անգամ (3-ական անգամ). ուրեմն կստացվի միավորով և զրոներով թիվ (յերեք զրոյով)։ Վորպեսզի միաժամանակ կոտորակը իր արժեքը չփոխի, պետք է և նրա համարիչը բազմապատկել 2 անգամ 5-ով. այն ժամանակ

$$\frac{7}{40}=\frac{7.5.5}{40.5.5}=\frac{175}{1000}=0,175.$$

Օրինակներ՝

1) $\frac{7}{8}=\frac{7}{2.2.2}=\frac{7.5.5.5}{2.2.2.5.5.5}=\frac{875}{1000}=0,875;$

2) $\frac{4}{125}=\frac{4}{5.5.5}=\frac{4.2.2.2}{5.5.5.2.2.2}=\frac{32}{1000}=0,032;$

3) $\frac{11}{20}=\frac{11}{2.2.5}=\frac{11.5}{2.2.5.5}=\frac{55}{100}=0,55.$

176. ՎՈՐ ՀԱՍԱՐԱԿ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԸ ԴԱՌՆՈՒՄ ԵՆ ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ՅԵՎ ՎՈՐՈՆՔ ՉԵՆ ԴԱՌՆՈՒՄ։ Հասարակ կոտորակը տասնորդականի դարձնելու նշած յեղանակից կարելի յե դուրս բերել հետևյալ յերկու հետևանքները.

1) Յերբ հասարակ կոտորակի հայտարարը, բացի 2-ից յեվ 5-ից ուրիշ պարզ բազմապատկիչներ չի պարունակում, ապա այդպիսի կոտորակը դառնում է տասնորդական, ընդվորում այդ տասնորդական կոտորակն ունի այնքան տասնորդական նշաններ, վորքան անգամ հասարակ կոտորակի հայտարարի մեջ, կրճատումից հետո, 2 յեվ 5 բազմապատկիչներից մեկն ու մեկն ավելի մեծ թիվ անգամ է կրկնվում։

Ասենք, օրինակ, հասարակ կոտորակի հայտարարի մեջ, կրճատումից հետո, ավելի շատ կրկնվում է 2 բազմապատկիչը և ասենք, այդ բազմապատկիչը մտնում է 4 անգամ։ Այն ժամանակ կարելի է լինում 5 բազմապատկիչն ավելացնել այնքան անգամ, վոր դրանից հետո 2 արտադրիչները (2 և 5) հայտարարի մեջ

մտնեն 4-ական անգամ. ուրեմն, բազմապատկումից հետո հայտարարում կստացվի 1 չորս զրոներով, այդ պատճառով էլ տասնորդական կոտորակը կունենա 4 տասնորդական նշան։ Օրինակ.

$$\frac{7}{80}=\frac{7}{2.2.2.2.5}=\frac{7.5.5.5}{80.5.5.5}=\frac{875}{10000}=0,0875.$$

2) Յերբ հասարակ կոտորակի հայտարարը իր մեջ պարունակում է 2-ից յեվ 5-ից տարբեր վորևէ պարզ բազմապատկիչներ, վորոնք համարիչի հետ չեն կրճատվում, ապա այդպիսի կոտորակը տասնորդական չի դառնում։

Վերցնենք, օրինակ, $\frac{35}{84}$ կոտորակը, վորի հայտարարը պարունակում է 3 և 7 պարզ բազմապատկիչները (այն է՝ 84=2.2.3.7), նրանցից մեկը (7) կրճատվում է, կրճատումից հետո ստանում ենք $\frac{5}{12}$։ Քանի վոր 12-ը պարունակում է 3 արտադրիչը, ապա այդ կոտորակը տասնորդական չի դառնում, վորովհետև ինչպիսի ամբողջ թվերով էլ վոր բազմապատկենք նրա հայտարարը, յերբեք չենք ստանա միավորով և զրոներով պատկերացվող թիվ։

Այդպիսի կոտորակները կարելի յե դարձնել միայն մոտավոր տասնորդականներ, կիրառելով ձևափոխման յերկրորդ յեղանակը։

177. ՅԵՐԿՐՈՐԴ ՅԵՂԱՆԱԿ. ՀԱՄԱՐԻՉԸ ՀԱՅՏԱՐԱՐԻ ՎՐԱ ԲԱԺԱՆԵԼՈՎ։ Այս յեղանակն ավելի գործնական է, քան առաջինը, քանի վոր նա կիրառելի յե նաև այնպիսի հասարակ կոտորակների նկատմամբ, վորոնք դառնում են միայն մոտավոր տասնորդական կոտորակներ։

Դիցուք, պետք է $\frac{23}{8}$ կոտորակը դարձնել տասնորդական։ $\frac{23}{8}$ թիվը կարելի յե դիտել վորպես 23-ը 8-ի վրա բաժանելուց ստացված քանորդ (§ 151, 1-ին կանոն)։ Բայց, ինչպես տեսանք, յերկու ամբողջ թվերի քանորդը կարելի յե գտնել տասնորդական կոտորակի տեսքով՝ ճիշտ կամ մոտավոր։ Դրա համար պետք է բաժանումից ստացվող մնացորդները միայն դարձնել ավելի և ավելի փոքր տասնորդական մասեր, այնքան ժամանակ, մինչև մնացորդում ստացվի զերո, կամ քանորդում ստացվեն այն կարգի տասնորդական մասերը, որից այն կողմ չենք ցանկանում շարունակել։

$$\begin{array}{r|l} 23 & 8 \\ \hline 70 & 2,875 \\ 60 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

Մեր օրինակում ստացվեց ճիշտ քանորդը՝ $\frac{23}{8}=2,875$։

Դիցուք, պետք է $\frac{3}{14}$-ը դարձնել տասնորդական կոտորակ։ Քանի որ այդ կոտորակն անկրճատելի յե և հայտարարը պարունակում է, 2-ից և 5-ից տարբեր, 7 պարզ բազմապատկիչը, ապա այն չի կարելի դարձնել տասնորդական կոտորակ. սակայն կարելի յե գտնել այնպիսի տասնորդական կոտորակ, որը մոտավորապես հավասարվում է $\frac{3}{14}$-ի և այն էլ ուզած ճշտությամբ։ Յեթե, օրինակ, ցանկանում ենք գտնել այնպիսի տասնորդական կոտորակ, որ-ը $\frac{3}{14}$-ից տարբերվի ավելի քիչ, քան 0.001, ապա 3-ը 14-ի վրա բաժանելուց բավական է գտնել միայն 3 տասնորդական նշաններ.

$$\begin{array}{r|l} 3 & 14 \\ \hline 30 & 0,214 \\ 20 & \\ 60 & \\ 4 & \end{array}$$

0,214 մոտավոր քանորդը ճիշտ քանորդից, այսինքն $\frac{3}{14}$-ից, տարբերվում է հազարերորդի կեսից պակաս։ Յեթե բաժանումը էլի շարունակենք, ապա սխալը կդառնա ավելի ու ավելի քիչ։ Բայց բաժանումը յերբեք չի կարող վերջանալ, որովհետև հակառակ դեպքում կստանայինք այնպիսի տասնորդական կոտորակ, որը ճիշտ և ճիշտ հավասար է $\frac{3}{14}$-ի, իսկ այդ հնարավոր չէ.

այսպիսով, շարունակելով բաժանումը, քանորդում կարող ենք ստանալ ուզած չափով տասնորդական նշաններ։

178. ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՅԵՎ ԱՆՎԵՐՋ ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐ։ ԹՎԻ ԿԼՈՐԱՑՈՒՄԸ։

Յեթե հասարակ կոտորակը, օրինակ $\frac{3}{14}$-ը, չի կարելի ներկայացնել տասնորդական կոտորակի տեսքով, ապա այնուամենայնիվ, ինչպես ցույց է տված § 177-ում, 3-ը 14-ի վրա բաժանելով, կարող ենք քանորդում միշտ նորանոր թվանշաններ գրել, այսպիսով միշտ նորանոր տասնորդական կոտորակներ ստանալով. այդ տասնորդական կոտորակները տալիս են $\frac{3}{14}$-ին ավելի ու ավելի մոտ թվեր. ուստի, այս դեպքում պայմանավորվել են ասել, որ $\frac{3}{14}$ թիվը վերածվում է անվերջ տասնորդական կոտորակի.

$$\frac{3}{14}=0,214...;$$

այստեղ յերեք կետերը նշանակում են, որ քանորդի թվանշանների շարքը գրված թվանշաններով (2, 1, 4) չի սպառվում, այլ կարող է անվերջ շարունակվել. ուստի, նույն իրավունքով և մենք կարող էինք գրել.

$$\frac{3}{14}=0,2..., \frac{3}{14}=0,21..., \frac{3}{14}=0,2142..., \text{ և այլն։}$$

Այսպիսի անվերջ տասնորդական կոտորակներից տարբերելու համար այն կոտորակները, որոնցով մինչև այժմ զբաղվեցինք, անվանում են վերջավոր տասնորդական կոտորակներ։

Անվերջ տասնորդական կոտորակները (նաև մեծ թվով տասնորդական նշաններ ունեցող վերջավոր կոտորակները) գործնական կարիքների համար հարկավոր է լինում կլորացնել, ճիշտ կոտորակի փոխարեն վերցնելով ցանկացած ճշտությամբ մոտավոր կոտորակը պակասորդով կամ ավելցուկով (§ 169)։ Այսպես, յեթե ցանկանում ենք սահմանափակել մինչև մեկ հարյուրերորդական ճշտությամբ, ապա

3,141592653...

կոտորակի փոխարեն վերցնում ենք մոտեցումը՝ 3,14 (պակասորդով), իսկ յեթե ըստ հարցի պայմանների ցանկալի յե մինչև մեկ հազարերորդական ճշտությունը, ապա վերցնում ենք 3,142 (ավելցուկով)։

179. ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐ։ Այն անվերջ տասնորդական կոտորակը, վորի մեկ կամ մի քանի թվանշանները անփոփոխ կրկնվում են միևնույն հաջորդականությամբ, կոչվում է պարբերական տասնորդական կոտորակ, իսկ կրկնվող թվանշանների համախումբը կոչվում է այդ կոտորակի պարբերություն։

Պարբերական կոտորակները լինում են պարզ և խառը։ Պարզ պարբերական կոտորակ կոչվում է այն, վորի պարբերությունն սկսվում է ստորակետից անմիջապես հետո. որինակ, 2,363636..., խառը կոչվում է այն, վորի ստորակետի և առաջին պարբերության միջև կա մեկ կամ մի քանի չկրկնվող թվանշաններ, որինակ, 0,5232323... պարբերական կոտորակները կրճատ գրում են այսպես.

2,3636...-ի փոխարեն գրում են 2,(36)
0,52323-ի » » 0,5(23),

այսինքն, պարբերությունն առնում են փակագծի մեջ։

180. ԱՆՎԵՐՋ ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿԸ, ՎՈՐՆ ՍՏԱՑՎՈՒՄ Է ՀԱՍԱՐԱԿ ԿՈՏՈՐԱԿԸ ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԴԱՐՁՆԵԼԻՍ, ՊԵՏՔ Է ԼԻՆԻ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ։ Այդ հատկությանը համոզվենք մի վորևէ որինակով։ Դիցուք, ցանկանում ենք $\frac{19}{7}$ կոտորակը դարձնել տասնորդական։ Քանի վոր 7 հայտարարը կազմված չէ 2 և 5 բազմապատկիչներից և տված կոտորակը չկրճատվող է, ապա նա չի կարող վերջավոր տասնորդական կոտորակ դառնալ։ Հետևապես, նա դառնում է անվերջ տասնորդական կոտորակ։ Նրա առաջին մի քանի տասնորդական նշանները ստանալու համար սկսենք 19-ը բաժանել 7-ի վրա։ Քանի վոր բաժանումը չի կարող վերջանալ,

$$\begin{array}{r|l} 19 & 7 \\ \cline{2-2} 50 & 2{,}71428571 \\ 10 & \\ 30 & \\ 20 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 50 & \\ 10 & \\ 3 & \end{array}$$

ապա մնացորդները պետք է անվերջ շատ լինեն։ Բայց մնացորդները բաժանարարից միշտ փոքր են, ուստի, հետևյալ վեց մնացորդներից՝ 1, 2, 3, 4, 5, 6—ավելի տարբեր մնացորդներ լինել չեն կարող։ Այստեղից հետևում է, վոր բաժանումը բավականաչափ շարունակելուց հետո մնացորդներն անպայման կսկսեն կրկնվել։ Ինչպես, յոթերորդ մնացորդը ստացվում է նույնը, ինչ և առաջինը։ Բայց յեթե մնացորդը կրկնվեց, ապա նրան կցագրելով զերո, կստանանք նույնպիսի բաժանելի, վորն առաջ կար (50), ուրեմն, քանորդում կսկսեն ստացվել այն թվանշանները, ինչ առաջ կային, այսինքն քանորդում կստացվի պարբերական կոտորակ։ Մեր որինակի մեջ պարբերությունը սկսվեց ստորակետից հետո առաջին թվանշանից, ուստի և ստացվեց պարզ պարբերական կոտորակ։ Ուրիշ որինակներում կարող է պատահել, վոր պարբերությունը սկսվի վոչ թե առաջին թվանշանից, այլ, որինակ, յերրորդից կամ վորևէ ուրիշ թվանշանից հետո. այդ դեպքում կստացվի խառը պարբերական կոտորակ։

IV. ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԸ ՀԱՍԱՐԱԿ ԴԱՐՁՆԵԼԸ

181. ՆԱԽՆԱԿԱՆ ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆ։ § 180-ում տեսանք, վոր հասարակ կոտորակը տասնորդական դարձնելիս միշտ ստացվում է կամ վերջավոր, կամ պարբերական տասնորդական կոտորակ։ Դիցուք այժմ, ընդհակառակը, տված է պարբերական տասնորդական կոտորակ և ցանկանում ենք գտնել այն հասարակ կոտորակը, վորի

վերածումից ստացվում է տված պարբերական կոտորակը: Դրա համար նախ տեսնենք, թե ինչպիսի պարբերական կոտորակներ են ստացվում այն հասարակ կոտորակների ձևափոխումից, որոնց համարիչը միավոր է, իսկ հայտարարը՝ 9 թվանշանը, գրված մեկ կամ մի քանի անգամ շարքով, օրինակ $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$ և այլն:

$$\frac{1}{9}\qquad \begin{array}{r|l} 1 & 9 \\ \hline 10 & 0,111... \\ \underline{10} & \\ 1 & \end{array} \qquad \frac{1}{9}=0,(1)$$

$$\frac{1}{99}\qquad \begin{array}{r|l} 1 & 99 \\ \hline 100 & 0,0101... \\ \underline{99} & \\ 1 & \end{array} \qquad \frac{1}{99}=0,(01)$$

$$\frac{1}{999}\qquad \begin{array}{r|l} 1 & 999 \\ \hline 1000 & 0,001001... \\ \underline{999} & \\ 1 & \end{array} \qquad \frac{1}{999}=0,(001).$$

Այս բաժանումների քննարկումից հեշտ է եզրակացնել, որ այդպիսի պարբերական կոտորակների պարբերությունը կազմված է կամ միավորից, կամ միավորից և նրան նախորդող զերոներից, ընդ որում պարբերության մեջ կա այնքան թվանշան, որքան անգամ կոտորակի հայտարարում կրկնվում է 9 թվանշանը:

182. ՊԱՐԶ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿԸ ՀԱՍԱՐԱԿ ԿՈՏՈՐԱԿ ԴԱՐՁՆԵԼԸ: Դիցուք, ցանկանում ենք գտնել այն հասարակ կոտորակը, որից ստացվում է 0,2323... պարզ պարբերական կոտորակը: Դրա համար այս պարբերական կոտորակը կբաղդատենք մի այլ, ավելի պարզ, կոտորակի հետ, որի պարբերությունն ունի նույնքան թվանշաններ, բայց կազմված է միավորից և նրան նախորդող զերոներից.

$$0,232323...$$
$$0,010101...$$

Առաջին կոտորակը պարունակում է 23 հարյուրերորդական 23 տասհազարերորդական 23 միլիոներորդական և այլն, իսկ երկրորդ կոտորակը պարունակում է 1 հարյուրերորդական 1 տասհազարերորդական 1 միլիոներորդական և այլն: Ուրեմն, առաջին կոտորակի մեջ բոլոր այդ կարգի տասնորդական մասեր պարունակվում են 23 անգամ ավելի շատ, քան երկրորդում: Այդ պատճառով, եթե կա այնպիսի հասարակ կոտորակ, որի ձևափոխությունից ստացվում է 0,(23) պարբերականը, ապա նա պետք է 23 անգամ ավելի մեծ լինի այն հասարակ կոտորակից, որից ստացվում է 0,(01) պարբերական կոտորակը[1]), բայց, ինչպես տեսանք, 0,(01) կոտորակը ստացվում է $\frac{1}{99}$-ից, հետևապես, 0,(23) կոտորակը պետք է ստացվի $\frac{23}{99}$-ից: Եվ իրոք՝

$$\begin{array}{r|l} 23 & 99 \\ \hline 230 & 0,23... \\ \underline{198} & \\ 320 & \\ \underline{297} & \\ 23 & \end{array}$$

$$\frac{23}{99}=0,232323...=0,(23)$$

ԿԱՆՈՆ: Պարզ պարբերական կոտորակը հասարակ դարձնելու համար բավական է նրա պարբերությունը դարձնել համարիչ, իսկ հայտարարում 9 թվանշանը գրել այնքան անգամ, որքան թվանշան կա պարբերության մեջ:

Օրինակներ.

$$1)\ 0,(7)=\frac{7}{9};\quad 2)\ 2,(05)=2\frac{5}{99};$$

$$3)\ 0,(063)=\frac{63}{999}=\frac{7}{111}.$$

183. ԽԱՌԸ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿԸ ՀԱՍԱՐԱԿ ԿՈՏՈՐԱԿ ԴԱՐՁՆԵԼԸ: Ասենք, պետք է գտնել այն հասարակ կոտորակը, որից ստացվում է 0,3(52) խառը պարբերական կոտորակը: Դրա համար վերջինիս ստորակետը մի թվանշանով տեղափոխենք դեպի աջ. կստանանք 3,(52) պարզ պարբերական կո-

1) Այս հաստատման ավելի լուրջ հիմնավորումը տես § 190-ում:

տորակը, վորը ստացվում է $3\frac{52}{99}$ հասարակ կոտորակից։ Բայց՝ ստորակետը մի թվանշան դեպի աջ տեղափոխելով, կոտորակը մեծացրինք 10 անգամ, հետևաբար, $3\frac{52}{99}$ կոտորակը պետք է 10 անգամ ավելի մեծ լինի այն կոտորակից, վորից ստացվել է 0,3(52) կոտորակը։ Այդ պատճառով, վորոնելի կոտորակը գտնելու համար բավական $3\frac{52}{99}$-ը բաժանել 10-ի վրա։ Այսպիսով,

$$0,35252...=3,(52):10=3\frac{52}{99}:10=\frac{349}{99}:10=\frac{349}{990}.$$

Յեվ իսկապես.

```
 349  | 990
 3490 |0,352
 2970
  5200
  4950
   2500
   1980
    520
```

$$\frac{349}{990}=0,3525252...=0,3(52)$$

Կարելի յե արտածել խառը պարբերական կոտորակը հասարակ դարձնելու շատ հարմար կանոն. դրա համար ուշադրություն դարձնենք այն բանի վրա, թե ինչպես կարելի յե կատարել $3\frac{52}{99}$ խառը թվի բաժանումը 10-ի վրա։ Նախ խառը թիվը դարձնենք անկանոն կոտորակ։ Դրա համար պետք է 3-ը բազմապատկել 99-ով և հետո գումարել 52-ը։ Բայց փոխանակ 3-ը 99-ով բազմապատկելու կարող ենք 3-ը բազմապատկել 100-ով և արդյունքը փոքրացնել 3-ով։ Այսպիսով,

$$3\frac{52}{99}=\frac{3.99+52}{99}=\frac{3.100-3+52}{99}.$$

Փոխանակ 3-ը հանելու և ապա 52-ը գումարելու, կարելի յե նախ գումարել 52-ը, իսկ հետո հանել 3։ Հետևապես.

$$3\frac{52}{99}=\frac{3.100+52-3}{99}=\frac{352-3}{99};$$

Մնում է այդ կոտորակը փոքրացնել 10 անգամ, այսինքն հայտարարին կցագրել զերո. այդ դեպքում կստանանք այն հասարակ կոտորակը, վորից ստացվում է 0,3 (52) պարբերականը։ Այսպիսով

$$0,35252...=\frac{352-3}{990}=\frac{349}{990},$$

Նախորդի նման դատելով, կգտնենք, վոր

$$0,26444...=\frac{264-26}{900}=\frac{238}{900}=\frac{119}{450};$$

$$5,7888...=\frac{578-57}{90}=\frac{521}{90}=5\frac{71}{90},$$

կամ

$$5,7888...=5\frac{78-7}{90}=5\frac{71}{90},$$

ԿԱՆՈՆ։ Խառը պարբերական կոտորակը հասարակ կոտորակ դարձնելու համար բավական է մինչև յերկրորդ պարբերությունը գտնվող թվից հանել մինչև առաջին պարբերությունը գտնվող թիվը, ստացած տարբերությունը վերցնել վորպես համարիչ, իսկ հայտարար գրել 9 թվանշանն այնքան անգամ, վորքան թվանշան կա պարբերության մեջ, այնքան զերոներով, վորքան թվանշան կա ստորակետի յեվ առաջին պարբերության միջև։

184. ՎՈՐ ՀԱՍԱՐԱԿ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԸ ԴԱՌՆՈՒՄ ԵՆ ՊԱՐԶ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐ ՅԵՎ ՎՈՐՈՆՔ ԽԱՌԸ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ։

Մենք արդեն գիտենք, վոր յուրաքանչյուր հասարակ կոտորակ տասնորդականի դարձնելիս ստացվում է կամ վերջավոր, կամ պարբերական տասնորդական կոտորակ։ Մենք գիտենք նույնպես, թե վոր դեպքերում է ստացվում վերջավոր և վոր դեպքերում—

պարբերական տասնորդական կոտորակ։ Այժմ պարզենք, թե ըստացվող պարբերական կոտորակը ո՞ր դեպքերում կլինի պարզ և ո՞ր դեպքերում—խառը։ Այն կանոնները, որ կնշենք, կհիմնավորվեն մոտակա պարագրաֆներում, իսկ այստեղ բերում ենք մի քանի նախնական կշռադատումներ, որոնք խոսում են ի նպաստ այդ կանոնների։

1. Այն հասարակ կոտորակը, որի հայտարարը, կրճատումից հետո, 2 և 5 բազմապատիկներ չի պարունակում, դառնում է պարզ պարբերական կոտորակ։

Օրինակ.

$$\frac{3}{7}=0,(428571);\quad \frac{2}{3}=0,(6);\quad \frac{5}{11}=0,(45).$$

Իրոք, առաջին, որ այդպիսի կոտորակը պետք է դառնա որևէ պարբերական կոտորակ (§ 180). երկրորդ, որ այդ պարբերական կոտորակը չի կարող լինել խառը, որովհետև, ինչպես տեսանք, խառը պարբերական կոտորակը դառնում է այնպիսի հասարակ կոտորակ, որի հայտարարը պարունակում է 2 և 5 բազմապատիկները։ Հետևապես, տված կոտորակը պետք է դառնա պարզ պարբերական կոտորակ։

2) Այն հասարակ կոտորակը, որի հայտարարը, կրճատումից հետո, ուրիշ բազմապատիկների հետ պարունակում է 2 կամ 5 բազմապատիկները կամ երկուսը միասին, դառնում է խառը պարբերական կոտորակ։

Օրինակ.

$$\frac{35}{42}=\frac{5}{6}=0,8(3);\quad \frac{8}{15}=0,5(3);$$

$$\frac{119}{450}=0,26(4)\quad \text{և այլն։}$$

Իրոք, առաջին, որ այդպիսի կոտորակը պետք է դառնա որևէ պարբերական կոտորակ, և երկրորդ, որ այդ պարբերական կոտորակը չի կարող լինել պարզ, որովհետև, ինչպես տեսանք, պարզ պարբերական կոտորակն առաջանում է այնպիսի հասարակ կոտորակից, որի հայտարարը չի պարունակում 2 և 5 բազմապատիկներ։ Հետևապես, տված կոտորակը պետք է դառնա խառը պարբերական կոտորակ։

ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՆԱՎՈՐՈՒՄԸ։

185. *ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆ։ Պարբերական կոտորակների հասարակ դառնալու նախորդ մեկնաբանությունը լրիվ չափով կուռ չէ։ Այդ մեկնաբանության մեջ ի միջի այլոց ենթադրված է (§ 182), որ եթե յուրաքանչյուր գումարելին մեծանա մի քանի անգամ, ապա գումարն էլ կմեծանա նույնքան անգամ։ Այս նախադասությունը, որը բոլորովին հիմնավորված է վերջավոր թվով գումարելիների գումարի համար, չի կարելի առանց հատուկ ապացույցի կիրառել անվերջ թվով գումարելիների գումարների նկատմամբ (ինչպիսին են բոլոր պարբերական անվերջ կոտորակները)։*

Պարբերական կոտորակների կուռ տեսությունը հիմնված է սահմանի հասկացողության վրա։

Համառոտակի շարադրենք այդ տեսությունը։

186. *ԹՎԵՐԻ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԸ։ Դիցուք տված է* a_1, a_2, a_3, ..., a_n ... *թվերի անվերջ հաջորդականություն։ Պայմանավորվենք* a *թիվն անվանել այս հաջորդականության սահման, եթե* $a_n - a$ *տարբերությունն ըստ բացարձակ մեծության n-ի բոլոր բավականաչափ մեծ արժեքների համար դառնում է ցանկացած չափով փոքր։ Այսպես,*

$$1+1,\quad 1+\frac{1}{2},\quad 1+\frac{1}{3},\ldots,\quad 1+\frac{1}{n},\ldots$$

թվերի հաջորդականության սահմանը 1 է, որովհետև

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)-1=\frac{1}{n}$$

տարբերությունը դառնում է ցանկացած չափով փոքր՝ բոլոր բավականաչափ մեծ n-երի համար։

187. *Եթե անվերջ տասնորդական կոտորակի մեջ վերցնենք առաջին մի քանի տասնորդական նշանները, իսկ մնացածը դուրս թողնենք, ապա կստացվի վերջավոր տասնորդական կոտորակ, որը կանվանենք տված անվերջ տասնորդական կոտորակի հատվածը։*

Այսպես՝

$$0,8;\ 0,83;\ 0,833;\ 0,8333;\ \text{և այլն}$$

կոտորակները հանդիսանում են 0,8(3) անվերջ պարբերական կոտորակի հատվածները։ Ընդհանրապես, յուրաքանչյուր անվերջ տասնորդական կոտորակ ունի հատվածների անվերջ հաջորդականություն, ըստ որում այդ հատվածներից յուրաքանչյուրը վերջավոր տասնորդական կոտորակ է։

1-ին ԹԵՈՐԵՄ։ Անվերջ տասնորդական կոտորակ դարձող հասարակ կոտորակը այդ անվերջ տասնորդական կոտորակի հատվածների հաջորդականության սահմանն է։

ԱՊԱՑՈՒՅՑ։ *Իսկապես, մենք գիտենք, որ ստացվող անվերջ տասնորդա-*

կան կոտորակի առաջին (այսինքն առաջին տասնորդական նշանով վեր. ցող) հատվածը տված հասարակ կոտորակից տարբերվում է ավելի քիչ, քան $\frac{1}{10}$, յերկրորդ հատվածն ավելի քիչ, քան $\frac{1}{100}$, յերրորդն ավելի քիչ քան $\frac{1}{1000}$ և այլն: Այդ պատճառով բավականաչափ մեծ թվով տասնորդական նշաններ ունեցող յուրաքանչյուր հատված տված հասարակ կոտորակից կտարբերվի ցանկացած չափով փոքր թվով: Սակայն, սահմանի որոշման համաձայն, այդ էլ հենց նշանակում է, որ տված հասարակ կոտորակը սահմանն է այն անվերջ տասնորդական կոտորակի հատվածների հաջորդականության, որին նա վերածվում է:

188. 2-րդ ԹԵՈՐԵՄ: Յեթե յերկու հասարակ կոտորակներ իրար հավասար են, ապա նրանք դառնում են միևնույն տասնորդական կոտորակը (վերջավոր կամ անվերջ):

ԱՊԱՑՈՒՅՑ: Դիցուք $\frac{a}{b}$ և $\frac{a_1}{b_1}$ կոտորակները հավասար են: Յենթադրենք, որ այդ կոտորակները տասնորդականի դարձնելիս (համարիչը բաժանելով հայտարարի վրա) կանգ ենք առել հազարերորդական մասերի վրա: Այն ժամանակ կիմանանք $\frac{a}{b}$ և $\frac{a_1}{b_1}$ կոտորակներից յուրաքանչյուրի մեջ պարունակվող հազարերորդական մասերի ամենամեծ թիվը (քանի որ յեթե քանորդը մեծացնեինք թեկուզ 1 հազարերորդականով, կստանայինք ավելի մեծ թիվ, քան պետք է ստացվեր ճիշտ բաժանման դեպքում): Սակայն քանի որ $\frac{a}{b}$ և $\frac{a_1}{b_1}$ կոտորակները հավասար են, հետևապես, նրանցից յուրաքանչյուրի մեջ պարունակվող հազարերորդական մասերի ամենամեծ թիվը պետք է լինի միևնույնը: Այսպիսով, $\frac{a}{b}$ և $\frac{a_1}{b_1}$ կոտորակների վերածումներից ստացվող յերկու տասնորդական կոտորակների սկզբի յերեք տասնորդական նշանները պետք է լինեն միևնույնը: Նույնպիսի դատողությամբ էլ կհամոզվենք, որ կամավոր թվով տասնորդական նշանները պետք է լինեն միևնույնը, այլ խոսքով, յերկու կոտորակները պետք է ճշտությամբ համընկնեն:

189. 3-րդ ԹԵՈՐԵՄ: *(Նախորդի հակադարձը)*: Յեթե յերկու հասարակ կոտորակներ դառնում են միևնույն տասնորդական կոտորակը *(վերջավոր կամ անվերջ)*, ապա այդ կոտորակները հավասար են:

ԱՊԱՑՈՒՅՑ: Դիցուք $\frac{a}{b}$ և $\frac{a_1}{b_1}$ կոտորակները դառնում են N միևնույն տասնորդական կոտորակը: Յեթե այդ կոտորակը վերջավոր է, ապա կունենանք

$$\frac{a}{b}=N \text{ և } \frac{a_1}{b^1}=N$$

հավասարությունները. հետևապես,

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}.$$

Իսկ յեթե N կոտորակն անվերջ է, ապա $\frac{a}{b}$ և $\frac{a_1}{b_1}$ կոտորակներից յուրաքանչյուրը հավասար է N կոտորակի հատվածների հաջորդականության սահմանին, և հետևապես,

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}:$$

190. 4-րդ ԹԵՈՐԵՄ: Պարզ պարբերական կոտորակի հատվածների հաջորդականության սահմանը հավասար է այն հասարակ կոտորակին, որի համարիչը մինչ յերկրորդ յեվ մինչ առաջին պարբերությունը գտնվող թվերի տարբերությունն է, իսկ հայտարարը—թվանշան 9-ը, գրված այնքան անգամ, որքան թվանշան կա պարբերության մեջ:

ԱՊԱՑՈՒՅՑ: Վերցնենք, օրինակ, 7,2323... պարզ պարբերական կոտորակը: Xn-ով նշանակենք այս կոտորակի այն հատվածը, որը պարունակում է n պարբերությունները, այսինքն ընդունենք

$$\overbrace{7,23\,23\ldots23}^{n}=7+\frac{23}{100}+\frac{23}{100^2}+\ldots+\frac{23}{100^n}=X_n.$$

Այս հավասարության յերկու մասը բազմապատկենք 100-ով, կստանանք

$$723,\overbrace{2323\ldots23}^{n-1}=723+\frac{23}{100}+\frac{23}{100^2}+\ldots+\frac{23}{100^{n-1}}=100X_n:$$

Այս հավասարությունից հանելով նախորդը, կգտնենք, որ

$$723-7-\frac{23}{100^n}=99X_n;$$

որտեղից

$$\frac{723-7}{99}-\frac{23}{100^n.99}=X_n,$$

կամ

$$\frac{723-7}{99}-X_n=\frac{23}{100^n.99}.$$

Վերջին հավասարությունից յերևում է, որ պարբերությունների n թվի մեծացման հետ (723 −7): 99 հաստատուն թվի և Xn-ի տարբերությունը դառնում է ու մնում ավելի փոքր, քան տված վորևե թիվ (որքան էլ որ նա փոքր լինի), իսկ այդ նշանակում է, որ

$$\text{սահման } X_n=\frac{723-7}{99}=7\frac{23}{99}.$$

Այդ սահմանի ստացման յեղանակից յերևում է, որ 723-ը, դա մինչ յերկրորդ պարբերությունը գտնվող թիվն է, իսկ 7-ը՝ մինչ առաջին պարբերությունը գտնվող թիվը. ուրեմն, համարիչը բավարարում է թեորեմին. հայտարբը նույնպես բավարարում է թեորեմին, քանի որ 9 թվանշանը կրկնըվում է այնքան անգամ, վորքան թվանշան կա պարբերության մեջ։

Նկատենք, վոր պարբերական կոտորակի ամբողջ թիվը կարող ենք նրանից անջատել, այսինքն գրել այսպես.

$$\text{սահմ. } 7,(23)=7+\text{սահման } 0,(23)=7+\frac{23}{99}=7\frac{23}{99}.$$

191. 5-րդ ԹԵՈՐԵՄ։ Խառը պարբերական կոտորակի հատվածների հաջորդականության սահմանը հավասար է այն հասարակ կոտորակին, վորի համարիչը մինչև յերկրորդ յեվ մինչև առաջին պարբերությունը գտնվող թվերի տարբերությունն է, իսկ հայտարարը—9 թվանշանը, տարնվ գրված այնքան անգամ, վորքան թվանշան կա պարբերության մեջ, վերջում այնքան զերոներով, վորքան թվանշան կա ստորակետի յեվ առաջին պարբերության միջեվ։

ԱՊԱՑՈՒՑ։ *Վերցնենք մի խառը պարբերական կոտորակ, օրինակ, այս 8,52(375), և ընդունենք, դարձյալ*

$$8,52\,\overbrace{375\;375\ldots375}^{n}=8+\frac{52}{100}+\frac{375}{100\cdot1000}+\frac{375}{100\cdot1000^2}+\ldots+\frac{375}{100\cdot1000^n}=X_n.$$

Այս հավասարության յերկու մասը բազմապատկենք 100-ով, իսկ այնուհետև յերկրորդ անգամ 100.1000-ով, կստանանք.

$$852+\frac{375}{1000}+\ldots+\frac{375}{1000^n}=100X_n;$$

$$852\,375+\frac{375}{1000}+\ldots+\frac{375}{1000^{n-1}}=100\,000X_n.$$

Վերջին հավասարությունից հանելով նախորդը կգտնենք.

$$852375-852-\frac{375}{1000^n}=99900\,X_n.$$

վորտեղից

$$\frac{852375-852}{99900}-\frac{375}{1000^n.99900}=X_n,$$

կամ

$$\frac{852375-852}{99900}-X_n=\frac{375}{1000^n\cdot99900}$$

Վերջին հավասարությունից յերևում է, վոր n-ի անվերջ մեծացման հետ

$$\text{սահման } X_n=\frac{852375-852}{99900}=8\frac{52323}{99900}$$

Պարբերական կոտորակի ամբողջ թիվը այստեղ եվ կարող ենք անջատել նրանից, այսինքն, այսպես գրել.

$$\text{սահման } X_n=8+\text{սահման } 0,52(375)=8+\frac{52375-52}{99900}.$$

Օրինակներ.

$$1)\quad 2,(05)=\frac{205-2}{99}=\frac{203}{99}=2\frac{5}{99},$$

$$2)\quad 0,(063)=\frac{63}{999}=\frac{7}{111},$$

$$3)\quad 0,26(4)=\frac{264-26}{900}=\frac{238}{900}=\frac{119}{450},$$

$$4)\quad 5,7(8)=\frac{578-57}{90}=\frac{521}{90}=5\frac{71}{90},\text{ կամ } 5,7(8)=5\frac{78-7}{90}=5\frac{71}{90}.$$

192. Դիտողություն։ *4 և 5 թեորեմները ցույց են տալիս, վոր յուրաքանչյուր պարբերական տասնորդական կոտորակի հատվածների հաջորդականությունը սահման ունի վորևէ հասարակ կոտորակ։ Այստեղից, 1-ին թեորեմի հիման վրա, հետևում է, վոր յեթե ընդհանրապես կա այդպիսի հասարակ կոտորակ, վորը վերածվում է տվյալ պարբերական կոտորակին, ապա այդ հասարակ կոտորակը հավասար է տված պարբերական կոտորակի սահմանին։*

Սակայն նախորդ թեորեմներից դեռևս չի հետևում, վոր ամեն մի պարբերական կոտորակի համար կարելի յե գտնել այնպիսի հասարակ կոտորակ, որը վերածվում է այդ պարբերական կոտորակին։ Յեվ իսկապես, այդ ճիշտ չե վոչ ամեն մի պարբերական կոտորակի համար, ինչպես իսկույն կտեսնենք։

193. 6-րդ ԹԵՈՐԵՄ։ Յեթե տված պարբերական կոտորակի պարբերությունը կազմված է միայն 9 թվանշանից, ապա չկա այնպիսի հասարակ կոտորակ, վորը վերածվեր տված պարբերական կոտորակին։ Մյուս բոլոր դեպքերում այն հասարակ կոտորակը, վոր հանդիսանում է պարբերական կոտորակի հատվածների տված հաջորդականության սահմանը, վերածվում է պարբերական կոտորակի։

Այդ նշանակում է, վոր գրելով վորևէ (պարզ կամ խառը) պարբերական կոտորակ, միայն թե նրա պարբերությունը կազմված չլինի բացառապես ինը թվանշանից, մենք միշտ կարող ենք գտնել այն հասարակ կոտորակը, վորը վերածվում է տված պարբերական կոտորակին, իսկ, ընդհակառակը, այն պարբերական կոտորակը, վորը վորպես պարբերություն ունի 9 թվանշանը, չի կարող հանդիսանալ վորևէ հասարակ կոտորակի վերածում։

ԱՊԱՑՈՒՑ։ *1) Ենթադրենք, տված է վորևէ պարբերական կոտորակ, վորի պարբերությունը 9 է, օրինակ 5,28(9)։ Յեթե գոյություն ունենար այնպիսի հասարակ կոտորակ, վորը տասնորդականի դարձնելիս տար 5,28(9), ապա, ինչպես գիտենք, այդ կոտորակը հավասար պետք է լիներ տված պարբերական* կոտորակի հատվածների հաջորդականության սահմանին, բայց 5,28(9) կոտորակի համար, 5-րդ թեորեմի համաձայն, այդ սահմանը հավասար է՝

$$\frac{5289-528}{9{,}10^2}=\frac{5280+9-528}{9.10^2}=\frac{528\cdot10-528+9}{9\cdot10^2}=\frac{528\cdot9+9}{9.10^2}=\frac{528+1}{10^2},$$

այսինքն այնպիսի կոտորակ է, որի հայտարարը 2-ից և 5-ից բացի ուրիշ պարզ բազմապատկիչներ չի պարունակում, իսկ այդպիսի կոտորակը, ինչպես գիտենք, վերածվում է վերջավոր և ոչ թե պարբերական տասնորդական կոտորակի: Թեորեմը ապացուցեցինք մի օրինակով (դիտողական դարձնելու համար), սակայն մեր բերած դատողությունը, ակներև է, ճիշտ է մնում 9-ը որպես պարբերություն ունեցող ամեն մի պարբերական կոտորակի համար:

2) Դիցուք, այժմ տված է այնպիսի պարբերական կոտորակ, որի պարբերությունը կազմված է, 9-ից տարբեր, մեկ կամ մի քանի թվանշաններից, օրինակ, 7,(23): 4-րդ թեորեմն ապացուցելիս ընդունեցինք, որ

$$\overbrace{7{,}2323\ldots23}^{n}=X_n$$

և տեսանք, որ երբ n-ը աճում է,

$$7\frac{23}{99}=\frac{723-7}{99}=\text{սահմ. } X_n;$$

ավելի ճիշտ՝ այնտեղ ունեինք

$$\frac{723-7}{99}-X_n=\frac{23}{100^n\cdot99}<\frac{1}{100^n},$$

քանի որ $\frac{23}{99}<1$ (հենց այս վերջին անհավասարությունը, որը մնում է ճիշտ 9-ից տարբեր, ամեն մի պարբերության համար, թույլ է տալիս մասնավոր օրինակի համար տված մեր դատողությունը տարածել ամեն մի կոտորակի վրա, որի պարբերությունը 9-ից տարբեր է): Բայց այդ նշանակում է, որ X_n վերջավոր տասնորդական կոտորակը, որի հայտարարը 100^n է, հանդիսանում է $\frac{723-7}{99}$ թվի մոտեցումը (պակասորդով) $\frac{1}{100^n}$-ի ճշտությամբ: Ինչպես գիտենք, այդպիսի մոտեցումները հանդիսանում են, այն հատվածները, որոնք ստացվում են տված թիվը տասնորդական կոտորակի դարձնելիս՝ ուրեմն, X_n-ը $\frac{723-7}{99}$ թվի վերածման հատվածն է. իսկ քանի որ n-ը կամայական է, ապա $\frac{723-7}{99}$ թվի տասնորդական կոտորակի վերածումը իսկապես համընկնում է տված 7,(23) պարբերական կոտորակի հետ:

194. Հետևություններ: 1) Պարզ պարբերական կոտորակ դարձող հասարակ կոտորակի հայտարարը, կրճատումից հետո, 2 կամ 5 բազմապատկիչներ չի պարունակում, որովհետև ըստ 4-րդ թեորեմի՝ այդ հայտարարը միշտ կարելի է ներկայացնել որպես 9 թվանշանով վերջացող թիվ, այդ պատճառով էլ չի կարող բաժանվել ոչ 2-ի և ոչ էլ 5-ի վրա, իսկ կրճատումից հետո ավելի ևս չի կարող այդ բազմապատկիչները պարունակել:

2) Խառը պարբերական կոտորակ դարձող հասարակ կոտորակի հայտարարը պարունակում է 2 կամ 5 բազմապատկիչը կամ երկուսն էլ միասին:

Իսկապես, 5-րդ թեորեմի համաձայն, այդ հայտարարը կարելի է ներկայացնել զերոյով վերջացող թիվ և այդ պատճառով էլ նա բաժանվում է և 2-ի, և 5-ի վրա: Այս երկու բազմապատկիչները կարող էին համարիչի հետ կրճատվել միայն այն դեպքում, եթե համարիչը վերջանար զերոյով: Բայց համարիչը ստացվում է, երբ մինչ առաջին պարբերությունը գտնվող թիվը հանում ենք մինչ երկրորդ պարբերությունը գտնվող թվից. քանի որ պարբերության վերջին թվանշանը և մինչ պարբերության վերջին թվանշանը միևնույնը լինել չեն կարող (եթե պարբերությունն սկսված է հարկավոր տեղից), ապա համարիչը զերոյով վերջանալ չի կարող: Այդ պատճառով կրճատումից հետո էլ (եթե այդ հնարավոր է) հայտարարում կմնա կամ 2, կամ 5 բազմապատկիչը, կամ երկուսն էլ միասին:

3) Այն հասարակ կոտորակը, որի հայտարարը 2 կամ 5 բազմապատկիչներ չի պարունակում, դառնում է պարզ պարբերական կոտորակ:

Օրինակ՝

$$\frac{3}{7}=0,(428571);\quad \frac{2}{3}=0,(6);\quad \frac{5}{11}=0,(45):$$

Իրոք, 1) այդպիսի կոտորակը պետք է դառնա որևէ պարբերական կոտորակ (§ 180). 2) այդ պարբերական կոտորակը խառը լինել չի կարող, որովհետև, ինչպես տեսանք, խառը պարբերական կոտորակ կարող է դառնալ միայն այնպիսի հասարակ կոտորակը, որի հայտարարը 2 և 5 բազմապատկիչներ է պարունակում: Հետևապես, տված կոտորակը պետք է դառնա պարզ պարբերական:

4) Այն հասարակ կոտորակը, որի հայտարարը կրճատումից հետո պարունակում է այլ բազմապատկիչների հետ 2 կամ 5 (կամ այդ երկուսը) բազմապատկիչը, դառնում է խառը պարբերական կոտորակ.

Օրինակ՝

$$\frac{35}{42}=\frac{5}{6}=0,8(3);\quad \frac{8}{15}=0,5(3);\quad \frac{119}{450}=0,26(4)\ \text{և այլն}$$

Իսկապես 1) այդպիսի կոտորակը պետք է դառնա որևէ պարբերական կոտորակ. 2) այդ պարբերական կոտորակը պարզ լինել չի կարող, որովհետև ինչպես տեսանք, պարզ պարբերական կոտորակ կարող է դառնալ միայն այն հասարակ կոտորակը, որի հայտարարը 2 և 5 բազմապատկիչներ չի պարունակում: Հետևապես, տված կոտորակը պետք է դառնա խառը պարբերական կոտորակ:

ՎԵՑԵՐՈՐԴ ԲԱԺԻՆ
ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

I. ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

195. *ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ:* Երկու հարաբերությունների հավասարությունը կոչվում է համեմատություն: *Այսպես,*

$$\frac{3}{4}=\frac{9}{12}, \quad \frac{10}{2\frac{1}{2}}=\frac{1\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}, \quad \frac{3\frac{1}{2}\text{ կգ}}{5\text{ կգ}}=\frac{\frac{1}{2}\text{ մ}}{\frac{5}{7}\text{ մ}}$$

հավասարությունները համեմատություններ են:

Այդ համեմատությունները բառերով կարդում են այսպես. 3-ը հարաբերում է 4-ին այնպես, ինչպես 9-ը հարաբերում է 12-ին, 10-ը հարաբերում է $2\frac{1}{2}$-ին այնպես, ինչպես $1\frac{1}{3}$-ը $\frac{1}{3}$-ին, *և այլն:*

Համեմատություն կազմող երկու հարաբերությունների անդամները կարող են լինել կամ վերացական (ինչպես առաջին երկու օրինակներում), կամ նույնանուն անվանական թվեր (ինչպես երրորդ օրինակում): Վերջին դեպքում միանգամայն թույլատրելի է, որ առաջին հարաբերության անդամներն ունենան մի անուն (օրինակ, կիլոգրամ), իսկ երկրորդ հարաբերության անդամները — բոլորովին այլ անուն (օրինակ, մետրներ), ընդսմին այդ երկու հարաբերություններից յուրաքանչյուրը վերացական թիվ է, և համեմատությունն այդ երկու վերացական թվերի հավասարությունն է:

Յուրաքանչյուր համեմատություն, ակներև է, ունի երկու նախորդ և երկու հետնորդ անդամ: Համեմատության կազմող հարաբերությունների անդամները կոչվում են նաև համեմատության անդամներ:

$$\frac{3}{4}=\frac{9}{12} \qquad (1)$$

համեմատության մեջ 3-ը և 12-ը կոչվում են ծայրի անդամներ, իսկ 4-ը և 9-ը միջին անդամներ: Համեմատության յուրաքանչյուր անդամը կոչվում է մյուս երեք անդամների չորրորդ համեմատականը:

196. *ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ: Այս պարագրաֆում կխոսենք միայն վերացական անդամներ ունեցող համեմատությունների մասին:*

Քննության առնենք $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$ *համեմատությունը. հավասար հարաբերություններից յուրաքանչյուրը կբազմապատկենք միևնույն 4.12 թվով, այսինքն հետնորդ անդամների արտադրյալով, ստացվում են դարձյալ հավասար թվեր.*

$$\frac{3.4.12}{4}=\frac{9.4.12}{12},$$

կամ կրճատումից հետո.

$$3\,.\,12=9\,.\,4. \qquad (1)$$

Այս հավասարությունը ցույց է տալիս, որ

համեմատության ծայրանդամների արտադրյալը հավասար է միջին անդամների արտադրյալին:

Սակայն հեշտ է համոզվել, և ընդհակառակը, **յեթե ընտրված են չորս թվեր այնպես, որ նրանցից յերկուսի արտադրյալը հավասար է մյուս յերկու թվերի արտադրյալին, ապա այդպիսի թվերը միշտ հանդիսանում են համեմատության անդամներ:**

Իսկապես, վերցնենք, օրինակ.

$$4\,.\,15=3\,.\,20$$

հավասարությունը. Նրա յերկու մասերը բաժանելով 15.3 արտադրյալի վրա, կրճատումից հետո կստանանք.

$$\frac{4}{3}=\frac{20}{15}.$$

կարող էինք առնել համեմատության միջին մասերը բաժանել նաև այլ արտադրյալների վրա, օրինակ, 4.3-ի, 4.20-ի կամ 15.20-ի վրա, և այդպիսով, ստանալ մի քանի ուրիշ համեմատություններ:

Այս կանոնից միակ բացառություն կազմում է այն դեպքը, երբ այդ երկու արտադրյալներից մեկն ու մեկը (կամ երկուսը) մեջ երկու բազմապատկիչներն էլ զերոներ են. օրինակ, 0.5=0.0, այս դեպքում, ակներև է, որ առած թվերից համեմատություն կազմել չի կարելի, որովհետև այդ համեմատության մեջ հետևորդ անդամներից առնվազն մեկը պետք է զերո լիներ, որը, ինչպես գիտենք, անթույլատրելի է:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ համեմատության հիմնական հատկությունը ընդհանուր տեսքով գրվում է այսպես.

$$ad=bc:$$

Ընդհակառակը, $ad=bc$ հավասարությունից հետևում է, որ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d},\quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a} \text{ և } \frac{d}{c}=\frac{b}{a}:$$

197. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏԵՎԱՆՔՆԵՐԸ: **1) Համեմատության յուրաքանչյուր ծայրանդամ հավասար է միջին անդամների արտադրյալին, բաժանած մյուս ծայրանդամի վրա և համեմատության յուրաքանչյուր միջին անդամ հավասար է ծայրանդամների արտադրյալին, բաժանած մյուս միջին անդամի վրա:**

Այդ հնարավորություն է տալիս գտնելու համեմատության անհայտ անդամը, եթե մնացած 3 անդամները հայտնի յեն. օրինակ,

$$10:x=45:20$$

համեմատության մեջ, որտեղ x-ով նշանակված է նրա անհայտ միջին անդամը, գտնում ենք

$$x=\frac{10.20}{45}=4\frac{4}{9}.$$

2) Համեմատության անդամների տեղափոխումները: Յուրաքանչյուր համեմատության մեջ կարելի յե տեղափոխել՝ 1) միջին անդամները, 2) ծայրանդամները և 3) ծայրանդամները միջին անդամների տեղը և ընդհակառակը: Այդ տեղափոխումներից համեմատությունը չի խախտվի, որովհետև միջին և ծայրանդամների արտադրյալների միջև յեղած հավասարությունը չի խախտվի: Դիցուք, օրինակ, ունենք

$$1)\ 4:7=12:21$$

համեմատությունը. սրա միջին անդամները տեղափոխելով կստանանք.

$$2)\ 4:12=7:21:$$

Այս յերկու համեմատություններից յուրաքանչյուրի մեջ տեղափոխենք ծայրանդամները, այն ժամանակ կստանանք եվ յերկու համեմատություններ.

$$3)\ 21:7=12:4; \qquad 4)\ 21:12=7:4:$$

Վերջապես, ստացած չորս համեմատություններից յուրաքանչյուրում միջին անդամները դնենք ծայրանդամների տեղը և ընդհակառակը, այն ժամանակ կստանանք եվ չորս համեմատություններ.

$$5)\ 7:4=21:12; \qquad 7)\ 7:21=4:12;$$
$$6)\ 12:4=21:\ 7; \qquad 8)\ 12:21=4:\ 7:$$

Կարելի յեր այս ութը համեմատություններից յուրաքանչյուրում տեղափոխել հարաբերությունները, այսինքն, յերկրորդ հարաբերությունը դարձնել առաջին, իսկ առաջինը յերկրորդ, սակայն այդ տեղափոխությունից նոր համեմատություն չի ստացվի, որին կարելի յե անմիջապես համոզվել: Յեթե, օրինակ, 5-րդ համեմատության հարաբերությունները տեղափոխենք, նոր համեմատություն չենք ստանա, այլ կստանանք 4-րդ համեմատությունը: Հետևապես, բոլոր հնարավոր տեղափոխումների միջոցով մեկի փոխարեն կարելի յե ստանալ ութը համեմատություն.

3) Համեմատության ստուգումը: Միևնույն հիմնական հատկության հիման վրա, համեմատությունը ստուգելու համար, բավական է համոզվել, որ նրա ծայրանդամների արտադրյալը հավասար է միջին անդամների արտադրյալին: Օրինակ, 4 : 7 = 868 : 1519 համեմատությունը ճիշտ է, քանի որ 1519 . 4 = = 868 . 7։

198. *ՄԻՋԻՆ ՅԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ։* Վերցնենք այնպիսի համեմատություն, որի միջին անդամները նույնն են. օրինակ,

$$36 : 12 = 12 : 4.$$

Այդպիսի համեմատության կրկնվող անդամը կոչվում է համեմատության մնացած յերկու անդամների **միջին յերկրաչափական**ը։ Այսպես, 12-ը 36-ի և 4-ի միջին յերկրաչափականն է։

Այսպիսով, յեթե պահանջվում է գտնել a և b յերկու թվերի միջին յերկրաչափականը, ապա այդ նշանակելով x-ով, կարող ենք գրել

$$a : x = x : b$$

համեմատությունը, որտեղից,

$$x^2 = ab.$$

Ուրեմն, **յերկու տված թվերի միջին յերկրաչափականը մի այնպիսի յերրորդ թիվ է, որի քառակուսին հավասար է տված թվերի արտադրյալին**[1]։ Օրինակ, 25 և 4 թվերի միջին յերկրաչափականը հավասար է 10-ի, որովհետև $10^2 = 25 . 4$։

199. *ՄԻՋԻՆ ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ։* **Տված մի քանի թվերի միջին թվաբանական կոչվում է այն քանորդը, որն ստացվում է տված թվերի գումարն այդ գումարելիների թվի վրա բաժանելուց։** Օրինակ, տված 10, 2, 8, 12 չորս թվերի միջին թվաբանականը հավասար է

$$\frac{10+2+8+12}{4} = \frac{32}{4} = 8.$$

Միջին թվաբանականն ունի այն հատկությունը, որ յեթե տված թվերը գումարելիս նրանցից յուրաքանչյուրը փոխարինենք միջին թվաբանականով, ապա այդ փոխարինումից գումարը չի փոխվի։ Այսպես, տված 10, 2, 8 և 12 թվերի գումարը հավասար է 32-ի և 8 + 8 + 8 + 8 գումարը նույնպես հավասար է 32-ի։

---

1) Հետևապես, յերկու թվերի միջին յերկրաչափականը հավասար է այդ թվերի արտադրյալի քառակուսի արմատին։

Ենթադրենք, օրինակ, որ գործարանի արտադրողականությունն ընթացիկ տարվա առաջին չորս ամիսներում, համեմատած նախորդ տարվա դեկտեմբերի ամսվա արտադրողականության հետ, բարձրացել է՝ հունվարին—10 000 ռուբլով, փետրվարին—2000 ռուբլով, մարտին—8000 ռուբլով, և ապրիլին—12 000 ռուբլով։ Այն ժամանակ կարելի յե ասել, որ այդ չորս ամսում արտադրողականության միջին բարձրացումը կազմում է ամսական 8000 ռուբլի։ Այդ պետք է հասկանալ այն իմաստով, որ գործարանի արտադրողականությունը բոլոր 4 ամիսներում յեղել է այնպես, ինչպես կլիներ, յեթե ամեն ամիս բարձրանար հավասարապես, այն է 8000 ռուբ.։

Հաճախ նման ձևով են խոսում միջին վաստակի, շարժման միջին արագության, ազգաբնակչության միջին խտության մասին և այլն։ Այդպիսի արտահայտություններում հասկացվում է, որ խոսքը վերաբերում է միջին թվաբանականին։

200. *ԱԾԱՆՑՅԱԼ ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։* Տված համեմատությունից կարելի յե ստանալ մի քանի այլ համեմատություններ, որոնք կոչվում են **ածանցյալ** համեմատություններ։ Դրանք ստացվում են հետևյալ դատողությունների հիման վրա։

Վերցնենք որևէ հարաբերություն, օրինակ, 21 : 7։ Յեթե սրա նախորդ անդամին ավելացնենք հետնորդ անդամը, իսկ հետնորդ անդամը թողնենք անփոփոխ, ապա կստանանք մի նոր հարաբերություն (21 + 7) : 7, որը նախկին հարաբերությունից մեծ է 1 միավորով։ Իսկ յեթե նախորդ անդամից հանենք հետնորդ անդամը (յեթե այդ հնարավոր է, ինչպես մեր օրինակում), իսկ հետնորդ անդամը թողնենք անփոփոխ, ապա կստանանք մի նոր հարաբերություն (21 — 7) : 7, որը նախկին հարաբերությունից փոքր է 1 միավորով։

Նկատելով այս, վերցնենք որևէ համեմատություն.

$$21 : 7 = 30 : 10$$

և սրանից կազմենք մի նոր համեմատություն, այսպես.

$$(21+7) : 7 = (30+10) : 10. \qquad (1)$$

Այս համեմատությունը ճիշտ է, որովհետև նրա մեջ հարաբերություններից յուրաքանչյուրը միևնույն թվով, 1-ով, մեծ է տված համեմատության հարաբերություններից։ Մեր կազմած ածանցյալ համեմատությունը կարելի յե արտահայտել այսպես.

առաջին հարաբերության անդամների գումարն այնպես է հարաբերում նրա հետնորդ անդամին, ինչպես յերկրորդ հա-

րաբերության անդամների գումարը հարաբերում է այդ հարաբերության հետևորդ անդամին։

Տված համեմատությունից այժմ կազմենք հետևյալ համեմատությունը.

$$(21-7):7=(30-10):10 \tag{2}$$

Այս համեմատությունը ճիշտ է, վորովհետև նրա մեջ յուրաքանչյուր հարաբերությունը միևնույն թվով, 1 միավորով, փոքր է տված համեմատության հարաբերություններից։ Մեր կազմած այս յերկրորդ ածանցյալ համեմատությունը կարելի յե արտահայտել այսպես.

առաջին հարաբերության անդամների տարբերությունն այնպես է հարաբերում նրա հետևորդ անդամին, ինչպես յերկրորդ հարաբերության անդամների տարբերությունը հարաբերում է այդ հարաբերության հետևորդ անդամին։

Տեղափոխելով այս յերկու ածանցյալ համեմատությունների անդամները, կարելի յե ստանալ նաև այլ ածանցյալ համեմատություններ։ Այսպես, տեղափոխենք առաջին ածանցյալ համեմատության և տված համեմատության միջին անդամները

$$(21+7):(30+10)=7:10;$$
$$21:30=7:10.$$

Այդ յերկու համեմատությունների մեջ յերկրորդ հարաբերությունները միևնույնն են, ուրեմն, առաջին հարաբերությունները պետք է լինեն իրար հավասար՝

$$(21+7):(30+10)=21:30.$$

Տեղափոխելով սրա միջին անդամները, կստանանք.

$$(21+7):21=(30+10):30 \tag{3}$$

Այս յերրորդ ածանցյալ համեմատությունը կարելի յե արտահայտել այսպես.

առաջին հարաբերության անդամների գումարն այնպես է հարաբերում նրա նախորդ անդամին, ինչպես յերկրորդ հարաբերության անդամների գումարը հարաբերում է այդ հարաբերության նախորդ անդամին։

Տեղափոխենք յերկրորդ ածանցյալ համեմատության և տված համեմատության միջին անդամները, կստանանք.

$$(21-7):(30-10)=7:10,$$
$$21:30=7:10;$$

վորտեղից՝

$$(21-7):(30-10)=21:30,$$

կամ

$$(21-7):21=(30-10):30 \tag{4}$$

Այս չորրորդ ածանցյալ համեմատությունը կարելի յե արտահայտել այսպես.

առաջին հարաբերության անդամների տարբերությունն այնպես է հարաբերում նրա նախորդ անդամին, ինչպես յերկրորդ հարաբերության անդամների տարբերությունը հարաբերում է այդ հարաբերության նախորդ անդամին։

Տեղափոխելով առաջին և յերկրորդ ածանցյալ համեմատությունների միջին անդամները, կստանանք.

$$(21+7):(30+10)=7:10,$$
$$(21-7):(30-10)=7:10;$$

վորտեղից

$$(21+7):(30+10)=(21-7):(30-10),$$

կամ

$$(21+7):(21-7)=(30+10):(30-10) \tag{5}$$

Այս հինգերորդ ածանցյալ համեմատությունը կարելի յե արտահայտել այսպես.

առաջին հարաբերության անդամների գումարը այնպես է հարաբերում նրանց տարբերությանը, ինչպես յերկրորդ հարաբերության անդամների գումարը հարաբերում է նրանց տարբերությանը։

201. ՀԱՎԱՍԱՐ ՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ։

Նշենք ևս մի հատկություն, վորը պատկանում է վոչ միայն համեմատությանը, այսինքն յերկու հարաբերությունների հավասարությանը, այլև յերեք, չորս և ավելի թվով հարաբերությունների հավասարությանը։

Վերցնենք մի քանի հավասար հարաբերություններ, օրինակ, այսպիսի.

$$40 : 10 = 20 : 5 = 8 : 2 = \dots$$

Քանի որ յուրաքանչյուր հարաբերության մեջ նախորդ անդամը հավասար է հետորդ անդամի և հարաբերության արտադրյալին, և քանի որ մեր օրինակում հարաբերությունը հավասար է 4-ի, ապա կարող ենք գրել՝

$$40 = 10 \cdot 4; \quad 20 = 5 \cdot 4; \quad 8 = 2 \cdot 4; \dots$$

Այս հավասարությունների ձախ մասերն իրար գումարենք, իսկ աջ մասերն իրար։ Ակնհայտ է, որ հավասար թվերի գումարումից պետք է ստանանք և հավասար գումարներ. ուստի,

$$40 + 20 + 8 + \dots = 10 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + \dots$$

Այս հավասարության աջ մասում 10, 5, 2,... թվերը առանձին-առանձին բազմապատկվում են 4-ով և ապա ստացված արտադրյալները գումարվում։ Դրա փոխարեն կարելի էր նախապես 10, 5, 2,... թվերը գումարել և ապա գումարը միանգամից բազմապատկել 4-ով։ Այդ պատճառով մեր դուրս բերած վերջին հավասարությունը կարող ենք արտագրել այսպես.

$$40 + 20 + 8 + \dots = (10 + 5 + 2 + \dots) \cdot 4։$$

Այս հավասարության երկու մասերը կբաժանենք $10 + 5 + 2 + \dots$ գումարի վրա, որից հավասարությունը չի խախտվի, և կստանանք.

$$(40 + 20 + 8 + \dots) : (10 + 5 + 2 + \dots) = 4։$$

Սակայն մեր վերցրած հավասար հարաբերություններից յուրաքանչյուրը նույնպես հավասար է 4-ի, ուրեմն՝

$$(40 + 20 + 8 + \dots) : (10 + 5 + 2 + \dots) = 40 : 10 = 20 : 5 = 8 : 2 = \dots$$

Դիցուք, ընդհանրապես ունենք մի քանի հավասար հարաբերություններ

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = q։$$

Այն ժամանակ

$$a = bq; \quad a_1 = b_1q; \quad a_2 = b_2q; \dots \text{ և այլն։}$$

Գումարելով այս հավասարությունները, կստանանք.

$$a + a_1 + a_2 + \dots = bq + b_1q + b_2q + \dots = (b + b_1 + b_2 + \dots)q։$$

Հավասարության երկու մասերն այժմ բաժանենք $b + b_1 + b_2 + \dots$ գումարի վրա, որից հավասարությունը չի խախտվի.

$$\frac{a + a_1 + a_2 + \dots}{b + b_1 + b_2 + \dots} = q։$$

Բայց տված հարաբերություններից յուրաքանչյուրը նույնպես հավասար է q-ի, ուրեմն

$$\frac{a + a_1 + a_2 + \dots}{b + b_1 + b_2 + \dots} = \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots$$

Այսպիսով՝

եթե մի քանի հարաբերություններ հավասար են իրար, ապա նրանց բոլոր նախորդ անդամների գումարն այնպես է հարաբերում բոլոր հետորդ անդամների գումարին, ինչպես նախորդ անդամներից որևէ մեկը հարաբերում է իր հետորդ անդամին։

Ամեն մի համեմատություն հանդիսանում է երկու հարաբերությունների հավասարություն, ուրեմն, մեր նշած հատկությունը պատկանում է մասնավորապես ամեն մի համեմատության։

II. ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ԿԱԽՈՒՄԸ

202. *ՈՒՂԻՂ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։* Դիցուք 3 մ մահուդն արժե 360 ռուբլի. այդ դեպքում երկու անգամ ավելի մեծ քանակությամբ մահուդը, այսինքն 6 մ, արժե երկու անգամ ավելի, այսինքն, $360 \cdot 2 = 720$ ռուբլի. երեք անգամ ավելի մեծ քանակությամբ մահուդը, այսինքն 9 մ, արժե երեք անգամ ավելի, այսինքն $360 \cdot 3 = 1080$ ռուբլի, և այլն։

Ընդհանրապես, եթե ապրանքի տված քանակը մեծացնենք կամավոր թիվ անգամ, ապա նրա արժեքն էլ կմեծանա նույնքան անգամ. եթե ապրանքի տված քանակը փոքրացնենք մի քանի անգամ, ապա արժեքն էլ կփոքրանա նույնքան անգամ։

Յեթե յերկու մեծություններ իրար հետ կապված են այնպես, վոր նրանցից վորեվե մեկի մի քանի անգամ մեծացնելու (փոքրացնելու) հետեվանքով նույնքան անգամ էլ անհրաժեշտաբար մեծանում (փոքրանում) է մյուսը, ապա այդպիսի յերկու մեծությունները կոչվում են ուղիղ համեմատական:

Այսպես ապրանքի քանակը և նրա արժեքը ուղիղ համեմատական մեծություններ են։ Ճիշտ այդպես են՝

միատեսակ մարմնի (օրինակ, յերկաթի կտորի) քաշն ուղիղ համեմատական է նրա ծավալին,

հավասարաչափ շարժվող մարմնի (օրինակ, գնացքի) անցած ճանապարհը ուղիղ համեմատական է շարժման տևողությանը,

անփոփոխ հայտարարի դեպքում կոտորակի մեծությունն ուղիղ համեմատական է նրա համարիչին և այլն:

Յեթե մահուդի մի կտորը 4 մ է, իսկ մյուսը — 10 մ, ապա յերկրորդ կտորն առաջինից մեծ է $\frac{10}{4}=2\frac{1}{2}$ *անգամ. ուրեմն, յերկրորդ կտորի արժեքը* $2\frac{1}{2}$ *անգամ ավելի մեծ է առաջինի արժեքից, այսինքն.*

$$\frac{10\text{ մ արժեքը}}{4\text{ մ արժեքը}}=\frac{10\text{ մ}}{4\text{ մ}}\left(=2\frac{1}{2}\right):$$

Այսպիսով, յերբ յերկու մեծություններ ուղիղ համեմատական են, ապա առաջին մեծության վորեվե յերկու արժեքների հարաբերությունը հավասար է յերկրորդ մեծության համապատասխան արժեքների հարաբերությանը:

203. ԽՆԴԻՐ. 8 մ մահուդն արժե 960 ռուբլի. ի՞նչ արժե նույն մահուդի 15 մ:

1) Լուծում միավորի բերելու յեղանակով:

Մահուդի արժեքը համեմատական է նրա մետրների թվին, դրա համար 1 մ արժե 8 անգամ քիչ, քան 8 մ, իսկ 15 մ արժե 15 անգամ ավելի, քան 1 մ, ուստի

8 մ արժե 960 ռուբլի,

ուրեմն,

$$1\text{ մ արժե } \frac{960}{8}\,(=120\text{ ռուբլի}),$$

$$15\text{ մ արժե } \frac{960}{8}\cdot 15\,(=1800\text{ ռուբլի}):$$

Այն յեղանակը, վորով լուծեցինք այս խնդիրը, կոչվում է **միավորի բերման յեղանակ**, *քանի վոր 15 մ մահուդի արժեքը գտնելու համար նախ գտանք 1 մետրի արժեքը:*

2) Խնդրի լուծումը համեմատության միջոցով:

15 մ մահուդի արժեքը նշանակելով x-ով, ըստ § 202-ի կանոնի, կունենանք՝

$$x : 960 = 15 : 8$$

համեմատությունը, վորտեղից

$$x=\frac{960\cdot 15}{8}=1800\ (\text{ռուբլի}):$$

204. *ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ԿԱԽՄԱՆ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԱՆԱՁԵՎՈՎ.* *Դիցուք, ունենք A և B յերկու վորևե համեմատական մեծություններ և յենթադրենք, վոր յերբ A մեծությունը հավասար է մեկ միավորի (այդ տեսակի մեծության), ապա B մյուս մեծությունը հավասարվում է k միավորի (մյուս տեսակի մեծության): Յեթե այժմ ընդունենք, վոր A մեծությունը կստանա վորևե արժեք x միավորների, այն ժամանակ B մեծության արժեքն արդեն վոչ թե k միավոր կլինի, այլ վորևե ուրիշ թիվ, վորը կնշանակենք y-ով: Պարզության համար այդ արտահայտենք այսպիսի աղյուսակով.*

A	B
1	k
x	y

Քանի վոր ըստ պայմանի A և B մեծությունները համեմատական են, ապա 1:x հարաբերությունը պետք է հավասար լինի k:y հարաբերությանը: Հետևապես, կարող ենք գրել

$$1:x=k:y$$

համեմատությունը, վորից կգտնենք

$$y=kx.$$

Այս բանաձևով հեշտությամբ կարող ենք գտնել վորևե x արժեքին համապատասխանող y թիվը, յեթե միայն հայտնի յե k-ն: Յեթե, օրինակ,

$x=1, 2, 3, 4, 4\frac{1}{2}, 9\frac{3}{4}, \ldots$ և այլն, ապա y-ի համապատասխանաբար հավասար կլինի k, 2k, 3k, 4k, $4\frac{1}{2}k$, $9\frac{3}{4}k$ և այլն։

Այսպիսով․

յեթե յերկու մեծություններ համեմատական են, ապա նրանց միջև յեղած կախումը կարելի յե արտահայտել $y=kx$ բանաձևով, վորտեղ y-ը յեվ x-ը փոփոխական թվեր են, վորոնք արտահայտում են վերցրած մեծությունների իրար համապատասխանող արժեքները, իսկ k—հաստատուն թիվ է, վորը հավասար է y-ի այն մասնավոր արժեքին, վորը համապատասխանում է $x=1$ արժեքին։ Ընդունված է այդ թիվն անվանել y-ի համեմատականության գործակից x-ի նկատմամբ։

Օրինակ, այդ բանաձևը կիրառելով մեր խնդրի նկատմամբ (§ 206), կարող ենք գրել՝

$$\text{մահուդի արժեքը} = k \times \text{մահուդի քանակը},$$

վորտեղ k-ն այն արժեքի մեծությունն է, յերբ մահուդի քանակը հավասար է միավորի։ Ուրեմն, յեթե արժեքն արտահայտված է ռուբլիներով, իսկ քանակը մետրերով, ապա k-ն 1 մետրի արժեքն է (120 ռուբլի)։

205. *ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ Քննարկենք մի այսպիսի խնդիր․* 6 բանվոր մի աշխատանք վերջացնում են 18 որում․ Նույն աշխատանքը քանի՞ որում կվերջացնեն 9 բանվոր, յեթե աշխատեն առաջինների նման։

Այս խնդրում նույնպես խոսվում է յերկու մեծությունների մասին՝ բանվորների քանակի և նրանց աշխատանքի տևողության մասին։ Այդ մեծությունները կախումն ունեն իրարից, վորովհետև մեկի փոփոխությամբ փոփոխվում է և մյուսը։ Բայց այս կախումը § 203-ում նշածից տարբեր է։

Այնտեղ մի մեծությունն 2, 3, և այլն անգամ մեծացնելիս նույնքան անգամ մեծանում եր մյուս մեծությունը։ Իսկ այստեղ, յեթե բանվորների թիվը յերկու անգամ մեծացնենք, աշխատանքի տևողությունը կփոքրանա յերկու անգամ․ ընդհակառակը, յեթե, որինակ, բանվորների թիվը յերեք անգամ փոքրացնենք, ապա տված աշխատանքի տևողությունը, ակնհայտաբար, յերեք անգամ կմեծանա։

Յեթե յերկու մեծություններից մեկը մի քանի անգամ մեծացնելիս (փոքրացնելիս) մյուսը նույնքան անգամ փոքրանում (մեծանում) է, ապա յերկու այդպիսի մեծությունները կոչվում են հակադարձ համեմատական։

Այսպես, բանվորների թիվը և տվյալ աշխատանքի տևողությունը հակադարձ համեմատական մեծություններ են։

Ճիշտ նույն ձևով

ապրանքի քաշը, վորը կարելի յե գնել տված գումարի դրամով (օրինակ, 100 ռուբլով), հակադարձ համեմատական է այդ ապրանքի մեկ միավոր քաշի արժեքին․

այն ժամանակամիջոցը, վորի ընթացքում տվյալ ճանապարհն անցնում է հավասարաչափ շարժվող մարմինը, հակադարձ համեմատական է շարժման արագությանը․

անփոփոխ համարիչի դեպքում կոտորակի մեծությունը հակադարձ համեմատական է նրա հայտարարին և այլն։

Յեթե մի բրիգադում 6 բանվոր է, իսկ մյուսում՝ 9 բանվոր, այսինքն, առաջինից $\frac{9}{6}=1\frac{1}{2}$ անգամ ավելի, ապա յերկրորդ բրիգադը նույն աշխատանքը $1\frac{1}{2}$ անգամ արագ կկատարի, քան առաջինը, այսինքն

$$\frac{\text{1-ին բրիգադի աշխատանքի տևողությունը}}{\text{2-րդ բրիգադի աշխատանքի տևողությունը}} = \frac{\text{2-րդ բրիգադի բանվորների թիվը}}{\text{1-ին բրիգադի բանվորների թիվը}} \left(=1\frac{1}{2}\right)։$$

Այսպիսով, յեթե յերկու մեծություններ հակադարձ համեմատական են, ապա առաջին մեծության վորևե յերկու արժեքների հարաբերությունը հավասար է յերկրորդ մեծության համապատասխան արժեքների հակադարձ հարաբերությանը։

206. *Այժմ լուծենք § 205-ում տված խնդիրը։*

1) Լուծում միավորի բերելու յեղանակով։

Որերի թիվը հակադարձ համեմատական է բանվորների թվին, այդ պատճառով 1 մարդը աշխատանքը կվերջացնի 6 անգամ ավելի շատ որերում, քան 6 մարդը, իսկ 9 մարդն այդ աշխատանքը կվերջացնի 9 անգամ ավելի քիչ որում, քան վերջացնում է 1 մարդը։ Բայց 6 մարդն այդ աշխատանքը կվերջացնի 18 որում, ուրեմն, 1 մարդն այն կվերջացնի 18·6(=108 օրում), իսկ 9 մարդը նույն աշխատանքը կվերջացնի $\frac{18 \cdot 6}{9} = 12$ (օրում)։

2) Լուծում համեմատության միջոցով։ Այն անհայտ օրերի թիվը, որի ընթացքում 9 բանվորը կվերջացնի աշխատանքը, նշանակելով x-ով, ըստ § 205-ում նշած կանոնի, կունենանք՝

$$\frac{18}{x} = \frac{9}{6}$$

համեմատությունը, որտեղից

$$x = \frac{18 \cdot 6}{9} = 12\ (\text{օր})։$$

Դիտողություն։ Երկու իրարից կախումն ունեցող մեծությունները համեմատական (ուղիղ կամ հակադարձ) լինելու համար, բավական չէ որ միայն մեկի մեծացման հետ մյուսն էլ մեծանա (ուղիղ համեմատականության դեպքում), կամ մեկի մեծացման հետ մյուսը փոքրանա (հակադարձ համեմատականության դեպքում)։ Օրինակ, եթե գումարելիներից որևէ մեկը մեծանա, ապա գումարն էլ կմեծանա, սակայն սխալ կլիներ ասել, որ գումարն ուղիղ համեմատական է գումարելիին, որովհետև եթե գումարելին մեծացնենք, ասենք, 3 անգամ, ապա, թեպետ գումարը կմեծանա, սակայն ոչ 3 անգամ։ Նույն ձևով, օրինակ, չի կարելի ասել, որ երկու թվերի տարբերությունը հակադարձ համեմատական է հանելիին, քանի որ, եթե հանելին մեծանա, դիցուք, 2 անգամ, ապա, թեպետ տարբերությունը կփոքրանա, սակայն ոչ 2 անգամ։ Համեմատականության համար պետք է, որ երկու մեծությունների մեծացումը և փոքրացումը կատարվի միևնույն թիվ անգամ։

207. Հակադարձ համեմատականության արտահայտությունը բանաձևով։ Դիցուք, A-ն և B-ն որևէ երկու հակադարձ համեմատական մեծություններ են և ենթադրենք, որ երբ A-ն հավասար է միավորի (այդ մեծության), մյուս մեծությունը՝ B-ն հավասար կլինի k միավորների (այդ մյուս մեծության)։ Եթե, դիցուք, A մեծությունը միավորի փոխարեն կընդունի x միավորների այլ արժեք, այն ժամանակ B մեծությունը, նախկին արժեքի (k միավորների) փոխարեն, կընդունի որևէ y արժեք։

Պարզության համար այդ գրենք աղյուսակի ձևով՝

$$\begin{array}{c|c} A & B \\ 1 & \\ x & \end{array}$$

Քանի որ A և B մեծություններն ըստ պայմանի հակադարձ համեմատական են, ապա 1:x հարաբերությունը հավասար է k:y հարաբերության հակադարձ մեծությանը, այսինքն՝ y:k հարաբերությանը։ Այդ պատճառով կարող ենք գրել՝

$$1 : x = y : k$$

համեմատությունը, որտեղից կգտնենք, որ

$$y = \frac{k}{x}\ (\text{կամ}\ xy = k)։$$

Այսպիսով՝

եթե երկու մեծություններ հակադարձ համեմատական են, ապա նրանց միջև եղած կախումը կարելի է արտահայտել $y = \frac{k}{x}$ բանաձևով (կամ, այլ կերպ, $xy = k$ բանաձևով), որտեղ x-ը և y-ը այդ մեծությունների իրար համապատասխանող որևէ արժեքներն են, իսկ k-ն հաստատուն թիվ է և հավասար է y-ի արժեքին, երբ $x = 1$։

Ըստ այդ բանաձևի կարող ենք հաշվել x-ի ամեն մի տվյալ արժեքին համապատասխանող y-ի մեծությունը, եթե միայն հայտնի է k թիվը։ Այսպես, եթե $x = 1, 2, 3, 4, 4\frac{1}{2}, \ldots$ և այլն,

$$\text{ապա}\ y = k, \frac{k}{2}, \frac{k}{3}, \frac{k}{4}, \frac{k}{4\frac{1}{2}} \ldots\ \text{և այլն։}$$

Աշխատանքի տևողության վերաբերյալ մեր խնդրի համար (§ 205) k հաստատուն թիվը մեկ բանվորին համապատասխանող օրերի թիվն է (108 օր). այն ժամանակ 2 բանվորը աշխատանքը կվերջացնի $\frac{108}{2} = 54$ (օրում), 3 (բանվորը) $\frac{108}{3} = 36$ (օրում) և այլն։

208. ԽՆԴՐԻ ՕՐԻՆԱԿ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ, ԵՐԲ ԱՅԴ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԵՐԿՈՒՍԻՑ ԱՎԵԼԻ ԵՆ։

Խնդիր։ 5 միանման կերոսինկա 24 օր օրական 6 ժամ վառելով ծախսվեց 120 լ կերոսին։ Քանի՞ օր կբավականացնի 216 լ կերոսինը, եթե 9 այդպիսի կերոսինկա վառվի օրական 8 ժամ։

Այս խնդրի տվյալները դասավորենք այսպես.

120 լ. — 5 կերոսինկա — 6 ժամ — 24 օր
216 լ. — 9 կերոսինկա — 8 ժամ — x օր

Տեսնում ենք, որ նոր պայմաններում և ունեցած կերոսինի քանակը, և կերոսինկաների թիվը, և նրանց ամենօրյա վառվելու ժամերի թիվը փոխված են. այս բոլոր փոփոխությունների ազդեցությունը միանգամից հաշվելը դժվար է. ուստի, նախ կընդունենք, որ փոփոխվում է տված թվերից որևէ մեկը, օրինակ, կերոսինի քանակը, իսկ մյուսները մնում են անփոփոխ։ Ստանում ենք այսպիսի խնդիր. քանի՞ օր կբավականացնի 216 լ կերոսինը, յեթե նույն 5 կերոսինկաները առաջվա պես օրական վառվեն 6 ժամ։ Յեթե այդ պայմաններում 120 լ բավականացնում է 24 օր, ապա 216 լ կբավականացնի $\frac{24 \cdot 216}{120}$ օր, քանի որ օրերի թիվը, ակնհայտ է, ուղիղ համեմատական է վառվող կերոսինի քանակին։ Այժմ արդեն կարող ենք գրանցել այսպես. 216 լ—5 կերոսինկա—6 ժամ—$\frac{24.216}{120}$ օր։

Այժմ կփոխենք կերոսինկաների թիվը, անփոփոխ թողնելով ունեցած կերոսինի քանակը (216 լ) և օրական վառվելու ժամանակամիջոցը (6 ժամ)։ Ակնհայտ է, որ յեթե 5 կերոսինկայի փոխարեն վառվի մեկը, ապա կերոսինի նույն պաշարն օրական նույնքան ժամանակ վառվելով կբավականացնի 5 անգամ ավելի յերկար ժամանակ, իսկ յեթե մեկ կերոսինկայի փոխարեն վառվի 9-ը, ապա յեղած կերոսինը կբավականացնի 9 անգամ ավելի քիչ ժամանակ (օրերի թիվը հակադարձ համեմատական է կերոսինկաների թվին). ուստի, կարող ենք գրանցել այսպես.

216 լ—9 կերոսինկա—6 ժամ — $\frac{24 \cdot 216 \cdot 5}{120 \cdot 9}$ օր։

Մեզ մնում է փոխել օրական վառվելու ժամերի թիվը։ Պարզ է, որ յեթե կերոսինի տված պաշարը և կերոսինկաների թիվը մնա նախկինը, ապա օրերի թիվը կմեծանա (կփոքրանա) այնքան անգամ, որքան անգամ փոքրացնենք (մեծացնենք) օրական վառվելու ժամերի թիվը. այլ խոսքով, վառվելու օրերի

թիվը և օրական վառվելու ժամերի թիվը հակադարձ համեմատական են։ Այդ պատճառով, օրական 6 ժամի փոխարեն 8 ժամ վառելով, պետք է վերջին գրանցման մեջ ստացած օրերի թիվը բազմապատկենք 6-ով և բաժանենք 8-ի վրա։ Ահա դրա գրանցումը.

216 լ— 9 կերոսինկա — 8 ժամ — $\frac{24 \cdot 216 \cdot 5 \cdot 6}{120 \cdot 9 \cdot 8}$ օր.

այսպիսով.

$$x = \frac{24 \cdot 216 \cdot 5 \cdot 6}{120 \cdot 9 \cdot 8} = 18 \text{ (օր)}։$$

Ը. ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ԲԱԺԱՆՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

209. 1-ին ԽՆԴԻՐ։ 84-ը բաժանել 3 մասի՝ համեմատական 7, 5 և 2 թվերի շարքին։

Դա պետք է հասկանալ այսպես. 84-ը բաժանել յերեք այնպիսի մասերի, որ առաջին մասը հարաբերի 7-ին այնպես, ինչպես յերկրորդը՝ 5-ին և ինչպես յերրորդը՝ 2-ին։

Վորոնելի մասերը տառերով անվանենք x_1, x_2, x_3։ Խնդրում պահանջվում է, որ այդ մասերը բավարարեն հետևյալ համեմատությունններին.

$$\frac{x_1}{7} = \frac{x_2}{5} = \frac{x_3}{2}։$$

Ոգտվելով հավասար հարաբերությունների հատկությունից (§ 201), գտնում ենք.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{7 + 5 + 2} = \frac{x_1}{7} = \frac{x_2}{5} = \frac{x_3}{2},$$

Բայց $x_1 + x_2 + x_3 = 84$ և $7 + 5 + 2 = 14$, ուստի, նախորդ տողը կարող ենք արտագրել այսպես.

$$\frac{84}{14} = \frac{x_1}{7}; \quad \frac{84}{14} = \frac{x_2}{5}; \quad \frac{84}{14} = \frac{x_3}{2}։$$

Այստեղից յեզրակացնում ենք.

$$x_1 = \frac{84}{14} \cdot 7 = 42; \; x_2 = \frac{84}{14} \cdot 5 = 30; \; x_3 = \frac{84}{14} \cdot 2 = 12,$$

այսինքն հանգում ենք հետևյալ կանոնին.

ԿԱՆՈՆ։ Թիվը տված թվերին համեմատական մասերի բաժանելու համար՝ պետք է այդ թիվը բաժանել տված թվերի գումարի վրա յեվ քանորդը հաջորդաբար բազմապատկել տված թվերից յուրաքանչյուրով։

210. 2-րդ ԽՆԴԻՐ։ 968-ը բաժանել 4 մասի՝ համեմատական $1\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}$ թվերին։

Նախ և առաջ տված կոտորակային թվերի շարքը կփոխարինենք ամբողջ թվերի շարքով։ Դրա համար բոլոր կոտորակները կբերենք ընդհանուր հայտարարի և խառը կոտորակը կդարձնենք անկանոն կոտորակ.

$$1\frac{1}{2}=\frac{60}{40};\quad \frac{3}{4}=\frac{30}{40};\quad \frac{2}{5}=\frac{16}{40};\quad \frac{3}{8}=\frac{15}{40},$$

Վորոնելի թվերը նշանակելով x_1, x_2, x_3, x_4 *կստանանք.*

$$\frac{x_1}{\frac{60}{40}}=\frac{x_2}{\frac{30}{40}}=\frac{x_3}{\frac{16}{40}}=\frac{x_4}{\frac{15}{40}},$$

կամ, բոլոր չորս հարաբերությունները փոքրացնելով 40 անգամ (հետևորդ անդամների հայտարարները՝ 40-ը վերացնելով)

$$\frac{x_1}{60}=\frac{x_2}{30}=\frac{x_3}{16}=\frac{x_4}{15},$$

վորից հետո խնդիրը լուծվում է, ինչպես 1-ին խնդիրը։

Ծանոթություն. *2-րդ խնդիրը կարելի յե լուծել և ուղղակի, 1-ին խնդրում նշված կանոնի համաձայն, սակայն հաշվումները հեշտացնելու համար ավելի հարմար է նախ հարաբերությունների հետևորդ անդամները փոխարինել ամբողջ թվերով, ինչպես այդ արված է բնագրում։*

211. ԽՆԴԻՐ 3։ 125-ը բաժանել 4 այնպիսի մասերի, վոր առաջին մասը հարաբերի յերկրորդ մասին, ինչպես 2 : 3, յերկրորդը յերրորդին, ինչպես 3 : 5, իսկ յերրորդը չորրորդին, ինչպես 5 : 6։

Վորոնելի մասերը նշանակելով x_1, x_2, x_3, x_4, *ստանում ենք.*

$$x_1 : x_2 = 2 : 3,\quad x_2 : x_3 = 3 : 5,\quad x_3 : x_4 = 5 : 6.$$

այս համեմատությունների միջին անդամները տեղափոխելով ստանում ենք.

$$x_1 : 2 = x_2 : 3,\quad x_2 : 3 = x_3 : 5,\quad x_3 : 5 = x_4 : 6,$$

կամ

$$\frac{x_1}{2}=\frac{x_2}{3}=\frac{x_3}{5}=\frac{x_4}{6},$$

վորից հետո խնդիրը լուծվում է 1-ին խնդրի նման։

212. 4-րդ ԽՆԴԻՐ։ 125-ը բաժանել 4 այնպիսի մասերի, վոր առաջին մասը հարաբերի յերկրորդին, ինչպես 2 : 3, յերկրորդը յերրորդին, ինչպես 4 : 5, իսկ յերրորդը չորրորդին, ինչպես 6 : 11։

Այս խնդիրն իր տեսքով նման է 3-րդ խնդրին. սակայն այս խնդիրների մեջ կա էական տարբերություն։ 3-րդ խնդրի մեջ 2 : 3, 3 : 5, 5 : 6 հարաբերություններն այնպիսին են, վոր առաջինի հետևորդ անդամը հավասար է յերկրորդի նախորդ անդամին, իսկ յերկրորդի հետևորդ անդամը հավասար է յերրորդի նախորդ անդամին։ Դրա հետևանքով կարելի յե տեսել, վոր առաջին խնդրում պահանջվում է 125-ը բաժանել 4 մասի՝ համեմատական 2, 3, 5, 6 թվերին։ Ուրեմն, այս խնդիրը վոչնչով չի տարբերվում 1-ին խնդրից։

Չորրորդ խնդրի մեջ 2 : 3, 4 : 5 և 6 : 11 հարաբերությունները այնպիսին են, վոր նրանցից մեկի հետևորդ անդամը հավասար չէ մյուսի նախորդ անդամին։ Սակայն այս դեպքն էլ կարելի յե լուծել դատողությամբ, նախորդ խնդրի նման։

Վորոնելի մասերը նշանակելով x_1, x_2, x_3, x_4 *տառերով՝ կարող ենք գրել հետևյալ յերեք համեմատությունները.*

$$x_1 : x_2 = 2 : 3,\quad x_2 : x_3 = 4 : 5,\quad x_3 : x_4 = 6 : 11.$$

Այս համեմատությունների միջին անդամները տեղափոխելով, կստանանք.

$$x_1 : 2 = x_2 : 3, \qquad (1)$$
$$x_2 : 4 = x_3 : 5, \qquad (2)$$
$$x_3 : 6 = x_4 : 11; \qquad (3)$$

(2) համեմատությունից ստանում ենք՝

$$x_2 = \frac{4 \cdot x_3}{5},$$

որտեղից

$$\frac{x_2}{3}=\frac{4x_3}{5\cdot3}=\frac{x_3}{\frac{15}{4}},$$

Այնուհետև (3) համեմատությունից գտնում ենք՝

$$x_3=\frac{6\cdot x_4}{11},$$

որտեղից

$$\frac{x_3}{\frac{15}{4}}=\frac{6x_4}{11\cdot\frac{15}{4}}=\frac{x_4}{\frac{55}{8}},$$

այսպիսով,

$$\frac{x_1}{2}=\frac{x_2}{3}=\frac{x_3}{\frac{15}{4}}=\frac{x_4}{\frac{55}{8}},$$

որից հետո խնդիրը լուծվում է 2-րդ խնդրի ձևով։

213. 5-րդ ԽՆԴԻՐ։ Տված a թիվը բաժանել m, n, և p թվերին հակադարձ համեմատական մասերի։

Այդ նշանակում է, որ պահանջվում է տված a թիվը բաժանել այնպիսի մասերի, որոնք ուղիղ համեմատական են m, n և p թվերի հակադարձ մեծություններին, *այսինքն, ուղիղ համեմատական են $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$ և $\frac{1}{p}$ թվերին։ Որոնելի մասերը նշանակելով* x_1, x_2 *և* x_3 *կունենանք՝*

$$x_1:\frac{1}{m}=x_2:\frac{1}{n}=x_3:\frac{1}{p},$$

այստեղից

$$x_1:x_2=\frac{1}{m}:\frac{1}{n}=n:m,$$

$$x_2:x_3=\frac{1}{n}:\frac{1}{p}=p:n,$$

այսինքն՝ եթե x_1, x_2 և x_3 թվերը հակադարձ համեմատական են m, n, p թվերին, ապա $x_1:x_2$ հարաբերությունը հավասար է $n:m$ հարաբերությանը (և ոչ թե $m:n$, ինչպես ուղիղ համեմատա-

կանության ժամանակ), ճիշտ նույնպես $x_2:x_3$ հարաբերությունը հավասար է $p:n$ հարաբերության (և ոչ թե $n:p$ հարաբերության, ինչպես ուղիղ համեմատականության ժամանակ)։

214. *ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ԲԱԺԱՆՄԱՆ ԱՎԵԼԻ ԲԱՐԴ ԽՆԴԻՐ. ՄԻ ՕՐԻՆԱԿ.* Ձեռագիրն արտատպելու համար վճարվեց 123 ռուբլի։ Արտատպեցին երեք մեքենագրուհի, որոնցից առաջինը աշխատեց 8 ժամ, մի ժամում արտատպելով 6-ական էջ. երկրորդն աշխատեց 6 ժամ, մի ժամում արտատպելով 10-ական էջ, երրորդն աշխատեց 7 ժամ, մի ժամում արտատպելով 8-ական էջ։ Ինչքա՞ն վաստակեց յուրաքանչյուր մեքենագրուհին։

Եթե բոլոր երեք մեքենագրուհիների աշխատանքի արտադրողականությունը միահավասար լիներ, ապա վաստակած գումարը պետք էր համեմատական չափով բաշխել ըստ աշխատանքի ժամանակի։ Մյուս կողմից, եթե նրանք բոլորն էլ աշխատեին հավասար թվով ժամեր, ապա աշխատավարձը պետք էր բաշխել համեմատական նրանց աշխատանքի արտադրողականության։ Բայց բոլոր երեք մեքենագրուհիների թե աշխատանքի ժամանակը և թե աշխատանքի արտադրողականությունը տարբեր են։ Այդ պատճառով այս խնդիրը լուծելու համար դատում ենք այսպես. Առաջին մեքենագրուհին աշխատելով 8 ժամ՝ մի ժամում արտատպեց 6 էջ, հետևապես ընդամենը արտատպեց 6.8 (էջ), ճիշտ նույնպես երկրորդն արտատպեց 10.6 (էջ) և երրորդը 8.7 (էջ)։ Ուստի, աշխատավարձի ընդհանուր գումարը, այսինքն 123 ռուբլին, պետք է բաժանել 6.8, 10.6 և 8.7 արտադրյալներին համեմատական, այսինքն 48, 60 և 56 թվերին, կամ կրճատումից հետո, 12, 15, 14 թվերին համեմատական մասերի։ Որոնելի թվերը նշանակելով x_1, x_2, x_3, *գտնում ենք.*

$$x_1=\frac{123\cdot12}{12+15+14}=\frac{123\cdot12}{41}=3\cdot12=36 \text{ (ռուբլի)}$$

$$x_2=\frac{123\cdot15}{41}=3.15=45 \text{ (ռուբլի)}$$

$$x_3=\frac{123.14}{41}=3\cdot14=42 \text{ (ռուբլի)}$$

2	241	571	919	1289	1663	2081	2467	2879	3329	3733
3	251	577	929	1291	1667	2083	2473	2887	3331	3739
5	257	587	937	1297	1669	2087	2477	2897	3343	3761
7	263	593	941	1301	1693	2089	2503	2903	3347	3767
11	269	599	947	1303	1697	2099	2521	2909	3359	3769
13	271	601	953	1307	1699	2111	2531	2917	3361	3779
17	277	607	967	1319	1709	2113	2539	2927	3371	3793
19	281	613	971	1321	1721	2129	2543	2939	3373	3797
23	283	617	977	1327	1723	2131	2549	2953	3389	3803
29	293	619	983	1361	1733	2137	2551	2957	3391	3821
31	307	631	991	1367	1741	2141	2557	2963	3407	3823
37	311	641	997	1373	1747	2143	2579	2969	3413	3833
41	313	643	1009	1381	1753	2153	2591	2971	3433	3847
43	317	647	1013	1399	1759	2161	2593	2999	3449	3851
47	331	653	1019	1409	1777	2179	2609	3001	3457	3853
53	337	659	1021	1423	1783	2203	2617	3011	3461	3863
59	347	661	1031	1427	1787	2207	2621	3019	3463	3877
61	349	673	1033	1429	1789	2213	2633	3023	3467	3881
67	353	677	1039	1433	1801	2221	2647	3037	3469	3889
71	359	683	1049	1439	1811	2237	2657	3041	3491	3907
73	367	691	1051	1447	1823	2239	2659	3049	3499	3911
79	373	701	1061	1451	1831	2243	2663	3061	3511	3917
83	379	709	1063	1453	1847	2251	2671	3067	3517	3919
89	383	719	1069	1459	1861	2267	2677	3079	3527	3923
97	389	727	1087	1471	1867	2269	2683	3083	3529	3929
101	397	733	1091	1481	1871	2273	2687	3089	3533	3931
103	401	739	1093	1483	1873	2281	2689	3109	3539	3943
107	409	743	1097	1487	1877	2287	2693	3119	3541	3947
109	419	751	1103	1489	1879	2293	2699	3121	3547	3967
113	421	757	1109	1493	1889	2297	2707	3137	3557	3989
127	431	761	1117	1499	1901	2309	2711	3163	3559	4001
131	433	769	1123	1511	1907	2311	2713	3167	3571	4003
137	439	773	1129	1523	1913	2333	2719	3169	3581	4007
139	443	787	1151	1531	1931	2339	2729	3181	3583	4013
149	449	797	1153	1543	1933	2341	2731	3187	3593	4019
151	457	809	1163	1549	1949	2347	2741	3191	3607	4021
157	461	811	1171	1553	1951	2351	2749	3203	3613	4027
163	463	821	1181	1559	1973	2357	2753	3209	3617	4049
167	467	823	1187	1567	1979	2371	2767	3217	3623	4051
173	479	827	1193	1571	1987	2377	2777	3221	3631	4057
179	487	829	1201	1579	1993	2381	2789	3229	3637	4073
181	491	839	1213	1583	1997	2383	2791	3251	3643	4079
191	499	853	1217	1597	1999	2389	2797	3253	3659	4091
193	503	857	1223	1601	2003	2393	2801	3257	3671	4093
197	509	859	1229	1607	2011	2399	2803	3259	3673	4099
199	521	863	1231	1609	2017	2411	2819	3271	3677	4111
211	523	877	1237	1613	2027	2417	2833	3299	3691	4127
223	541	881	1249	1619	2029	2423	2837	3301	3697	4129
227	547	883	1259	1621	2039	2437	2843	3307	3701	4133
229	557	887	1277	1627	2053	2441	2851	3313	3709	4139
233	563	907	1279	1637	2063	2447	2857	3319	3719	4153
239	569	911	1283	1657	2069	2459	2861	3323	3727	4157

4159	4339	4517	4679	4877	5021	5209	5407	5557	5717	5869
4177	4349	4519	4691	4889	5023	5227	5413	5563	5737	5879
4201	4357	4523	4703	4903	5039	5231	5417	5569	5741	5881
4211	4363	4547	4721	4909	5051	5233	5419	5573	5743	5897
4217	4373	4549	4723	4919	5059	5237	5431	5581	5749	5903
4219	4391	4561	4729	4931	5077	5261	5437	5591	5779	5923
4229	4397	4567	4733	4933	5081	5273	5441	5623	5783	5927
4231	4409	4583	4751	4937	5087	5279	5443	5639	5791	5939
4241	4421	4591	4759	4943	5099	5281	5449	5641	5801	5953
4243	4423	4597	4783	4951	5101	5297	5471	5647	5807	5981
4253	4441	4603	4787	4957	5107	5303	5477	5651	5813	5987
4259	4447	4621	4789	4967	5113	5309	5479	5653	5821	
4261	4451	4637	4793	4969	5119	5323	5483	5657	5827	
4271	4457	4639	4799	4973	5147	5333	5501	5659	5839	
4273	4463	4643	4801	4987	5153	5347	5503	5669	5843	
4283	4481	4649	4813	4993	5167	5351	5507	5683	5849	
4289	4483	4651	4817	4999	5171	5381	5519	5689	5851	
4297	4493	4657	4831	5003	5179	5387	5521	5693	5857	
4327	4507	4663	4861	5009	5189	5393	5527	5701	5861	
4337	4513	4673	4871	5011	5197	5399	5531	5711	5867	

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Թարգմ. և պատ. խմբագիր՝ Ցոլակ Աբաջյան
Լեզվական խմբագիր՝ Արշ. Շավարշյան
Տեխ. խմբագիր՝ Ի. Վարդանյան
Սրբագրիչ՝ Հ. Մանուկյան
Կոնտրոլ սրբագրիչ՝ Եվ. Տ.—Մինասյան

Գլավլիտի լիազոր՝ Ա-4106 Հրատ. 4686.
Պատվեր 581. Տիրաժ 40,000.
Թուղթ 62×94 Տպագր. $13^1/_2$ մամ.
Մեկ մամ. 36,480 նշան.
Հանձնված է արտադրության 8 հուլիսի 1938 թ.
Ստորագրված է տպագրության 25 նոյեմբերի 1938 թ.

Պետհրատի I տպարան, Երևան, Լենինի 65

200

ՀՀ Ազգային գրադարան

NL0936738

7 МАР 1939

117

II
28723

Գինը 1 ռ. 70 կոպ.
Կազմը 50 կոպ.

А. КИСЕЛЕВ
Арифметика
Учебник для 5 кл. неполной
средн. и полной средн. школы
Гиз Арм. ССР, Ереван, 1938 г.