2409

Ա. ԿԻՍԵԼՅՈՎ

ԹՎԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

ԴԱՍԱԳԻՐՔ
ՎՈՉ ԼՐԻՎ ՄԻՋՆԱԿԱՐԳ ՅԵՎ ՄԻՋՆԱԿԱՐԳ
ԴՊՐՈՑԻ 5-ՐԴ ԴԱՍԱՐԱՆԻ ՀԱՄԱՐ

511(075)
Կ-51

ՊԵՏԱԿԱՆ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ՅԵՐԵՎԱՆ 1939

511(075)
Կ-51
2 SEP 2006
20 MAY 2010

Ա. ԿԻՍԵԼՅՈՎ

ոչ.

ԹՎԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

ԴԱՍԱԳԻՐՔ
ՎՈՉ ԼՐԻՎ ՄԻՋՆԱԿԱՐԳ ՅԵՎ ՄԻՋՆԱԿԱՐԳ
ԴՊՐՈՑԻ 5-ՐԴ ԴԱՍԱՐԱՆԻ ՀԱՄԱՐ

Վերամշակումը պրոֆ. Ա. ՅԱ. Խինչինի

ԲՆԱԳԻՐԸ ՀԱՍՏԱՏՎԱԾ Է ՌՍՖՍՀ ԼՈՒՍԺՈՂԿՈՄԱՏԻ ԿՈՂՄԻՑ

Յերկրորդ հրատարակություն

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ
ՊԵՏՀՐԱՏ

ՊԵՏԱԿԱՆ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ՅԵՐԵՎԱՆ 1939

20 MAY 2013

2409

5003
39

А. КИСЕЛЕВ

АРИФМЕТИКА

Учебник для 5-го кл. неполной средней и полной средн. школы

Гиз. Арм. ССР, Ереван 1939 г.

ՎԵՐԱՄՇԱԿՈՂ ՀԵՂԻՆԱԿԻ ԱՌԱՋԱԲԱՆԸ

Այն բոլոր դժվար հարցերը, վորոնք հանդես են գալիս յուրաքանչյուր դասագիրք կազմողի առջև, իրենց բավարար լուծման համար նախ և առաջ պահանջում են միասնական սկզբունքային դրվածք։ Ա. Պ. Կիսելյովի Թվաբանության դասընթացը վերամշակելիս յես յելակետ եմ ունեցել այն սկզբունքը, վոր յուրաքանչյուր դասագիրք, թեկուզ դա լինի միջնակարգ դպրոցի 5-րդ դասարանի համար, պետք է հանդիսանա տրամաբանորեն սիստեմավորված մի միասնական ամբողջություն։ Այդ սկզբունքի կիրառումը պետք է թողներ և թողեց վճռական ազդեցություն նյութի ընտրության և դասավորության վրա։

Նյութի ընտրության տեսակետից յես հնարավոր չհամարեցի սահմանափակվել լոկ նրանով, ինչ կարող է և պետք է յուրացնի 5-րդ դասարանի յուրաքանչյուր աշակերտ։ Տրամաբանական ամբողջականության պահանջն ստիպեց դասագրքի մեջ մտցնել և այնպիսի նյութեր, վորոնք, վորպես կանոն, պատշաճ ձևով կարող են յուրացնել միայն բարձր դասարանների սովորողները, դասընթացը կրկնելիս։ Այդ տեսակի ամբողջ նյութը դրված է մանր տառերով, և դասագրքի կառուցվածքն այնպես է, վոր մանր տառերով շարվածները կարելի յե բաց թողնել, առանց վնասելու հետագա նյութը հասկանալուն։ Յես չեմ կամենում ուսուցչին խորհուրդ տալ, վոր նա առանց յերկար մտածելու բաց թողնի բոլոր մանր տառերով տպվածները. այստեղ անհրաժեշտ է տարբեր մոտեցում, կախված դասարանի զարգացման մակարդակից, և չի կարելի սուր գիծ անցկացնել 5-րդ դասարանի աշակերտին մատչելի և վոչ մատչելի նյութերի միջև։

Մյուս կողմից, առարկայական և տրամաբանական միաս-

նության պահանջը հարկադրեց բավականաչափ կրճատել և երբեմն բոլորովին բաց թողնել մի շարք բաժիններ, վորոնք ըստ տրադիցիայի սովորաբար մտցնում են թվաբանության դասագրքերի մեջ. այդպիսին է, որինակ, պարզ երրից կանոնի, խառնուրդի, ձուլվածքի վերաբերյալ և այլ խնդիրների տեսական քննարկումը: Տարրական թվաբանությունը ռացիոնալ թվերով կատարվող գործողությունների ուսմունքն է: Միջնակարգ դպրոցի յուրահատուկ պահանջներն ստիպում են այս սահմանումը լայնորեն հասկանալ, և թվաբանության դասընթացի մեջ մտցնել մեծությունների չափումների և համեմատական մեծությունների ուսմունքները: Սա վորոշ չափով խախտում է դասընթացի ամբողջականությունը, չառաջացնելով, սակայն, էական թերություն, վորովհետև թվաբանությանն ուղղակի միացվում է մի քանի, շատ թե քիչ չափով ավարտված, լրացուցիչ գլուխներ: Բայց այդպիսի դասընթացի մեջ գործնականում պատահող առանձին տիպերի խնդիրների լուծման յեղանակներ մտցնելը, վորոնք համախմբված չեն վոչ մի ընդհանուր տեսական հիմնավորումով, կնշանակեր գիտական ձեռնարկը վերածել «աշխատանքի գրքի»: Այդպիսի խնդիրների տեղը պետք է լինի խնդրագիրքը և վոչ թե տեսական ձեռնարկը:

Հիմնական սկզբունքի կիրառումն եյապես արտահայտվեց նաև նյութի դասավորության մեջ: Այսպես, մեծությունների չափման վերաբերյալ ուսմունքը, չափման և անվանական թվերի հասկացողությունը վորպես առանձին բաժին, բնականաբար, իր տեղը գտավ ամբողջ թվերի ուսմունքից հետո, կոտորակներից առաջ: Իհարկե, այդ չի նշանակում, վոր մանկավարժական կենդանի պրոցեսում մետրերի և կիլոմետրերի մասին պետք է առաջին անգամ հիշատակել ամբողջ թվերն անցնելուց հետո, ներառյալ թվերի բաժանելիության տեսությունը: Հասկանալի յե, վոր արդեն ամբողջ թվերի վերաբերյալ աշխատանքը կատարելիս սովորողները պետք է ծանոթանան հիմնական չափերին: Ամենևին վատ չի լինի, յեթե ամբողջ թվերն ուսումնասիրելիս սովորողները կարդան չափերին և չափումներին վերաբերող այս կամ այն հատվածը, բայց դասագիրքը, վորպես ամբողջական և սիստեմատիկ ձեռնարկ, չի կարող և չպետք է ճշտությամբ վերարտադրի մանկավարժական կենդանի պրոցեսը,

վորովհետև հենց այդ էլ նրան կիջեցներ մինչև «աշխատանքի գրքի» մակարդակը:

Գաղափարների հենց այդ կարգով յես անհրաժեշտ համարեցի դասագրքից հանել տոկոսներին վերաբերող հատուկ բաժինը: Ընդհանրապես, յես յելա այն համոզմունքից, վոր այդ բաժինը, վորը պարունակում է մաթեմատիկորեն տարբեր խնդիրներ՝ համախմբված միայն գործնական հանգամանքով, հանդիսանում եր «կոմպլեքսային» մեթոդի մնացուկներից մեկը և նրա հենց այդ բնույթն է, վոր ստեղծում եր բավականաչափ յուրահատուկ դժվարություններ տոկոսներ հաշվելու բնագավառում ունակություններ ձեռք բերելիս: Բնականաբար, սովորողների մեջ ստեղծվում եր այն պատկերացումը, վոր իբր թե տոկոսային հաշվումները, կոտորակային թվերի գործողությունների համեմատությամբ, հանդիսանում են սկզբունքորեն ինչ-վոր նոր բան. և այդ պատկերացումը դժվարացնում եր արդեն ձեռք բերած ունակությունները կիրառել ձևով նոր, բայց բովանդակությամբ վոչ մի նոր բան չներկայացնող խնդիրների նկատմամբ:

Սակայն այն ուսուցիչը, վորը կցանկանար տոկոսային հաշվումներն անցնել իբրև առանձին բաժին, լիակատար հնարավորություն ունի այդ անելու ներկա դասագրքով: Դրա համար, պետք է միայն գրքի IV և V բաժիններից առանձնացնել այն բոլոր հատվածները, վորոնք վերաբերում են տոկոսներին, և այդ հատվածները նույն կարգով, վորպես առանձին բաժին, զետեղել գրքի վերջում:

Կիսելյովի դասագրքի ամբողջ բնագիրը յենթարկված է մանրակրկիտ վերամշակման՝ գիտական պարզության և շարադրանքի մատչելիության տեսակետից: Շատ տեղերում մեջ բերված որինակները փոխարինված են նորերով, և որինակների թիվը ավելացված է: Բայց և այնպես, գրքի կառուցվածքը և վոճը հիմնականում կանխորոշված եյին նրա սկզբնական բնագրով: Վերամշակող հեղինակը չեր կարող իր առջև նպատակ դնել նոր դասագիրք ստեղծելու:

Իմ աշխատանքում ինձ խիստ եյական ոժանդակություն

ցույց է տվել միջնակարգ դպրոցի Կենտրոնական ինստիտուտի մաթեմատիկայի խմբի ամբողջ կոլեկտիվը: Մի շարք արժեքավոր խորհուրդներ տվեցին նաև Մոսկվայի ուսուցիչների ակտիվի ներկայացուցիչները: Այդ բոլոր ընկերներին հայտնում եմ իմ անկեղծ շնորհակալությունը:

Ա. ԽԻՆՉԻՆ

ԱՌԱՋԻՆ ԲԱԺԻՆ

ԱՄԲՈՂՋ ԹՎԵՐ

1. ԱՄԲՈՂՋ ԹՎԵՐ, ՆՐԱՆՑ ԱՆՎԱՆՈՒՄԸ ԵՎ ՆՇԱՆԱԿՈՒՄԸ

1. Ամբողջ թվի հասկացողությունը: Մեկ առարկա և մեկ առարկա կազմում են յերկու առարկա. յերկու առարկա և մեկ առարկա կազմում են յերեք առարկա. յերեք և մեկ կազմում են չորս և այլն: Մեկ, յերկու, յերեք, չորս և այլն կոչվում են ամբողջ թվեր:

Մեկ թիվը այլ կերպ կոչվում է միավոր: Յերկու թիվը կարելի յե դիտել վորպես յերկու միավորների հավաք (համախումբ), յերեք թիվը՝ վորպես յերեք միավորների հավաք և այլն: Այսպիսով, յուրաքանչյուր ամբողջ թիվ կամ միավոր է, կամ մի քանի միավորների հավաք:

Բացի ամբողջ թվերից, թվաբանությունն ուսումնասիրում է նաև ուրիշ թվեր: Այդ թվերին կծանոթանանք հետագայում:

Թվերի բնական շարքը: Յեթե միավորին ավելացնենք եռ մեկ միավոր, ստացված թվին ավելացնենք դարձյալ մեկ միավոր, ապա եռ մեկ միավոր և այսպես շարունակ, կստացվի թվերի բնական շարքը—մեկ, յերկու, յերեք, չորս, հինգ, վեց, յոթ և այլն:

Այդ շարքում ամենափոքր թիվը միավորն է. ամենամեծ թիվ չկա, վորովհետև յուրաքանչյուր թվի, վորքան էլ մեծ լինի նա, կարելի յե ելի միավոր ավելացնել և ստանալ ավելի մեծ թիվ: Նշանակում է՝ բնական շարքը կարելի յե շարունակել անվերջ, ուստի և ասում են, վոր թվերի բնական շարքն անվերջ է:

Յերեք թիվը ավելի փոքր է, քան հինգը, վորը բնական շարքում գտնվում է յերեքից հետո, իրոք, հինգ թիվը ստանալու համար պետք է այն յերեք միավորին, վորոնցից կազմված է յերեք թիվը, ավելացնենք եվ յերկու միավոր: Ընդհանրապես, յերկու տարբեր թվերից միշտ փոքրը կլինի այն, վորը բնական շարքում ավելի առաջ է գտնվում. իսկապես, այդ թվից յերկրորդ թիվը ստանալու համար, վորը բնական շարքում գտնըվում է ավելի հետո, պետք է առաջին թվին ավելացնենք եվ մեկ կամ մի քանի միավոր, այսինքն, մեծացնենք այն, ուստի յերկրորդ թիվը ավելի յե առաջինից:

Երկու թվերից փոքրն է այն, վորը բնական շարքում ավելի շուտ է պատահում յեվ մեծն է այն, վորը բնական շարքում ավելի ուշ է պատահում:

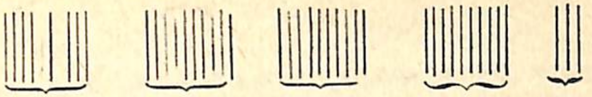
3. Համրանք: Իմանալու համար, թե դասարանում քանի սեղան կա կամ այգում քանի ծառ, մենք պետք է նրանց համրենք: Համրանքն այն է, վոր առանձնացնելով առարկաները մեկը մյուսի հետևից (իրապես կամ միայն մտքով), ամեն անգամ մենք անվանում ենք առանձնացված առարկաների թիվը: Այսպես, համրելով դասարանում յեղած սեղանները, մենք մտովին առանձնացնում ենք մի սեղանը մյուսի հետևից և ասում. մեկ, յերկու, յերեք, չորս և այլն: Յեթե վերջին սեղանն առանձնացնելիս ասացինք, որինակ, ութ, ապա նշանակում է, վոր դասարանում կա ութ սեղան, այդ դեպքում ութ թիվը հանդիսանում է համրանքի արդյունքը:

Մենք ընդունում ենք վորպես ակնհայտ ճշմարտություն այն, վոր համրանքի արդյունքը կախված չէ առարկաները համրելու կարգից: Այսպես, համրելով դասարանի սեղանները, ստանում ենք միևնույն թիվը, անկախ այն բանից, առաջին նստարաններից ենք համրելով գնում դեպի հետևի նստարանները, թե, ընդհակառակը, հետևի նստարաններից դեպի առաջինները: Կարևոր է միայն այն, վոր համրելիս վոչ մի սեղան բաց չթողնըվի և վոչ էլ յերկրորդ անգամ համրվի:

4. Թվերի անունները մինչեվ հազար: Բնական շարքի առաջին տասը թվերը կրում են հետևյալ անունները. մեկ, յերկու, յերեք, չորս, հինգ, վեց, յոթ, ութ, ինն, տաս (կամ տասնյակ):

Այս և մի քանի այլ անունների միջոցով կարելի յե ար-

տահայտել նաև մյուս թվերը: Դիցուք, ցանկանում ենք անվանել այստեղ գրված գծիկների թիվը:



տասնյակ տասնյակ տասնյակ տասնյակ յերեք

Դրա համար համրում ենք տասը գծիկներ և առանձնացնում մնացածներից, ապա դարձյալ համրում ենք տասը գծիկներ և առանձնացնում մնացածներից: Այսպես շարունակում ենք տաս-տաս համրել այնքան, մինչև վոր այլևս վոչ մի գծիկ չի մնա կամ կմնա տասից պակաս: Ապա համրում ենք տասնյակները և մնացած գծիկները (կամ միավորները). քանի վոր տասնյակները չորս են, իսկ մնացած գծիկները յերեք. ապա այդ բոլոր գծիկների թիվը կարող ենք անվանել այսպես.

չորս տասնյակ յերեք միավոր:

Յերբ թվի մեջ տասից ավելի տասնյակներ լինեն, վարվում են այսպես. համրում են տասը տասնյակ, ապա կրկին տասը տասնյակ, այնուհետև ելի տասը տասնյակ և այլն այնքան ժամանակ, ինչքան վոր կարելի յե: Յուրաքանչյուր տասը տասնյակը մի բառով անվանում են **հարյուր** կամ **հարյուրյակ**: Դիցուք, թե վորևէ թվի մեջ կա յերեք հարյուրյակ, մնացած տասնյակները հինգ են, իսկ միավորները՝ յոթը. այդպիսի թիվը կարելի յե անվանել այսպես.

յերեք հարյուրյակ հինգ տասնյակ յոթ միավոր:

Յեթե թվի մեջ հարյուրյակները տասից ավելի յեն, ապա այդ հարյուրյակները նույնպես հաշվում են տասնյակներով: Յուրաքանչյուր տաս հարյուրյակը մի բառով անվանում են հազար:

5. Մի քանի անունների կրճատումը: Մեր լեզվի մեջ գործածական են թվերի մի քանի կրճատ անուններ: Այսպես, յերկու տասնյակը կոչվում է քսան, յերեք տասնյակը—յերեսուն, չորս տասնյակը—քառասուն և այլն:

6. Թվերի գրությունը մինչև հազար: *Առաջին ինն թվերը նշանակում են առանձին նիշերով կամ* թվանշաններով.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9:

Այս ինն թվանշանների և տասներորդի՝ 0-ի (զերո)—վորը նշում է թ վ ի բ ա ց ա կ ա յ ո ւ թ յ ո ւ ն ը—միջոցով կարելի յե արտահայտել յուրաքանչյուր թիվ:

Դրա համար պայմանավորվել են գրել աջից առաջին տեղում՝ հասարակ միավորները, աջից յերկրորդ տեղում՝ տասնյակները, յերրորդ տեղում՝ հարյուրյակները, որինակ՝

քառասուն յերկու թիվը կարտահայտվի	. . .	42
քառասուն	» »	40
յերեք հարյուր քառասուն հինգը կարտահայտվի		345
յերեքհարյուր քառասունը	»	340
յերեքհարյուր յոթը	»	307
յերեքհարյուրը	»	300

Բոլոր թվանշանները, բացի զերոյից, կոչվում են իմաստավոր *թվանշաններ:*

Վերևում բերված որինակները ցույց են տալիս զերոյի ներմուծման անհրաժեշտությունը: Այսպես, յերեքհարյուր քառասուն (340) թիվը նշանակելիս չի կարելի բաց թողնել զերոն, վորովհետև 34 նշանակում ե յերեսուն չորս: Ընդհակառակը, առաջին իմաստավոր թվի ձախ կողմում գտնվող զերոները կարելի յե բաց թողնել և համարյա միշտ էլ բաց են թողնվում. 045-ը նշանակում ե նույնը՝ ինչ 45-ը, 007-ը՝ նույնը՝ ինչ ուղղակի 7-ը: Շնորհիվ այդ պայմանի՝ մի թվանշանով արտահայտվող թիվը կոչվում ե միանիշ, *յերկու թվանշանով արտահայտվողը՝* յերկանիշ, *յերեք թվանշանովը՝* յեռանիշ թիվ *և այլն:*

7. Հազարից անցնող թվերի անունները: *Յեթե հաշվի յենթակա առարկաները հազարից ավելի յեն, ապա դրանցից կազմում են այնքան հազար, վորքան կարելի յե. ապա հաշվում են հազարները և մնացած միավորները և անվանում թե մեկի և թե մյուսի թվերը. որինակ, յերկուհարյուր քառասուն հազար հինգ հարյուր վաթսուն յերկու միավոր:*

Հազար հազարը կազմում ե միլիոն, *հազար միլիոնը՝* միլիարդ *(բիլիոն), հազար միլիարդը՝* տրիլիոն *և այլն*[1]*:*

8. Հազարից անցնող թվերի նշանակումը: *Ասենք թե, պահանջվում ե գրել յերեսուն հինգ* միլիարդ *ութ հարյուր վեց* միլիոն *յոթը* հազար *վաթսուն յերեք* միավոր *թիվը: Այդ կարելի յե թվանշանների և բառերի միջոցով գրել այսպես.*

35 միլիարդ 806 միլիոն 7 հազար 63 միավոր:

Վորպեսզի հնարավոր լինի գրել առանց բառերի, պայմանավորվել են նախ՝ միլիարդների, միլիոնների, հազարների և հասարակ միավորների թվերը գրել շարքով մի տողի վրա ձախից դեպի աջ, և յերկրորդ՝ այդ թվերից յուրաքանչյուրն արտահայտել միշտ յերեք *թվանշաններով, այսինքն 63 միավորի փոխարեն գրել 063, 7 հազարի փոխարեն գրել 007 և այլն: Այն ժամանակ մեր թիվը կարտահայտվի այսպես.*

035 806 007 063:

Ըստ վորում, այստեղ էլ ձախ կողմի զերոները չեն գրում, այսինքն՝ մեր թիվը արտահայտում են այսպես՝

35 806 007 063:

Վերջապես, նույն թիվը հաճախ գրում են և առանց ընդմիջումների.

35806007063:

Ընդամենը հիշում են, վոր աջից առաջին յերեք թվանշանները նշանակում են միավորների թիվը, հետևյալ դեպի ձախ գտնվող յերեք թվանշանները նշանակում են հազարների թիվը, դրանց հաջորդող հետևյալ յերեք թվանշանները՝ միլիոնների թիվը և այլն: Որինակ՝

567002301-ը նշանակում ե 567 միլիոն 2 հազար 301 միավոր
15000026-ը . . » . . . . 15 միլիոն 26 միավոր
2008001020-ը . . » . . . . . . 2 միլիարդ 8 միլիոն 1 հազար 20 միավոր և այլն:

1) *Այնուհետև հաջորդում են հետևյալ անունները.* կվադրիլիոն *(հազար տրիլիոն), քվինտիլիոն (հազար քվադրիլիոն), սեքստիլիոն (հազար քվինտիլիոն) և այլն:*

9. Ինչպես պետք է կարդալ այն թիվը, վորը գրված է թվանշանների յերկար շարքով։ *Թվանշանների յերկար շարքով արտահայտված թիվը, որինակ, 5183000567029-ը հեշտ կարդալու համար, նրա մեջ աջից մտավոր կերպով (որինակ, վերևից դրված ստորակետներով) անջատում են յերեքական թվանշաններ այնքան, վորքան հնարավոր է.*

5’183’000’567’029։

Աջից առաջին ստորակետը փոխարինում է «հազար» բառին, յերկրորդը՝ «միլիոն», յերրորդը՝ «միլիարդ», չորրորդը՝ «տրիլիոն» բառին։ Ուրեմն, մեր թիվը պետք է կարդալ այսպես.

5 տրիլիոն 183 միլիոն 567 հազար 29։

Սովորաբար վերջին թվին «միավոր» բառը չեն ավելացնում։

Յեթե միևնույն թիվը գրված է այնպես, վոր աջից հաշված, յուրաքանչյուր յերեք թվանշանից հետո արանք է թողնված,

5 183 000 567 029,

ապա այդ կարելի յե հեշտ կարդալ և առանց ստորակետներ դնելու։

10. Թվանշանների զբաղեցրած տեղի նշանակությունը։ *Թվերի գրության այդ յեղանակի դեպքում թվանշանի զբաղեցրած յուրաքանչյուր տեղ ունի հատուկ նշանակություն, այն է.*

Աջից	**1-ին**	**տեղում գրվում են**	**հասարակ միավորները**
»	**2-րդ**	»	» **տասնավորները**
»	**3-րդ**	»	» **հարյուրավորները**
»	**4-րդ**	»	» **հազարավորները**
»	**5-րդ**	»	» **տաս հազարավորները**
»	**6-րդ**	»	» **հարյուր հազարավորները**
»	**7-րդ**	»	» **միլիոնավորները**
»	**8-րդ**	»	» **տաս միլիոնավորները**
»	**9-րդ**	»	» **հարյուր միլիոնավորները**
»	**10-րդ**	»	» **միլիարդավորները յեվ այլն։**

Այսպիսով, տեսնում ենք, վոր մեր գրության սիստեմը հիմնված է տասը թվանշան գործածելու վրա, վորոնց վերագրըվում է կրկնակի նշանակություն. մեկը կախված է թվանշանի տեսքից, մյուսը՝ նրա գրաված տեղից. այսինքն՝ նույն շարքում դրված յերկու թվերից այն, վորը ձախ կողմն է գտնվում, նշանակում է 10 անգամ ավելի շատ միավորներ, քան աջում գտնվողը։

11. Միավորների կարգերը։ *Միավորները, տասնավորները, հարյուրավորները, հազարավորները և այլն յերբեմն ավելի հարմար է այլ կերպ անվանել, այսինքն՝ միավորները կոչվում են 1-ին կարգի միավորներ (կամ հասարակ միավորներ), տասնավորները կոչվում են 2-րդ կարգի միավորներ, հարյուրավորները՝ 3-րդ կարգի միավորներ և այլն։*

Բոլոր միավորները, բացի հասարակ միավորներից (1-ին կարգի միավորներից), կոչվում են բաղադրական միավորներ։ Այսպես, տասնավորը, հարյուրավորը, հազարավորը — բաղադրական միավորներ են։

Յուրաքանչյուր բաղադրական միավոր, համեմատած իրենից փոքր մյուս միավորի հետ, կոչվում է բարձր կարգի *միավոր, իսկ իրենից մեծ միավորի նկատմամբ կոչվում է* ստորին կարգի *միավոր. այսպես, հարյուրավորը բարձր կարգի միավոր է տասնավորի և ստորին կարգի միավոր է հազարավորի նկատմամբ։*

Յուրաքանչյուր բաղադրական միավոր պարունակում է հաջորդ ստորին կարգի 10 միավոր, որինակ, հարյուր հազարավորը պարունակում է 10-ը տասհազարավոր, տասհազարավորը՝ 10-ը հազարավոր և այլն։

12. Միավորների դասերը։ *Միավորների կարգերը խմբավորում են նաև* դասերով. *1-ին դասին վերաբերում են առաջին յերեք կարգերը՝ հարյուրավորները, տասնավորները և միավորները. 2-րդ դասին վերաբերում են հետևյալ յերեք կարգերը՝ հազարավորները, տաս հազարավորները և հարյուր հազարավորները և այլն։ 1-ին դասը* միավորների դասն է *(վորը պարունակում է հարյուրավորներ, տասնավորներ և միավորներ), 2-րդ դասը՝* հազարավորների դասն է *(վորը պարունակում է հարյուր հազարավորներ, տասհազարավորներ և հազարավորներ) և այլն։*

13. Ինչպես պետք է իմանալ, թե թվի մեջ ինչքան են տվյալ կարգի բոլոր միավորները։ *Դիցուք, պահանջվում է իմա-*

նալ, թե 56284-ի մեջ ընդամենը քանի հարյուրավոր կա, այսինքն՝ քանի հարյուրավոր է պարունակում տված թվի տասհազարավորների, հազարավորների և հարյուրավորների մեջ միասին վերցրած։

Հասարակ հարյուրավորները գրվում են աջից հաշված երրորդ տեղում. տված թվի մեջ երրորդ տեղում գրված է 2 թվանշանը, կնշանակի, այդ թվի մեջ կա երկու հասարակ հարյուրավոր։ Դեպի ձախ գտնվող հաջորդ թվանշանը՝ 6-ը ցույց է տալիս հազարները, բայց յուրաքանչյուր հազարավորի մեջ պարունակվում է 10 հարյուրավոր. կնշանակի 6 հազարավորի մեջ կա 60 հարյուրավոր։ Դեպի ձախ գտնվող հետևյալ թվանշանը՝ 5-ը ցույց է տալիս տասհազարավորները, բայց յուրաքանչյուր տասհազարավոր պարունակում է 10 հազարավոր և, հետևապես, 100 հարյուրավոր, ուրեմն, 5 տասհազարավորների մեջ պարունակվում է 500 հարյուրավոր։ Այսպիսով, տված թվի մեջ պարունակվում է ընդամենը 500 և էլի 60 ու դարձյալ 2, այսինքն 562 հարյուրավոր։

Նույն ձևով կարող ենք իմանալ, որ տված թվում բոլոր տասնյակները 5628 են։

ԿԱՆՈՆ։ Իմանալու համար, թե թվի մեջ տվյալ կարգի բոլոր միավորները քանիսն են, պետք է դեն գցել ստորին կարգերի միավորները նշող բոլոր թվանշանները և կարդալ մնացած թվանշաններով արտահայտված թիվը։

II. ԹՎԱՐԿՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐԲԵՐ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐ ՀՌՈՄԵԱԿԱՆ ԹՎԱՆՇԱՆՆԵՐ

14. Հասկացողություն թվարկության սիստեմների մասին։ Թվերի անվանման և նշման յուրաքանչյուր ընդհանուր եղանակ կոչվում է թվարկության սիստեմ։ Մեր թվարկության սիստեմը կոչվում է տասնորդական, որովհետև, ըստ այդ սիստեմի, մի կարգի 10 միավորները կազմում են հետևյալ բարձր կարգի մեկ միավոր։ Ուստի և 10 թիվը կոչվում է թվարկության տասնորդական սիստեմի հիմք։ Ըստ այդ սիստեմի յուրաքանչյուր N թիվ պատկերացվում է վերլուծված հասարակ միավորների, տասնավորների, հարյուրավորների, հազարավորների և այլն, ընդ որում յուրաքանչյուր կարգի միավորների թիվը փոքր է 10-ից։ Եթե ենթադրենք, որ N թիվը պարունակում է a թվով հասարակ միավորներ, b տասնավորներ, c հարյուրավորներ, d հազարավորներ և այլն, ապա այդ թիվը հանդիսանում է

$$N=a+b\cdot10+c\cdot10^2+d\cdot10^3+\ldots$$ գումարը։

Կարելի յե պատկերացնել նաև ուրիշ սիստեմներ, որտեղ որպես հիմք ընդունված է որևէ այլ թիվ։ Եթե, օրինակ, որպես հիմք ընդունենք 5 թիվը, ապա կստացվի թվարկության հնգյակային սիստեմ, որի համաձայն մի կարգի 5 միավորները պետք է կազմեն հետևյալ բարձր կարգի մեկ միավոր։ Այսպիսով, ըստ հնգյակային սիստեմի 2-րդ կարգի միավորը պետք է լինի հնգյակը, 3-րդ կարգի միավորը՝ հինգ հնգյակը, կամ 5^2, 4-րդ կարգի միավորը՝ 5 անգամ 5-ական հնգյակ, կամ 5^3 և այլն։ Այդ սիստեմի համաձայն N թիվը կպատկերանար այսպես.

$$N=a+b\cdot5+c\cdot5^2+d\cdot5^3+e\cdot5^4+\ldots$$

որտեղ a, b, c, d, e... թվերից յուրաքանչյուրը 5-ից պակաս կլիներ։

15. Տված սիստեմով թվերը պատկերացնելու համար անհրաժեշտ թվանշանների թիվը. Թվերը տասնորդական սիստեմով գրավոր պատկերացնելու համար գործածում են 10-ը տարբեր նիշեր։ Թվարկության ուրիշ սիստեմի համար կպահանջվեր թվանշանների այլ թիվ։ Օրինակ, հնգյակային սիստեմի համար բավական կլինեին հետևյալ հինգ թվանշանները. 1, 2, 3, 4, 0։ Իսկապես, այդ սիստեմով 5 թիվը կներկայացներ 2-րդ կարգի 1 միավոր և, հետևապես, կպատկերացվեր այսպես 10. 6 թիվը կներկայացներ 2-րդ կարգի միավոր (հնգյակ) և 1-ին կարգի մեկ միավոր և, հետևապես, կպատկերացվեր այսպես—11 և այլն։ Թվերը 10-ից բարձր հիմք ունեցող սիստեմով գրելու համար մեր թվանշանները չեյին բավականացնի։ Օրինակ, տասներկյակային սիստեմի համար անհրաժեշտ կլիներ մտածել հատուկ նիշեր, արտահայտելու 10 և 11 թվերը, որովհետև այդ թվերի համար ունեցած մեր նշումներն այն ժամանակ կարտահայտեյին ուրիշ թվեր. 10-ը կներկայացներ 2-րդ կարգի 1 միավորը. այսինքն՝ դյուժին, իսկ 11-ը կնշանակեր 2-րդ կարգի 1 միավոր և 1-ին կարգի մեկ միավոր, այսինքն՝ 13։

16. Թվարկության տասնորդական սիստեմով գրված թիվը պատկերել մի ուրիշ սիստեմով։ Օրինակի համար ընդունենք, որ 1766 թիվը պետք է արտահայտել հնգյակային սիստեմով՝ 0, 1, 2, 3, 4 հինգ նշանների միջոցով։ Դրա համար նախ իմանանք, թե 1766-ի մեջ 2-րդ կարգի քանի միավոր, այսինքն՝ հնգյակ է պարունակվում։ Գտնվում է, որ 353, ընդ որում մնում է 1-ին կարգի 1 միավոր։ Այժմ իմանանք, թե 353 հնգյակում 3-րդ կարգի քանի միավոր է պարունակվում։ Քանի որ 3-րդ կարգի միավորը պարունակում է 2-րդ կարգի 5 միավոր, ապա, ուրեմն, պետք է 353-ը բաժանել 5-ի վրա։ Բաժանելով կիմանանք, որ 353 հնգյակում պարունակվում է 3-րդ կարգի 70 միավոր և 2-րդ կարգի 3 միավոր։ 3-րդ կարգի 70 միավորը դարձնում ենք 4-րդ կարգի միավորներ, իսկ այդ վերջինները 5-րդ կարգի միավորներ և այլն։

1766	5			
26	353	5		
16	3	70	5	
1		20	14	5
		0	4	2

Այսպիսով գտնում ենք, որ 1766-ը պարունակում է 5-րդ կարգի 2 միավոր, 4-րդ կարգի 4 միավոր, 2-րդ կարգի 3 միավոր և 1-ին կարգի 1 միավոր, հետևապես 1766-ը հնգյակային սիստեմով կարտահայտվի այսպես՝ 24031_5

Ասենք, թե ելի պահանջվում է 121380 ը պատկերացնել տասնյերկյակային սիստեմով.

```
121380 | 12
 13     10115 | 12
  18      51   842 | 12
   60      35    2   70 | 12
    0      11        10    5
```

10-ը թիվը նշանակենք a-ով, իսկ 11-ը՝ b-ով, կգտնենք, որ տված թիվը կպատկերացվի այսպես. 5a2b0։

17. Թվարկության որևէ սիստեմով գրված թիվը պատկերացնել տասնորդական սիստեմով։ *Դիցուք, ութնյակային սիստեմով գրված 5623 թիվը պահանջվում է փոխանցել տասնորդական սիստեմի։ Այդ կարելի յե կատարել, հաշվելով հետևյալ գումարը.*

$$N=3+2\cdot 8+6\cdot 8^2+5\cdot 8^3=3+16+384+2560=2963.$$

Բայց ավելի հեշտ կլինի այսպես վարվել. 4-րդ կարգի 5 միավորները վերածենք 3-րդ կարգի միավորների, որի համար 5-ը բազմապատկենք 8-ով (որովհետև 4-րդ կարգի միավորը պարունակում է ութնյակային սիստեմի 3-րդ կարգի 8 միավոր). ստացված թվին կավելացնենք տվյալ թվում գտնվող 3-րդ կարգի 6 միավորները։ 3-րդ կարգի միավորները վերածենք 2-րդ կարգի միավորների. ստացված թվին ավելացնենք տվյալ թվում գտնվող 2-րդ կարգի 2 միավորները։ 2-րդ կարգի միավորները վերածենք 1-ին կարգի միավորների. ստացված թվին ավելացնենք տվյալ թվում գտնվող 1-ին կարգի 3 միավորները։ Կստանանք 2963։

```
  5623
 · 8
 ----
   40
 +  6
 ----
   46
 ·  8
 ----
  368
 +  2
 ----
  370
 ·  8
 ----
 2960
 +  3
 ----
 2963
```

Դիտողություններ։ *1) Թվարկության տասնորդական սիստեմը տարածված է համարյա ամենուրեք։ Այդ տարածման պատճառ շատերը համարում են այն, որ յուրաքանչյուր մարդ մանկությունից վարժվում է հաշվել յերկու ձեռքի տասը մատների միջոցով։ Սակայն թվարկության տասնորդական սիստեմը չի հանդիսանում որպես ամենահարմարը։ Օրինակ, որոշ տեսակետներից ավելի հարմար կլիներ տասներկյակային սիստեմը, որը, թվեր պատկերացնելու համար մեծ թվով թվանշաններ չպահանջելով, ունի այն կարևոր հատկությունը, որ այդ սիստեմի հիմքն առանց մնացորդի բաժանվում է 2-ի, 3-ի, 4-ի և 6-ի վրա, այնինչ մեր սիստեմի հիմքը բաժանվում է միայն 2-ի և 5-ի վրա։ Հավանական է, որ նման նկատառումներն են հիմք ծառայել թվարկության վաթսունային սիստեմի, որը գործածվել է հին Բաբելոնում։ Տեսական հետազոտությունների համար ամենանպատակահարմարն է հանդիսանում յերկյակային սիստեմը, որը, սակայն, գործնական նպատակների համար բոլորովին անհարմար է, քանի որ այդ սիստեմով նույնիսկ փոքր թիվն արտահայտվում է թվանշանների յերկար շարքով (օրինակ, 70-ն արտահայտվում եր այսպես՝ 1000110)։*

2) Մեր կողմից գործածվող թվանշանները և թվերի նշման հենց սիստեմը յեվրոպացիները վերցրել են արաբներից (մոտավորապես XII դարում)։ Ահա թե ինչու այդ թվանշանները կոչվում են արաբական։ *Բայց հիմք կա կարծելու, որ արաբներն էլ իրենց հերթին այդ սիստեմը վերցրել են հնդիկներից։*

18. Հռոմեական թվանշաններ։ *Քանի որ հռոմեական թվանշանները ներկայումս էլ յերբեմն գործածվում են թվեր նշելու համար, ապա օգտակար է ծանոթանալ նրանց։ Հռոմայեցիք թվերը նշելու համար օգտագործում եին միայն հետևյալ յոթը նշանները՝*

I=*1*, V=*5*, X=*10*, L=*50*, C=*100*, D=*500*, M=*1000*։

Թվերն արտահայտելու նրանց յեղանակը էապես տարբերվում եր մերինից։ Մեզ մոտ թվանշանները փոխելով իրենց տեղը՝ փոխում են և իրենց նշանակությունը, իսկ հռոմեական թվագրության մեջ թվերն ամեն տեղ էլ պահպանում են իրենց նշանակությունը։ Յերբ մի քանի հռոմեական թվանշաններ գրված են մի շարքում, ապա նրանցով արտահայտված թիվը հավասար է յուրաքանչյուր թվանշանով արտահայտված թվերի գումարին. օրինակ, XXV *նշանակում է 10+10+5 գումարը, այսինքն՝ 25.* CLXV *նշանակում է 100+50+10+5 գումարը, այսինքն՝ 165, և այլն։ Այս կանոնից բացառություն կազմում են միայն հետևյալ 6 թվերը՝*

4=IV, *9*=IX, *40*=XL, *90*=XC, *400*=CD, *900*=CM։

Այս պատկերացումների մեջ ձախ կողմում գտնվող թվանշանի նշանակությունը հանվում է աջ կողմում գտնվողի նշանակությունից։ Իրանից հետո հասկանալի կլինեն թվերի հետևյալ պատկերացումները.

I=*1*, II=*2*, III=*3*, IV=*4*, V=*5*, VI=*6*, VII=*7*, VIII=*8*, IX=*9*, X=*10*, XI=*11*, XII=*12*, XIV=*14*, XVIII=*18*, XIX=*19*, XX=*20*, XXIX=*29*, XLII=*42*, LXXXIV=*84*, XCV=*95*, CCC=*300*, MCMXXXVII=*1937*.

Հազարավորների թիվը գրում են այնպես, ինչպես միավորների թիվը, միայն աջ կողմից ներքևում դնում են m *տառը* (mille—*հազար*)։ *Օրինակ՝*

CLXXXmCCCLXIV=*180 364*.

III. ԳՈՒՄԱՐՈՒՄ

19. Ինչ է գումարումը։ *Այն միավորները, վորոնցից կազմված են մի քանի թվեր, կարելի յե համախմբել միասին։ Այն թիվը, վոր կստացվի այդ համախմբված միավորները հաշվելուց հետո, կոչվում է* գումար, *իսկ այն թվերը, վորոնք համախմբվում են միասին, կոչվում են* գումարելիներ։ *Այսպես, 5 լուցկին, 7 լուցկին և 2 լուցկին կարելի յե միացնել և ստանալ 14 լուցկուց կազմված մի հավաք։ 14 թիվը յերեք գումարելիների՝ 5-ի, 7-ի և 2-ի գումարն է։ Գումարելիների թիվը կարող է լինել 2, 3 և ավելի։*

Գումարելիները կարելի յե դիտել վորպես գումարի մասեր։

Տված մի քանի թվերի միջոցով մի նոր թիվ գտնելը կոչվում է թվաբանական գործողություն *(կարճության համար մենք ուղղակի կանվանենք* գործողություն*)։*

Այն գործողությունը, վորով մի քանի թվերից կազմում ենք գումար, կոչվում է այդ թվերի գումարում։

Գումարման նշանն է + (պլյուս)․ այսպես, յեթե գրված է՝ 5+7+2, ապա այդ նշանակում է 5, 7 և 2 թվերի գումար։

Գումարման գործողությունը միշտ հնարավոր է (ուզած թվերը կարելի յե միացնել մի խմբի մեջ) և միշտ տալիս է միակ արդյունքը։

20. Գումարի հիմնական հատկությունները: 1) Գումարը չի փոխվում գումարելիների կարգի փոփոխումներից։

Այսպես, 5+7+2 գումարը միշտ հավասար է 14-ի, ինչ կարգով էլ կատարենք գումարումը․

$$5+7+2=2+7+5=7+5+2=14։$$

Այս հատկությունն ընդունված է անվանել գումարման տեղափոխման օրենք, *վորովհետև այդ օրենքի էությունն այն է, վոր գումարելիները կարելի յե տեղափոխել, առանց փոխելու գումարը։ Յերեք գումարելիների համար այդ հատկությունը ընդհանուր ձևով կարելի յե գրել այսպես․*

$$a+b+c=a+c+b=b+a+c=b+c+a=c+a+b=c+b+a,$$

վորտեղ տառերի տակ հասկացվում են ուզած թվերը։

2) Գումարը չի փոխվի, յեթե գումարելիների վորեվէ խումբ փոխարինենք նրանց գումարով։

Որինակ՝ 5+7+2 գումարը չի փոխվի, յեթե 7 և 2 գումարելիները փոխարինենք իրենց գումարով․

$$5+7+2=5+9=14։$$

Այդ հատկությունը կոչվում է գումարման զուգորդական օրենք, *վորովհետև ըստ այդ օրենքի կարող ենք ուզած գումարելիները զուգորդել (միացնել) մի թվում (մի խմբի մեջ)։*

Յերեք գումարելիների համար այդ հատկությունն ընդհանուր ձևով կարելի յե գրել այսպես․

$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c),$$

վորտեղ փակագծերով ցույց է տրված, թե ինչ կարգով պետք է կատարել գումարումը․ նախ պետք է կատարել փակագծի ներսում նշված գումարումը, ապա փակագծից դուրս նշվածը։

21. Ինչպես թվին ավելացնել գումար յեվ գումարին թիվ։ *Գումարի հիմնական հատկություններից կարելի յե յեզրակացնել հետևյալ յերկու կանոնները․*

1) Վորեվէ թվի մի քանի թվերի գումարն ավելացնելու համար կարելի յե այդ թվին ավելացնել յուրաքանչյուր գումարելին մեկը մյուսից հետո։

Այսպես՝

$$100+(20+7+3)=100+20+7+3^{1)}։$$

Իսկապես, 2-րդ հատկության (§ 20) հիման վրա գրված հավասարության աջ մասը չի փոփոխվի, յեթե նրա 20, 7 և 3 գումարելիները միացնենք մի խմբի մեջ, բայց այդ կատարելով մենք կստանանք հենց գրված հավասարության ձախ մասը։

2) Գումարին վորեվէ թիվ ավելացնելու համար կարելի յե այդ թիվն ավելացնել գումարելիներից վորեվէ մեկին, մյուսները թողնելով անփոփոխ։

Այսպես՝

$$(35+15+20)+10=(35+10)+15+20=$$
$$=35+(15+10)+20=\dots$$

Այս բոլոր գումարները հավասար են 35+15+20+10 գումարին, միայն վոմանց մեջ գումարելիները տեղափոխված են

---

[1]) *Փակագծերն ( ) այստեղ և հետագայում ցույց են տալիս, վոր փակագծի մեջ յեղած գործողությունները պետք է կատարել ամենից առաջ։ Փակագծերի գործածության մասին ավելի մանրամասն տես § 41։*

և գումարելիներից մի քանիսը միացված են մի խմբի մեջ։ Ուստի, 1) և 2) (§ 20) հատկությունների հիման վրա այդ բոլոր գումարները հավասար են 35+15+20+10 գումարին և, ուրեմն, իրար հավասար։

22. Երկու միանիշ թվերի գումարումը։ Երկու միանիշ թվերի գումարը գտնելու համար բավական է նրանցից մեկին ավելացնել մյուսի բոլոր միավորները։ Այսպես, 7-ին ավելացնելով 5 թվի բոլոր միավորները, գտնում ենք նրանց գումարը—12։

Ամեն տեսակ թվերի գումարումն արագ կատարելու համար անհրաժեշտ է հիշել բոլոր այն գումարները, որոնք ստացվում են յերկու միանիշ թվերի գումարումից։

Դիտողություն։ Քանի որ զերոն ցույց է տալիս միավորների բացակայությունը, ապա 5+0=5 (յեթե 5-ին ոչինչ չավելացնենք, ապա կմնա 5-ը) և 0+5=5 (յեթե միավորներ չենք ունեցել և շարունակել ենք ավելացնել 5 միավոր, ապա և 5 միավոր էլ կստացվի)։ Ընդհանրապես, որևէ թիվ զերոյին գումարելիս կամ զերոն որևէ թվի գումարելիս միշտ էլ ստացվում է նույն թիվը։

23. Բազմանիշ թիվը միանիշ թվին գումարելը։ Դիցուք, պահանջվում է գումարել 37-ը և 8-ը։ Դրա համար 37-ից կառանձնացնենք 7 միավորը և կգումարենք 8-ին, կստանանք 15։ Այդ 15 միավորը կավելացնենք 30-ին, բայց 15-ը միևնույնն է, ինչ 10 և 5։ 30-ին 10 ավելացնելով՝ կստանանք 40, որին 5 էլ ավելացնելով՝ կստանանք 45։

Կարելի յե և այսպես վարվել։ Նկատելով, որ 37-ին պետք է 3 ավելացնել՝ 40 ստանալու համար, 8 միավորից կառանձնացնենք 3 միավոր և կավելացնենք 37-ին, այն ժամանակ կստանանք 40 և էլի 5 միավոր, որ մնացել էր 8-ից, այսինքն՝ կստանանք 45։

Հարկավոր է վարժվել այդ գործողությունները մտքում կատարելու, և այն էլ արագ։

Այս պարագրաֆում նշված գումարման յերկու յեղանակն էլ ներկայացնում են § 21-ում տրված կանոնների կիրառումը, ինչպես այդ յերևում է հետևյալ հավասարություններից.

$$37+8=(30+7)+8=30+(7+8)=30+15=30+(10+5)=$$
$$=(30+10)+5=40+5=45,$$

կամ

$$37+8=37+(3+5)=(37+3)+5=40+5=45։$$

24. Բազմանիշ թվերի գումարումը։ Դիցուք, պահանջվում է գտնել հետևյալ չորս թվերի գումարը. 13653, 22409, 1608 և 346։ Դրա համար նախ կգումարենք բոլոր գումարելիների հասարակ միավորները, հետո նրանց տասնավորները, ապա հարյուրավորները և այլն։ Տարբեր կարգի միավորները չշփոթելու համար տված թվերը կգրենք մեկը մյուսի տակ այնպես, որ միավորները գտնվեն միավորների տակ, տասնավորները՝ տասնավորների, հարյուրավորները՝ հարյուրավորների տակ և այլն. վերջին գումարելիի տակ կտանենք մի գիծ.

$$\begin{array}{r} 13653 \\ +\ 22409 \\ 1608 \\ 346 \\ \hline 38016 \end{array}$$

Գումարելով միավորները՝ կստանանք 26, այսինքն՝ 2 տասնավոր և 6 միավոր, 2 տասնավորը կպահենք մտքում, տրված թվերի տասնավորներին գումարելու համար, իսկ 6-ը կգրենք գծի տակ, գումարելիների միավորների տակ։ Գումարելով տասնավորները (միավորների գումարումից ստացված 2 տասնավորների հետ միասին) կստանանք 11 տասնավոր, այսինքն՝ 1 հարյուրավոր և 1 տասնավոր, 1 հարյուրավորը կպահենք մտքում հարյուրավորներին գումարելու համար, իսկ 1 տասնավորը կգրենք գծի տակ տասնավորների տեղում։ Հարյուրավորների գումարումից կստանանք 20 հարյուրավոր, այսինքն՝ ճիշտ 2 հազար, այդ 2 հազարը կպահենք մտքում, հազարավորներին գումարելու համար, իսկ գծի տակ հարյուրավորների տեղում կգրենք զերո։ Յեվ այսպես շարունակում ենք գործողությունը։

Դիտողություն։ Յեթե որևէ սյունակի թվերը գումարելիս (օրինակ, մեր տված օրինակի մեջ տասնավորների սյունակում) պատահի զերո թվանշանը, ապա նրա վրա ուշադրություն չենք դարձնում, որովհետև, § 22-ի վերջում արած դիտողության հի-

ման վրա, զերոյի ավելացումն ունեցած թվի միավորները չի փոփոխում։

25. Զերոն թիվ է։ *Տեսանք, որ գումարման ժամանակ գումարելիների մեջ կարող է զերո պատահել. հետագայում կտեսնենք, որ զերոյով կարիք կլինի կատարել և ուրիշ թվաբանական գործողություններ։ Ուստի, պայմանավորվենք* **զերոն համարելու թիվ** *մյուս թվերին հավասար. ակնհայտ է, որ* **զերոն փոքր է մյուս բոլոր թվերից։**

26. Թիվը մի քանի միավորով մեծացնելը։ *Որևէ թիվ մի քանի միավորով մեծացնել նշանակում է այդ թվին ավելացնել այդ մի քանի միավորները։ Յեթե, օրինակ, պահանջվում է 80-ը մեծացնել 25-ով, ապա այդ նշանակում է, որ 80-ին պետք է ավելացնել 25 (կստանանք 105)։ Այսպիսով, թիվը մի քանի միավորով մեծացնելը կատարվում է գումարման միջոցով։*

27. Գումարի փոփոխվելը գումարելիների փոփոխման հետեվանքով։ *Քանի որ գումարն իր մեջ պարունակում է գումարելիների բոլոր միավորները, ապա ակներև է, որ* **յեթե գումարելիներից մեկին ավելացնենք մի քանի միավոր (իսկ մյուս գումարելիները թողնենք անփոփոխ), գումարն էլ կմեծանա նույնքան միավորով։**

Այսպես, 5+8=13. յեթե առաջին գումարելիին ավելացնենք 4, ապա կստանանք (5+4)+8=9+8=17. յեթե յերկրորդ գումարելիին ավելացնենք 4 (իսկ առաջին գումարելին թողնենք անփոփոխ), ապա կստացվի՝

$$5+(8+4)=5+12=17.$$

այսպիսով, գումարելիներից մեկին 4 ավելացնելով, գումարը մեծանում է 4 միավորով (քանի որ 17-ը 13-ից մեծ է 4 միավորով)։

Յեթե որեվե գումարելիից վերցնենք մի քանի միավոր (իսկ մյուս գումարելիները թողնենք անփոփոխ), ապա գումարը կփոքրանա նույնքան միավորով։

Յեթե գումարելիներից որեվե մեկին ավելացնենք մի քանի միավոր, իսկ մյուս գումարելիից վերցնենք նույնքան միավոր, ապա գումարը կմնա անփոփոխ։

IV. ՀԱՆՈՒՄ

28. Ինչ է հանումը։ *Աշակերտն ուներ 7 տետր. դրանցից 3-ը նա տվեց յեղբորը. իմանալու համար, թե քանի տետր մնաց նրա մոտ, պետք է 7 տետրից վերցնել 3 տետր (կմնա 4 տետր)։*

Այն գործողությունը, որի միջոցով մի թվից վերցվում է այնքան միավոր, որքան միավոր պարունակվում է տված մյուս թվի մեջ, կոչվում է հանում։

Մեր բերած օրինակում 7 թվից պետք է հանել 3-ը, ստացվում է 4 թիվը։

Այն թիվը, որից հանում են, կոչվում է **նվազելի**. *այն թիվը, որը հանում են, կոչվում է* **հանելի**. *այն թիվը, որն ստացվում է հանելուց հետո, կոչվում է* **մնացորդ**։ *Մնացորդն այլ կերպ կոչվում է* **տարբերություն**, *որովհետև նա ցույց է տալիս նվազելիի և հանելիի միջև յեղած տարբերությունը։ Մեր բերած օրինակում նվազելին—7-ն է, հանելին—3-ը և մնացորդը կամ տարբերությունը—4-ը։*

Հանման նշանն է — (մինուս), որը դրվում է նվազելիի (ձախից) և հանելիի (աջից) միջև։

Այսպես, 7−3=4։

Ակնհայտ է, որ տված թվից կարելի յե հանել նրանից փոքր կամ նրան հավասար ամեն մի թիվ, բայց ոչ մի թվից չի կարելի հանել նրանից ավելի մեծ թիվ։ Ուստի, **հանելին չի կարող ավելի մեծ լինել նվազելիից։**

29. Գումարման բաղդատումը հանման հետ։ *Հանում կատարելիս թվերից մեկը, այն է՝ նվազելին, վերլուծվում է յերկու թվի։ Օրինակ, յեթե 9-ից հանելով 5, գտանք, որ մնաց 4, ապա նշանակում է՝ մենք 9-ը վերածեցինք յերկու թվի. 5 (հանված միավորները) և 4 (մնացած միավորները)։ Ակնհայտ է, որ յեթե այդ թվերը միացնենք, ապա կստանանք այն 9 թիվը, որը վերածեցինք. ուրեմն,* **նվազելին հավասար է հանելիին՝ ավելացրած մնացորդը**. *այլ կերպ ասած՝ նվազելին գումարն է, իսկ հանելին և մնացորդը—գումարելիները։*

Գումարման ժամանակ տված են լինում գումարելիները, որոնում ենք գումարը. իսկ հանման ժամանակ տված է լինում

գումարը և գումարելիներից մեկը, վորոնում ենք մյուս գումարելին։

Ուրեմն, այն թիվը, վորը գումարման ժամանակ վորոնում են, հանման ժամանակ տրվում է, և ընդհակառակը. ուստի ասում են՝ հանումը գումարման հակառակ գործողություն է։

30. Դիտողություններ։ *1) Հանումը կարելի յեր միանգամից սահմանել վորպես գումարման հակառակ գործողություն, վորով տված գումարով և տված գումարելիով գտնում են մյուս գումարելին։ Սակայն թվաբանության տարրական շարադրանքի հենց սկզբին ավելի պարզ ու գիտելի յե լինում հանումը սահմանել վորպես նվազելիի պակասեցում այնքան, վորքան հանելին է և ապա ցույց տալ հանման և գումարման միջև յեղած առնչությունը։ (Ինչպես այդ արված է § 29-ում)։*

2) Հանման գործողությունը միշտ հնարավոր է և տալիս է միակ արդյունքը, յեթե միայն հանելին նվազելիուց մեծ չէ։ Յեթե, որինակ, պահանջվում է a-ից հանել b, ապա այդ մենք կարող ենք կատարել՝ a-ից հաջորդաբար մեկը մյուսից հետո հանելով այնքան միավոր, վորքան պարունակվում է b-ի մեջ։ Հանելով մեկ միավոր, մնացորդում կստանանք միակ $a-1$ թիվը, վորը բնական շարքում անմիջականորեն նախորդում է a թվին. հանելով մյուս միավորը, դարձյալ կստանանք միակ $a-1-1$ թիվը, վորն անմիջականորեն նախորդում է $a-1$ թվին և այլն։ Յեթե $b<a$, ապա հանելով b միավորը՝ կստանանք բնական շարքի վորևե (և միայն մեկ) թիվ, վորն և կլինի մնացորդը, յեթե $b=a$, ապա հանելուց հետո վոչ մի թիվ չի մնա, ուրիշ խոսքով, մնացորդը կլինի զերո. վերջապես, յեթե $b>a$-ից, ապա հանումն անհնարին է։

31. Միանիշ թվի հանումը։ Առանց դժվարության մի թիվ մյուսից հանելու համար պետք է նախ սովորել մտքում հանել միանիշ թիվը միանիշ և յերկանիշ թվից։ Վորոնելիք տարբերությունը հեշտ է գտնվում գումարման միջոցով։ Որինակ՝ իմանալու համար, թե ինչի յե հավասար 15-ն առանց 8-ի, հիշենք, թե վոր թիվն է, վոր 8-ին գումարելիս տալիս է 15, 8-ը և 7-ը կազմում են 15, ուրեմն, 15-ն առանց 8-ի կլինի 7։

Հարկավոր է վարժվել այդ հանումը կատարելու մտքում, և այն ել արագ։

Դիտողություն։ $7-0=7$ (յեթե 7 միավորից վոչինչ չհանենք, ապա կմնա 7 միավոր). ընդհանրապես, զերոն վորևե թվից հանելիս միշտ ստացվում է հենց այդ նույն թիվը։

$8-8=0$ (յեթե 8 միավորից հանենք 8 միավոր, ապա վոչինչ չի մնա). ընդհանրապես, յերկու նույնանիշ թվերի տարբերությունը միշտ հավասար է զերոյի։

Զերոյից չի կարելի վոչ մի այլ թիվ հանել, վորովհետև բոլոր մյուս թվերը զերոյից մեծ են։

32. Բազմանիշ թվի հանումը։ Որինակ, 60072-ից հանենք 7345-ը. թվերը դասավորենք այնպես, ինչպես և գումարման ժամանակ՝

$$\begin{array}{rl} -\,60072 & \text{նվազելի} \\ 7345 & \text{հանելի} \\ \hline 52727 & \text{մնացորդ} \end{array}$$

Կպահպանենք նույն կարգն, ինչպես և գումարելիս, այսինքն՝ կսկսենք հանել միավորները միավորներից, տասնավորները տասնավորներից և այլն։ 5 միավորը 2 միավորից չի կարելի հանել, դրա համար 7 տասնավորներից վերցնում ենք 1 տասնավոր, վորը պարունակում է 10-ը միավոր. դրանք միացնում ենք նվազելիի 2 միավորին. ստացվում է 12 միավոր. դրանցից հանում ենք հանելիի 5 միավորը, մնացորդում ստանում ենք 7 միավոր։ Այժմ անցնում ենք տասնավորներին։ Նվազելիի 7 տասնավորներից 1 տասնավորն արդեն ոգտագործել ենք միավորները հանելիս (այդ չմոռանալու համար տասնավորների 7 թվանշանի գլխին դրինք մի կետ) մնում է 6 տասնավոր. նրանցից հանում ենք հանելիի 4 տասնավորը, մնացորդում ստացվում է 2 տասնավոր։ Անցնենք հարյուրավորներին։ Նվազելիի մեջ հարյուրավորներ չկան. դիմում ենք հազարավորներին և տեսնում, վոր նվազելիի մեջ հազարավորներ ել չկան, ուստի անցնում ենք առաջ—դիմում ենք տասը հազարավորներին, վորոնց թիվը նվազելիի մեջ 6 է. վերցնում ենք այդ 6 տասը հազարավորներից մեկը (և իբրև նշան՝ 6-ի գլխին դնում կետ). Նա պարունակում է 10 հազարավոր. վերցնում ենք այդ հազարավորներից մեկը, նա պարունակում է 10 հարյուրավոր, վորոնցից հանում ենք հանելիի 3 հարյուրավորը և մնացորդում ստանում 7 հարյուրավոր։ Մենք դեռ ունենք 9 հազարավոր, նրանցից հանում ենք հանելիի 7 հազարավորը և մնացորդում ստանում 2 հազարավոր։ Վերջապես նվազելիի մնացած 5 տասը հազարավորը անփոփոխ տեղափոխվում է մնացորդի մեջ, քանի վոր դրանցից վոչինչ չի հանվում։

Այսպիսով, մնացորդը կազմում է 52727։

Ահա հանման վերաբերյալ էլի օրինակներ.

$$\begin{array}{r} \dot{6}\dot{0}\dot{0}\dot{0}227 \\ -\,4320423 \\ \hline 1679804 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \dot{5}\dot{0}\dot{0}\dot{0}00 \\ -\,17236 \\ \hline 482764 \end{array}$$

Ավելի հարմար է հանման գործողությունն սկսել ստորին կարգերից և գնալ դեպի բարձրը, վորովհետև այդ ընթացքով կարիք յեղած դեպքում միշտ կարող ենք բարձր կարգից վերցնել 1 միավոր՝ վերածելու ստորին կարգի միավորների։

33. Ինչպես պետք է թվից գումար հանել յեվ գումարից թիվ։ *Նախորդ պարագրաֆում բազմանիշ թվերը հանելիս միավորները հանում էինք միավորներից, տասնավորները՝ տասնավորներից և այլն, օգտվելով հետևյալ կանոններից.*

1) Թվից գումար հանելու համար կարելի յե հանել յուրաքանչյուր գումարելին առանձին-առանձին, մեկը մյուսից հետո։

Այսպես, 325 թիվը, այսինքն՝ 5+20+300 գումարը հանելու համար կարելի յե առանձին-առանձին հանել 5, 20 և 300 գումարելիները։

Այս կանոնը ընդհանուր ձևով կարելի յե արտահայտել այսպիսի հավասարությունով.

$$a-(b+c+d+\cdots)=a-b-c-d-\ldots$$

2) Գումարից մի թիվ հանելու համար կարելի յե այդ թիվը հանել վորեվե մեկ գումարելիից։

Այսպես՝

$$(30+20)-10=50-10=40,$$

կամ

$$(30+20)-10=(30-10)+20=20+20=40,$$

կամ

$$(30+20)-10=30+(20-10)=30+10=40.$$

Ընդհանրապես

$$(a+b+c+\ldots)-m=(a-m)+b+c+\ldots=$$
$$=a+(b-m)+c+\ldots$$

Հանելին գրելով վորպես հասարակ միավորների, տասնավորների, հարյուրավորների և այլն գումար, մենք նախ առանձին հանում ենք միավորները, հետո տասնավորները, ապա հարյուրավորները և այլն։ Միավորները հա-

նելու համար նվազելին դիտում ենք իբրև կարգերի գումար և հանելիի միավորները հանում ենք այդ գումարի գումարելիներից մեկից, այն է՝ միավորներից։ Յեթե այդ անկարելի յե անել, վերցնում ենք նվազելիի տասնավորներից մեկը, այն վերածելով հասարակ միավորների՝ միացնում ենք նվազելիի միավորներին և ապա հանում հանելիի միավորները։ Յեթե նվազելիի մեջ տասնավորներ չլինեն, վերցնում ենք 1 հարյուրավոր և այն վերածում ենք տասնավորների և այլն։

34. Գումարման ստուգումը։ *Համոզվելու համար, վոր գործողությունը ճիշտ է կատարված, պետք է այն* ստուգել։ *Գումարման ստուգման համար սովորաբար գումարելիները գումարում են յերկրորդ անգամ, բայց այս անգամ վոչ այն կարգով, ինչ վոր առաջին անգամ, օրինակ,* ներքևից վերև։ *Յեթե յերկրորդ գումարման ժամանակ նույն թիվն է ստացվում, ապա միանգամայն հավանական է, վոր գումարումը ճիշտ է կատարված։*

Մյուս կողմից, գումարումը կարելի յե ստուգել և հանման միջոցով. դրա համար պետք է ստացված գումարից հանել գումարելիներից վորևե մեկը, յեթե տարբերությունը հավասար լինի մնացած գումարելիների գումարին, ապա կարելի յե հավանական համարել, վոր գործողությունը ճիշտ է կատարված։

35. Հանման ստուգումը գումարման միջոցով։ *Քանի վոր նվազելին գումար է, իսկ հանելին և մնացորդը—գումարելիներ, ապա հանման ստուգման համար բավական է գումարել հանելին և մնացորդը. յեթե ստացված թիվը հավասար է նվազելիին, ապա միանգամայն հավանական է, վոր գործողությունը ճիշտ է կատարված։*

Մյուս կողմից, քանի վոր հանելին և մնացորդը գումարելիներ են, իսկ նվազելին նրանց գումարը, և քանի վոր գումարելիների տեղափոխումից գումարը չի փոխվում, ապա հանումը կարելի յե ստուգել և հանման միջոցով. դրա համար պետք է նվազելիից հանել մնացորդ, յեթե ստացվի հանելին, ապա կարելի յե հավանական համարել, վոր գործողությունը ճիշտ է կատարված։

36. Թիվը մի քանի միավորով պակասեցնելը։ *Վորևե թիվ մի քանի միավորով պակասեցնել նշանակում է նրանից հանել այդ միավորները։ Այսպես, յեթե պահանջվում է 100-ը պակասեցնել 30-ով, ապա այդ նշանակում է, վոր պահանջվում է 100-ից հանել 30 (կստանանք 70)։*

37. Յերկու թվերի բաղդատումը։ *Ցանկանալով յերկու թիվ բաղդատել իրար հետ, մենք հարց ենք առաջադրում, թե մի թիվը քանի միավորով մեծ է կամ փոքր է մյուսից։ Այդ իմանալու համար պետք է մեծ թվից հանել փոքր թիվը։ Օրինակ, իմանալու համար, թե 20-ը քանի միավորով փոքր է 35-ից (կամ քանի միավորով 35-ը մեծ է 20-ից), պետք է 35-ից հանել 20-ը. այն ժամանակ կիմանանք, որ 20-ը 35-ից փոքր է (կամ 35-ը 20-ից մեծ է) 15 միավորով։*

38. Տարբերության փոփոխվելը տված թվերի փոփոխության դեպքում *կարելի յե արտածել իբրև գումարի փոփոխության հետևանք, քանի որ նվազելին գումար է, իսկ հանելին և մնացորդը—գումարելիներ։*

Ուստի, յեթե նվազելիին ավելացնենք մի քանի միավոր, ապա մնացորդն էլ կավելանա այդքան միավորով։

Յեթե նվազելուց հանենք մի քանի միավոր, ապա մնացորդն էլ կպակասի այդքան միավորով։

Յեթե հանելիին ավելացնենք մի քանի միավոր, ապա մնացորդն էլ կպակասի այդքան միավորով։

Յեթե հանելիից հանենք մի քանի միավոր, ապա մնացորդն էլ կմեծանա այդքան միավորով։

Օգտակար է հատուկ ուշադրություն դարձնել այն բանի վրա, **որ մնացորդը չի փոխվի, յեթե նվազելին յեվ հանելին միաժամանակ մեծացնենք կամ փոքրացնենք միևնույն թվով։**

Այսպես՝

$$(11+6)-(3+6)=11-3=8$$

39. Ինչպես պետք է թվից հանել տարբերությունը։ *Դիցուք, պահանջվում է 30-ից հանել 12—8 տարբերությունը։ Փոխանակ սկզբից այդ տարբերությունը գտնելու (որը կլինի 4) և ապա 30-ից հանելու (կստանանք 26), կարող ենք վարվել այսպես՝ 8-ով կմեծացնենք թե 30 նվազելին և թե 12—8 հանելին. այն ժամանակ 30-ի փոխարեն կունենանք 38, իսկ 12—8 տարբերության փոխարեն կստանանք 12։ Այժմ 38-ից հանենք 12, կստանանք 26։ Այդ էլ հենց կլինի որոնելի թիվը, որովհետև մենք նվազելին և հանելին մեծացրինք միևնույն թվով, որից տարբերությունը չի փոխվի։*

Կարելի յե վարվել և այսպես. 30-ից կհանենք ոչ թե 12-ը

առանց 8-ի, այլ ուղղակի—12 (կստանանք 18)։ Բայց մենք հանեցինք 8-ով ավելի, քան պահանջվում էր, որից մնացորդը փոքրացավ 8 միավորով. նշանակում է, յեթե 18-ը մեծացնենք 8-ով, ապա կգտնենք որոնելի մնացորդը—26։ Այսպիսով.

տարբերությունը հանելու համար կարելի յե ավելացնել հանելին յեվ ապա հանել նվազելին, կամ թե հանել նվազելին[1]), ապա ավելացնել հանելին։

Ընդհանուր ձևով այդ կանոնը կարելի յե արտահայտել այսպիսի հավասարություններով.

$$a-(b-c)=a+c-b;\quad a-(b-c)=a-b+c$$

V. ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅԱՆ ՆՇԱՆՆԵՐԸ։ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅԱՆ ՅԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅԱՆ ՆՇԱՆՆԵՐԸ։ ՓԱԿԱԳԾԵՐ

40. Նշանները։ *Խնդիրներ լուծելիս յերբեմն կարիք է լինում առանց իսկապես գործողություններ կատարելու՝ միայն նշաններով ցույց տալ, թե տված թվերի նկատմամբ ինչ գործողություններ պիտի կատարել։ Ընդունենք, թե պետք է ցույց տալ, որ 10, 15 և 20 թվերը պահանջվում է գումարել։ Այն ժամանակ տված գումարելիները գրում են մի տողում և նրանց մեջ դնում գումարման նշան՝ 10+15+20։*

Յեթե պետք է ցույց տալ, որ մի թվից պահանջվում է հանել մյուսը, ապա նվազելին և հանելին գրում են մի տողում և նրանց մեջ դնում—նշանը։ Այսպես, 10—8 արտահայտությունը ցույց է տալիս, որ 10-ից պետք է հանել 8-ը։

10+15+20 արտահայտությունը կարդացվում է այսպես. 10 գումարած 15, գումարած 20, կամ թե 10-ի, 15-ի և 20-ի գումարը։ 10—8 արտահայտությունը կարդացվում է այսպես. 10-ից հանած 8 կամ թե 10-ի և 8-ի տարբերությունը։

Գործածվում է նաև =, > և < նշանները, որոնցից մենք արդեն օգտվել ենք։ Առաջինը կոչվում է **հավասարության նշան** *և փոխարինում է «հավասար է» բառին, մյուս յերկուսը կոչվում են* **անհավասարության նշաններ** *և ցույց է տալիս՝ > նշանը «մեծ է», իսկ < նշանը—«փոքր է». օրինակ, 7+8=15, 7+8>10*

[1]) Յեթե այդ հնարավոր է, այսինքն՝ յեթե նվազելին մեծ չէ այն թվից, որից պետք է հանել տարբերությունը։

և 7+8<20 արտահայտությունները կարդացվում են այսպես․ 7 գումարած 8 հավասար է 15-ի, 7 գումարած 8 մեծ է 10-ից, 7+8 փոքր է 20-ից։ Անհրաժեշտ է հիշել, վոր > և < նշանները իրենց սուր անկյունով ուղղված են դեպի փոքր թիվը։

Պատահում են նաև ≠ (հավասար չէ), ⩽ (փոքր է կամ հավասար), ⩾ (մեծ է կամ հավասար) նշանները։

41. Փակագծեր։ Բանաձև։ Խնդիրներ լուծելիս շատ օգտակար է նախքան գործողություններ կատարելը ցույց տալ, թե տված թվերով ինչ գործողություններ պիտի կատարել և ինչ հաջորդականությամբ, առաջադրված հարցի պատասխանը ստանալու համար։ Ընդունենք, որինակ, վոր խնդիր լուծելու համար նախ պետք է գումարել 35-ը և 20-ը, ապա այդ գումարը հանել 200-ից։ Այդ ցույց տալու համար գրում են այսպես․

200—(35+20)։

Այստեղ փակագծերը, վորոնք դրված են—նշանից հետո, ցույց են տալիս, վոր 200-ից պետք է հանել 35+20 գումարը, այսինքն՝ 55։

Յերբեմն այն արտահայտությունը, վոր փակագծերի մեջ է առնված, կարիք է լինում մտցնել նոր փակագծերի մեջ, այդպիսի դեպքում գործածում են տարբեր ձևի փակագծեր՝ նրանց իրարից տարբերելու համար, որինակ․

100+{160—[60—(7+8)]}

Այս արտահայտությունը նշանակում է, 7-ին գումարել 8 (կստանանք 15)․ ստացված գումարը (15) հանել 60-ից (կստանանք 45)․ գտած թիվը (45) հանել 160-ից (կստանանք 115)․ ստացված թիվը գումարել 100-ին (կստանանք 215)։ Ըստ վորում գործողությունների հաջորդականությունը յենթադրվում է այնպես, վոր նախ՝ կատարվում է ամենաներսի փակագծերում նշված գործողությունը և այլն։

Նկատենք, վոր հաջորդական գումարումներն ու հանումները նշանակելիս, այսինքն, յերբ գործողությունները պետք է կատարվեն այն կարգով, ինչպես վոր գրված են, սովորաբար փակագծեր չեն դրվում։ Այսպես, յեթե գրված է

20—2+4—5,

ապա դա նշանակում է նույնը, ինչ և

[(20—2)+4]—5,

այսինքն, վոր 20-ից հանվում է 2, ստացված տարբերությանն ավելացվում է 4 և այդ գումարից հանվում է 5։

Այն արտահայտությունը, վորը ցույց է տալիս, թե տված թվերով ինչ գործողություններ և ինչ կարգով պետք է կատարել՝ վորոնելի թիվը ստանալու համար, կոչվում է բանաձև։

Հաշվել բանաձևը—նշանակում է գտնել այն թիվը, վորը կստացվի բանաձևի մեջ նշված բոլոր գործողությունները կատարելուց հետո։

VI. ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄ

ԽՆԴԻՐ։ Գնեցին 6 քանոն, յուրաքանչյուրը 85-ական կոպեկով։ Ինչքա՞ն վճարեցին բոլոր քանոնների համար։

Այս խնդիրները լուծելու համար պետք է գտնենք 6 իրար հավասար գումարելիների գումարը՝

85+85+85+85+85+85=510 (=5 ռ. 10 կոպ.)։

Մեր խնդրում այդ գումարը գտնում ենք սովորական գումարման միջոցով։ Բայց յերբ հավասար գումարելիների թիվը մեծ է, գումարման միջոցով գումարը գտնելը դառնում է հոգնեցուցիչ։

Բայց քանի վոր հավասար գումարելիներ գումարելը շատ հաճախ է պատահում, դրա համար թվաբանությունը մշակում է այդ գումարները գտնելու ավելի արագ յեղանակներ։

Յերբ կատարվում է հավասար գումարելիների գումարում, այսինքն, յերբ միևնույն թիվը վորպես գումարելի կրկնվում է մի քանի անգամ, ապա ասում են, վոր այդ թիվը բազմապատկվում է (վերցվում է շատ անգամ)։ Յերբ նա կրկնվում է 6 անգամ, ասում են, վոր բազմապատկվում է 6-ով, յեթե կրկնվում է 20 անգամ, ապա ասում են, վոր նա բազմապատկվում է 20-ով և այլն։

42. Ինչ է բազմապատկումը։ Բազմապատկումը կոչվում է հավասար գումարելիների գումարումը։

Ըստ վորում այն թիվը, վորը կրկնվում է վորպես գումա-

թելի, կոչվում է **բազմապատկելի** (նա բազմապատկվում է), իսկ այն թիվը, որը ցույց է տալիս, թե քանի այդպիսի հավասար գումարելիներ է վերցվում, կոչվում է **բազմապատկիչ**։

Բազմապատկումից հետո ստացված թիվը կոչվում է **արտադրյալ**։ Օրինակ, երբ 85-ը բազմապատկվում է 6-ով, ուրեմն 85-ը բազմապատկելին է, 6-ը—բազմապատկիչը, իսկ բազմապատկելուց հետո ստացված 510 թիվը—արտադրյալը։ Բազմապատկելին և բազմապատկիչը միաժամանակ կոչվում են **արտադրիչներ**։

Ընդունված է բազմապատկումը նշել առանձին նշանով։ Եթե, օրինակ, 85-ը պետք է բազմապատկել 6-ով, ապա գրում են այսպես՝ 85·6, այսինքն՝ գրում են բազմապատկելին, նրանից աջ դնում են բազմապատկման նշանը (կետ), իսկ նշանից աջ՝ բազմապատկիչը։ Այդպիսի նշանակումը փոխարինում է 85+85+85+85+85+85 գումարին։ Եթե արտադրյալը գտնված է, ապա կարելի է գրել 85·6=510[1]) հավասարությունը։

Այս հավասարությունը կարելի է կարդալ տարբեր ձևով.

6 հավասար գումարելիների գումարը, գումարելիներ, որոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է 85-ի, կազմում է 510.

85-ը բազմապատկած 6-ով, կազմում է 510.

85-ի և 6-ի արտադրյալը հավասար է 510-ի։

Դիտողություններ. 1) Քանի որ բազմապատկումը գումարման մասնավոր դեպքն է, ապա այն միշտ հնարավոր է կատարել և տվյալ արտադրիչների դեպքում տալիս է միակ արդյունքը։

2) Երբ արտադրիչները նշանակված են տառերով, ապա նրանց բազմապատկումը հաճախ նշվում է առանց որևէ նշանի (ուղղակի արտադրիչները զետեղում են իրար մոտ)։ Այսպես, եթե գրված է ab, ապա այդ նշանակում է, որ a թիվը բազմապատկվում է b թվով։ Նույնպես ոչ մի նշան չեն դնում, եթե արտադրիչներից միայն մեկն է նշանակված տառով, օրինակ, 5a։

3) Բազմապատկելին կարող է նշել ուզած անվան միավորները, օրինակ, մետրեր, ռուբլիներ, ժամեր և այլն։ Արտադրյալը պետք է ցույց տա նույն անվան միավորները, ինչ որ բազմապատկելին։ Այսպես, եթե 7 ռուբլին բազմապատկվում է 4-ով, ապա ստացվում է 28 ռուբլի։

Բազմապատկիչը, նշելով, թե քանի միատեսակ գումարելիներ է վերցված, անուն չունի. այսպես, կարելի է 7 ռուբլին բազմապատկել 4-ով, բայց

1) Կետի փոխարեն որպես բազմապատկման նշան գործածվում է նաև թեք խաչը (×)։

չի կարելի բազմապատկել 4 ռուբլով կամ 4 մետրով։ Կիրառական գիտությունների մեջ (օրինակ, ֆիզիկայի մեջ) հաճախ իրարով բազմապատկվում են անվանական թվեր, ընդորում արտադրյալի անունը դիտվում է որպես արտադրիչների անունների արտադրյալ։

43. Բազմապատկման մի քանի առանձնահատուկ դեպքեր: 1) **Երբ բազմապատկելին միավոր է, ապա արտադրյալը հավասար է բազմապատկիչին,** այսպես, 1·5=5, որովհետև 1+1+1+1+1 գումարը կազմում է 5։

2) **Երբ բազմապատկելին զերո է, ապա արտադրյալն էլ հավասար է զերոյի։** Օրինակ, 0·4=0, որովհետև 0+0+0+0 գումարը, ինչպես արդեն պայմանավորվել ենք (§ 24), պետք է ընդունել հավասար զերոյի։

3) **Երբ բազմապատկիչը միավոր է, ապա արտադրյալը ընդունվում է հավասար բազմապատկելիին.** օրինակ, 5·1=5 (եթե 5-ը վերցնենք 1 անգամ, կստանանք 5)։

4) **Երբ բազմապատկիչը զերո է, ապա արտադրյալն ընդունվում է հավասար զերոյի։** Օրինակ, 5·0=0 (եթե 5-ը ոչ մի անգամ չվերցնենք, ապա ոչինչ չենք ստանա)։

44. Թիվը մի քանի անգամ մեծացնելը։ Թիվը 2 անգամ, 3 անգամ, 4 անգամ և ավելի անգամ մեծացնել, նշանակում է կազմել տված թվին հավասար երկու, երեք, չորս և այլն գումարելիների գումարը։ Օրինակ, 10-ը 5 անգամ մեծացնել նշանակում է վերցնել 5 գումարելիների, որոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է 10-ի, գումարը, այսինքն, 10-ը բազմապատկել 5-ով։ Այսպիսով, թիվը **մի քանի անգամ** մեծացնելը կատարվում է **բազմապատկման** միջոցով (մինչդեռ թվի մեծացումը **որևէ թվով** կատարվում է **գումարման** միջոցով)։

45. Արտադրիչների տեղափոխումից արտադրյալը չի փոխվում։ Դիցուք, ցանկանում ենք հաշվել այստեղ բերված գծիկները՝

I I I I I I I
I I I I I I I
I I I I I I I

Առաջին տողում գծիկները 7 հատ են, երկրորդում և երրորդում նույնպես 7-ական, ուրեմն, բոլոր գծիկները կլինեն 7+7+7, այսինքն 7·3։ Բայց նույն գծիկները կարելի է հաշվել

ուղղաձիգ սյունակներով. առաջին սյունակում 3 գծիկներ են, յերկրորդում՝ 3, յերրորդում՝ 3 և այլն. քանի որ սյունակների թիվը 7 է, ապա գծիկները կլինեն 3+3+3+3+3+3+3, այսինքն, 3.7: Բայց գծիկների թիվը կախված չէ այն բանից, թե մենք ինչ կարգով ենք հաշվում, ուրեմն, 7.3=3.7:

Նույն ձևով կարելի յե համոզվել, որ 8.5=5.8, 20.15=15.20 և այլն: Ընդհանրապես

արտադրյալը չի փոխվում, յերբ բազմապատկելին տեղափոխում ենք բազմապատկիչի տեղը, իսկ բազմապատկիչը—բազմապատկելիի տեղը:

Այս հատկությունը կոչվում է **բազմապատկման տեղափոխման օրենք:** Ընդհանուր ձևով այդ կարելի յե արտահայտել

$$ab=ba$$

հավասարությունով:

Դիտողություն: Բազմապատկումն այդ հատկությունն ունի նաև այն ժամանակ, յերբ բազմապատկիչը միավոր է, կամ զերո, այսպես, 1.5=5 և 5.1=5, 0.4=0 և 4.0=0:

46. Բազմապատկման աղյուսակը: Ուզած թվերի բազմապատկումն արագ կատարել կարողանալու համար պետք է հիշել **միանիշ** թվերի բոլոր արտադրյալները: Դրա համար կազմում են (գումարման միջոցով) այսպես կոչվող **բազմապատկման աղյուսակը** և այն անգիր սովորում:

47. Այն կարգը, որով պետք է ենթարկենք բազմապատկումը:

Մենք կնշենք, թե ինչպես է կատարվում բազմապատկումը, ինչ հաջորդականությամբ.

1) բազմանիշ թվի բազմապատկումը միանիշ թվով.

2) ուզած թվի բազմապատկումն այնպիսի թվով, որն արտահայտվում է 1 թվանշանով և մեկ կամ մի քանի զերոներով.

3) ուզած թվի բազմապատկումն այնպիսի թվով, որն արտահայտվում է որևէ իմաստավոր թվանշանով և մեկ կամ մի քանի զերոներով.

4) բազմանիշ թվի բազմապատկումը բազմանիշ թվով.

5) զերոներով վերջացող թվերի բազմապատկումը:

48. Բազմանիշ թվի բազմապատկումը միանիշ թվով: Դիցուք, պահանջվում է 846-ը բազմապատկել 5-ով: Ընդունված է գործողությունը դասավորել այսպես՝

$$\begin{array}{r} 846 \\ \cdot\ 5 \\ \hline 4230, \end{array}$$

այսինքն, գրում են բազմապատկելին, նրա տակ բազմապատկիչը. բազմապատկչի տակ քաշում են գծիկ: Գծիկի տակ գրում են արտադրյալի թվանշանները նույն կարգով, ինչ կարգով որ ստացվում են դրանք:

846-ը բազմապատկել 5-ով, նշանակում է գումարել 5 թիվ, որոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է 846-ի: Դրա համար բավական է նախ վերցնել 5 անգամ 6-ական միավոր, ապա 5 անգամ 4-ական տասնավոր և վերջապես 5 անգամ 8-ական հարյուրավոր:

Ամեն անգամ արտադրյալը կգտնենք բազմապատկման աղյուսակով:

5 անգամ 6-ական միավոր=30 միավորի, այսինքն՝ 3 տասնավորի, գծիկի տակ միավորների տեղը կգրենք զերո, իսկ 3 տասնավորը մտքում կպահենք. 5 անգամ 4-ական տասնավոր=20 տասնավորի, 3 տասնավոր էլ=23 տասնավորի, այսինքն՝ 2 հարյուրավորի և 3 տասնավորի: Գծիկի տակ տասնավորների տեղը կգրենք 3, իսկ 2 հարյուրավորները մտքում կպահենք:

5 անգամ 8-ական հարյուրավոր=40 հարյուրավորի, ևս 2 հարյուրավոր=42 հարյուրավորի, գծիկի տակ կգրենք 42 հարյուրավոր, այսինքն՝ 4 հազարավոր և 2 հարյուրավոր:

Այսպիսով, 846-ի և 5-ի արտադրյալը դառնում է հավասար 4230-ի:

49. Բազմապատկում այնպիսի թվով, որն արտահայտվում է միավորով յեվ մեկ կամ մի քանի զերոներով: Դիցուք, թե պահանջվում է 358-ը բազմապատկել 10-ով, այսինքն՝ գումարել 10 այնպիսի թվեր, որոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է 358-ի: Յեթե 10 անգամ վերցնենք մեկական միավոր, կստացվի 1 տասնավոր. կնշանակի, յեթե 10 անգամ վերցնենք 358-ական միավոր, կստացվի 358 տասնավոր, որը կազմում է

3580 միավոր։ Վերցնենք մի ուրիշ օրինակ ևս՝ 296 · 1000։

Մեկ միավորը, որպես գումարելի կրկնված 1000 անգամ, կազմում է 1 հազար. հետևաբար, 296 միավորը, կրկնված 1000 անգամ, կազմում է 296 հազար, որը գրվում է այսպես. 296 000։

Կանոն։ Ուզած թիվը մեկով յեվ զերոներով արտահայտվող թվով բազմապատկելու համար բավական է միայն բազմապատկելիին աջից կցագրել այնքան զերո, որքան զերո կա բազմապատկիչի մեջ։

50. Բազմապատկում այնպիսի թվով, որն արտահայտվում է որևէ իմաստավոր թվով յեվ մեկ կամ մի քանի զերոներով։ Ասենք, թե պահանջվում է 248-ը բազմապատկել 30-ով, այսինքն՝ գումարել 30 միատեսակ գումարելիներ, որոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է 248-ի։ Ենթադրենք, որ այդ 30 գումարելիները միացված են 10-ը միանման խմբերի մեջ, յուրաքանչյուրում 3-ական գումարելի.

248	248	248	248	248	248	248	248	248	248
248	248	248	248	248	248	248	248	248	248
248	248	248	248	248	248	248	248	248	248
744	744	744	744	744	744	744	744	744	744

Այսպիսով, մենք կարող ենք վերցնել 3 անգամ 248-ական, և այդ գործողության արդյունքը (744 թիվը) բազմապատկել 10-ով։ Ուրիշ խոսքով, որևէ թիվ 30-ով բազմապատկելու համար բավական է այդ թիվը բազմապատկել 3-ով և ստացված արտադրյալը բազմապատկել 10-ով, (որի համար ստացված թվին աջից կցագրել մեկ զերո)։

$$248 \cdot 3 = 744, \quad 744 \cdot 10 = 7440։$$

Վերցնենք մի ուրիշ օրինակ ևս՝ 895 · 400։

Այս օրինակում պահանջվում է գումարել 400 թիվ, որոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է 895-ի։

400 գումարելիները կարելի է միացնել 100 խմբում, յուրաքանչյուրը 4-ական գումարելիներով։ Իմանալու համար, թե այդ խմբերից մեկում քանի միավոր կա, պետք է 895-ը բազմապատկել 4-ով (կստանանք 3580)։ Այնուհետև իմանալու

համար, թե քանի միավոր կա բոլոր խմբերում, պետք է 3580-ը բազմապատկել 100-ով (որի համար բավական է 3580 թվին աջից կցագրել երկու զերո)։

Կանոն։ Ուզած թիվը որևէ իմաստավոր թվանշանով յեվ զերոներով արտահայտվող թվով բազմապատկելու համար բավական է բազմապատկելին բազմապատկել այդ իմաստավոր թվով յեվ ստացված արտադրյալին աջից կցագրել այնքան զերո, որքան զերո կա բազմապատկիչի մեջ։

51. Բազմապատկում բազմանիշ թվով։ Դիցուք, թե պահանջվում է կատարել հետևյալ բազմապատկումը՝

$$3826 \cdot 472,$$

այսինքն՝ գումարել 472 միատեսակ թվերը, որոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է 3826-ի։ Դրա համար բավական է նախ գումարել 2 այդպիսի թվեր, հետո ևս 70, ապա ևս 400, և վերջապես ստացված բոլոր գումարները միացնել, այսինքն՝ պահանջվում է 3826 թիվը որպես գումարելի կրկնել 472 անգամ։ Դրա համար բավական է 3826-ը որպես գումարելի կրկնել 2 անգամ, հետո 70 անգամ, ապա 400 անգամ և ստացված գումարելիները միացնել, այլ խոսքով, բավական է 3826-ը բազմապատկել 2-ով, հետո 70-ով, ապա 400-ով և ստացված արտադրյալները գումարել։

Գործողությունը կդասավորենք այսպես. կգրենք բազմապատկելին, նրա տակ բազմապատկիչը և վերջինիս տակ կքաշենք մի գիծ։

$$\begin{array}{r} 3826 \\ \cdot\ 472 \\ \hline 7652 \\ 267820 \\ 1530400 \\ \hline 1805872 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3826 \\ \cdot\ 472 \\ \hline 7652 \\ 26782 \\ 15304 \\ \hline 1805872 \end{array}$$

Բազմապատկելին բազմապատկում ենք 2-ով և ստացված արտադրյալը գրում գծի տակ. դա կլինի առաջին մասնակի արտադրյալը (այն է 7652)։

Բազմապատկելին բազմապատկում ենք 70-ով։ Դրա համար բավական է բազմապատկելին բազմապատկել 7-ով և ար-

տադրյալին աջից կցագրել զերո. ուստի զերոն գրում ենք առաջին մասնակի արտադրյալի միավորների տակ, իսկ այն թվանշանները, վոր ստացվում են բազմապատկելին 7-ով բազմապատկելուց, գրում ենք նրանց ստացման կարգով առաջին մասնակի արտադրյալի տասնավորների, հարյուրավորների և մյուս կարգերի թվանշանների տակ: Դա կլինի **յերկրորդ մասնակի արտադրյալը** (267820):

Բազմապատկելին բազմապատկում ենք 400-ով: Դրա համար բավական է 3826-ը բազմապատկել 4-ով և արտադրյալին աջից կցագրել յերկու զերո: Այդ յերկու զերոները գրում ենք յերկրորդ մասնակի արտադրյալի միավորների և տասնավորների տակ, իսկ այն թվանշանները, վորոնք ստացվում են բազմապատկելին 4-ով բազմապատկելուց, գրում ենք հաջորդաբար յերկրորդ մասնակի արտադրյալի հարյուրավորների, հազարավորների և մյուս կարգերի թվանշանների տակ: Այն ժամանակ ստանում ենք յերրորդ **մասնակի արտադրյալը** (1530400):

Վերջին մասնակի արտադրյալի տակ գիծ ենք քաշում և գումարում բոլորը. ստանում ենք լրիվ արտադրյալը:

Գրության կարճության համար զերոները, վոր ցույց ենք տվել թավ նիշերով, չեն գրում, բայց պետք է հիշել միայն, վոր բազմապատկելին բազմապատկիչի տասնավորներով բազմապատկելիս, պետք է ստացված առաջին թվանշանը գրել առաջին մասնակի արտադրյալի տասնավորների տակ, բազմապատկելին բազմապատկելով բազմապատկիչի հարյուրավորների թվանշանով, ստացված առաջին թվանշանը գրում ենք նախորդ մասնակի արտադրյալների հարյուրավորների տակ և այլն:

Դիտողություններ: 1) Յեթե բազմապատկիչի թվանշանների մեջ կա միավոր, ապա այդ թվով բազմապատկելիս պետք է հիշել, վոր յերբ բազմապատկիչը միավոր է, ապա արտադրյալը հավասար է բազմապատկելիին:

2) Յերբ բազմապատկիչի մեջ պատահում են զերոներ, ապա դրանցով չեն բազմապատկում, այլ ուղղակի բազմապատկում են բազմապատկիչի հետևյալ իմաստավոր թվով: Որինակ՝

$$\begin{array}{r} 470827 \\ \times\ 60013 \\ \hline 1412481 \\ 470827 \\ 2824962 \\ \hline 28255740751 \end{array}$$

Վերջին մասնակի արտադրյալը, վորն ստացվում է բազմապատկելին 6 տասհազարավորով բազմապատկելուց, իհարկե գրվում է այնպես, վոր նրա միավորների թվանշանը (2) լինի տասհազարավորների կարգում:

3) Յեթե բազմապատկիչի մեջ ավելի թվանշաններ կան, քան բազմապատկելիի մեջ, ապա մասնակի արտադրյալների թիվը պակասեցնելու համար ավելի լավ է բազմապատկիչը վերցնել վորպես բազմապատկելի, իսկ բազմապատկելին՝ վորպես բազմապատկիչ: Որինակ, 378 . 27468 արտադրյալը գտնելու համար 27468-ը բազմապատկում են 378-ով:

52. Զերոներով վերջացող թվերի կրճատ բազմապատկումը: Նախ վերցնենք մի որինակ, վորտեղ միայն բազմապատկելին է վերջանում զերոներով.

2700·15:

2700-ը բազմապատկել 15-ով նշանակում է գումարել 15 թիվ, վորոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է 2700-ի: Յեթե այդ գումարը սկսենք գտնել սովորական գումարման միջոցով,

$$+\left.\begin{array}{r} 2700 \\ 2700 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ 2700 \end{array}\right\}\ 15\ \text{անգամ}$$

$$\overline{00}$$

ապա, ինչպես ակնհայտ է, գումարելիների զերոները կանցնեն գումարի մեջ և բավական կլինի 15 անգամ վերցնել 27-ական հարյուրավոր: Ուրեմն, 2700-ը 15-ով բազմապատկելու համար բավական է 27-ը բազմապատկել 15-ով և արտադրյալին կցագրել յերկու զերո:

Ամենահարմարն է գործողությունը դասավորել այսպես՝

```
   2700
   ·15
   135
   27
   40500,
```

այսինքն՝ բազմապատկիչը գրվում է այնպես, որ բազմապատկելիի զերոները գտնվեն բազմապատկիչի աջ կողմում, ապա կատարում են բազմապատկումը, ուշադրություն չդարձնելով բազմապատկելիի զերոների վրա, իսկ արտադրյալին աջից կցագրում են զերոները։

Այժմ վերցնենք մի օրինակ, որտեղ միայն բազմապատկիչն է վերջանում զերոյով՝

358 · 23 000։

Այդ նշանակում է, որ պետք է գումարել 23 000 թիվ, որոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է 358-ի։ Բայց 23000 գումարելիները կարելի յե համախմբել 1000 հավասար խմբերում, յուրաքանչյուրում 23-ական գումարելի։ Իմանալու համար, թե քանի՞ միավոր կա յուրաքանչյուր խմբում, պետք է 358-ը բազմապատկել 23-ով, իսկ բոլոր խմբերի մեջ յեղած միավորների թիվը իմանալու համար պետք է մի խմբում յեղած միավորների թիվը բազմապատկել 1000-ով (որի համար բավական է այդ թվին աջից կցագրել 3 զերո)։ Գործողությունը սովորաբար դասավորում են այսպես․

```
   358
 ·23000
  1074
  716
  8234000
```

Վերջապես քննարկենք մի օրինակ, որտեղ տված յերկու թվերն էլ վերջանում են զերոներով՝

57 000·3200։

57 000-ը վերևի թվով բազմապատկելու համար պետք է

57-ը բազմապատկել այդ թվով և արտադրյալին կցագրել յերեք զերո։ Բայց 57-ը 3200-ով բազմապատկելու համար պետք է 57-ը բազմապատկել 32-ով և արտադրյալին կցագրել յերկու զերո։ Ուստի․

Յերբ բազմապատկելին յեվ բազմապատկիչը վերջանում են զերոներով, բազմապատկումը կատարում են, ուշադրություն չդարձնելով զերոների վրա յեվ արտադրյալին կցագրում են այնքան զերո, որքան զերո կա բազմապատկելիի յեվ բազմապատկիչի մեջ միասին վերցրած։

Գործողությունը դասավորում են այսպես․

```
   57000
   ·3200
   114
  171
  182400000
```

53. Արտադրյալի փոփոխությունը արտադրիչների փոփոխության հետևանքով։

1) Յերբ բազմապատկիչը մեծացնենք մի քանի անգամ, ապա արտադրյալն էլ կմեծանա այդքան անգամ։

Այսպես, յեթե

15·3=45

օրինակի մեջ բազմապատկիչը մեծացնենք, յենթադրենք, 4 անգամ, ապա կստանանք 15·12=180 արտադրյալը։ Նոր արտադրյալը նախորդից մեծ է 4 անգամ։ Այդպես էլ պետք է լինի, որովհետև առաջին արտադրյալը յերեք գումարելիների՝

15+15+15-ի գումարն է,

իսկ նոր արտադրյալը—12 այդպիսի գումարելիների գումարը․

15+15+15+15+15+15+15+15+15+15+15+15։

Օգտվելով գումարման զուգորդման օրենքից, կարող ենք վերջին գումարում յուրաքանչյուր յերեք գումարելին միացնել մի խմբի մեջ․

(15+15+15)+(15+15+15)+(15+15+15)+(15+15+15)

և այն ժամանակ կպարզվի, որ նոր արտադրյալը հավասար է

4 թվերի գումարին, վորոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է նախկին արտադրյալին, այսինքն՝ նոր արտադրյալը նախկինից մեծ է 4 անգամ:

2. Յերբ բազմապատկելին մեծացնենք մի քանի անգամ, ապա արտադրյալն էլ կմեծանա այդքան անգամ:

Այսպես, յեթե միևնույն որինակում բազմապատկելին մեծացնենք, յենթադրենք 6 անգամ, ապա կստանանք 90 · 3=270: Նոր արտադրյալը մեծ է նախկինից 6 անգամ: Այդպես էլ պետք է լինի, վորովհետև բազմապատկելին և բազմապատկիչը կարող են իրենց տեղերը փոխել, առանց փոխելու արտադրյալը, իսկ ինչպես տեսանք, բազմապատկիչը մի քանի անգամ մեծացնելով, արտադրյալն էլ մեծանում է այդքան անգամ:

1) և 2) դեպքերի վերաբերյալ ասածներից հետևում է՝

3) Յերբ բազմապատկելին կամ բազմապատկիչը փոքրացնենք մի քանի անգամ, ապա արտադրյալն էլ կփոքրանա այդքան անգամ:

Որինակ՝

20·2=40, 10·2=20: 5·2=10 և այլն:

Յեթե յերկու արտադրիչն էլ միաժամանակ փոփոխվեն, ապա արտադրյալը յերբեմն կմեծանա, յերբեմն էլ կփոքրանա, կամ թե կմնա անփոփոխ:

Վորպեսզի նախապես հնարավոր լինի վորոշել, թե արտադրիչների միաժամանակ փոփոխվելու դեպքում ինչ փոփոխություն կկրի արտադրյալը, հարկավոր է յենթադրել, վոր նախ փոփոխվել է միայն բազմապատկելին, ապա և բազմապատկիչը:

Որինակ, 15·6=90 արտադրյալի մեջ բազմապատկելին մեծացնենք 3 անգամ, իսկ բազմապատկիչը՝ 2 անգամ.

15·6=90; 45·12=?

Արտադրյալի փոփոխությունն իմանալու համար դատում ենք այսպես՝ բազմապատկելին 3 անգամ մեծացնելիս արտադրյալը կմեծանա 3 անգամ, այսինքն՝ կլինի վոչ թե 90, այլ 90+90+90: Այնուհետև բազմապատկիչը յերկու անգամ մեծացնելիս արտադրյալը 2 անգամ էլ կմեծանա, ուրեմն, նա այժմ կլինի

(90+90+90)+(90+90+90),

այսինքն՝ սկզբնական արտադրյալի հետ համեմատած նա կմեծանա կրկնակի յերեք *անգամ, այսինքն՝ 6 անգամ:*

Նույն որինակում բազմապատկելին մեծացնենք 8 անգամ, իսկ բազմապատկիչը փոքրացնենք 2 անգամ,

15·6=90; 120·3=?

Բազմապատկելին 8 անգամ մեծացնելով՝ արտադրյալը կմեծանա 8 անգամ, իսկ այնուհետև բազմապատկիչը 2 անգամ փոքրացնելով այդ 8 անգամ մեծացած արտադրյալը կփոքրանա 2 անգամ: Նշանակում է այդ յերկու փոփոխությունից հետո արտադրյալը կմեծանա միայն 4 անգամ:

120·3=360=90·4:

4) Յերբ արտադրիչներից մեկը մեծացնենք մի քանի անգամ, իսկ մյուսը փոքրացնենք նույնքան անգամ, ապա արտադրյալը չի փոխվի, *վորովհետև արտադրիչներից մեկի մեծացումով արտադրյալը կմեծանա, իսկ մյուսի փոքրացումով՝ արտադրյալը կփոքրանա նույնքան անգամ:*

15·6=90; 30·3=90; 5·18=90:

54. Բազմապատկման պարզեցումը վորոշ դեպքերում: *Իմանալով արտադրյալի փոփոխությունը կախված արտադրիչների փոփոխությունից, մենք կարող ենք բազմապատկումը յերբեմն պարզեցնել: Դիցուք, որինակ, պետք է 438-ը բազմապատկել 5-ով: Բազմապատկիչը կմեծացնենք 2 անգամ, այսինքն՝ 5-ի փոխարեն կվերցնենք բազմապատկիչ 10: Այն ժամանակ արտադրյալը կգտնենք միանգամից. դա կլինի 4380: Բայց մեծացնելով բազմապատկիչը 2 անգամ, մենք արտադրյալը մեծացրինք 2 անգամ, հետևապես, վորոնելի արտադրյալը պետք է 4380-ից կրկնակի փոքր լինի, այսինքն՝ նա պետք է լինի 2190: Նույն ձևով, յեթե պահանջվում է բազմապատկել 25-ով, կարող ենք բազմապատկել 100-ով և ստացված արտադրյալը փոքրացնել 4 անգամ:*

Յերբեմն պարզացումը ստացվում է յելնելով էլ ավելի հասարակ դատողությունից: Դիցուք, պահանջվում է 56-ը բազմապատկել 11-ով: 56-ը բազմապատկելով 10-ով ստանում ենք 560, մնում է էլի 1 անգամ ավելացնել 56. կստանանք 616:

Նման ձևով էլ կարելի յե ուզած ամեն թիվ բազմապատկել 19-ով։ Դրա համար բավական ե դա բազմապատկել 20-ով և ապա հանել բազմապատկելին։

55. Յերեք յեվ ավելի արտադրիչների արտադրյալը. Դիցուք, ունենք մի քանի թվեր, օրինակ՝ 7, 5, 3 և 4, վորոնք տված են վորոշ կարգով, օրինակ, այնպես, ինչպես մեզ մոտ գրված ե։ Այդ թվերից կազմենք արտադրյալ հետևյալ ձևով. առաջին թիվը բազմապատկելով յերկրորդ թվով, կստանանք 35. բազմապատկելով 35-ը յերրորդ թվով, կստանանք 105. բազմապատկելով 105-ը չորրորդ թվով, կստանանք 420։ 420-ը կոչվում ե 7, 5, 3 և 4 արտադրիչների արտադրյալը։ Նման ձևով կարելի յե գտնել հինգ, վեց և ավելի թվով արտադրիչների արտադրյալը։

Այդպիսի հաջորդական բազմապատկումը նշանակելու համար տված թվերը գրում են մի տողում այն կարգով, ինչ կարգով վոր պետք ե բազմապատկել, և նրանց միջև դնում են բազմապատկման նշան։ Այսպիսով։

$$3\cdot4\cdot2\cdot7$$

արտահայտությունը հավասարազոր ե

$$[(3\cdot4)\cdot2]\cdot7,$$

արտահայտության, այսինքն՝ դա նշանակում ե, վոր 3-ը բազմապատկվում ե 4-ով, ստացված արտադրյալը—2-ով և այս վերջին արտադրյալը—7-ով։

56. Արտադրյալը չի փոխվում արտադրիչների կարգը փոխելուց։ Արտադրյալի այն հատկությունը, վորին հանդիպեցինք § 45-ում, մնում ե ճիշտ նաև յերեք, չորս և ավելի արտադրիչների արտադրյալի համար. այսինքն՝ արտադրյալը չի փոխվում արտադրիչների կարգը փոխելուց (ինչքան էլ լինեն դրանք)։

Օրինակ. հաշվելով արտադրյալներից յուրաքանչյուրը,

$$2\cdot5\cdot3\cdot4\cdot7;\quad 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot7;\quad 4\cdot7\cdot3\cdot2\cdot5;\quad 7\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5,$$

վորոնք միմյանցից տարբերվում են միայն արտադրիչների կարգով, կստանանք միևնույն թիվը—840։

57. Արտադրյալի արտադրիչները կարելի յե խմբավորել ուզած ձևով.

Օրինակ՝

$$3\cdot4\cdot5\cdot2$$

արտադրյալի մեջ վերջին յերկու արտադրիչները միացնենք մի խմբի մեջ՝ 3·4·(5·2) և հաշվենք այդ արտահայտությունը՝ 3·4=12-ի; 5·2=10-ի; 12·10=120-ի։ Ստացանք միևնույն թիվը, ինչ կստանայինք յեթե բազմապատկումը կատարեյինք առանց խմբավորելու արտադրիչները. 3·4=12-ի, 12·5=60-ի; 60·2=120-ի։

Այս հատկությունը կոչվում ե բազմապատկման զուգորդման օրենք։ Սա կարելի յե դիտարկել վորպես տեղափոխման օրենքի հետևանք։ Իսկապես, համաձայն այդ օրենքի կարող ենք 5 և 2 արտադրիչները տեղափոխել շարքի սկիզբը, այսինքն՝ արտադրյալը գրել այսպես՝ 5·2·3·4։ Այստեղ 5 և 2 արտադրիչները կազմում են մի խումբ, քանի վոր § 56-ի սահմանման համաձայն 5·2·3·4 արտահայտությունը նշանակում ե (5·2)·3·4 արտադրյալը։ Այժմ կարելի յե այդ խմբի ստացած յուրաքանչյուր արտադրիչի տեղը փոխել։ Օրինակ

$$(5\cdot2)\cdot3\cdot4=3\cdot(5\cdot2)\cdot4=3\cdot4\cdot(5\cdot2),$$

Բազմապատկման զուգորդման օրենքն ընդհանուր ձևով կարելի յե արտահայտել (յերեք արտադրիչների համար) այսպես՝

$$abc=(ab)c=a(bc)։$$

58. Ինչպես բազմապատկել արտադրյալով յեվ ինչպես բազմապատկել արտադրյալը։ Տեսանք (§ 50-ում), վոր յեթե պահանջվում ե վորևե թիվ բազմապատկել 30-ով (այսինքն՝ 3·10 արտադրյալով), ապա բավական ե բազմապատկելին բազմապատկել 3-ով և այնուհետև ստացված թիվը՝ 10-ով։ Նույնպես և վորևե թիվ 400-ով (այսինքն՝ 4·100 արտադրյալով) բազմապատկելու համար կարելի յե այդ թիվը բազմապատկել 4-ով և ապա ստացված թիվը՝ 100-ով։

Յուրաքանչյուր բազմապատկիչով հաջորդաբար բազմապատկելու այդ յեղանակն առանձին գործադրվում ե նաև չորս, հինգ և ավելի արտադրիչներ ունեցող արտադրյալների նկատմամբ։

Այսպես՝

$$7\cdot(3\cdot5\cdot8)=7\cdot3\cdot5\cdot8=[(7\cdot3)\cdot5]\cdot8,$$

վորովհետև համաձայն § 57-ի 3, 5 և 8 բազմապատկիչները կարող են միացվել մի խմբի մեջ։

Այսպիսով,

արտադրյալով բազմապատկելու համար կարելի յե նախ բազմապատկել առաջին արտադրիչով, հետո ստացված արտադրյալը բազմապատկել յերկրորդ արտադրիչով, ապա յերրորդով յեվ այլն։

2) Դիցուք, պահանջվում ե $7 \cdot 3 \cdot 4$ արտադրյալը բազմապատկել 8-ով։ Փոխանակ նախ հաշվելու $7 \cdot 3 \cdot 4$ արտադրյալը (վորը հավասար ե 84-ի), և ապա 8-ով բազմապատկելու կստանանք 672), կարող ենք 7, 3 կամ 4 արտադրիչներից մեկը բազմապատկել 8-ով, մյուսները թողնելով անփոփոխ և ապա վերաբազմապատկել նրանց։ Որինակ, 3 արտադրիչը բազմապատկենք 8-ով, կունենանք՝ $7 \cdot (3 \cdot 8) \cdot 4 = 7 \cdot 24 \cdot 4 = 672$-ի. ստացանք նույն թիվը, ինչ և առաջ։

Այսպիսով,

արտադրյալը մի վորեվե թվով բազմապատկելու համար կարելի յե այդ թվով բազմապատկել արտադրիչներից մեկը, մյուսները թողնելով անփոփոխ։

Այսպես՝

$$(5 \cdot 4 \cdot 8) \cdot 3 = (5 \cdot 3) \cdot 4 \cdot 8 = 5 \cdot (4 \cdot 3) \cdot 8 = 5 \cdot 4 \cdot (8 \cdot 3) = 480։$$

Այս կանոնը հանդիսանում ե տեղափոխման և զուգորդման որենքների ակնբախ հետևանքը։

59. Ինչպես պետք ե գումարը բազմապատկել վորեվե թվով։ Յերբ առաջ (§ 48-ում) 846 թիվը (այսինքն՝ 6 միավորների 4 տասնավորների և 8 հարյուրավորների գումարը) բազմապատկում եյինք 5-ով, մենք 5-ով առանձին-առանձին բազմապատկում եյինք միավորները, տասնավորները և հարյուրավորները և ստացված թվերը գումարում։ Այդ յեղանակով կարելի յե վարվել միշտ, յերբ պահանջվում ե գումարը բազմապատկել վորևե թվով։ Դիցուք, պետք ե $10+7+5+9$ գումարը բազմապատկել 3-ով։ Այդ նշանակում ե, վոր պահանջվում ե գտնել

$$(10+7+5+9)+(10+7+5+9)+(10+7+5+9)$$

գումարը։

Բայց գումարներն ավելացնելու համար կարելի յե առանձին գումարել յուրաքանչյուր գումարելին մեկը մյուսից հետո (§ 21)։ Ուստի, հենց այժմ գրված գումարը կարելի յե փոխարինել

$$10+7+5+9+10+7+5+9+10+7+5+9$$

գումարով։

Այդ գումարի անդամները խմբավորենք այսպես՝

$$(10+10+10)+(7+7+7)+(5+5+5)+(9+9+9),$$

այն ժամանակ կստանանք

$$10 \cdot 3+7 \cdot 3+5 \cdot 3+9 \cdot 3։$$

Այս դատողությունը կարելի յե կրկնել ուզած ուրիշ թվերի համար։

Այսպիսով.

գումարը վորեվե թվով բազմապատկելու համար պետք ե այդ թվով բազմապատկել յուրաքանչյուր գումարելին առանձին յեվ արդյունքները գումարել։

Քանի վոր արտադրիչների տեղափոխումից արտադրյալը չի փոխվում, ապա այստեղից յեզրակացրած կանոնից հետևում ե՝

վորեվե թիվ գումարով բազմապատկելու համար կարելի յե այդ թիվը բազմապատկել յուրաքանչյուր գումարելիով առանձին յեվ արդյունքները գումարել։

Այդպես ել վարվեցինք, յերբ (§ 51) 3826 թիվը բազմապատկեցինք 472-ով, այսինքն՝ $2+70+400$ գումարով։

Այս հատկությունը կոչվում ե բազմապատկման բաշխական որենք (գումարման նկատմամբ), քանի վոր ըստ այդ որենքի գումարի նկատմամբ կատարված բազմապատկումը կարելի յե բաշխել առանձին գումարելիների միջև։ Ընդհանուր ձևով այդ որենքը կարելի յե արտահայտել այսպես.

$$(a+b+c+\ldots)\, m = am+bm+cm+\ldots$$

կամ

$$m(a+b+c+\ldots) = ma+mb+mc+\ldots$$

Դիտողություն: Թյուրիմացություններից խուսափելու համար $am+bm+cm+\ldots$ արտահայտությունը պետք ե գրել այսպես. $(am)+(bm)+(cm)+\ldots$

Բայց գրության կարճության համար պայմանավորվել ենք, վոր յեթե արտահայտության մեջ նշված են գումարման, հանման և բազմապատկման գործողություններ, և փակագծեր չեն դրված, ապա նախ պետք ե կատարել բազմապատկումը, իսկ հետո՝ գումարումը և հանումը։ Այդ դեպքում և առանց փակագծերի պարզ կլինի, թե $am+bm+cm+\ldots$ արտահայտության մեջ գործողություններն ինչ կարգով պիտի կատարել։

VII. ԲԱԺԱՆՈՒՄ

60. *Մինչև հիմա մենք ընդունում էինք բոլոր արտադրիչները վորպես տվյալներ, իսկ արտադրյալը՝ վորոնելի: Բայց կան շատ խնդիրներ, վորոնց մեջ, ընդհակառակը, յերկու թվերի արտադրյալը տված է, իսկ այդ թվերից մեկն անհայտ է:*

Խնդիր 1. Դասարանում բաժանեցին 75 տետր, յուրաքանչյուր աշակերտին տալով 3-ական տետր: Քանի՞ աշակերտ կա դասարանում:

Յեթե յուրաքանչյուր աշակերտի ստացած տետրերի թիվը (այսինքն՝ 3-ը) բազմապատկենք աշակերտների անհայտ թվով, ապա պետք է ստանանք բաժանված տետրերի ընդհանուր թիվը (այսինքն՝ 75): Այսպիսով, այստեղ տված են արտադրյալը (75) և արտադրիչներից մեկը (3), իսկ մյուս արտադրիչը վորոնում ենք: Աշակերտների վորոնելի թիվը հավասար է 25-ի, քանի վոր 3.25=75-ի:

Խնդիր 2. Դասարանում կա 30 աշակերտ, յեթե նրանց հավասար չափով բաժանենք 120 թերթ թուղթ, վորքա՞ն կստանա յուրաքանչյուրը:

Յեթե յուրաքանչյուր աշակերտի ստացած անհայտ թվով թերթերի քանակը բազմապատկենք աշակերտների թվով (30), ապա պետք է ստանանք բաժանված թղթի թերթերի թիվը (այսինքն 120): Այսպիսով, այստեղ դարձյալ տված են արտադրյալը (120) և արտադրիչներից մեկը (30), պետք է գտնել մյուս արտադրիչը: Յուրաքանչյուր աշակերտ կստանա 4 թերթ, վորովհետև 4.30=120-ի:

61. Այն գործողությունը, վորով գտնում ենք արտադրիչներից մեկը, յերբ տված են արտադրյալը ու մյուս արտադրիչը, կոչվում է բաժանում:

Ընդորում տված արտադրյալը կոչվում է **բաժանելի**, *տված արտադրիչը —* **բաժանարար**, *իսկ վորոնելի արտադրիչը —* **քանորդ**:

Առաջին խնդիրը լուծելու համար պետք է 75-ը բաժանել 3-ի, այստեղ բաժանելին—75 է, բաժանարարը—3, քանորդը—25:

Յերկրորդ խնդիրը լուծելու համար պետք է 120-ը բաժանել 30-ի: Այստեղ բաժանելին 120 է, բաժանարարը—30, քանորդը—4, բաժանումը նշանակում են կամ : նշանով, վորը բաժանում է բաժանելին և բաժանարարը (ձախ կողմում՝ բաժանելին, իսկ աջ կողմում բաժանարարը) կամ հորիզոնական գծով, վորը նույնպես բաժանելին բաժանում է բաժանարարից (բաժանելին գրում են գծի վերևում, իսկ բաժանարարը—ներքևում):

Այսպիսով, $75 : 3 = 25$, $\frac{75}{3} = 25$ *հավասարություններից յուրաքանչյուրը նշանակում է, վոր 75-ը 3-ի վրա բաժանելիս ստացվում է 25:*

62. Ծանոթություն: *Քանի վոր արտադրիչների տեղափոխումից արտադրյալը չի փոխվում (բազմապատկման տեղափոխման օրենք), ապա բաժանման արդյունքի համար վոչ մի նշանակություն չունի, թե յերկու արտադրիչներից—բազմապատկելին կամ բազմապատկիչը—վորն է տված և վորը պետք է գտնել: Բայց յեթե ցանկանում ենք հաշվի առնել լուծվող խնդրի առարկայական բովանդակությունը, ապա այդ յերկու դեպքում նա կարող է լինել բոլորովին տարբեր: Այսպես, առաջին խնդրի մեջ վորոնվում է թե* քանի ան*գամ պետք է վերցնել 3 (տետր), վոր ստացվի 75 (տետր)· այստեղ տված է բազմապատկելին (3), պետք է գտնել բազմապատկիչը: Ընդհակառակը, յերկրորդ խնդրում պետք է գտնել, թե* ինչ թիվ *(թերթ թուղթ)* պետք *է վերցնել 30 անգամ, վոր ստացվի 120 (թերթ), այստեղ տված է բազմապատկիչը՝ 30 պետք է գտնել բազմապատկելին:*

Այսպիսով, կարելի է ասել վոր թվաբանական միևնույն գործողության—բաժանման—միջոցով լուծվում են իրենց բովանդակությամբ յերկու տարբեր խնդիրներ:

63. Զերոյի վրա բաժանել չի կարելի: *Բաժանման ժամանակ ամեն մի թիվ կարող է լինել բաժանարար, բացի զերոյից:* Զերոյի վրա բաժանել չի կարելի:

Քննարկենք, թե ինչու է այդ այդպես: Յեթե բաժանելին զերոյից տարբեր մի վորևէ ուրիշ թիվ է, օրինակ՝ 5, ապա այդ թիվը բաժանել զերոյի վրա կնշանակեր գտնել այնպիսի թիվ, վորը զերոյով բազմապատկելիս տալիս է 5. բայց այդպիսի թիվ չկա, վորովհետև ամեն մի թիվ զերոյով բազմապատկելիս տալիս է նորից զերո: Իսկ յեթե բաժանելին նույնպես հավասար է զերոյի, ապա բաժանելը հնարավոր է, սակայն քանորդ կարող է լինել ամեն մի թիվ, վորովհետև այս դեպքում ամեն մի թիվ բաժանարարով (0) բազմապատկելիս տալիս է բաժանելին, այսինքն՝ դարձյալ (0): Այսպիսով, այս դեպքում չնայած բաժանումը հնարավոր է, բայց չի բերում միակ վորոշ արդյունքի:

Ուստի և զերոն բաժանարար լինել չի կարող:

64. Բաժանում մնացորդով: *Երկու թվերի բաժանում միշտ հնարավոր չէ: Այսպես, 27-ը չի կարելի բաժանել 6-ի վրա, որովհետև չկա այնպիսի ամբողջ թիվ, որը 6-ով բազմապատկելիս տար 27: Ասում են, որ 27-ը* չի բաժանվում *6-ի վրա:*

Եթե ցանկանում ենք, օրինակ, 27 տետրը բաժանել 6 աշակերտի վրա հավասարապես, ապա այդ անել հնարավոր չէ. մենք կարող ենք աշակերտներին բաժանել 4-ական տետր, որը կազմում է 24 տետր, և 3 տետրն էլ կմնա առանց բաժանելու:

Պայմանավորվել են այս դեպքում էլ խոսել 27-ը 6-ի վրա բաժանելու մասին: Առաջվա պես 27-ը կոչվում է բաժանելի, 6-ը բաժանարար, 4-ը վոչ լրիվ քանորդ, *իսկ 3-ը* բաժանման մնացորդ: *Այս դեպքում բաժանումն ինքը կոչվում է* բաժանում մնացորդով: *Այսպիսով,* մնացորդով բաժանման ժամանակ վոչ լրիվ քանորդ կոչվում է այն ամենամեծ թիվը, վորը բաժանարարով բազմապատկելիս տալիս է մի արտադրյալ, վորը չի անցնում բաժանելիից: Բաժանելիի յեվ այդ արտադրյալի միջև յեղած տարբերությունը կոչվում է մնացորդ:

Այստեղից հետևում է, վոր մնացորդը միշտ էլ փոքր է բաժանարարից:

Մնացորդով բաժանումը կարելի յե գրել այսպես.

$$27:6=4 \text{ (մնացորդ 3):}$$

Մնացորդով բաժանելու էլի մի քանի օրինակներ՝

$\frac{32}{5}=6$ *(մնացորդ 2),* $100:9=11$ *(մնացորդ 1):*

65. Ամբողջ թվերի բաժանման ընդհանուր սահմանումը: *Ամբողջ թվերի բնագավառում առանց մնացորդի և մնացորդով բաժանման կարելի յե տալ հետևյալ ընդհանուր սահմանումը.* a *(բաժանելի)* թիվը բաժանել b*-ի (բաժանարար) վրա, նշանակում է գտնել յերկու այնպիսի թիվ* q *(քանորդ) և* r *(մնացորդ), վորոնք բավարարեն*

$$a=bq+r \text{ և } r<b \text{ առնչություններին:}$$

Քանի վոր $a=bq+r$ *հավասարությունը արտահայտում է, վոր*

$$a=\overbrace{(b+b+b+\dots b)}^{q \text{ գումարելիներ}}+r$$

և քանի վոր $r<b$, *ապա* q *քանորդը, ակնհայտաբար ցույց է տալիս, թե ինչպիսի ամենամեծ թիվ անգամ բաժանարարը պարունակվում է բաժանելիի մեջ:*

Հեշտ է համոզվել, վոր յեթե b *բաժանարարը հավասար չէ զերոյի, ապա այս ձևով սահմանված բաժանման գործողությունը միշտ հնարավոր է և միշտ տալիս է միակ արդյունքը: Իսկապես.*

1) յեթե $a<b$, *ապա* $q=0$ *և* $r=a$ *և միայն թվերի այս զույգը բավարարում է սահմանմանը.*

2) յեթե $a=b$, *ապա* $q=1$ *և* $r=0$ *և թվերի ուրիշ վոչ մի զույգ չի բավարարում սահմանմանը և վերջապես,*

3) յեթե $a>b$, *ապա* q *քանորդը, ինչպես տեսանք, ցույց է տալիս, թե ինչպիսի ամենամեծ թիվ անգամ* b *բաժանարարը պարունակվում է* a *բաժանելիի մեջ, ուստի յեթե միայն* b*-ն հավասար չէ զերոյի, այդ քանորդը միշտ գոյություն ունի և պարզ է, վոր քանորդը կարող է լինել միայն մեկ թիվ բայց այդ դեպքում մնացորդն էլ՝* r*-ը գոյություն ունի (նա հավասար է* $a-bq$ *տարբերությանը) և նույնպես կարող է լինել միայն մեկը: Նշենք, նաև վոր* b *թվի վրա բաժանելիս, վորպես մնացորդ կարող է լինել*

$$0, 1, 2, \dots, b-1$$

շարքի յուրաքանչյուր թիվ:

Այստեղից հետևում է, վոր b*-ի վրա բաժանելուց կարող են ստացվել* b *թվով տարբեր մնացորդներ:*

66. Բաժանման բաղդատումը բազմապատկման հետ:

Երկու թվեր բազմապատկելիս ուզում ենք գտնել նրանց արտադրյալը, իսկ բաժանելիս (առանց մնացորդի) արտադրյալը տված է, ուզում ենք գտնել այն թիվը, վորը բազմապատկման ժամանակ տված է լինում (բազմապատկելին կամ բազմապատիկը): Ուրեմն, բաժանումը բազմապատկման հակադարձ գործողություն է *(և բազմապատկումը հակադարձ բաժանմանը):*

Եթե բաժանելիս ստացվում է մնացորդ, ապա բաժանելին հավասար չէ բաժանարարի և քանորդի արտադրյալին, այլ հավասար է այդ արտադրյալի և մնացորդի գումարին: Այսպես՝ $27=6\cdot4+3$:

67. Բաժանման միջոցով լուծվող խնդիրներ:

Ահա մի քանի տիպական խնդիրներ, վորոնք լուծվում են բաժանման միջոցով:

1) Երբ պետք է իմանալ, թե մեծ թիվն իր մեջ քանի անգամ է պարունակում փոքր թիվը, *կամ վոր միևնույնն է,* քանի անգամ մի թիվ մեծ կամ փոքր է մյուսից, *օրինակ, 20 ռուբլին իր մեջ քանի անգամ 5 ռուբլի յե պարունակում:*

2) Երբ պահանջվում է տված թիվը բաժանել մի քանի հավասար մասերի, օրինակ, յերբ պահանջվում է 60 թերթ թուղթը բաժանել 12 հավասար մասի (կարճ՝ գտնել 60 թերթի տասներկուերորդ մասը)։

3) Երբ տված թիվը պետք է փոքրացնել մի քանի անգամ, վորովհետև փոքրացնել, օրինակ, 60 թերթ թուղթը 12 անգամ, նշանակում է 60 թերթի փոխարեն վերցնել նրա մեկ տասներկուերորդ մասը։

68. Բաժանումը կարելի յե կատարել գումարման, հանման և բազմապատկման միջոցով։ Դիցուք, պահանջվում է 212-ը բաժանել 53-ի վրա։ Վորոնելի քանորդը կարող ենք գտնել՝

1) Գումարման միջոցով.

$$53+53=106;\ 106+53=159;\ 159+53=212.$$

Պարզվում է, վոր 53-ը վորպես գումարելի պետք է կըրկնել 4 անգամ՝ 212 ստանալու համար։ Ուրեմն, վորոնելի քանորդը 4 է։

2) Հանման միջոցով.

$$\begin{array}{r} 212 \\ -\ 53 \\ \hline 159 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 159 \\ -\ 53 \\ \hline 106 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 106 \\ -\ 53 \\ \hline 53 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 53 \\ -\ 53 \\ \hline 0 \end{array}$$

Պարզվում է, վոր 212-ից 53-ը կարելի յե հանել 4 անգամ, ուրեմն, վորոնելի քանորդը 4 է։

3) Բազմապատկման միջոցով

$$53\cdot2=106;\ 53\cdot3=159;\ 53\cdot4=212.$$

Վորոնելի քանորդը 4 է։

Սակայն այս յեղանակներն անհարմար են, յեթե քանորդը մեծ թիվ է. Թվաբանությունը նշում է ավելի պարզ յեղանակ, վորը և այժմ կքննարկենք։

69. Ինչպես պետք է իմանալ, քանորդը միանիշ կլինի, թե վոչ։ Դրա համար բավական է միայն բաժանարարը բազմապատկել (մտքում) 10-ով և ստացած արտադրյալը բաղդատել բաժանելիի հետ։

1-ին **օրինակ.** $534 : 68 = ?$

Յեթե 68-ը բազմապատկենք 10-ով (այսինքն՝ 68-ին կցագրենք զերո), ապա կստանանք 680. բայց 534-ը փոքր է 680-ից, ուստի քանորդը փոքր պիտի լինի 10-ից, ուրեմն և նա պետք է լինի միանիշ թիվ։

2-րդ **օրինակ.** $534 : 37 = ?$

Յեթե 37-ը բազմապատկենք 10-ով, ապա կստանանք 370, բայց 534-ը մեծ է 370-ից, ուստի քանորդը չի կարող 10-ից փոքր լինել, նա չի կարող միանիշ թիվ լինել։

70. Միանիշ քանորդի գտնելը։ Քննարկենք յերկու դեպք՝ յերբ բաժանարարը նույնպես միանիշ է և յերբ բաժանարարը բազմանիշ է։

1) Երբ բաժանարարը յեվ քանորդը յերկուսն էլ միանիշ թվեր են, ապա քանորդը գտնում են բազմապատկման աղյուսակով. Օրինակ, 56-ը 8-ի վրա բաժանելուց քանորդը կլինի 7-ը, վորովհետև յոթն անգամ ութը հավասար է հենց 56-ի։

42-ը 9-ի վրա բաժանելուց ստացված քանորդը հավասար է 4-ի, վորովհետև չորս անգամ ինն հավասար է 36-ի, վորը 42-ից փոքր է, իսկ հինգ անգամ ինն հավասար է 45-ի, վորը 42-ից մեծ է, ուրեմն, քանորդում պետք է վերցնել 4, ընդվորում մնացորդում կստացվի $42-36=6$։

2) Երբ բաժանարարը կազմված է մի քանի թվանշաններից, իսկ քանորդը՝ մեկ թվանշանից, ապա այդ քանորդը գտնում են մեկ կամ մի քանի թվանշաններ փորձելու միջոցով։

Օրինակ. $43530 : 6837.$

Նախ և առաջ § 69-ում նշված յեղանակով համոզվում ենք, վոր քանորդը միանիշ է։ Այնուհետև մտավոր կերպով բաց ենք թողնում բաժանարարի բոլոր թվանշանները, բացի ձախից առաջինը, այսինքն՝ բաժանարարի մեջ թողնում ենք միայն 6 հազար։ Բաժանելիի աջ կողմից բաց ենք թողնում այնքան թվանշան, վորքան բաց ենք թողել բաժանարարի մեջ, այսինքն՝ նրա մեջ կթողնենք միայն 43 հազար։ Այժմ հարց է ծագում, թե ինչ թվով պետք է բազմապատկել 6-ը, վորպեսզի ստացվի 43 կամ 43-ից փոքր, բայց նրան հնարավոր չափով մոտ թիվ։ Բազմա-

պատկման աղյուսակից գտնում ենք, վոր այդ թիվը 7-ն է, քանի վոր յոթ անգամ վեց հավասար է 42-ի, իսկ ութ անգամ վեց հավասար է 48-ի։ Ուրեմն, վորոնելի քանորդը պետք է լինի 7 կամ նրանից փոքր թիվ (կարող է պատահել 7-ից փոքր լինի, վորովհետև մենք բաժանելիից և բաժանարարից մի շարք թվանշաններ բաց թողինք)։ Կսկսենք փորձել 7 թվից։ Դրա համար 6837-ը կբազմապատկենք 7-ով. յեթե ստանանք 43530-ից մեծ թիվ, ապա 7 թիվը անպետք է. այն ժամանակ փորձում ենք հետևյալ փոքր թիվը՝ 6-ը։

$$\begin{array}{r} 6837 \\ \cdot\ 7 \\ \hline 47859 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6837 \\ \cdot\ 6 \\ \hline 41022 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43530 \\ -\,41022 \\ \hline 2508 \end{array}$$

6837.7 արտադրյալը 43530-ից մեծ յեղավ, իսկ 6887.6 արտադրյալն այդ թվից փոքր է. ուրեմն, քանորդը պետք է լինի 6, ընդորում մնացորդ կստացվի 2508-ը[1])։

Դիտողություն։ Վորոշ դեպքերում փորձելու համար վերցվող առաջին թվանշանը ավելի հարմար է գտնել այլ կերպ։ Այսպես, նկատելով, վոր մեր վերցրած օրինակում 6837 բաժանարարը քիչ է տարբերվում 7 հազարից (համենայն դեպս ավելի քիչ, քան 6 հազարից), իմանում ենք, թե ինչ թվով պետք է բազմապատկել 7-ը, վոր ստացվի 43-ին հնարավոր չափով մոտ թիվ։ Բազմապատկման աղյուսակով գտնում ենք, վոր այդպիսի թիվը 6-ն է։ Ուրեմն քանորդը պետք է լինի 6 կամ 6-ից ավելի (վորովհետև բաժանարարը փոքր է 7 հազարից)։ Սկսենք փորձել 6 թվից։ Դրա համար բաժանարարը կբազմապատկենք 6-ով և արտադրյալը կհանենք բաժանելիից. յեթե 6837-ից ավելի մնա, ապա 6 թիվը քիչ է և այդ դեպքում պետք է փորձել 7-ը, իսկ յեթե 6837-ից քիչ մնա, ապա 6 թիվը ճիշտ է գտնված։ Մնացորդ ստացվեց 2508, ուրեմն, 6 թիվը ճիշտ է գտնված։

Օգտակար է այսպես վարվել այն ժամանակ, յերբ **բաժանարարի յերկրորդ թվանշանը 5-ից մեծ է**։ Օրինակ, 6837 բաժանարարը շնորհիվ այն հանգամանքի, վոր նրա յերկրորդ թվանշանը 5-ից մեծ է, ավելի մոտենում է 7000-ին, քան 6000-ին։

[1]) Աշխատանքի կարճության համար, նախքան քանորդում փորձարկվող թիվը գրելը և ամբողջ բաժանարարով բազմապատկելը, յերբեմն ավելի նպատակահարմար է լինում այդ թվով մտքում բազմապատկել բաժանարարի միայն սկզբի 2 թվանշանները և ստացած արտադրյալը բաղդատել բաժանելիի համապատասխան կարգի թվանշանների հետ։

71. Ընդհանուր դեպքում քանորդի գտնելը։ Դիցուք, թե պահանջվում է 64528-ը բաժանել 23-ի վրա։ Ավելի պարզ լինելու համար այս գործողությունը կպատկերացնենք 64528-ը վորպես 23 հավասար մասերի վերածում։

1) Նախ մեզ տված թվից վերցնենք 64 հազարը և փորձենք վերածել դա 23 հավասար մասերի, յուրաքանչյուր մասում կստացվի 2 հազար և չբաժանված կմնա էլի 18 հազար։

2) Այդ մնացած 18 հազարը կազմում է 180 հարյուրավոր, վորան կավելացնենք տված թվում գտնվող 5 հարյուրավորը, այժմ ստացված 185 հարյուրավորը նորից կփորձենք վերածել 23 հավասար մասերի, յուրաքանչյուր մասում ստացվում է 8 հարյուրավոր և 1 հարյուրավոր մնում է չբաժանված։

3) Այդ մնացած հարյուրավորը կազմում է 10 տասնավոր, վորանց ավելացնում ենք տված թվում յեղած յերկու տասնավորը և ստացված 12 տասնավորը աշխատում ենք վերածել 23 հավասար մասերի, ընդորում յուրաքանչյուր առանձին մասում վոչ մի տասնավոր չի ստացվում, այլ բոլոր 12 տասնավորները մնում են առանց բաժանվելու։

4) Այդ մնացած 12 տասնավորները կազմում են 120 միավոր, վորանց մենք կավելացնենք մեր թվում յեղած 8 միավորը։ Ստացված 128 միավորը փորձում ենք վերածել 23 հավասար մասերի, ըստ վորում յուրաքանչյուր մասում ստացվում է 5 միավոր և 13 միավոր մնում է առանց բաժանվելու։

Այսպիսով, յուրաքանչյուր մասում ընդամենը ստացվում է 2 հազարավոր, 8 հարյուրավոր և 5 միավոր, ընդորում 13 միավոր մնում է չբաժանված։ Այդ նշանակում է, վոր 64528-ը 23-ի վրա բաժանելուց քանորդում ստացվում է 2805, իսկ մնացորդում 13։

Սովորաբար գործողությունը դասավորում են այսպես,

```
64528 |23
46    |2805
185
184
  128
  115
   13
```

Միաժամանակ տեսնում ենք, որ 1) այն թվերը, որոնցից հաջորդաբար կազմվում է քանորդը, իրենցից ներկայացնում են տարբեր կարգի միավորներ (2 հազարավոր, 8 հարյուրավոր, զերո տասնավոր, 5 միավոր). ուստի, փոխանակ այդ թվերը լրիվ գրելու (2000+800+5), կարող ենք ուղղակի համապատասխան թվանշանները գրել մեկը մյուսից հետո, ինչպես այդ ցույց է տրված վերևի գրածում. ընդսմին ամեն անգամ, երբ բաժանելիս իմաստավոր թվանշան չի ստացվում, անհրաժեշտ է քանորդում զերո նշանակել (մեր օրինակի մեջ տասնավորները)։ 2) Վերևի բաժանումից ստացված մնացորդը (օրինակ, այս դեպքում առաջին բաժանումից ստացված 18-ը) հետևյալ ստորին կարգի միավորների վերածելու և բաժանելիի մեջ գտնվող այդ կարգի թիվն ավելացնելու համար, կարող ենք բաժանելիի համապատասխան թվանշանը ուղղակի «ցած բերել» և գրել ստացված մնացորդի աջ կողմում, ինչպես այդ մեր գրածի մեջ ցույց է տված կետագծով։

Շնորհիվ այս պարզեցումների, որոշ ունակություններ ձեռք բերելուց հետո, բաժանումը կարելի յե կատարել մեծ արագությամբ։

Ահա բաժանման ելի յերեք օրինակ.

```
1470035 |7              3480000 |15
14      |210005         30      |232000
---                     --
  7                      48
  7                      45
-----                    --
   0035                   30
     35                   30
     --                   ---
      0                     000
```

```
130987 |929
929    |140
----
 3808
 3716
 ----
  927
```

72. Միանիշ թվի վրա բաժանելու կրճատ յեղանակ։ *Յերբ բաժանարարը միանիշ է, ապա գրության կարճության համար օգտակար է փորձվել բոլոր հանումները կատարելու մտքում, գրելով միայն մնացորդները։*

Օրինակ, *այսպես.*

```
563087 |6        կամ ավելի կարճ՝   563087 |6
 23    |93847                     ------ |93847
  50                                   5
   28
    47
     5
```

Այստեղ գծի տակ գրված 5 թիվը նշում է վերջին մնացորդը։

73. Այն դեպքը, յերբ բաժանարարը վերջանում է զերոներով։ *Բաժանումն ավելի հեշտանում է այն դեպքում, յերբ բաժանարարը վերջանում է մեկ կամ մի քանի զերոներով։ Նախ վերցնենք այն դեպքը, յերբ բաժանարարն սկսվում է մեկով և վերջանում է զերոներով։ Վորևէ թիվ 10-ի, 100-ի, 1000-ի և այլնի վրա բաժանել նշանակում է իմանալ, թե այդ թվում քանի տասնավոր, հարյուրավոր, հազարավոր և այլն է պարունակվում։ Բայց այդ հեշտ է իմանալ թվարկության կանոններով, վորը նշել ենք առաջ (§ 13)։ Օրինակ.*

54634 : 10 = 5463 *(4 մնացորդ)*

54634 : 1000 = 54 *(634 մնացորդ)*

Կանոն։ **Վորեվէ թիվ մեկով սկսվող յեվ զերոներով վերջացող թվի վրա բաժանելու համար բավական է բաժանելիի աջ մասից անջատել այնքան թվանշան, վորքան զերո կա բաժանարարի մեջ. այն ժամանակ բաժանելիի մնացած թվանշանները կներկայացնեն քանորդը, իսկ անջատվածները՝ մնացորդը։**

Այժմ վերցնենք այն դեպքը, յերբ բաժանարարը զերոներով վերջացող վորևէ թիվ է։ Օրինակ՝

```
389224 |7300
365    |53
---
 242
 219
 ----
  2324
```

Բաժանարարը ներկայացնում է 73 հարյուրավոր։ Իմանա-

րու համար, թե բաժանելիի մեջ քանի անգամ 73 հարյուրավոր է պարունակվում, այն բաժանում ենք 2 մասի՝ հարյուրավորների և միավորների։ Առաջին մասը—3892 հարյուրավոր է, իսկ յերկրորդ մասը—24 միավոր։ 73 հարյուրավորները կարող են պարունակվել այդ մասերից միայն մեկում, այն է՝ հարյուրավորների մեջ։

Բայց 73 հարյուրավորը 3892 հարյուրավորների մեջ պարունակվում է այնքան անգամ, վորքան անգամ 73 վորևե միավորներ պարունակվում են 3892 նույնպիսի միավորների մեջ։ Ուստի, 3892-ը բաժանում ենք 73-ի վրա, առանց ուշադրություն դարձնելու այն բանի վրա, վոր դրանք հարյուրավորներ են։

Բաժանելով գտնում ենք, վոր 73 հարյուրավորը 3892 հարյուրավորի մեջ պարունակվում է 53 անգամ, բայց 23 հարյուրավոր մնում է։ 23 հարյուրավորի մոտ գրելով բաժանելիի 24 միավորները, կստանանք 2324. այս թվում 73 հարյուրավորը վոչ մի անգամ չի պարունակվի, հետևապես, 2324-ը կլինի մնացորդ։

Մի որինակ ևս, վորտեղ թե բաժանելին և թե բաժանարարը վերջանում են զերոներով

```
35000 |7300
292   |4
 5800
```

Կանոն։ Յերբ բաժանարարը վերջանում է զերոներով, ապա մտավոր կերպով նրա զերոները բաց ենք թողնում, նայեվ բաժանելիի աջից բաց թողնելով այնքան թվանշան, վորքան զերո բաց է թողնված բաժանարարի մեջ. մնացած թիվը բաժանում ենք յեվ մնացորդի մոտ ցած բերում բաժանելիի բաց թողած թվանշանները։

74. Բազմապատկման ստուգումը։ *Քանի վոր արտադրիչների տեղափոխությունից արտադրյալը չի փոխվում, ապա բազմապատկումը ստուգելու համար կարելի յե նույն գործողությունը կատարել յերկրորդ անգամ, բազմապատկիչը բազմապատկելով բազմապատկելիով։ Որինակ.*

Բազմապատկում. *Ստուգում.*

```
   532          145
 × 145        × 532
  2660          290
 2128          435
 532          725
 77140        77140
```

Յերկու արտադրյալն էլ ստացվեց նույնը, հետևապես, շատ հավանական է, վոր գործողությունը ճիշտ է կատարված։

Բազմապատկումը կարելի յե ստուգել նաև բաժանման միջոցով։ Դրա համար պետք է ստացված արտադրյալը բաժանել արտադրիչներից վորևե մեկի վրա. յեթե քանորդում ստացվի մյուս արտադրիչը, ապա կարելի յե հավանական համարել, վոր բազմապատկումը ճիշտ է կատարված։

75. Բաժանման ստուգումը։ Բաժանումը կարելի յե ստուգել բազմապատկման միջոցով, հիմնվելով այն բանի վրա, վոր բաժանելին պետք է հավասար լինի բաժանարարի և քանորդի արտադրյալին (գումարած մնացորդը, յեթե կա)։

Որինակ.

```
Բաժանում 8375 | 42         Ստուգում   199
         42   | 199                 ×  42
         417                          398
         378                         796
          395                        8358
          378                      +   17
           17                        8375
```

Քանորդը՝ 199-ը. բազմապատկեցինք բաժանարարով՝ 42-ով և ստացած արտադրյալին գումարեցինք 17-ը՝ մնացորդը։ Քանի վոր այս կատարելուց հետո ստացվեց բաժանելիին հավասար թիվ, ապա շատ հավանական է, վոր գործողությունը ճիշտ է կատարված։

Յեթե բաժանումը կատարված է առանց մնացորդի, ապա այն կարելի յե ստուգել նաև բաժանման միջոցով։ Իսկապես, քանի վոր բաժանելին բաժանարարի և քանորդի արտադրյալն

է, ապա բաժանելին քանորդի վրա բաժանելիս պետք է ստացվի բաժանարարը: Օրինակ.

Բաժանում.	544	17	Ստուգում	544	32
	51	32		32	17
	34			224	
	34			224	

76. Ինչպես պետք է բաժանել արտադրյալի վրա: Դիցուք թե պահանջվում է 60-ը բաժանել 5.3 արտադրյալի, այսինքն՝ 15-ի վրա: Դրա համար բավական է 60-ը բաժանել 5-ի վրա և ապա ստացված քանորդը կրկին բաժանել 3-ի վրա.

$$60:5=12, \quad 12:3=4:$$

Թե ինչու այդպիսի կրկնակի բաժանումը (5-ի և ապա 3-ի վրա) ճիշտ արդյունք է տալիս, շատ հեշտ կբացատրվի, յեթե բաժանումը դիտենք որպես բաժանելիի վերածում հավասար մասերի: Այն ժամանակ կարելի յե ասել, որ առաջին բաժանման միջոցով (5-ի վրա) 60-ը վերածում ենք 5 հավասար մասի, յուրաքանչյուր մասում ստանալով 12. յերկրորդ բաժանումով (3-ի վրա) 12-ը վերածում ենք 3 հավասար մասի, յուրաքանչյուր մասում ստանալով 4-ական: Այդ կարելի յե դիտելի ձևով պատկերացնել այսպես.

$$\overbrace{\underbrace{12}_{4+4+4}+\underbrace{12}_{4+4+4}+\underbrace{12}_{4+4+4}+\underbrace{12}_{4+4+4}+\underbrace{12}_{4+4+4}}^{60}$$

Այստեղից յերևում է, որ այդ յերկու բաժանումից հետո 60-ը վերածված է 15 հավասար մասերի:

Նույն ձևով կարող ենք բացատրել, որ 300-ը յերեք արտադրիչների՝ 3.5.4 արտադրյալի վրա բաժանելու համար կարելի յե 300-ը բաժանել 3-ի վրա (կստանանք 100), ապա այդ քանորդը բաժանել 5-ի վրա (կստանանք 20) և վերջապես, վերջին քանորդը բաժանել 4-ի վրա (կստանանք 5): Այսպիսով **որևէ թիվ արտադրյալի վրա բաժանելու համար կարող ենք այդ թիվը բաժանել առաջին արտադրիչի վրա, ստացված քանորդը բաժանել յերկրորդ արտադրիչի վրա, այդ քանորդը յերրորդի վրա յեվ այլն** (յենթադրվում է, որ յուրաքանչյուր բաժանում կատարվում է առանց մնացորդի):

Այս հատկությունից կարելի յե յերբեմն օգտվել բանավոր բաժանման ժամանակ. օրինակ՝ 1840-ը 20-ի վրա բաժանելու համար մենք ուշադրության ենք առնում այն, որ 20=10.2 և 1840-ը բաժանում ենք 10-ի վրա (ստանում ենք 184) և ստացված թիվը բաժանում 2-ի վրա (կստանանք 92): Նման ձևով որևէ թիվ 8-ի վրա բաժանելու համար, այսինքն՝ 2.2.2 արտադրյալի վրա, կարելի յե բաժանելին բաժանել 2-ի, հետո էլի 2-ի և նորից 2-ի վրա:

77. Բաժանելիի յեվ բաժանարարի փոփոխության հետեվանքով քանորդի փոփոխվելը:

1) Յեթե բաժանելին մեծացնենք (կամ փոքրացնենք) մի քանի անգամ, ապա քանորդը կմեծանա (կամ կփոքրանա) նույնքան անգամ:

Այսպես, յեթե 20:5=4 օրինակի մեջ բաժանելին մեծացնենք, յենթադրենք 3 անգամ, այսինքն՝ 20-ի փոխարեն վերցնենք 20+20+20, ապա կստանանք՝ 60:5=12-ի: Նոր քանորդը 3 անգամ մեծ է նախկինից, որովհետև՝ յեթե 5-ը 20-ի մեջ պարունակվում է 4 անգամ, ապա 20+20+20 գումարի մեջ դա պետք է պարունակվի 4 անգամ, էլի 4 անգամ և դարձյալ 4 անգամ, այսինքն՝ 3 անգամ ավելի, քան 20-ի մեջ:

2) Յեթե բաժանարարը մեծացնենք (կամ փոքրացնենք) մի քանի անգամ, ապա քանորդը կփոքրանա (կամ կմեծանա) նույնքան անգամ:

Այսպես, յեթե 60:5=12 օրինակի մեջ բաժանարարը մեծացնենք, յենթադրենք 3 անգամ, այսինքն՝ 5-ի փոխարեն բաժանարար ընդունենք 15, ապա կստանանք 60:15=4-ի: Նոր քանորդը նախորդից փոքր է 3 անգամ: Այսպես էլ պետք է լինի, որովհետև 15-ը հավասար է 5.3 արտադրյալին, իսկ արտադրյալի վրա բաժանելու համար կարելի յե բաժանելին բաժանել նախ առաջին արտադրիչի (5-ի վրա), ապա ստացած թիվը (12) բաժանել յերկրորդ արտադրիչի (3-ի) վրա, որից քանորդը կփոքրանա (3 անգամ):

Այս դեպքում յենթադրվում է, որ բաժանումը կատարվում է **առանց մնացորդի**:

Իսկ յեթե մնացորդ կա, ապա քանորդը կարող է փոխվել այլ կերպ, քան հենց նոր նշվեց: Օրինակ, վերցնենք այսպիսի բաժանում՝ $23:5=4$ (3 մնացորդ) և բաժանելին մեծացնենք 3 անգամ: Կստանանք $69:5=13$ (4 մնացորդ). քանորդը մեծացավ ավելի քան 3 անգամ:

Դիտողություն: Յերբ բաժանելին և բաժանարարը փոփոխվում են միաժամանակ, ապա քանորդը յերբեմն կարող է մեծանալ, յերբեմն փոքրանալ և կամ թե անփոփոխ մնալ: Նախապես իմանալու համար, թե ինչպես կփոփոխվի քանորդը, պետք է յենթադրել, որ նախ փոփոխված է միայն բաժանելին, իսկ հետո և բաժանարարը (համեմատեցեք §53-ի հետ):

Պետք է հատուկ ուշադրություն դարձնել այն դեպքերի վրա, յերբ քանորդը մնում է անփոփոխ:

3) Քանորդը չի փոխվում, յերբ բաժանելին յեվ բաժանարարը մեծացված են միևնույն թիվ անգամ, որովհետև բաժանելին մեծացնելիս քանորդը մեծանում է, իսկ բաժանարարը մեծացնելիս նա փոքրանում է նույնքան անգամ: Այսպես, յեթե $60:15=4$ օրինակի մեջ բաժանելին և բաժանարարը մեծացնենք 5 անգամ, ապա կստանանք $300:75=4$-ի:

4) Քանորդը չի փոխվում, յերբ բաժանելին յեվ բաժանարարը փոքրացված են միևնույն թիվ անգամ,

որովհետև բաժանելին փոքրացնելիս քանորդը փոքրանում է, իսկ բաժանարարը փոքրացնելիս նա նույնքան անգամ մեծանում է: Այսպես, յեթե նույն օրինակում բաժանելին և բաժանարարը փոքրացնենք 5 անգամ, կստանանք $12:3=4$-ի:

78. Ինչպես պետք է բաժանել արտադրյալը: Դիցուք թե պահանջվում է $8.12.20$ արտադրյալը բաժանել 4-ի վրա: Փոխանակ նախ այդ արտադրյալը հաշվելու (դա հավասար է 1920-ի) և ապա 4-ի վրա բաժանելու (կստանանք 480), կարող ենք 4-ի վրա բաժանել արտադրիչներից մեկը, մյուսները թողնելով անփոփոխ և ապա հաշվել արտադրյալը: Այսպես, դիցուք բաժանենք 12-ը 4-ի վրա, իսկ 8-ը և 20-ը թողնենք անփոփոխ, կստանանք $8.3.20=480$-ի, այսինքն՝ կստանանք այն նույն թիվը, ինչ ստացանք առաջ: Այդպես էլ պետք է լիներ, որովհետև բաժանել 4-ի վրա նշանակում է թիվը փոքրացնել 4 անգամ,

իսկ արտադրյալը կփոքրանա 4 անգամ, յեթե այդքան անգամ փոքրացնենք արտադրիչներից մեկը: Այսպիսով.

Արտադրյալը վորեվե թվի վրա բաժանելու համար կարելի յե այդ թվի վրա բաժանել արտադրիչներից մեկը, մյուսները թողնելով անփոփոխ:

79. Ինչպես պետք է բաժանել գումարը յեվ ինչպես բաժանել տարբերությունը:

1). Գումարը վորեվե թվի վրա բաժանելու համար կարելի յե այդ թվի վրա բաժանել յուրաքանչյուր գումարելին առանձին յեվ ստացած քանորդները գումարել (յենթադրվում է, որ բոլոր բաժանումները կատարվում են առանց մնացորդի):

Այսպես, $21+14+35$ գումարը 7-ի վրա բաժանելու համար (այսինքն՝ իմանալու համար, թե այդ գումարի մեջ քանի անգամ 7 է պարունակվում), կարող ենք իմանալ, թե քանի անգամ 7 է պարունակվում 21-ի մեջ (3 անգամ), հետո 14-ի մեջ (2 անգամ), ապա 35-ի մեջ (5 անգամ), և ստացած թվերը գումարել $3+2+5=10$:

2) Տարբերությունը վորեվե թվի վրա բաժանելու համար կարելի յե այդ թվի վրա առանձին-առանձին բաժանել նվազելին ու հանելին յեվ հետո առաջին քանորդից հանել յերկրորդը: Այսպես՝

$$(40-25):5=(40:5)-(25:5)=8-5=3:$$

Այդպես էլ պետք է լինի, որովհետև 40-ը պարունակում է 8 հնգյակ, 25-ը՝ 5 հնգյակ, իսկ 8 հնգյակից հանած 5 հնգյակ, ակնհայտ է, կմնա 3 հնգյակ:

80. Դիտողություն բանաձևերի մեջ նշված գործողությունների կարգի մասին: Ընդունված է գումարումը և հանումն անվանել առաջին աստիճանի գործողություններ, իսկ բազմապատկումը և բաժանումը — յերկրորդ աստիճանի գործողություններ: Գործողությունների կարգը նշելու նպատակով փակագծերին դիմելու դեպքերը պակասեցնելու համար պայմանավորվել են.

Յեթե փակագծեր չունեցող արտահայտության մեջ նշված են միայն մի աստիճանի գործողություններ, ապա դրանք կատարվում են այն կարգով, ինչ կարգով վոր գրված են (ձախից աջ): Այսպես՝

$$40-10+15-8$$

արտահայտությունը նշանակում է, որ 40-ից հանվում է 10 (կստանանք 30), ստացած թվին ավելացվում է 15 (կստանանք 45) և ապա հանվում է 8 (կստանանք 37): Կամ՝

$$400:4\cdot5:2$$

արտահայտությունը նշանակում է, որ 400-ը բաժանվում է 4-ի վրա (կստանանք 100), քանորդը բազմապատկվում է 5-ով (կստանանք 500) և այդ արտադրյալը բաժանվում է 2-ի վրա (կստանանք 250):

Իսկ յեթե փակագծեր չունեցող արտահայտության մեջ նշված են տարբեր աստիճանի գործողություններ, ապա նախ կատարում են յերկրորդ աստիճանի գործողությունները (բազմապատկումը յեվ բաժանումը), իսկ հետո—առաջին աստիճանի գործողությունները (գումարումը յեվ հանումը): Օրինակ՝

$$6+20\cdot4-10:2$$

արտահայտությունը նշանակում է, որ 20-ը պետք է բազմապատկել 4-ով (կստանանք 80), ապա 10-ը բաժանել 2-ի վրա (կստանանք 5), հետո 6-ին գումարել 80 (կստանանք 86) և, վերջապես, հանել 5 (կստանանք 81):

Շեղումներն այս կարգից նշվում են փակագծերի միջոցով: Այսպես, յեթե գրված է.

$$6+(20\cdot4-10):2,$$

ապա այդ նշանակում է՝ 20-ը բազմապատկել 4-ով, հանել 10, բաժանել 2-ի վրա և գումարել 6 (կստանանք 41):

ՅԵՐԿՐՈՐԴ ԲԱԺԻՆ

ԹՎԵՐԻ ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

81. Նախնական դիտողություններ: Թվաբանական չորս գործողություններից յերկուսը—գումարումը և հանումը—միշտ հնարավոր է կատարել (այսինքն՝ ամեն ուզած թվերով): Չնայած հանումը միշտ էլ հնարավոր չէ կատարել, բայց նրա հնարավորության հատկանիշը շատ հասարակ է. նվազելին չպետք է փոքր լինի հանելիից, ուստի, յեթե տված է յերկու թիվ, անմիջապես կարող ենք իմանալ, թե հնարավո՞ր է արդյոք առաջինից հանել յերկրորդը:

Բաժանման նկատմամբ խնդիրն ուրիշ կերպ է դրված: Գիտենք, որ բաժանումը (առանց մնացորդի) միշտ հնարավոր չէ կատարել, բայց յերբեմն շատ դժվար է լինում առանց բաժանում կատարելու իմանալ՝ արդյոք մի թիվ մյուսի վրա բաժանվո՞ւմ է, թե ոչ: Ուստի բաժանման գործողության հետ կապված են թվաբանության ամենադժվար հարցերը: Այդ հարցերից մի քանիսը քննության կառնենք այս բաժնում:

Յերբ մի թիվ մյուսի վրա բաժանվում է առանց մնացորդի, ապա կարճության համար ուղղակի ասում են, որ առաջին թիվը **բաժանվում** է յերկրորդի վրա: Այդ դեպքում ասում են նաև, որ առաջին թիվը յերկրորդի **բազմապատիկն** է, իսկ յերկրորդն՝ առաջինի **բաժանարարը**: Այսպես, 15-ը 3-ի բազմապատիկն է, իսկ 3-ը՝ 15-ի բաժանարարը:

Նկատենք, որ զերոն բաժանվում է ամեն մի թվի վրա (բացի զերոյից), որի ժամանակ քանորդը նույնպես հավասար է զերոյի: Իսկապես, քանի որ $a\cdot0=0$, ինչպիսին էլ որ լինի a թիվը, ապա $0:a=0$:

I. ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՏԿԱՆԻՇՆԵՐԸ

Գոյություն ունեն հատկանիշներ, վորոնցով իսկույն առանց բաժանման գործողություն կատարելու, յերբեմն հեշտությամբ կարելի յե իմանալ՝ տված թիվը վորևե ուրիշ թվերի վրա բաժանվում ե, թե վոչ։ Այդ հատկանիշներն էլ հենց այժմ կքննարկենք։

82. Գումարի յեվ տարբերության բաժանելիությունը։ *Բաժանելիության հատկանիշներն արտածելիս հաճախ պետք ե օգտվենք գումարի և տարբերության հետևյալ հատկություններից.*

1) յերբ յուրաքանչյուր գումարելին բաժանվում ե միևնույն թվի վրա, ապա յեվ գումարը կբաժանվի այդ թվի վրա,

2) յերբ բոլոր գումարելիները, բացի մեկից, բաժանվում են վորևե թվի վրա, ապա գումարն այդ թվի վրա չի բաժանվի,

3) յերբ նվազելին յեվ հանելին բաժանվում են վորևե թվի վրա, ապա յեվ նրանց տարբերությունը կբաժանվի այդ թվի վրա։

1-ին և 3-րդ հատկություններն ակնհայտ են. յեթե, օրինակ, 5-ը ամբողջ թիվ անգամ (9) պարունակվում ե 45-ի և ամբողջ թիվ անգամ (7) 35-ի մեջ, ապա ակնհայտ ե, վոր նա ամբողջ թիվ անգամ կպարունակվի նրանց գումարի (9+7=16) և ամբողջ թիվ անգամ նրանց տարբերության (9—7=2) մեջ։

2-րդ հատկությունը հեշտությամբ ապացուցվում ե, յեթե 1-ին և 3-րդ հատկություններն արդեն հաստատված են։ Վերցնենք, օրինակ, 45+35+22=102 գումարը։ Այստեղ 45 և 35 գումարելիները բաժանվում են 5-ի վրա, իսկ վերջին 22 գումարելին չի բաժանվում։ Ցույց տանք, վոր գումարն էլ՝ 102-ը չի կարող բաժանվել 5-ի վրա։ Քանի վոր 45-ը և 35-ը բաժանվում են 5-ի վրա, ապա և նրանց գումարը՝ 45+35=80-ը 1-ին հատկության հիման վրա, կբաժանվի 5-ի վրա։ Բայց 102=45+35+22 հավասարությունից հետևում ե 102—(45+35)=22 կամ 102—80=22։ Յեթե 102-ը բաժանվեր 5-ի վրա, ապա 3-րդ հատկության համաձայն 102—80=22 տարբերությունը ևս պետք ե բաժանվեր 5-ի վրա, քանի վոր 22-ը 5-ի չի բաժանվում, ապա նշանակում ե, վոր 102-ն էլ 5-ի բաժանվել չի կարող։

83. 2-ի վրա բաժանվող թվերի բաժանելիության հատկանիշը։ *2-ի վրա բաժանվող թվերը կոչվում են զույգ թվեր, իսկ չբաժանվողները—կենտ։ Բնական թվերի շարքում կենտ ու զույգ թվերն իրար հաջորդում են. այսպես, 1-ը կենտ թիվ ե, 2-ը զույգ թիվ ե, 3-ը՝ կենտ ե, 4-ը՝ զույգ և այլն։*

Զերոյով վերջացող ամեն մի թիվ իրենից ներկայացնում ե տասնավորների գումար. օրինակ, 320-ը 32 տասնավորի գումարն ե։ Բայց տասնավորը բաժանվում ե 2-ի վրա, դրա համար մի քանի տասնավորների գումարը ևս կբաժանվի 2-ի վրա (նա պարունակում ե այնքան անգամ 5 յերկուսներ, վորքան նրա մեջ տասնավորներ կան)։ Ուրեմն, **ամեն մի թիվ, վորը վերջանում ե զերոյով, բաժանվում ե 2-ի վրա։** *Օրինակ.*

$$320:2=160։$$

Այժմ վերցնենք վորևե զույգ թվանշանով վերջացող թիվ, օրինակ, 328-ը։ Այս թիվը կարելի յե ներկայացնել վորպես գումար այսպես.

$$328=320+8։$$

Գումարելիներից յուրաքանչյուրը՝ 320-ը և 8-ը բաժանվում ե 2-ի վրա, ուրեմն 1-ին հատկության (§ 82) հիման վրա 328-ը կբաժանվի 2-ի վրա և կլինի զույգ թիվ։ Ընդհակառակը, այն թիվը, վոր կենտ թվանշանով ե վերջանում, օրինակ, 329-ը 2-ի վրա բաժանվել չի կարող։

Իսկապես.

$$329=320+9,$$

և քանի վոր 320-ը բաժանվում ե 2-ի, իսկ 9-ը չի բաժանվում, ապա 2-րդ հատկության (§ 82) հիման վրա 329-ը 2-ի վրա բաժանվել չի կարող։

Այսպիսով, **2-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն յեվ միայն այն թվերը, վորոնք վերջանում են զույգ թվանշանով։**

Ծանոթություն։ *0 թվանշանը համարվում ե զույգ, վորովհետև նա ներկայացնում ե այնպիսի թիվ, վորը բաժանվում ե 2-ի վրա (§ 81)։*

84. 4-ի վրա բաժանվող թվերի բաժանելիության հատկանիշը։ *Յերկու զերոյով վերջացող յուրաքանչյուր թիվ իրե-*

նից ներկայացնում է հարյուրավորների գումար, որինակ, 2300-ը 23 հարյուրավորների գումարն է։ Բայց 100-ը բաժանվում է 4-ի վրա, դրա համար մի քանի հարյուրավորների գումարը ևս կբաժանվի 4-ի վրա (նա պարունակում է այնքան անգամ 25-ական չորսեր, վորքան հարյուրավոր կա նրանում)։ Ուրեմն, յերկու զերոյով վերջացող ամեն մի թիվ բաժանվում է 4-ի վրա։ Որինակ․

$$2300 : 4 = 575։$$

Այժմ վերցնենք յերկու այնպիսի թվեր, վորոնցից մեկի վերջին յերկու թվանշանով արտահայտվող թիվը բաժանվի 4-ի վրա, իսկ յերկրորդի վերջին յերկու թվանշանով արտահայտվող թիվը չբաժանվի․ որինակ՝ 2348-ը և 2350 (48-ը բաժանվում է 4-ի վրա, իսկ 50-ը՝ վոչ)։ Այդ թվերը կարելի յե ներկայացնել գումարի ձևով, այսպես․

$$2348 = 2300 + 48; \quad 2350 = 2300 + 50։$$

Առաջին որինակում յուրաքանչյուր գումարելին բաժանվում է 4-ի վրա, ուստի և գումարն էլ բաժանվում է 4-ի վրա, ուրեմն, 2348-ը բաժանվում է 4-ի վրա։ Յերկրորդ որինակում առաջին գումարելին բաժանվում է 4-ի վրա, իսկ յերկրորդը չի բաժանվում, ուստի 2350 գումարը չի բաժանվում 4-ի վրա։ Այսպիսով, **4-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն յեվ միայն այն թվերը, վորոնց վերջին յերկու թվանշանով արտահայտվող թիվը բաժանվում է 4-ի վրա։**

Նույն յեղանակով հեշտ է ապացուցել, վոր 8-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն և միայն այն թվերը, վորոնց վերջին յերեք թվանշաններով արտահայտվող թիվը բաժանվում է 8-ի վրա։

85. 5-ի յեվ 10-ի վրա բաժանվող թվերի բաժանելիության հատկանիշները։ Տասնավորը բաժանվում է 5-ի և 10-ի վրա, դրա համար էլ տասնավորներից կազմված, այսինքն՝ զերոյով վերջացող թիվը բաժանվում է 5-ի և 10-ի վրա։ Յեթե թիվը զերոյով չի վերջանում, ապա նա 10-ի վրա չի բաժանվում, իսկ 5-ի վրա կբաժանվի միայն այն ժամանակ, յերբ նրա վերջին թվանշանը 5 է, վորովհետև բոլոր միանիշ թվերից միայն 5-ն է բաժանվում 5-ի վրա։ Յեվ այսպես․

5-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն յեվ միայն այն թվերը, վորոնք վերջանում են զերոյով կամ 5 թվանշանով։ 10-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն յեվ միայն այն թվերը, վորոնք վերջանում են զերոյով։

Դիտողություն։ Նման ձևով էլ կարելի յե համոզվել, վոր 25-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն և միայն այն թվերը, վորոնց վերջին յերկու թվանշանները կամ զերոներ են, կամ 25, կամ 50, կամ 75։

50-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն և միայն այն թվերը, վորոնց վերջին յերկու թվանշանները զերոներ են կամ 50։

86. 3-ի յեվ 9-ի վրա բաժանվող թվերի բաժանելիության հատկանիշները։ Նախապես նկատենք, վոր 3-ի և 9-ի վրա բաժանվում է ամեն մի թիվ, վորը գրված է միայն մի թվանշանի՝ 9-ի միջոցով, այսինքն՝ 9, 99, 999 և այլն։ Իսկապես․

$$999 : 3 = 333 \qquad 9999 : 3 = 3333 \text{ և այլն}$$
$$999 : 9 = 111, \qquad 9999 : 9 = 1111 \text{ և այլն։}$$

Նկատելով այդ, վերցնենք վորևէ թիվ․ որինակ, 2457-ը և վերածենք տարբեր կարգի առանձին միավորների (բացի հասարակ միավորներից, վորոնց կթողնենք առանց վերածելու)․

$$\begin{aligned} 2457 = {} & 1000 + 1000 + \\ & + 100 + 100 + 100 + 100 + \\ & + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 \\ & + 7 \end{aligned}$$

Յուրաքանչյուր հազարավորը կվերածենք 999-ի և 1-ի, յուրաքանչյուր հարյուրավորը՝ 99-ի և 1-ի, յուրաքանչյուր տասնավորը՝ 9-ի և 1-ի։ Այդ ժամանակ 2 հազարի փոխարեն կստանանք 2 անգամ 999 և 2 միավոր, 4 հարյուրի փոխարեն կստանանք 4 անգամ 99 և 4 միավոր, 5 տասնավորի փոխարեն՝ 5 անգամ 9 և 5 միավոր։
Հետևապես․

$$\begin{aligned} 2457 = {} & 999 + 999 && + 2 + \\ & + 99 + 99 + 99 + 99 && + 4 + \\ & + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 && + 5 + \\ & && + 7 \end{aligned}$$

999, 99 և 9 գումարելիները բաժանվում են 3-ի և 9-ի վրա, ուրեմն, տված թվի բաժանելիությունը 3-ի և 9-ի վրա կախում ունի միայն 2+4+5+7 գումարից. յեթե այդ գումարը բաժանվում ե (չի բաժանվում) 3-ի և 9-ի վրա, ապա և տված թիվն էլ բաժանվում ե (չի բաժանվում) այդ թվերի վրա։ 2+4+5+7 գումարը տված թվի թվանշաններով արտահայտվող թվերի գումարն ե. կարճության համար ասում են, վոր դա տված թվի **թվանշանների գումարն ե**։ Ուստի.

3-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն և միայն այն թվերը, վորոնց թվանշանների գումարը բաժանվում ե 3-ի վրա։

9-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն և միայն այն թվերը, վորոնց թվանշանների գումարը բաժանվում ե 9-ի վրա։

2457 թվի մեջ թվանշանների գումարը հավասար ե 18-ի, 18-ը բաժանվում ե 3-ի և 9-ի վրա, ուրեմն՝ 2457-ը նույնպես կբաժանվի և՛ 3-ի, և՛ 9-ի վրա։ Իսկապես.

2457 : 3=819, 2457 : 9=273։

Քանի վոր 9-ը բաժանվում ե 3-ի վրա, ապա ուրեմն, 9-ի վրա բաժանվող ամեն մի թիվ կբաժանվի 3-ի վրա։ Բայց թիվը կարող ե բաժանվել 3-ի վրա և միաժամանակ չբաժանվել 9-ի վրա։ Այսպես, 17331 թվի թվանշանների գումարը հավասար ե 15-ի. քանի վոր 15-ը բաժանվում ե 3-ի վրա, իսկ 9-ի վրա չի բաժանվում, ուստի և 17331-ը բաժանվում ե 3-ի վրա, իսկ 9-ի վրա չի բաժանվում։

Դիտողություն։ *Թվաբանության մանրամասն գրած դասընթացներում կարելի յե գտնել 7-ի, 11-ի, 13-ի, 37-ի և ուրիշ թվերի վրա բաժանվող թվերի բաժանելիության հատկանիշները, բայց դրանք այնքան բարդ են, վոր գործնականում դրանցից օգտվելը դժվար ե, ուստի մենք դրանք չենք շարադրում։*

87. 6-ի, 12-ի, 15-ի վրա բաժանվող թվերի բաժանելիության հատկանիշները։ Յեթե վորևե թիվ բաժանվում ե 6-ի վրա, ապա այն կարելի յե վերլուծել վեցյակների, այսինքն՝ ներկայացնել

6+6+6+6...+6

գումարի տեսքով։

Բայց յուրաքանչյուր վեցյակ կարելի յե վերլուծել յերկյակների (2+2+2) և յեռյակների (3+3). ուրեմն, նաև ամեն մի այդպիսի թիվ կարելի յե վերլուծել յերկյակների ու յեռյակների. հետևապես, այդ թիվը պետք ե միաժամանակ բաժանվի թե 2-ի և թե 3-ի վրա։ Այսպիսով.

Վորպեսզի թիվը 6-ի վրա բաժանվի, անհրաժեշտ ե, վոր նա բաժանվի 2-ի և 3-ի վրա։

Որինակ, 3584-ը 6-ի վրա չի բաժանվում, քանի վոր նա 3-ի վրա չի բաժանվում (թեպետ և 2-ի վրա բաժանվում ե)։ 3585-ը նույնպես չի բաժանվում 6-ի վրա, քանի վոր նա չի բաժանվում 2-ի վրա (թեպետ և 3-ի վրա բաժանվում ե)։

Բայց այս դատողությունը մեզ դեռ չի համոզում, վոր 6-ի վրա բաժանվող թվերի բաժանելիության այդ հատկանիշը բավարար ե, այսինքն, վոր ամեն մի թիվ, վորը բաժանվում ե 3-ի և 2-ի վրա, կբաժանվի նաև 6-ի վրա։ Այժմ ապացուցենք, վոր այդ այդպես ե։ Ընդունենք, վոր տված թիվը բաժանվում ե 3-ի և 2-ի վրա և համոզվենք, վոր այդ դեպքում նա կբաժանվի նաև 6-ի վրա։

Դիցուք, տված թիվը բաժանվում ե 3-ի և 2-ի վրա։ Այն ժամանակ այն կարելի յե վերածել, թե յեռյակների և թե յերկյակների։ Յենթադրենք, թե այդ թիվը վերածեցինք յեռյակների.

3+3+3+3...+3։

Ձախից սկսած յուրաքանչյուր 2 յեռյակը կմիացնենք 1 վեցյակում։ Այն ժամանակ պետք ե ստացվի յերկուսից մեկը.

1) բոլոր յեռյակները կմիացվեն վեցյակներում, վոչ մի ավելորդ յեռյակ չի մնա. դա նշանակում ե, վոր մեր թիվը ներկայացվեց

6+6...+6

տեսքով, այսինքն՝ վերածվեց վեցյակների, հետևապես, նա բաժանվում ե 6-ի վրա.

2) մի յեռյակ մնաց առանց զույգի, այսինքն՝ տված թիվը ներկայացվեց հետևյալ տեսքով.

6+6+...+6+3։

Բայց այստեղ բոլոր գումարելիները, բացի վերջինից, բաժանվում են 2-ի վրա, ուրեմն, 2-րդ հատկության (§ 82) հիման վրա մեր թիվը չէր բաժանվի 2-ի վրա, բայց քանի վոր ըստ պայմանի նա բաժանվում է 2-ի վրա, ապա այս դեպքը հնարավոր չէ։

Այժմ կարող ենք պնդել, վոր վորևե թիվ 6-ի վրա բաժանվելու համար անհրաժեշտ է և բավարար, վոր նա բաժանվի 2-ի և 3-ի վրա, կամ, ավելի կարճ՝

6-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն յեվ միայն այն թվերը, վորոնք բաժանվում են թե՛ 2-ի յեվ թե՛ 3-ի վրա։

Օրինակ, 13854 թիվը բաժանվում է 6-ի վրա, քանի վոր նա բաժանվում է 2-ի վրա (վերջանում է զույգ թվանշանով) և միաժամանակ բաժանվում է 3-ի վրա (նրա թվանշանների գումարը բաժանվում է 3-ի վրա)։ Իսկապես՝ 13854 : 6 = 2309։

Նույն յեղանակով կարելի յե համոզվել, վոր **12-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն յեվ միայն այն թվերը, վորոնք բաբաժանվում են 3-ի յեվ 4-ի վրա։ 15-ի վրա բաժանվում են բոլոր այն յեվ միայն այն թվերը, վորոնք բաժանվում են 3-ի յեվ 5-ի վրա։**

88. Նախորդ տիպի բաժանելիության հատկանիշների ընդհանուր հիմնավորումը։ 6-ի, 12-ի, 15-ի և ուրիշ շատ թվերի բաժանելիության հատկանիշներն ունեն ընդհանուր տեսական հիմնավորում, վորը և այստեղ կշարադրենք։

Թեորեմ։ Յեթե a_1a_2 յերկու թվերի արտադրյալը բաժանվում է p յերրորդ թվի վրա յեվ a_1 կամ a_2 թվերից մեկը p-ի հետ ընդհանուր բաժանարարներ չունի, բացի միավորից, ապա նրանցից մյուսը կբաժանվի p-ի վրա։

Ապացույց։ Դիցուք, a_1-ը p-ի հետ, բացի միավորից, ուրիշ ընդհանուր բաժանարարներ չունի. այդ դեպքում ապացուցենք, վոր a_2-ը պետք է բաժանվի p-ի վրա։

a_1-ը բաժանենք p-ի և քանորդն ու մնացորդը համապատասխանաբար անվանենք q և r։ Այն ժամանակ

$$a_1=pq+r։$$

Այժմ r մնացորդի նկատմամբ համոզվենք, վոր նա 1) հավասար չէ 0-ի և 2) p-ի հետ ընդհանուր բաժանարարներ չունի, բացի միավորից։ Իսկապես՝ յեթե $r=0$, ապա $a_1=pq$ և այդ դեպքում a_1-ը կբաժանվի p-ի վրա և, հետևապես, a_1 և p թվերը կունենային ընդհանուր բաժանարար, միավորից տարբեր, վորը հակասում է թեորեմի պայմանին։ Այնուհետև յենթադրենք, վոր p-ն և r-ն ունեն վորևե ընդհանուր բաժանարար $t>1$։ Այդ դեպքում a_1-ը կբաժանվեր

t-ի վրա և, հետևապես, a_1-ը և p-ն կունենային ընդհանուր բաժանարար $t>1$, վորը հակասում է պայմանին։

Յեթե r մնացորդը հավասար չէ միավորի, ապա բաժանենք p-ն r-ի վրա և այդ բաժանումից ստացած քանորդը և մնացորդն անվանենք q_1 և r_1։ Այդ դեպքում՝

$$p=rq_1+r_1։$$

Քանի վոր p և r-ն ըստ ապացուցածի ընդհանուր բաժանարարներ չունեն բացի միավորից, ապա վերջին հավասարությունից համոզվում ենք, նախորդի նման, վոր 1) r_1-ը հավասար չէ զերոյի և 2) r-ը և r_1-ը ընդհանուր բաժանարարներ չունեն բացի միավորից։ Յեթե r_1-ը հավասար չէ միավորի, ապա r-ը կբաժանենք r_1-ի վրա, վորից կստանանք r_2-մնացորդը, վորը հավասար չէ զերոյի և r_1-ի հետ ընդհանուր բաժանարարներ չունի բացի միավորից։ Յեթե r_2-ը հավասար չէ միավորի, ապա r_1-ը կբաժանենք r_2-ի վրա և այլն. այդ ժամանակ կստանանք մի շարք հավասարություններ՝

$$
\begin{aligned}
a_1 &= pq+r,\\
p &= rq_1+r_1,\\
r &= r_1q_2+r_2,\\
r_1 &= r_2q_3+r_3,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

վորոնցից համոզվում ենք, վոր r, r_1, r_2 և այլն մնացորդները հավասար չեն զերոյի։ Քանի վոր ամեն մի բաժանման ժամանակ մնացորդը պետք է փոքր լինի բաժանարարից, կնշանակի, $r<p$, $r_1<r$, $r_2<r_1$ և այլն։ Ուստի բավական թվով բաժանումներ կատարելով, վերջապես կհասնենք այնպիսի մնացորդի, վորը հավասար է միավորի։

Դիցուք, $r_n=1$-ի։ Այն ժամանակ $r_{n2}=r_{n-1}q_n+1$։

Ստացած հավասարություններից յուրաքանչյուրն անդամ առ անդամ բազմապատկենք a_2-ով՝

$$
\begin{aligned}
a_1a_2 &= pqa_2+ra_2,\\
pa_2 &= rq_1a_2+r_1a_2,\\
ra_2 &= r_1q_2a_2+r_2a_2,\\
&\cdots\cdots\cdots,\\
r_{n-2}a_2 &= r_{n-1}q_na_2+a_2
\end{aligned}
$$

Ուշադրություն դարձնելով այդ հավասարությունների առաջինի վրա՝ դատում ենք այսպես.

Քանի վոր a_1a_2 արտադրյալն ըստ պայմանի բաժանվում է p-ի վրա, ապա և pqa_2+ra_2 գումարը կբաժանվի p-ի վրա։ Այդ գումարի առաջին գումարելին բաժանվում է p-ի վրա, հետևապես յերկրորդ գումարելին, այսինքն՝ ra_2 արտադրյալն էլ կբաժանվի p-ի վրա։ Այնուհետև անցնելով յերկրորդ հավասարությանը, գտնում ենք, վոր pa_2 գումարը և գումարելիներից մեկը (ra_2) q_1 բաժանվում է p-ի վրա, վորտեղից յեզրակացնում ենք, վոր յերկրորդ

գումարելին էլ՝ r_1a_2-ը կբաժանվի p-ի վրա։ Այս անցնելով յերրորդ հավասարությանը, յերրորդից չորրորդին, չորրորդից հինգերորդին և այլն, վերջապես, կհասնենք վերջին հավասարությանը, վորտեղից կեզրակացնենք, վոր a_2-ը բաժանվում է p-ի վրա։

89. Հետևություն։ Յեթե a թիվը միաժամանակ բաժանվում է յերկու թվերի p յեվ q-ի վրա, վորոնք ընդհանուր բաժանարարներ չունեն, բացի միավորից, ապա a-ն կբաժանվի նրանց pq արտադրյալի վրա։

a-ն p-ի վրա բաժանելուց ստացված քանորդը նշանակենք Q-ով. այն ժամանակ

$$a=pQ։$$

Բանի վոր ըստ պայմանի a-ն բաժանվում է q-ի վրա, ապա այդ հավասարությունից յեզրակացնում ենք, վոր pQ բաժանվում է q-ի վրա։ Բայց p-ն q-ի հետ ընդհանուր բաժանարարներ չունի, բացի միավորից, ուրեմն, թեորեմի համաձայն, Q-ն պետք է բաժանվի q-ի վրա։ Դիցուք այդ բաժանումից ստացված քանորդը Q_1 է. այդ դեպքում

$$Q=qQ_1,$$

Նախորդ հավասարության մեջ Q-ի փոխարեն գրելով նրան հավասար արտադրյալը, կստանանք.

$$a=p(qQ_1)=(pq)Q_1,$$

վորտեղից յերևում է, վոր a թիվը (pq) և Q_1 բազմապատկիչների արտադրյալն է, ուրեմն a-ն կբաժանվի pq-ի։

Այսպիսով, յեթե թիվը բաժանվում է 2-ի և 3-ի վրա, ապա նա կբաժանվի 6-ի վրա. յեթե թիվը բաժանվում է 3-ի և 4-ի վրա, ապա նա կբաժանվի 12-ի վրա. յեթե բաժանվում է 3-ի և 5-ի վրա, ապա նա բաժանվում է 15-ի վրա և այլն։

Ծանոթություն. *Յեթե p-ն և q-ն փոխադարձ պարզ թվեր չեն, ապա վորևէ թիվ p-ի և q-ի վրա բաժանվելուց դեռ չի հետևում, վոր այդ թիվը կբաժանվի pq արտադրյալի վրա։ Այսպես, 36-ը բաժանվում է 4-ի և 6-ի վրա, բայց չի բաժանվում 4.6(=24) արտադրյալի վրա։*

II. ԹՎԵՐԻ ՎԵՐԱԾՈՒՄԸ ՊԱՐԶ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿԻՉՆԵՐԻ

90. Պարզ յեվ բարդ թվեր։ *Անշուշտ, ամեն մի թիվ բաժանվում է միավորի և իրեն վրա։ Կան խիստ շատ թվեր, վորոնք վոչ միայն բաժանվում են միավորի և իրենց վրա, այլ ունեն նաև ուրիշ բաժանարարներ, որինակ, 30-ը բացի միավորից ու 30-ից, ունի նաև 2, 3, 5, 6 և 15 բաժանարարները։*

Ամեն մի թիվ, բացի միավորից, վոր բաժանվում է միայն միավորի և իր վրա, կոչվում է պարզ (կամ բացարձակ պարզ, կամ նախնական) թիվ։

Այն թիվը, վորը բաժանվում է վոչ միայն միավորի և իր վրա, այլ և ուրիշ թվերի վրա, կոչվում է բաղադրական (կամ բարդ) թիվ։

1 թիվը չի դասվում վոչ պարզ և վոչ էլ բարդ թվերի շարքին. նա գրավում է հատուկ դիրք։

Կան 100-ից փոքր 25 պարզ թվեր, վորոնք են՝

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,
43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97։

Այս գրքի վերջում բերված է 6000-ից փոքր բոլոր պարզ թվերի աղյուսակը։

91. Բարդ թվի վերածումը պարզ բազմապատկիչների։ *Յուրաքանչյուր բարդ թիվ կարելի յե վերածել պարզ բազմապատկիչների, այսինքն՝* կարելի յե ներկայացնել վորպես պարզ թվերի արտադրյալ։ *Որինակ, 12-ը վերածել պարզ բազմապատկիչների, նշանակում է այդ թիվը ներկայացնել այսպես. 12=2.2.3։*

Դիցուք, թե պահանջվում է վորևէ բարդ թիվ վերածել պարզ բազմապատկիչների, որինակ, 420-ը։ Դրա համար գտնում ենք (ըստ բաժանելիության հատկանիշների) այն ամենափոքր պարզ թիվը, վորի վրա բաժանվում է 420-ը. այդ թիվը 2-ն է։ 420-ը բաժանենք 2-ի վրա.

$$420 : 2=210$$

ուրեմն

$$420=210\cdot 2։ \quad (1)$$

Այժմ վորոնում ենք այն ամենափոքր պարզ թիվը, վորի վրա բաժանվում է 210 բարդ թիվը, այդ թիվը 2-ն է։ 210-ը բաժանենք 2-ի՝

$$210 : 2=105,$$

ուրեմն

$$210=105\cdot 2։$$

(1) հավասարության մեջ 210-ը կփոխարինենք իրեն հավասար արտադրյալով՝

$$420=105\cdot 2\cdot 2։ \quad (2)$$

Այն ամենափոքր պարզ թիվը, որի վրա բաժանվում է 105 բարդ թիվը, 3-ն է։ 105-ը բաժանենք 3-ի վրա․

$$105 : 3 = 35$$

ուրեմն

$$105 = 35 \cdot 3$$

(2) հավասարության մեջ 105-ը փոխարինենք իրեն հավասար արտադրյալով․

$$420 = 35 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \qquad (3)$$

Այն ամենափոքր պարզ թիվը, որի վրա բաժանվում է 35 բարդ թիվը, 5-ն է․ 35-ը բաժանելով 5-ի վրա, ստանում ենք 7․ ուրեմն, $35=7 \cdot 5$։ (3) հավասարության մեջ 35-ը փոխարինելով իրեն հավասար $7 \cdot 5$ արտադրյալով, կստանանք

$$420 = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$$

Դա էլ հենց կլինի պահանջվող վերածումը, քանի որ բոլոր արտադրիչները պարզ թվեր են։

Քանի որ արտադրիչների տեղերը փոխելուց արտադրյալը չի փոխվում, ապա դրանց կարելի յե գրել ուզած դասավորությամբ․ սովորաբար գրում են փոքրից դեպի մեծը, այսպես․

$$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Պարզ բազմապատկիչների վերածումն ավելի հարմար է գրել այսպես․

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

այսինքն՝ գրում են տված բարդ թիվը և նրա աջ կողմում տանում ուղղաձիգ գիծ։ Գծից դեպի աջ գրում են այն ամենափոքր պարզ թիվը, որի վրա բաժանվում է տված բարդ թիվը, և նրա վրա բաժանում են տված թիվը։ Քանորդի թվանշանները գրում են բաժանելիի տակ։ Այդ քանորդի հետ էլ վարվում են այնպես, ինչպես տված թվի հետ։ Գործողությունը շարունա-

կում են այնքան, մինչև քանորդում ստացվի միավոր։ Այն ժամանակ գծի աջ կողմում գտնվող բոլոր թվերը կլինեն տված թվի պարզ բազմապատկիչները։

Քննարկված օրինակում ամեն անգամ փորձում էյինք ստացված թվի ամենափոքր պարզ բաժանարարը։ Շատ հաճախ վերածման այս յեղանակը ամենահարմարն է, որովհետև որքան թիվը փոքր է, այնքան հեշտ է նրա վրա բաժանելը․ բացի այդ, փոքր բաժանարարների մեծ մասի համար կան բաժանելիության հատկանիշներ։ Բայց նշված ուղին պարտադիր չէ և հաճախ պարզ բազմապատկիչների վերածել կարելի յե այլ կարգով և ավելի հեշտ։ Այսպես, հենց մեր օրինակում իսկույն նկատում ենք, որ 420-ը բաժանվում է $10=2 \cdot 5$-ի վրա։ Ուստի վերածումը կատարելով (մտքում)

42	2
21	3
7	7
1	

կարող ենք գրել․

$$420 = 10 \cdot 42 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Յեթե պահանջվում է, օրինակ, 13 000-ը վերածել պարզ բազմապատկիչների, ապա կարող ենք իսկույն նկատել, որ $13\,000=13 \cdot 1000$, և քանի որ 13-ը պարզ թիվ է, ապա մնում է միայն 1000-ը վերածել պարզ բազմապատկիչների․

$$1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5,$$

և միանգամից ստանում ենք

$$13\,000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13$$

Վերցնենք մի օրինակ ևս։ 8874-ը վերածենք պարզ բազմապատկիչների։

8874	2
4437	3
1479	3
493	17
29	29
1	

Հասնելով 493 քանորդին, դժվարանում ենք իմանալ, թե նա ինչ թվի վրա չի բաժանվում։ Այդպիսի դեպքերում դիմում ենք պարզ թվերի աղյուսակին (այս գրքի վերջում)։ Եթե մեզ դժվարության առաջ կանգնեցնող թիվը գտնվում է աղյուսակի մեջ, ապա նա բաժանվում է միայն իր վրա։ 493-ը չի գտնվում պարզ թվերի աղյուսակում, նշանակի, այդ թիվը բարդ է. ուստի և փորձում ենք բաժանել 7-ի, 11-ի, 13-ի և այլ պարզ թվերի վրա այնքան, մինչև որ բաժանումը կատարվի առանց մնացորդի։ Պարզվում է, որ 493-ը բաժանվում է 17-ի վրա և քանորդում ստացվում է 29։ Այժմ կարող ենք վերածումը վերջացնել։

Այս օրինակից երևում է, որ երբեմն բարդ թվերի վերածումը շատ դժվար է կատարել, քանի որ վերածելիս կարող ենք ստանալ այնպիսի մեծ թիվ, որի բարդ կամ պարզ լինելը դժվար է որոշել. իսկ եթե նա բարդ է, ապա միշտ հեշտ չէ գտնել նրա ամենափոքր պարզ բազմապատկիչը։

92. Աստիճան բարձրացնելը։ Թվերը բազմապատկիչների վերածելիս, նույնպես և ուրիշ շատ դեպքերում, հաճախ ստիպված ենք լինում մի քանի միատեսակ արտադրիչներ գրել իրար մոտ, օրինակ, 2.2.2.2 կամ 5.5.5։ Ինչպես հավասար գումարելիներ գումարելիս մենք ներմուծեցինք հատուկ անվանում (բազմապատկում) և հատուկ նշանակում (2.4 փոխանակ 2+2+2+2), այնպես և հավասար արտադրիչներ բազմապատկելիս օգտակար է ներմուծել հատուկ անվանում և հատուկ նշանակում։

Միատեսակ արտադրիչների արտադրյալը կոչվում է **աստիճան**։ Այսպես, 2.2.2.2-ը 2-ի չորրորդ աստիճանն է։ Այդ գրվում է այսպես՝

$$2\cdot2\cdot2\cdot2=2^4;$$

որտեղ 2-ը կոչվում է աստիճանի **հիմք**, իսկ 4-ը—աստիճանի **ցուցիչ**։ Գործողությունն ինքը կոչվում է 2-ը **բարձրացնել չորս աստիճան**։ Ճիշտ նույն ձևով էլ

$$5\cdot5\cdot5=5^3;$$

կարդացվում է այսպես՝ 5-ը երրորդ աստիճան. այստեղ 5-ը հիմքն է, իսկ 3-ը—աստիճանի ցուցիչը։

Երկրորդ աստիճանը ավելի կարճ անվանում են տված հիմքի **քառակուսի**, իսկ երրորդ աստիճանը—տված հիմքի **խորանարդ**։ Այսպես, 7^2-ն կարդացվում է «7-ի քառակուսին», իսկ 5^3-ը—«5-ի խորանարդը»։ Թվի առաջին աստիճանը անվանում ենք հենց այդ թիվը. $3^1=3$։ Այսպիսի նշանակման միջոցով թվերի պարզ բազմապատկիչների վերածումը կարելի է գրել ավելի կարճ. այսպես § 91-ում քննարկած օրինակներում կարող ենք գրել՝

$$420=2^2\cdot3\cdot5\cdot7,$$
$$13\,000=2^3\cdot5^3\cdot13։$$

Երբեմն այդ կրճատումը լինում է շատ նկատելի, օրինակ,

$$1536=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3=2^9\cdot3։$$

93. Բարդ թիվը վերածվում է պարզ բազմապատկիչների միայն մեկ ձևով։ Հեշտ է ապացուցել, որ 91-րդ պարագրաֆում նկարագրած եղանակով ամեն մի թիվ կարելի է վերածել պարզ բազմապատկիչների։ Բայց կիրառելով այդ եղանակը, մենք կարող ենք վերև նշված կարգին անպայման չհետևել, այսինքն՝ վերածումը կարող ենք սկսել ոչ թե այն **ամենափոքր** պարզ թվից, որի վրա բաժանվում է բարդ թիվը, այլ որևէ այլ հաջորդականությամբ (և նույնիսկ կարող ենք, ինչպես այդ տեսանք, նախ բարդ թիվը վերածել բարդ բազմապատկիչների և ապա դրանք վերածել պարզերի)։ Ուստի, հարց է ծագում, թե արդյոք չի՞ կարող երբեմն միևնույն բարդ թվի համար տարբեր պարզ բազմապատկիչների երկու (կամ ավելի) շարքեր ստացվել, որոնք իրարից տարբերվեն կամ հենց բազմապատկիչներով, կամ հավասար բազմապատկիչների թվով։ Օրինակ, 14 000-ն ունի հետևյալ վերածումը՝ $2^4\cdot5^3\cdot7$։ Նա չի՞ կարող, արդյոք, ունենալ մի այլ վերածում ևս, որտեղ մտնի որևէ ուրիշ պարզ բազմապատկիչ, բացի 2, 5, 7-ից, կամ որտեղ այդ բազմապատկիչները կրկնվեն մի այլ թիվ անգամ, քան $2^4\cdot5^3\cdot7$ վերածման մեջ։ Ապացուցված է, որ այդ չի կարող լինել, այսինքն, որ բարդ թիվը, ինչպես էլ վերածենք, տալիս է պարզ բազմապատկիչների մի շարք միայն (իհարկե այդ բազմապատկիչները կարելի է տեղափոխել)։

Թվերը պարզ արտադրիչների վերածելու հնարավորության և միակության ապացույցը: Ապացուցելու համար, որ ամեն մի թիվ (բացի միավորից) կարելի է պարզ բազմապատկիչների վերածել և այն էլ միայն մի եղանակով, նախ ապացուցենք հետևյալ երկու թեորեմները:

1. ԹԵՈՐԵՄ: Ամեն մի թիվ, բացի միավորից, ունի առնվազն մեկ պարզ բաժանարար:

Ապացույց: Դիցուք, $a \neq 1$. եթե a-ն պարզ թիվ է, ապա հենց այդ թիվը ինքը կլինի իր պարզ բաժանարարը, և թեորեմը ապացուցված է. իսկ եթե a-ն բարդ թիվ է, ապա նա ունի a-ից և միավորից տարբեր բաժանարարներ. դիցուք, թե այդ բաժանարարներից ամենափոքրը b-ն է. այդ դեպքում b-ն չի կարող բարդ թիվ լինել, քանի որ եթե նա բաժանվեր c-ի վրա, որն իրենից և միավորից տարբեր է, ապա այդ c թվի վրա կբաժանվեր նաև a թիվը, և, ուրեմն, b-ն չէր լինի a-ի ամենափոքր բաժանարարը: Ուստի, b-ն պարզ թիվ է, իսկ քանի որ նա a-ի բաժանարարն է, ապա, ուրեմն, թեորեմն ապացուցված է:

2. ԹԵՈՐԵՄ: Մի քանի արտադրիչների՝ $a_1\, a_2\, a_3 \cdots a_n$ արտադրյալը p պարզ թվի վրա կարող է բաժանվել միայն այն դեպքում, եթե արտադրիչներից առնվազն մեկը բաժանվում է p-ի վրա:

Ապացույց: Տված արտադրյալը դիտելով միայն երկու՝ a_1 և $(a_2 a_3 \cdots a_2)$ արտադրիչների արտադրյալ, կարող ենք դատել այսպես. եթե a-ն չի բաժանվում p պարզ թվի վրա, ապա այդ նշանակում է, որ a_1-ը և p-ն, բացի միավորից, ուրիշ ընդհանուր բաժանարարներ չունեն. այդ դեպքում էլ 88-ում ապացուցված թեորեմի համաձայն $(a_2, a_3 \cdots a_n)$ թիվը պետք է բաժանվի p-ի վրա: Դրա նման կհամոզվենք, որ եթե a_2-ը չի բաժանվում p-ի վրա, ապա $(a_3\, a_4 \cdots a_n)$ թիվը պետք է բաժանվի p-ի վրա: Շարունակելով այս դատողությունները, կգտնենք, որ եթե $a_1, a_2, a_3 \cdots a_{n-1}$ թվերից ոչ մեկը p-ի վրա չի բաժանվում, ապա a_n-ը բաժանվում է p-ի վրա: Եվ այսպես, $a_1, a_2\, a_3 \cdots a_n$ թվերից որևէ մեկը բաժանվում է p-ի վրա:

Այժմ ապացուցելու համար, որ յուրաքանչյուր թիվ, բացի միավորից, հնարավոր է վերածել պարզ բազմապատկիչների, վարվում ենք այսպես: Դիցուք $a \neq 1$. եթե a-ն պարզ թիվ է, ապա պնդումն ապացուցված է. իսկ եթե a-ն բարդ թիվ է, ապա 1-ին թեորեմի համաձայն նա ունի p_1 պարզ բաժանարարը:

Դիցուք

$$a=p_1a_1$$

եթե a_1-ը պարզ թիվ է, ապա թեորեմն ապացուցված է, իսկ եթե բարդ է, ապա համաձայն 1-ին թեորեմի, նա ունի p_2 պարզ բաժանարար:

Դիցուք $$a_1=p_2a_2,$$

այնպես որ

$$a=p_1p_2a_2.$$

եթե a_2-ը պարզ թիվ է, ապա թեորեմն ապացուցված է. իսկ եթե բարդ է ապա շարունակում ենք մեր դատողությունը նշված եղանակով: Քանի որ

$a>a_1, a_1>a_2$ և այլն, ապա մեր վերածումը վաղ թե ուշ պետք է վերջանա. սակայն այդ վերջանալ կարող է միայն այն դեպքում, երբ որևէ a_n կհանդիսանա պարզ թիվ (եթե նա բարդ է, ապա կարող ենք շարունակել վերածումը): Ուստի,

$$a=p_1p_2 \cdots p_{n-1}\, a_n$$

վերածումը հանդիսանում է a թվի վերածումը պարզ բազմապատկիչների, որի հնարավորությունն, այսպիսով, ապացուցված է:

Վերածման միակությունը (եզակիությունը) ապացուցելու համար կդատենք այսպես. ասենք թե որևէ թվի համար ունենք երկու վերածում (միատեսակ կամ տարբեր) պարզ բազմապատկիչների

$$abc\ldots \text{ և } a_1b_1c_1\ldots$$

այդ դեպքում

$$abc\ldots=a_1b_1c_1\ldots$$

Այս հավասարության ձախ մասը բաժանվում է a-ի վրա, ուրեմն աջ մասն էլ պետք է բաժանվի a-ի վրա: Բայց a-ն պարզ թիվ է, ուստի $a_1b_1c_1\ldots$ արտադրյալը միայն այն ժամանակ կբաժանվի a-ի վրա, եթե նրա բազմապատկիչներից մեկը բաժանվում է a-ի վրա (2-րդ թեորեմ). սակայն պարզ թիվը մի ուրիշ պարզ թվի վրա, միավորից տարբեր, կբաժանվի միայն այն դեպքում, երբ այդ թվերը հավասար են: Նշանակում է, $a_1b_1c_1\ldots$ թվերից որևէ մեկը հավասար է a-ի: Դիցուք, $a_1=a$: Հավասարության երկու մասերը բաժանելով a-ի վրա՝ կստանանք

$$bc\ldots=b_1c_1\ldots$$

Նախորդի նման դատելով կհամոզվենք, որ $b_1c_1\ldots$ բազմապատկիչներից որևէ մեկը հավասար է b-ի: Ընդունենք, թե $b_1=b$, այդ դեպքում $cd\ldots=c_1d_1\ldots$ այս դատողությունները շարունակելով, կտեսնենք, որ առաջին շարքի բոլոր բազմապատկիչները մտնում են նույնպես և երկրորդ շարքը: Հավասարության երկու մասերը բաժանելով a_1-ի վրա, կհամոզվենք, որ առաջին շարքում կա a_1 բազմապատկիչը: Այսպիսով նախորդի նման կգտնենք, որ երկրորդ շարքի բոլոր բազմապատկիչները մտնում են առաջին շարքը: Այստեղից հետևում է, որ այդ երկու շարքերը կարող են տարբերվել միայն բազմապատկիչների կարգով և ոչ թե բազմապատկիչներով—իրենցով. ուրիշ խոսքով այդ երկու շարքերը ներկայացնում են միևնույն շարքը: Այլ կերպ ասած՝ յուրաքանչյուր թիվ (բացի միավորից) կարելի է վերածել պարզ բազմապատկիչների և այն էլ միայն մեկ եղանակով:

94. Մի քանի տեղեկություններ պարզ թվերի մասին: Հեշտ է համոզվել, որ գոյություն ունեն անթիվ բազմությամբ պարզ թվեր: Իսկապես, ընդունենք հակառակը, այսինքն, որ պարզ թվերը վերջավոր թվով են: Այդ դեպքում պետք է գոյություն ունենա ամենամեծ պարզ թիվ: Թող այդ թիվը լինի a-ն: Մեր արած ենթադրությունը հերքելու համար պատրաստենք մի նոր N թիվ, կազմված

$$N=(2.3.5.7\ldots a)+1,$$

բանաձևով, այսինքն՝ պատկերացնենք մի այնպիսի N թիվ, որը կստացվի, եթե 2-ից մինչև a-ն ներառյալ բոլոր պարզ թվերը բազմապատկենք և արտադրյալին ավելացնենք մեկ միավոր։ Քանի որ, ինչպես ակնհայտ է N-ը մեծ է a-ից և a-ն, համաձայն մեր ենթադրության, պարզ թվերից ամենամեծն է, ապա N պետք է լինի բարդ թիվ։ Բայց բարդ թիվը բաժանվում է որևէ պարզ թվի վրա (§ 93, 1-ին թեորեմ)։ Հետևապես, N բաժանվում է 2, 3, 5, 7, 11,..., a շարքի որևէ թվի վրա։ Բայց այդ լինել չի կարող, քանի որ N-ը երկու այնպիսի գումարելիների գումարն է, որոնցից առաջինը (2, 3, 5,...a արտադրյալը) բաժանվում է 2, 3, 5,...a շարքի ամեն մի թվի վրա, իսկ երկրորդը (1) չի բաժանվում այդ թվերից և ոչ մեկի վրա։ Նշանակի ամենամեծ պարզ թիվ գոյություն չունի, իսկ եթե ամենամեծ պարզ թիվ չկա, ապա պարզ թվերի շարքն անվերջ է։

Դեռ հնագույն ժամանակներից սկսած պարզ թվերը եղել են բազմաթիվ հետազոտությունների առարկա։ Իմիջի այլոց, գիտնականները ձգտել են գտնել այն օրենքը, որով կառուցված են պարզ թվերը և որը հնարավորություն կտար պարզ թվերն արտահայտել մեկ կամ մի քանի բանաձևերով, կամ ձգտել են գտնել գոնե մի այնպիսի բանաձև, որը թեկուզ և չէր արտահայտի բոլոր պարզ թվերը, բայց հնարավորություն կտար գտնելու ցանկացած չափով մեծ պարզ թիվ։ Այդ իմաստով հատկապես հետաքրքրական է XVII դարի ֆրանսիացի հռչակավոր մաթեմատիկոս Ֆերմայի (Fermat) կատարած փորձը։ Նա գտավ, որ 2^n+1 բանաձևը տալիս է պարզ թվեր, երբ n-ը հավասար է $2^0=1$, $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$ արժեքներին։ Իսկապես, n-ի այդ արժեքների համար ստացվում են հետևյալ պարզ թվերը՝

3, 5, 17, 257։

Հիմնվելով այս դիտողության վրա (և նկատի ունենալով թվերի մի քանի հատկություններ), Ֆերման այն ենթադրությունն արեց, որ 2^n+1 բանաձևը պետք է տա պարզ թվեր ամեն մի n-ի ժամանակ, երբ դա հավասար է 2-ի որևէ աստիճանին։ Այս կարծիքը երկար ժամանակ չէր հերքվում, որովհետև (մինչև Էյլերը) չէր հաջողվում ոչ ոքի ցույց տալ թեկուզ մի դեպք, երբ n-ը հավասար լիներ 2-ի որևէ աստիճանին, 2^n+1 բանաձևը տար բարդ թիվ[1]։ Ֆերմայի հիպոթեզը առաջին անգամ հերքեց հռչակավոր Էյլերը (XVIII դարում), ապացուցելով, որ երբ $n=2^5=32$ 2^n+1 բանաձևը տալիս է այնպիսի թիվ, որը բաժանվում է 641-ի վրա։

Ֆերմայի կատարած այս սխալը հանդիսանում է մի ուսանելի օրինակ, թե մաթեմատիկայի մեջ ինչքան անգործադրելի է մասնավորից ընդհանուր եզրակացություններ հանելը, (կամ ինդուկտիվ մեթոդը)։

---

[1]) n-ն աճելիս 2^n+1 բանաձևը տալիս է չափազանց արագ աճող թվեր օրինակ, երբ $n=2^4$, ստացվում է 65537. երբ $n=2^5$, ստացվում է 4294967297 թիվը։ XVII և XVIII դարերի գիտության վիճակում դժվար էր այդպիսի մեծ թվերի մասին ասել, պարզ են այդ թվերը, թե բարդ։

Բոլոր պարզ թվերն արտահայտող բանաձևեր չունենալու պատճառով, կարիք է զգացվում էմպիրիկ եղանակով (փորձնական ճանապարհով) կազմել մի շարք իրար հաջորդող պարզ թվեր, 2-ից մինչև որևէ որոշ a մեծ թիվը։ Այդպիսի շարք կազմելու ամենապարզ և միաժամանակ ամենահին եղանակը պատկանում է Ալեքսանդրիայի մաթեմատիկոս Էրատոսթենեսին (որն ապրել է մեր թվագրությունից 3 դար առաջ)։ Էրատոսթենեսի եղանակն այն է, որ 2-ից մինչև a (այն թիվը, որով ուզում են սահմանափակել շարքը) եղած բնական թվերի շարքից նախ դուրս են թողնում բոլոր այն թվերը, որոնք բաժանվում են 2-ի վրա (բացի 2-ից), ապա այն բոլոր թվերը, որոնք բաժանվում են 3-ի վրա (բացի 3-ից), ապա այն բոլոր թվերը, որոնք բաժանվում են 5-ի, 7-ի, 11-ի վրա, և այլն (բացի այդ նույն թվերից)։ Այդ արվում է շատ հեշտ ձևով․ 3-ից մինչև a եղած կենտ թվերը գրելով մի շարքում, նրա մեջ ջնջում են 2-ից հետո եկող ամեն մի երրորդ թիվ, 5-ից հետո՝ ամեն մի հինգերորդ թիվ, 7-ից հետո՝ ամեն մի յոթերորդ թիվ և այլն։

Ներկայումս գոյություն ունեն 9000000-ից փոքր բոլոր պարզ թվերի աղյուսակներ։

Եթե ձեռքի տակ չունենք գրված պարզ թվերի շարքը կամ եթե տրված N թիվը գերազանցում է գրված շարքի ամենամեծ թվից, ապա հարց է ծագում, թե ինչպես իմանանք՝ N-ը պարզ, թե բարդ թիվ կլինի։ Դրա համար ամենապարզ եղանակը հետևյալն է․ նախօրոք գտնելով $\sqrt{N}$-ը, գրում են այն բոլոր պարզ թվերը, որոնք փոքր են այդ արմատից։ Դիցուք, թե դրանք հետևյալ թվերն են․

2, 3, 5, 7,...,a։

Այնուհետև N-ը բաժանում են 2-ի, 3-ի, 5-ի... և a-ի վրա։ Եթե N-ը այդ թվերից ոչ մեկի վրա չի բաժանվում, ապա առանց շարունակելու հետագա բաժանումները, կարող ենք պնդել, որ N-ը պարզ թիվ է։ Իսկապես, քանի որ $N=\sqrt{N}\cdot\sqrt{N}$, ապա ակնհայտ է, որ N-ը $\sqrt{N}$-ից ավելի մեծ թվերի վրա բաժանելիս պետք է ստացվեն $\sqrt{N}$-ից փոքր քանորդներ։ Ուստի, եթե N-ը կարողանար բաժանվել $\sqrt{N}$-ից որևէ մեծ թվի վրա, ապա նա կբաժանվեր նաև $\sqrt{N}$-ից փոքր թվերի վրա։ Եթե N-ը մեծ թիվ է, ապա այս եղանակը կարող է լինել հոգնեցուցիչ. այսպես, եթե $N>10\ 0000$, ապա $\sqrt{N}>1000$, իսկ 1000-ից փոքր կան 168 պարզ թվեր. հետևապես, այդպիսի թիվ ստուգելու համար կարիք կլիներ երբեմն կատարել 168 բաժանում։ Թվերի տեսության մեջ նշվում են այնպիսի եղանակներ, որոնց միջոցով կարելի է տված թվի ստուգման համար պահանջվող բաժանումների քանակը բավականաչափ փոքրացնել. սակայն այդ դեպքում էլ տված թվի պարզ թե բարդ լինելու հարցի որոշումը մինչև հիմա էլ երբեմն հսկայական դժվարություններ է ներկայացնում։

III. ԲԱՐԴ ԹՎԻ ԲԱԺԱՆԱՐԱՐՆԵՐԸ ԳՏՆԵԼԸ

95. Ինչ է թվի «բաժանարարը»։ *Հիշեցնենք, որ տված թվի բաժանարար կոչվում է այն թիվը,* որի վրա տված թիվը բաժանվում է։

Ամեն պարզ թիվ, օրինակ, 11-ը, ունի միայն երկու բաժանարար՝ միավորը և հենց ինքը։

Ամեն բարդ թիվ ունի երկուսից ավելի բաժանարարներ. օրինակ, 6 թիվն ունի 4 բաժանարար՝ 1, 2, 3 և 6. դրանցից 2-ը և 3-ը պարզ են, իսկ 6-ը՝ բարդ։

96. Տված թվի բաժանարարները գտնելը։ *Դիցուք, պահանջվում է գտնել 420-ի բաժանարարները։ Դրա համար այդ թիվը կվերածենք պարզ բազմապատկիչների՝*

$$420=2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot7:$$

Ակնհայտ է, որ 420-ը կբաժանվի այդ բազմապատկիչներից յուրաքանչյուրի վրա. հեշտ է տեսնել, որ 420-ը կբաժանվի նաև իր երկու, երեք և ավելի բազմապատկիչներից կազմված արտադրյալի վրա։ Օրինակ, 420-ը կբաժանվի 3.7 արտադրյալի, այսինքն՝ 21-ի վրա, քանի որ 3 և 7 բազմապատկիչները տեղափոխելով շարքի սկիզբը, կստանանք

$$420=3\cdot7\cdot2\cdot2\cdot5=21\cdot2\cdot2\cdot5,$$

որտեղից և երևում է, որ 420-ը բաժանվում է 21-ի վրա։

ԿԱՆՈՆ։ Տված բարդ թվի բաժանարարները գտնելու համար նախապես այդ թիվը վերածում են պարզ բազմապատկիչների. այդ բազմապատկիչներից յուրաքանչյուրը կլինի տված թվի պարզ բաժանարարը, իսկ պարզ բազմապատկիչների երկու, երեք-երեք, չորս-չորս և այլն վերաբազմապատկումից կստացվեն տված թվի բարդ բաժանարարները։

Դիտողություն։ *Բարդ թվի իր բաժանարարներից որևէ մեկի վրա բաժանելուց ստանալիք քանորդը գտնելու համար բավական է այդ թվի պարզ բազմապատկիչներից բաց թողնել այն բազմապատկիչները, որոնց արտադրյալը կազմում է տված բաժանարարը, և իրար հետ վերաբազմապատկել մնացած բազմապատկիչները։*

Օրինակ, 420-ը 21-ի վրա բաժանելուց ստանալիք քանորդը գտնելու համար 420=2.2.3.5.7 վերածումից բաց կթողնենք 3 և 7 բազմապատկիչները, որոնց արտադրյալը կազմում է 21, և մնացած բազմապատկիչները կվերաբազմապատկենք (կստանանք 20)։

Նշված կանոնով կարելի չէ ստանալ տված թվի բոլոր բաժանարարները։ Իսկապես, ընդունենք թե a-ի բաժանարարը b-ն է, իսկ c-ն՝ a-ն b-ի վրա բաժանելուց ստացված քանորդը, այնպես որ

$$a=bc:$$

Եթե b-ն և c-ն վերածենք պարզ բազմապատկիչների և այդ վերածումները տեղադրենք գրված հավասարության մեջ, ապա ակնհայտորեն կստանանք a-ի վերածումը պարզ բազմապատկիչների, ընդ որում b թիվը կստացվի որպես այդ արտադրիչներից մի քանիսի արտադրյալ։ Այսպիսով, տված թվի որևէ բաժանարարը, իսկապես, կարելի չէ ստանալ վերևում նշված կանոնի համաձայն։

IV. ՄԻ ՔԱՆԻ ԹՎԵՐԻ ԱՄԵՆԱՄԵԾ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲԱԺԱՆԱՐԱՐԸ

97. Ինչ է ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։ Մի քանի թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար կոչվում է այն ամենամեծ թիվը, որի վրա բաժանվում են տված բոլոր թվերը։

Օրինակ, երեք թվերի՝ 18-ի, 30-ի և 24-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը 6-ն է, որովհետև 6-ն այն ամենամեծ թիվն է, որի վրա բաժանվում են այդ բոլոր թվերը։

Այն երկու թվերը, որոնց համար ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը միավորն է, կոչվում են փոխադարձաբար պարզ թվեր *(կամ հարաբերական պարզ)։ Այդպես են, օրինակ, 14 և 15 թվերը։*

Նշենք մի քանի թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելու երկու եղանակ։

98. Առաջին եղանակ՝ պարզ բազմապատկիչների վերածելու միջոցով։ *Դիցուք, թե պահանջվում է գտնել 180-ի և 126-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։ Դրա համար այդ թվերը նախապես կվերածենք պարզ բազմապատկիչների՝*

$$180=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5 \qquad 126=2\cdot3\cdot3\cdot7.$$

Բաղդատելով այդ թվերի բազմապատկիչները, նկատում ենք, որ դրանց մեջ կան ընդհանուր բազմապատկիչներ, այն է՝ 2, 3, 3։ Այդ ընդհանուր բազմապատկիչներից յուրաքանչյուրը կլինի 180-ի ու 126-ի ընդհանուր բաժանարարը։ Ընդհանուր բարդ բաժանարարներ ստանալու համար պետք է ընդհանուր բազմապատկիչները վերաբազմապատկել երկու-երկու և երեք-երեք։ Պարզ է, որ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը կստացվի, եթե վերաբազմապատկենք բոլոր ընդհանուր բազմապատկիչները.

$$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18։$$

Դիցուք, եթե պահանջվում է գտնել երեք թվերի՝ 210-ի, 1260-ի և 245-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։ Այդ թվերը վերածենք պարզ բազմապատկիչների.

210	2
105	3
35	5
7	7
1	

1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

245	5
49	7
7	7
1	

Այժմ տեսնում ենք, որ այդ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հավասար է 5 և 7 ընդհանուր բազմապատկիչների արտադրյալին, այսինքն՝ հավասար է 35-ի։

Նման ձևով կարելի է գտնել չորս, հինգ և ավելի շատ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։

ԿԱՆՈՆ։ Մի քանի թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելու համար բավական է այդ թվերը վերածելով պարզ բազմապատկիչների՝ վերաբազմապատկել այդ բազմապատկիչներից նրանք, վորոնք ընդհանուր են տված բոլոր թվերի համար:

Ծանոթություն։ *Այստեղ պետք է հիշել, որ եթե որևէ պարզ բազմապատկիչ այդ բոլոր թվերի վերածումների մեջ մի քանի անգամ է մտնում, ապա դա նույնքան անգամ էլ պետք է մտնի և ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի մեջ։*

Օգտվելով § 92-ում ունեցած աստիճանի նշանակումից, կարող ենք քննարկած օրինակներից առաջինում տված թվերի պարզ բազմապատկիչների վերածումը գրել այսպես.

$$180=2^2 \cdot 3^2 \cdot 5, \qquad 126=2 \cdot 3^2 \cdot 7;$$

այս թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի մեջ բոլորովին չեն մտնի 5 և 7 բազմապատկիչները, քանի որ 5-ը չի մտնում երկրորդ թվի մեջ, իսկ 7-ը չի մտնում առաջին թվի մեջ։ 2 բազմապատկիչը կմտնի 1 անգամ, որովհետև երկրորդ թվի վերածման մեջ նա մտնում է միայն 1 անգամ։ Իսկ բազմապատկիչ 3-ը ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի մեջ կմտնի 2 անգամ (այսինքն՝ երկրորդ աստիճան), քանի որ տված երկու թվերի մեջ նա մտնում է երկու անգամ. այսպիսով, տված թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է՝

$$2 \cdot 3^2=18։$$

Այսպիսով, վերոհիշյալ կանոնը կարելի է արտահայտել նաև այսպես. **մի քանի թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելու համար այդ թվերը վերածում են պարզ բազմապատկիչների և վերցնում տված բոլոր թվերի կազմի մեջ գտնվող տարբեր պարզ բազմապատկիչների աստիճանների արտադրյալը. յուրաքանչյուր բազմապատկիչ վերցվում է այն ամենափոքր աստիճանացույցով, վորով նա յերևան է գալիս տված թվերի կազմի մեջ։**

Օրինակ. $9000=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ և $1350=2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հավասար է

$$2 \cdot 3^2 \cdot 5^2=450։$$

99. Երկրորդ յեղանակը՝ հաջորդական բաժանման միջոցով։ Նախ կբացատրենք այս եղանակի կիրառումը երկու և ապա երեք, չորս և ավելի թվերի նկատմամբ։

Այս եղանակը հիմնված է հետևյալ երկու կանոնների վրա։

1. Երբ տված յերկու թվերից մեծը բաժանվում է փոքրի վրա, ապա փոքր թիվը հանդիսանում է այդ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։

Որինակ, վերցնենք յերկու թիվ 54 և 18, վորոնցից մեծը բաժանվում է փոքրի վրա։ Քանի վոր 54-ը բաժանվում է 18-ի վրա, և 18-ը բաժանվում է 18-ի վրա, ապա ուրեմն, 18-ը 54-ի և 18-ի ընդհանուր բաժանարարն է։ Այդ բաժանարարը միաժամանակ և ամենամեծն է, վորովհետև 18-ը չի կարող բաժանվել 18-ից մեծ վորևե թվի վրա։

II. Յեթե տված յերկու թվերից մեծը չի բաժանվում փոքրի վրա, ապա այդ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հավասար է յերկու ուրիշ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարին, այսինքն՝ տված թվերից փոքրի յեվ մեծ թվի փոքրի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարին։

Դիցուք, թե տված է յերկու թիվ՝ 85 և 30, վորոնցից մեծը փոքրի վրա չի բաժանվում։ Առաջին թիվը բաժանելով յերկրորդի վրա, ստանում ենք՝ 85 : 30=2 (մնացորդ՝ 25)․ այդ դեպքում 85-ի և 30-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը պետք է լինի յերկու ուրիշ թվերի, այն է՝ 30-ի և 25-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը (դա 5-ն է)։

Իսկապես, բաժանելուց ստանում ենք՝

85=30·2+25, վորտեղից 25=85−30·2։

Գումարի և տարբերության մեջ հայտնի (§ 82) հատկությունների հիման վրա այս հավասարություններից կարելի յե հանել յերկու այսպիսի յեզրակացություն․

1) 30-ի և 25-ի ամեն մի ընդհանուր բաժանարար պետք է լինի նաև 85-ի բաժանարարը։

2) 85-ի և 30-ի ամեն մի ընդհանուր բաժանարար պետք է լինի նաև 25 մնացորդի բաժանարարը։

Այսպիսով, պարզվում է, վոր

85 և 30   30 և 25

2 զույգ թվերը պետք է ունենան միևնույն ընդհանուր բաժանարարները, ուրեմն և նրանց ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը պետք է լինի միևնույնը։

Այժմ տեսնենք, թե յերկու թվերի ամենամեծ ընդհանուր

բաժանարարը գտնելու համար ինչպես կարելի յե ոգտվել այդ կանոններից։

Դիցուք, պահանջվում է գտնել 391-ի և 299-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։

$$\begin{array}{rrrr} & & 391 & |\,\underline{299} \\ & & \underline{299} & \;\;1 \\ & 299 & |\,\underline{92} & \\ & \underline{276} & \;\;3 & \\ 92 & |\,\underline{23} & & \\ \underline{92} & \;\;4 & & \\ 0 & & & \end{array}$$

391-ը բաժանենք 299-ի վրա, վորպեսզի իմանանք, թե 299-ը չի՞ լինի արդյոք ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը (I կանոնի հիման վրա)։ Տեսնում ենք, վոր 391-ը 299-ի վրա չի բաժանվում (մնացորդ է ստացվում՝ 92), ուստի, 299-ը ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար չէ։ II կանոնի հիման վրա պնդում ենք, վոր 391-ի և 299-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը նույնպես ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար է ավելի փոքր թվերի՝ 299-ի և 92-ի համար։ Կսկսենք վորոնել այդ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։ Դրա համար 299-ը կբաժանենք 92-ի վրա, իմանալու, թե 92-ը չի՞ լինի արդյոք ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը (I կանոն)։ Տեսնում ենք, վոր 92-ն ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար չէ (մնացորդ ստացվում է 23)։

Այժմ դարձյալ, II կանոնի հիման վրա, պնդում ենք, վոր 299-ի և 92-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը նույնպես ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար է ավելի փոքր թվերի, այն է՝ 92-ի և 23-ի։ Վորոնենք այդ բաժանարարը։ Դրա համար 92-ը բաժանում ենք 23-ի վրա։ Տեսնում ենք, վոր 23-ն ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է յերկու թվերի՝ 92-ի և 23-ի, հետևապես և 299-ի ու 92-ի, հետևապես և տված յերկու թվերի՝ 391-ի ու 299-ի։

ԿԱՆՈՆ։ Յերկու թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելու համար նրանցից մեծը բաժանում են փոքրի վրա, ապա փոքրն առաջին մնացորդի վրա, հետո առաջին մնացորդը բաժանում են յերկրորդ մնացորդի վրա, յերկրորդը յեր-

ցորդի վրա յեվ այլն, այնքան, մինչեվ վոր մնացորդում ստացվի զերո, այն ժամանակ վերջին բաժանարարը կլինի տված թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։

100. Յերկրորդ յեղանակի կիրառումը յերեք յեվ ավելի թվերի նկատմամբ։ *Ընդունենք այժմ, վոր պահանջվում ե գտնել յերեք թվերի՝ 78-ի, 130-ի և 195-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։ Դրա համար նախ կգտնենք այդ թվերից վորևե յերկուսի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը, որինակ, 78-ի և 130-ի.*

```
   130| 78
    78 ‾‾
       1
 78| 52
 52 ‾‾
     1
52| 26
52  ‾‾
‾‾   2
 0
```

Պարզվում ե, վոր այդ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հավասար ե 26-ի։

Այժմ գտնենք 26-ի և տված յերրորդ թվի՝ 195-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը։

```
 195| 26
 182 ‾‾
      7
26| 13
26  ‾‾
‾‾   2
 0
```

Այսպիսով ստացած 13 թիվը տված բոլոր յերեք թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն ե։

Բացատրելու համար, թե ինչու այդպես պետք ե լինի, յերևակայենք, վոր տված թվերը վերածված են պարզ բազմապատկիչների և վոր ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն ուզում ենք գտնել առաջին յեղանակով։ Այն ժամանակ 26 թիվը լինելով 130-ի և 78-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը, պետք ե իր մեջ պարունակի այդ թվերին ընդհանուր բոլոր պարզ բազմապատկիչները. 13 թիվը, լինելով 26-ի և 195-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը, պետք ե իր մեջ պարունակի այդ թվերին ընդհանուր բոլոր պարզ բազմապատկիչները։ Հետևապես, 13 թիվն իր մեջ պարունակում ե բոլոր յերեք թվերի՝ 130-ի, 78-ի և 195-ի համար ընդհանուր պարզ բազմապատկիչները. ուրեմն, 13-ն այդ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն ե։

Իսկ յեթե բացի նշված յերեք թվերից ունենայինք և չորրորդ թիվը, ապա պետք եր նույն յեղանակով գտնել 13-ի և այդ չորրորդ թվի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը և այլն։

ԿԱՆՈՆ։ Յերեք յեվ ավելի թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հաջորդական բաժանման յեղանակով գտնելու համար նախ գտնում են տված թվերից վորեվե յերկուսի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը, ապա գտած բաժանարարի յեվ տված վորեվե յերրորդ թվի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը, յեվ այնուհետեվ վերջին բաժանարարի յեվ տված չորրորդ թվի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը յեվ այլն:

V. ՄԻ ՔԱՆԻ ԹՎԵՐԻ ԱՄԵՆԱՓՈՔՐ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲԱԶՄԱՊԱՏԻԿԸ

101. Ինչ ե ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը: Տված մի քանի թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկ կոչվում ե այն ամենափոքր թիվը, վոր բաժանվում ե այդ թվերից յուրաքանչյուրի վրա:

Այսպես, յերեք թվերի՝ 6-ի, 15-ի և 20-ի համար ամենափոքր բազմապատիկը 60-ն ե, քանի վոր 60-ից փոքր վոչ մի թիվ չի բաժանվում 6-ի, 15-ի և 20-ի վրա, իսկ 60-ը բաժանվում ե այդ թվերի վրա։ Նշենք մի քանի թվերի ամենափոքր բազմապատիկը գտնելու յերկու յեղանակ։

102. Առաջին յեղանակ՝ պարզ բազմապատկիչների վերածելու միջոցով։ *Դիցուք, պահանջվում ե գտնել 100-ի, 40-ի և 35-ի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը։ Դրա համար այդ թվերից յուրաքանչյուրը կվերածենք պարզ բազմապատկիչների.*

$$100=2\cdot2\cdot5\cdot5; \qquad 40=2\cdot2\cdot2\cdot5; \qquad 35=5\cdot7։$$

Վորպեսզի վորևե թիվ բաժանվի 100-ի, 40-ի և 35-ի վրա,

անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա մեջ մտնեն այդ բաժանարարների բոլոր պարզ բազմապատիկները: Գրենք 100-ի բոլոր բազմապատիկները և դրանց կավելացնենք 40-ի այն բազմապատիկները, որոնք 100-ի վերածման մեջ պակասում են: Այն ժամանակ կստանանք 2.2.5.5.2 արտադրյալը, որը կբաժանվի թե 100-ի և թե 40-ի վրա: Այժմ այդ արտադրյալին կավելացնենք 35-ի այն բազմապատիկները, որոնք պակասում են արտադրյալում: Այն ժամանակ կստանանք

$$2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot2\cdot7=1400$$

արտադրյալը, որը բաժանվում է և՛ 100-ի, և՛ 40-ի, և՛ 35-ի վրա: Այդ էլ հենց տված թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է, որովհետև յեթե նրանցից դուրս թողնենք թեկուզ մի արտադրիչ, կստանանք մի այնպիսի թիվ, որը չի բաժանվի տված թվերից որևէ մեկի վրա:

Ուշադրություն դարձնենք այն բանի վրա, որ քննարկած օրինակում 100-ի պարզ բազմապատիկներին ավելացնելով 40-ի այն բազմապատիկները, որոնք չկային նրանց մեջ, ավելացրինք 2 բազմապատիկը: Թեպետ 100-ի վերածման մեջ 2 կա, բայց այնտեղ այդ բազմապատիկը հանդես է գալիս ընդամենը 2 անգամ, իսկ 40-ի վերածման մեջ—3 անգամ. ուստի և 100-ի վերածման մեջ 2-ը պետք է համարեյինք «պակասող» բազմապատիկ:

ԿԱՆՈՆ: Տված մի քանի թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը գտնելու համար այդ բոլոր թվերը վերածում են պարզ բազմապատկիչների, ապա վերցնելով նրանցից որևէ մեկի բազմապատկիչները, դրանց կցագրում են մյուս թվի այն բազմապատկիչները, որոնք այդտեղ պակասում են, այդ արտադրյալին կցագրում են յերրորդ թվի այն բազմապատկիչները, որոնք այդտեղ պակասում են, յեվ այսպես շարունակ մինչեվ վերջին թիվը: Այս ձեվով ստացված արտադրյալը հենց կլինի տված թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը:

Օգտվելով § 92-ում ներմուծած աստիճանի նշանակումից, կարող ենք մեր օրինակի մեջ տված թվերի վերածումները գրել այսպես.

$$100=2^2\cdot5^2;\qquad 40=2^3\cdot5;\qquad 35=5\cdot7.$$

Ակներև է, որ տված թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը պետք է պարունակի 2, 5 և 7 բազմապատիկները, ըստ որում 2-ը պետք է մտնի յերրորդ աստիճան, որովհետև փոքր աստիճանացույցի դեպքում ստացած թիվը 40-ի վրա չէր կարող բաժանվել: 5 բազմապատիկը պետք է մտնի յերկրորդ աստիճան, որովհետև հակառակ դեպքում ստացած թիվը 100-ի վրա չէր բաժանվի, իսկ 7 բազմապատիկը բավական է վերցնել առաջին աստիճան: Այսպիսով, որոնելի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է՝

$$2^3\cdot5^2\cdot7=1400.$$

Այսպիսով, նշված կանոնը կարելի յե արտահայտել նաև այսպես. **մի քանի թվերի ամենափոքր բազմապատիկը գտնելու համար այդ բոլոր թվերը վերածում են պարզ բազմապատկիչների յեվ կազմում տված թվերի վերածումների մեջ գտնվող բոլոր տարբեր բազմապատկիչների աստիճանների արտադրյալը, ընդ որում յուրաքանչյուր բազմապատկիչ վերցվում է այն ամենամեծ աստիճանացույցով, որով նա հանդես է գալիս այդ վերածումների մեջ:**

103. Մի քանի հատուկ դեպքեր: Քննության առնենք յերկու այնպիսի դեպքեր, որոնց ժամանակ ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը կարելի յե գտնել շատ հեշտ:

Առաջին դեպք, յերբ տված թվերի վոչ մի զույգը ընդհանուր բազմապատկիչներ չունի: Դիցուք, տված են յերեք թվեր՝ 20, 49 և 33, որոնցից վոչ մի զույգը ընդհանուր բազմապատիկներ չունի, ինչպես այդ յերևում է վերածումներից.

$$20=2\cdot2\cdot5;\quad 49=7\cdot7;\quad 33=3\cdot11.$$

Այս դեպքի նկատմամբ կիրառելով ընդհանուր կանոնը, կհանգենք այն յեզրակացության, որ **բոլոր տված թվերը պետք է վերաբազմապատկել**.

$$2\cdot2\cdot5\cdot7\cdot7\cdot3\cdot11=20\cdot49\cdot33=32340.$$

Մասնավորապես այսպես պետք է վարվել, յերբ պահանջվում է գտնել մի քանի փոխադարձաբար **պարզ** թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը: Օրինակ, 3, 7 և 11 թվերի

ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը հավասար է $3.7.11=$ $=231$։

Երկրորդ դեպք, երբ տված թվերից մեծը բաժանվում է մնացած բոլոր թվերի վրա։ Այդ դեպքում ամենամեծ թիվը հենց կլինի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը։ Դիցուք, թե տված են 5, 12, 15 և 60 չորս թվերը, որոնցից մեծը՝ 60-ը բաժանվում է 5-ի, 12-ի և 15-ի վրա։ Քանի որ նա, իհարկե, բաժանվում է նաև հենց իր վրա, ապա և նա էլ ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է։

104. Երկրորդ եղանակ, ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելու միջոցով։ *Դիցուք, պահանջվում է գտնել 336-ի և 1260-ի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը։ Այդ թվերը վերածելով պարզ բազմապատկիչների, գտնում ենք $336=2^4.3.7$ և $1260=2^2.3^2.5.7$։ Այդ թվերի արտադրյալը հավասար է.*

$$336 \cdot 1260=(2^4 \cdot 3.7)\cdot(2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7)։ \qquad (1)$$

Այժմ վերհիշենք, թե ինչպես են կազմում տված երկու թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը։ Տված թվերի պարզ բազմապատկիչների վերածման մեջ պատահող յուրաքանչյուր պարզ թիվ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի մեջ մտնում է տված երկու աստիճանացույցներից ամենափոքրով, իսկ ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի մեջ — ամենամեծով։ Այսպիսով, ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի մեջ կմտնի 2^2-ն, իսկ ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի մեջ՝ 2^4-ը. ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի մեջ կմտնի 3-ը, իսկ ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի մեջ — 3^2-ն։ 5 արտադրիչը, որը մտնում է տված երկու թվերից միայն մեկի վերածման մեջ, կմտնի նրանց ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի մեջ, իսկ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի մեջ չի մտնի։ Վերջապես, 7 բազմապատկիչը, որը տված թվերից յուրաքանչյուրի մեջ մտնում է 1 աստիճանացույցով, այդ աստիճանացույցով կմտնի և ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի մեջ։

Այսպիսով, տված թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է $2^2.3.7=84$, իսկ նրանց ամենափոքր ընդհանուր բազ-

մապատիկը՝ $2^4.3^2.5.7=5040$։ Տեսնում ենք, որ տված թվերի բոլոր բազմապատկիչները, որոնք գտնվում են (1) հավասարության աջ մասում, բաշխվեցին այսպես. նրանց մի մասը մտավ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի մեջ, իսկ մնացածները — ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի մեջ։ Ուստի, տված թվերի՝ 336-ի և 1260-ի արտադրյալը հավասար է նրանց ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի՝ 84-ի և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի՝ 5040-ի արտադրյալին։ Այստեղից կըստանանք.

ԿԱՆՈՆ։ Երկու թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը հավասար է այդ թվերի արտադրյալին՝ բաժանած նրանց ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի վրա։

Այս նկատելով, կարող ենք երկու թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը գտնել և առանց այդ թվերը պարզ բազմապատկիչների վերածելու։ Իսկապես, տված թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը կարելի է գտնել հաջորդական բաժանման եղանակով։ Ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելուց հետո տված թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը հեշտ է գտնվում հենց նոր բերած կանոնի համաձայն։

105. Երեք և ավելի թվերի դեպքը։ *Դիցուք, թե պահանջվում է գտնել երեք թվերի՝ 336-ի, 1260-ի և 350-ի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը։ Նախ կգտնենք 336-ի և 1260-ի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը, որը հավասար է 5040-ի, ինչպես այդ տեսանք § 104-ում։ Այժմ գտնենք 5040-ի և տված երրորդ թվի՝ 350-ի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը։ Այս թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հեշտ է գտնել (օրինակ, հաջորդական բաժանման եղանակով). դա հավասար է 70-ի։ Ուրեմն, ըստ § 104-ում նշած կանոնի, 5040-ի և 350-ի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը հավասար է*

$$\frac{5040 \cdot 350}{70}=25200։$$

Այդ թիվը հենց կլինի տված երեք թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը։

Նման ձևով էլ կարելի յե գտնել չորս, հինգ և ավելի շատ թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը։

ԿԱՆՈՆ։ Յերեք յեվ ավելի շատ թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը գտնելու համար նախ գտնում են նրանցից վորեվե յերկուսի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը, հետո — այդ ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի յեվ տված յերրորդ թվի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը, ապա — այս ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի յեվ տված չորրորդ թվի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը յեվ այլն։

ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՉԱՓՈՒՄԸ։ ՉԱՓԵՐԻ ՄԵՏՐԱԿԱՆ ՍԻՍՏԵՄԸ

106. Ներածություն։ Մինչև հիմա մենք գործ ունեյինք միայն ամբողջ թվերի հետ։ Ամբողջ թվերի ներմուծման հիմքը պատմականորեն յեղել է նախ և առաջ հաշվելու պահանջը. և այդ պահանջներին ամբողջ թվերը միանգամայն բավարարում են։ Բայց դեռ շատ հին դարերում մարդու գործունեյությունը ստեղծել է այնպիսի պահանջներ, վորոնց բավարարման համար միայն ամբողջ թվերը բավական չեն յեղել։ Առաջացել է նոր թվերի ներմուծման անհրաժեշտությունը, և թվաբանությունը պետք է զբաղվեր այդ թվերի հատկությունների և նրանց նկատմամբ կատարվելիք գործողությունների ուսումնասիրությամբ։

Մարդկային պրակտիկայի հիմնական տեսակներից այն, վորը բերում է թվերի ավելի ընդարձակ դասերի քննարկման անհրաժեշտությանը, հանդիսանում է մեծությունների չափումը։ Ուստի, նախքան այդ թվերի ուսումնասիրության անցնելը, պետք է կանգ առնենք մեծությունների չափման եյության և այդ պրոցեսի հետ կապված ամենակարևոր հասկացողությունների վրա։

107. Մեծությունների չափումը։ Դիցուք, ցանկանում ենք մի վորևէ սենյակի յերկարության մասին կազմել ճիշտ պատկերացում. այն ժամանակ սենյակի յերկարությունը չափում ենք մի ուրիշ յերկարության միջոցով, վորը մեզ լավ հայտնի յե, օրինակ, մետրի միջոցով։ Դրա համար մետրը դնում ենք մեր սենյակի յերկարությամբ այնքան անգամ, վորքան հնարավոր է։ Յեթե մետրն այդ յերկարությամբ տեղավորվում է ճիշտ 10 անգամ, ապա սենյակի յերկարությունը հավասար է 10 մետրի։ Դրա նման, վորևէ առարկայի քաշը չափելու համար

վերցնում ենք մի ուրիշ քաշ, որը մեզ լավ հայտնի է, օրինակ, գրամը, և չափում (կշեռքի միջոցով), թե կշռվող առարկայի քաշի մեջ գրամը քանի անգամ է պարունակվում։ Դիցուք, դա պարունակվում է ճիշտ 5 անգամ. ուրեմն առարկայի քաշը հավասար է 5 գրամի։

Մեզ հայտնի այն մեծությունը, որը գործածում ենք ուրիշ մեծություններ չափելու համար, կոչվում է այդ տեսակի մեծությունների միավոր։ Այսպես, մետրը երկարության միավոր է, գրամը քաշի միավոր է և այլն։

Յուրաքանչյուր տեսակի մեծությունների համար սովորաբար ընտրում են մի քանի միավորներ, մի քանիսն ավելի խոշոր, մի քանիսն ավելի մանր։ Այսպես, քաշը չափելու համար, բացի գրամից, գործածում են նաև կիլոգրամ, տոնն, միլիգրամ և այլն։

Չափել որևէ մեծություն, նշանակում է գտնել, թե նրա մեջ քանի անգամ է պարունակվում նույնատեսակ մի այլ մեծություն, որն ընդունված է որպես միավոր։

108. Չափեր։ Յուրաքանչյուր պետության մեջ կառավարությունը սահմանել է որոշ չափեր ամենագլխավոր մեծությունների համար։ Պատրաստված են նմուշային միավորներ՝ նմուշային մետր, նմուշային կիլոգրամ և այլն, որոնց համաձայն պատրաստում են միավորներ՝ առօրյա գործածության համար։ Այն միավորները, որոնք մտել են գործածության մեջ, կոչվում են չափեր։

Չափերը կոչվում են համասեռ, եթե նրանք ծառայում են մի տեսակի մեծությունները չափելու համար։ Այսպես, գրամը և կիլոգրամը համասեռ չափեր են, քանի որ նրանք ծառայում են առարկայի քաշը չափելու համար։

Երկու համասեռ չափերի հարաբերությունը կոչվում է այն թիվը, որը ցույց է տալիս, թե փոքր չափը քանի անգամ է պարունակվում մեծի մեջ։ Այսպես, մետրի հարաբերությունը սանտիմետրին հանդիսանում է 100 թիվը։

109. Չափերի մետրական սիստեմը։ Ներկայումս մեզ մոտ մտցված է չափերի մետրական սիստեմը, որն ընդունված է նաև մի շարք այլ երկրներում։

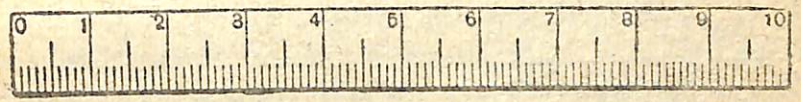
Այդ սիստեմում որպես երկարության միավոր ընդունված է մետրը։

1889 թվին տեղի ունեցած չափ ու կշռի Առաջին գլխավոր կոնֆերանսի կողմից որպես մետրի միջազգային նախատիպ ընդունված է պլատինի և իրիդիումի խառնուրդից ձուլված ակոսավոր մետրը, որը պահվում է Սևրում (Ֆրանսիայում) գտնվող չափ ու կշռի Միջազգային բյուրոյում։

ԽՍՀՄ-ի համար որպես մետրի նախատիպ ընդունված է պլատինի և իրիդիումի խառնուրդից ձուլված միջազգային մետրի պատճենը, որը կրում է № 28 նշանը և պահվում է Լենինգրադում՝ մետրոլոգիայի և ստանդարտիզացիայի Համամիութենական ինստիտուտում։

Մետրը բաժանվում է 10 հավասար մասերի, մետրի տասներորդ մասը—դարձյալ 10 հավասար մասի, մետրի հարյուրերորդ մասն, իր հերթին, բաժանվում է 10 հավասար մասի և այլն։ Մյուս կողմից, գործածվում են 10 մետրանոց, 100 մետրանոց և այլ չափեր։ Մետրի տասնորդական ենթաբաժանումներն անվանելու համար «մետր» բառի սկզբից ավելացնում են հետևյալ լատիներեն բառերը՝ «դեցի» (նշելու մեկ տասներորդ մասը), «ցենտի» (մեկ հարյուրերորդը), «միլի» (մեկ հազարերորդը)։ Այսպես, դեցիմետր նշանակում է մետրի մեկ տասներորդ մասը, ցենտիմետր—մետրի մեկ հարյուրերորդ մասը, միլիմետր—մետրի մեկ հազարերորդ մասը։

«Ցենտիմետր» բառը հաճախ փոխարինում են «սանտիմետր» ֆրանսերեն բառով։



Գծ. 1.

1-ին գծագիրը ցույց է տալիս սանտիմետրների և միլիմետրների բաժանված (բնական չափերով) մեկ դեցիմետրը։

Մետրին բազմապատիկ չափերը անվանում են հունարեն բառերով՝ դեկա (10), հեկտո (100), կիլո (1000)։ Այսպես, դեկամետր նշանակում է 10 մետր, հեկտոմետր—100 մետր, կիլոմետր

—1000 մետր։ Ընդունված է մետրական չափերի անունները կրճատ նշանակել այսպես.

Մետրական չափերի անունները	Հայկական նշանակումները	Լատինական նշանակումները
Մետր	մ	m
Դեցիմետր	դմ	dm
Սանտիմետր	սմ	cm
Միլիմետր	մմ	mm
Կիլոմետր	կմ	km

Մակերեսներ չափելու համար գործածվում են քառակուսի չափեր. քառակուսի մետր, այսինքն՝ այն քառակուսու մակերեսը, որի կողմը մեկ մետր յերկարություն ունի, քառակուսի դեկամետր և այլն։ Այդպիսի չափերից յուրաքանչյուրը պարունակում է հետևյալ ցածր կարգի 100 միավոր. այսպես, քառակուսի դեցիմետրը պարունակում է 100 քառակուսի սանտիմետր։

Դաշտերի մակերեսները չափելու համար օգտագործում են ար և հեկտար։ Արը քառակուսի դեկամետրն է, հեկտարը հավասար է 100 արի և, ուրեմն, հավասար է քառակուսի հեկտոմետրի։

Ծավալները չափում են խորանարդ չափերով՝ խորանարդ մետր, այսինքն՝ այն խորանարդի ծավալը, որի կողը 1 մ յերկարություն ունի, խորանարդ դեցիմետր և այլն։ Այս չափերից յուրաքանչյուրն իր մեջ պարունակում է հետևյալ ցածր կարգի 1000 միավոր, այսպես, խորանարդ մետրը պարունակում է 1000 խորանարդ դեցիմետր։

Քաշի միավոր հանդիսանում է գրամը (գ)։ Գրամը մոտավորապես հավասար է Ցելսիուսի 4°-ի (կամ 3°,2 Ռեոմյուրի) ժամանակ անոդ տարածության մեջ մի խորանարդ սանտիմետր մաքուր թորած ջրի քաշին։ Գրամը բաժանվում է դեցիգրամների, սանտիգրամների և միլիգրամների։ Գրամին բազմապատիկ քաշերը կոչվում են՝ դեկագրամ, հեկտոգրամ և կիլոգրամ (որը կրճատ կոչվում է «կիլո» և նշանակվում է կգ)։

Գործածական են նաև հետևյալ չափերը. «տոննա», որը հավասար է 1000 կիլոգրամի և «ցենտներ», որը հավասար է 100 կիլոգրամի։

Անոթների տարողությունը (նաև հեղուկ և սորուն մարմինների ծավալները) չափելու համար գործածվում է լիտր (լ)։

Լիտրը մոտավորապես հավասար է մի խորանարդ դեցիմետրի ծավալին։ Ավելի ճիշտ, լիտրը մի կիլոգրամ թորած ջրի ծավալն է, նրա ամենամեծ խտության և նորմալ մթնոլորտային ճնշման ժամանակ։ Լիտրը հավասար է 1,000028 խորանարդ դեցիմետրի։ Գործածվում է նաև հեկտոլիտր, որը հավասար է 100 լիտրի։

Գործածվում են նաև դեցիլիտրը, ցենտիլիտրը, դեկալիտրը և կիլոլիտրը։

110. Մետրական սիստեմի հարմարությունները։ Մետրական սիստեմն ունի հետևյալ յերեք կարևոր հարմարությունները. 1) տարբեր մեծությունների չափերը պարզ կախման մեջ են հիմնական չափից՝ մետրից. 2) հարևան կարգերին պատկանող չափերի հարաբերությունը միևնույնն է բոլոր կարգերի և բոլոր մեծությունների համար (բացի, իհարկե, մակերեսներից և ծավալներից). 3) այդ հարաբերությունը հավասար է մեր թվարկության սիստեմի հիմքին, որի հետևանքով անվանական թվերով գործողությունները բավականաչափ հեշտանում են։

111. Ժամանակի չափեր։ Ժամանակի յերկու հիմնական չափեր կան՝ օր և տարի։ Օրը—դա (մոտավորապես) այն ժամանակն է, որի ընթացքում Յերկիրը լրիվ պտույտ է կատարում իր առանցքի շուրջը։ Օրը բաժանվում է 24 ժամի, որոնք հաշվվում են կամ 1-ից մինչև 24, կամ 1-ից մինչև 12 և ապա դարձյալ 1-ից մինչև 12։ Վորպես օրվա սկիզբ ընդունում են կես գիշերը։ Ներկայումս հաղորդակցության ճանապարհների փոստ-հեռագրի, ռադիոհաղորդումների պրակտիկայում ընդունված է ժամերը հաշվել 0-ից մինչև 24 («կեսօրից հետո», «կես գիշերից հետո» բառերի ավելորդ հավելումից խուսափելու համար)։

Այսպես, «ցերեկվա ժամը 2-ի» փոխարեն ասում են «ժամը 14-ին», «յերեկոյան ժամը 7-ի» փոխարեն ասում են «ժամը 19-ին»։ Օրը բաժանվում է այսպես.

օր=24 ժամի,
ժամը=60 րոպեյի,
րոպեն=60 վայրկյանի։

Տարին (մոտավորապես) այն ժամանակն է, որի ընթացքում Երկիրը լրիվ պտույտ է կատարում Արևի շուրջը։ Ընդունված է իրար հաջորդող 3 տարիներից յուրաքանչյուրը հաշվել 365 օր, իսկ դրանց հաջորդող չորրորդ տարին—366 օր։ Այն տարին, որը պարունակում է 366 օր, կոչվում է նահանջ, իսկ այն տարիները, որոնք պարունակում են 365-ական օր—հասարակ։ Չորրորդ տարվանն ավելացնում են մի ավելորդ օր հետևյալ պատճառով։ Այն ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում Երկիրը պտտվում է Արևի շուրջը, ոչ թե ճիշտ 365 օր է, այլ 365 օր և 6 ժամ (մոտավորապես)։ Այսպիսով, հասարակ տարին իսկական տարուց կարճ է 6 ժամով, իսկ 4 հասարակ տարիները 4 իսկական տարիներից կարճ են 24 ժամով, այսինքն՝ մի օրով։ Այդ պատճառով յուրաքանչյուր չորրորդ տարվան ավելացնում են մի օր (փետրվարի 29-ը)։ Միաժամանակ նահանջ ընդունում են այն տարիները, որոնց թվերը 4-ի վրա բաժանվում են առանց մնացորդի (օրինակ, 1936, 1940 և այլն)։

Տարին բաժանվում է 12 անհավասար մասերի, որոնք կոչվում են ամիսներ։ Ահա ամիսների անունները կարգով. հունվար (31 օր), փետրվար (28 կամ 29 օր), մարտ (31), ապրիլ (30), մայիս (31), հունիս (30), հուլիս (31), օգոստոս (31), սեպտեմբեր (30), հոկտեմբեր (31), նոյեմբեր (30) և դեկտեմբեր (31)։

Այն ժամանակագրությունը, որի համաձայն 3 տարին 365-ական օր ունի, իսկ չորրորդը՝ 366 օր, սահմանեց Հռոմի դիկտատոր Հուլիոս Կեսարը (46 թ. մեր թվականությունից առաջ), և այդ պատճառով էլ այն կոչվում է հուլյան կամ հին տոմար։ Մինչև հեղափոխությունը Ռուսաստանում այդ էր ընդունված, բայց Հոկտեմբերյան սոցիալիստական Մեծ հեղափոխությունից հետո դա փոխարինվեց միջազգային նոր տոմարով կամ գրիգորյան ժամանակագրությամբ (այսպես կոչված Հռոմի պապ Գրիգոր XIII-ի անունով, որն այդ հաշվումը մտցրեց 1582 թ.)։ Ըստ այդ հաշվումի, ժամանակի հաշիվը XX դարում 13 օրով առաջ է հին տոմարից. այսպես, երբ հին տոմարով, ասենք, դեկտեմբերի 10-ն է, ապա նոր տոմարով հաշվում են դեկտեմբերի 23-ը։ Այսպիսով, նոր տոմարից հնին անցնելու համար պետք է նոր տոմարի ամսաթվից հանել 13 օր։ Օրինակ, եթե մեզանում 1936 թ. մարտի 5-ն էր, ապա հին տոմարով այդ նշանակում էր

նույն թվականի փետրվարի 21-ը, քանի որ մարտի 5 օրերը հանելով, մնացած 8-օրն էլ պետք է հանել փետրվարից, իսկ 1936 թ. այդ ամիսն ուներ 29 օր։

112. Գրիգորյան ժամանակագրության հիմերը։ Այն ժամանակը, որ ընթանում է գարնանային մեկ գիշերահավասարից մինչև հետևյալ գարնանային գիշերահավասարը, կոչվում է արեգակնային կամ արևադարձային տարի. այն ժամանակը, որն ընդունված է տարի ըստ քաղաքացիական ժամանակագրության, կոչվում է քաղաքացիական տարի։ Քանի որ տարվա ժամանակների փոփոխությունները կախում ունեն Արեգակի նկատմամբ Երկրի ունեցած դիրքից, ապա արեգակնային տարին հանդիսանում է ժամանակի այն անցողությունը, որի ընթացքում բոլորովին ավարտվում են տարվա ժամանակների փոփոխությունները։ Ուստի, ցանկալի է, որ քաղաքացիական տարին, որքան կարելի է, համընկնի արեգակնային տարվան. միայն այդ դեպքում զանազան դարաշրջաններում տարվա ժամանակները կընկնեն միևնույն ամիսներին։ Այն ժամանակագրությունը, որ մտցրեց Հուլիոս Կեսարը, դրան չէր հասնում լրիվ։ Այդ հաշվումով քաղաքացիական տարին հաշվվում էր 365 օր և 6 ժամ, մինչդեռ արեգակնային տարին պարունակում է (մոտավորապես) 365 օր 5 ժամ 48 րոպե 48 վայրկյան, այնպես որ հուլյան հաշվումի տարին արեգակնային տարվանից երկար է (մոտավորապես) 11 րոպե 12 վայրկյանով, որը 400 տարում կազմում է մոտ երեք օր։ Հուլյան ժամանակագրությունն առաջին անգամ ուղղեց Գրիգոր XIII պապը 1582 թ.։ Այդ թվին քաղաքացիական և արեգակնային հաշվումների միջև տարբերությունը կազմում էր 10 օր, այնպես որ հաշվում էին, օրինակ, սեպտեմբերի 1-ը, երբ արեգակնային ժամանակով պետք էր հաշվել սեպտեմբերի 11-ը։ Քաղաքացիական ժամանակն արեգակնայինի հետ հավասարեցնելու համար Գրիգորն առաջարկեց 1582 թ. հոկտեմբերի 5-ը հաշվել հոկտեմբերի 15։ Բայց քանի որ նման ուշացումը պետք է կրկնվեր և հետագայում, ապա սահմանվեց, որ ապագայում քաղաքացիական հաշվումի յուրաքանչյուր 400 տարին կրճատվի երեք օրով։ Այդ կրճատումը պետք է տեղի ունենար այսպես։ Հուլյան հաշվումով այն տարիները, որոնց համարները ներկայացնում են լրիվ հարյուրակներ, համարվում են նահանջ. օրինակ, 1600, 1700 թ. թ. և այլն հուլյան հաշվումով պետք է համարվեն 366 օր։ Բայց Գրիգորն առաջարկեց, որ այդպիսի տարիները համարվեն հասարակ, բացի այն տարիներից, որոնց հարյուրակների թիվը բաժանվում է 4-ի վրա։ Դրա հետևանքով, ըստ գրիգորյան ժամանակագրության, 1600 թ. պետք է համարվեր նահանջ (16-ը բաժանվում է 4-ի վրա), իսկ 1700, 1800, 1900 թ. թ. հասարակ, այնինչ հուլյան հաշվումով այդ բոլոր 4 տարիները համարվում էին նահանջ։ Այսպիսով յուրաքանչյուր 400 տարին կրճատվում է երեք օրով։ Այս հաշվումը, որ սահմանեց Գրիգոր XIII-ը, հայտնի է գրիգորյան անունով։ Ներկայումս դա ընդունված է համարյա ամբողջ Եվրոպայում։ Գրիգորյան հաշվումն այլ կերպ կոչվում է նոր տոմար, իսկ հուլյանը՝ հին տոմար։ Քանի որ 1582 թ.

նոր տոմարը հնի նկատմամբ առաջ է շարժվել 10 օրով, իսկ դրանից հետո ևս 3 օրով (1700, 1800, 1900 թ. թ.), ուստի ներկայումս հին տոմարը նորից հետ է մնում 13 օրով։

113. Անվանական թվեր։ Ամբողջ թիվը, այդ թիվը կազմող միավորների անունների հետ միասին, կոչվում է **անվանական թիվ**։ Այսպես, 5 մատիտ, 3 մետր, 37 գրամ—**անվանական թվեր են**։ Իսկ յեթե թվի մոտ չի նշված այն միավորների անունները, վորոնցից նա կազմված է, ապա այդպիսի թիվը կոչվում է **վերացական**։ 5-ը, 3-ը, 37-ը—վերացական թվեր են։

«Անվանական թիվ» բառին յերբեմն տրվում է ավելի ընդհանուր իմաստ։ Դիցուք, թե վորևէ մարմնի քաշը չափելիս գտանք, վոր այդ քաշը կազմում է 3 կգ և բացի դրանից՝ նաև 350 գ. այն ժամանակ այդ մարմնի քաշը, վորը գրվում է այսպես՝

3 կգ 350 գ,

նույնպես կոչվում է անվանական թիվ (թեպետ այստեղ իսկապես կան յերկու տարբեր թվեր և յերկու տարբեր չափեր)։ Նման ձևով էլ 12 մ 47 սմ կոչվում է անվանական թիվ։

Անվանական թիվը կոչվում է **պարզ**, յեթե նրա մեջ մտնում են միայն մի անվան միավորներ, օրինակ, 3 կգ։

Անվանական թիվը կոչվում է **բարդ**, յեթե նրա մեջ մտնում են տարբերանուն միավորներ, օրինակ, 3 կգ 350 գ։

Յեթե յերկու անվանական թվեր արտահայտում են միևնույն մեծությունը, ապա նրանք համարվում են **հավասար**։ Օրինակ, 2 կմ 25 մ բարդ անվանական թիվը հավասար է 2025 մ պարզ անվանական թվին, վորովհետև այդ յերկու թվերը արտահայտում են միևնույն յերկարությունը։

Վորևէ կարգի անվանական թիվը ցածր կարգի միավորներով արտահայտելը կոչվում է **վերածում**, իսկ, ընդհակառակը, բարձր կարգի միավորներով արտահայտելը—**անդրադարձում**։ Այսպես, 2 կմ 25 մ թվի ձևափոխությունը 2025 մետրի կլինի վերածում, իսկ 2025 մ հակառակ ձևափոխությունը 2 կմ 25 մ-ի կլինի անդրադարձում։

114. Ինչու մեծությունները չափելու համար պետք է ունենալ նոր թվեր։ Յերբ մենք կամենում ենք հաշվել, թե դասարանում քանի սեղան կամ այգում՝ քանի ծառ կա, ապա

միշտ էլ կգտնվի այնպիսի ամբողջ թիվ, վորը պատասխանի մեր հարցին։ Ուստի առարկաներ հաշվելու համար, բացի ամբողջ թվերից, ուրիշ վոչ մի թիվ չի պահանջվում։

Բայց յերբ կամենում ենք չափել, օրինակ, սենյակի յերկարությունը, ապա կամենում ենք իմանալ, թե յերկարության համար ընտրած միավորը, օրինակ, մետրը քանի անգամ է պարունակվում այդ յերկարության մեջ։ Այստեղ կարող է պատահել, վոր մենք մետրը տեղադրենք 5 անգամ և նկատենք, վոր դեռ մնացել է յերկարության չչափված մաս, բայց այդ մասում մեր մետրը չի տեղավորվում, նա փոքր է մետրից։ Այդ նշանակում է, վոր չափելի յերկարությունը չափման միավորը (մետրը) պարունակում է 5-ից ավելի, իսկ 6-ից պակաս անգամ։ Ուրեմն, վոչ մի ամբողջ թիվ չի կարող պատասխան հանդիսանալ այն հարցին, թե չափելի յերկարությունը քանի մետր է պարունակում (վորովհետև չկա այնպիսի ամբողջ թիվ, վորը 5-ից մեծ լինի, իսկ 6-ից փոքր)։ Յեթե այնուամենայնիվ կամենում ենք մեր հարցի պատասխանն ստանալ վորևէ թվի տեսքով, ապա պետք է մեր ուսումնասիրելի թվերի բնագավառն ընդարձակենք, այսինքն, բացի ամբողջ թվերից, մտցնենք նաև ուրիշ, նոր թվեր։ Այժմ հենց անցնում ենք այդ թվերի ուսումնասիրությանը։

ՉՈՐՐՈՐԴ ԲԱԺԻՆ

ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ (*հասարակ*) ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐ

I. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՍԿԱՑՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

115. Միավորի մասերը։ *Մենք արդեն պատահեցինք չափման այնպիսի միավորների, վորոնք կարող են բաժանվել հավասար մասերի։ Այսպես, 1 մ կարող է բաժանվել 100 սմ-ի, 1 օրը կարող է բաժանվել 24 ժամի։*

Սանտիմետր անվանում ենք մետրի հարյուրերորդ *մասը, ճիշտ այդպես էլ ժամ անվանում ենք օրվա* քսանչորսերորդ *մասը։ Միլիմետրը կազմում է մետրի* հազարերորդ *մասը։ Օրը կազմում է հասարակ տարվա (այսինքն՝ վոչ նահանջ տարվա)* երեք հարյուր վաթսունհինգերորդ մասը։ *Գրամը կիլոգրամի* հազարերորդ *մասն է, րոպեն՝ ժամի* վաթսուներորդ *մասը։*

Յերկրորդ մասը կարճ ասվում է կես, *յերրորդ մասը՝* յերրորդ, *չորրորդ մասը՝* քառորդ։

116. Կոտորակային թիվ։ Միավորի մի մասը կամ մի քանի հավասար մասերի հավաքը կոչվում է կոտորակ։

Որինակ՝ 1 տասներորդը, 3 հինգերորդը, 12 յոթներորդը—կոտորակներ են։

Ամբողջ թիվը կոտորակի հետ միասին կազմում է խառը թիվ. *որինակ, 3 ամբողջ 7 ութերորդ (այսինքն՝ 3 ամբողջ միավոր, վորոնց ավելացրած է նաև միավորի 7 ութերորդ մասը)։*

Կոտորակները և խառը թվերը կոչվում են կոտորակային թվեր, *տարբերելու համար* ամբողջ թվերից, *վորոնք կազմված են ամբողջ միավորներից։*

117. Կոտորակների պատկերումը։ *Ընդունված է կոտորակը պատկերել այսպես, նախ գրում են այն թիվը, վորը ցույց է տալիս, թե կոտորակի մեջ քանի մաս է պարունակվում, նրա տակ գիծ են քաշում, գծի տակ գրում են ուրիշ թիվ, վորը ցույց է տալիս, թե քանի հավասար մասերի յե բաժանված միավորը, վորից վերցրած է կոտորակը։ Որինակ, 3 հինգերորդը պատկերում են այսպես՝* $\frac{3}{5}$։

Գծից վերև գտնվող թիվը կոչվում է կոտորակի համարիչ. *նա ցույց է տալիս այն մասերի թիվը, վորոնցից կազմված է կոտորակը։ Գծի տակ գտնվող թիվը կոչվում է կոտորակի* հայտարար. *նա ցույց է տալիս, թե միավորը քանի հավասար մասերի յե բաժանված։ Այդ յերկու թվերը միասին կոչվում են* կոտորակի անդամներ։

Խառը թիվը պատկերվում է այսպես. գրում են ամբողջ թիվը և նրա աջ կողմում կցագրում են կոտորակը, որինակ, 3 ամբողջ և յերկու յոթերորդ թիվը պատկերում են այսպես՝

$3\frac{2}{7}$։

118. Չափելիս կոտորակային թվեր ստանալը։ *Դիցուք, ցանկանում ենք վորևէ յերկարություն չափել մետրով։ Ընդունենք, թե մետրն այդ յերկարության մեջ տեղավորվում է 7 անգամ, ընդ վորում ստացվում է մետրից փոքր մնացորդ։ Այդ մնացորդը չափելու համար վորոնում ենք մետրի այնպիսի մասը, վորը, յեթե հնարավոր է, մնացորդի մեջ տեղավորվի առանց նոր մնացորդի։ Դիցուք պարզվեց, վոր մետրի տասներորդ մասը մնացորդի մեջ տեղավորվում է ճիշտ 3 անգամ։ Այն ժամանակ ասում ենք, վոր չափելիք յերկարությունը հավասար է* $7\frac{3}{10}$ *մետրի։*

Նման ձևով կոտորակային թվեր կարող են ստացվել նաև քաշը չափելիս (որինակ, $2\frac{1}{4}$ *գրամ), կամ ժամանակը չափելիս (որինակ,* $\frac{7}{10}$ *ժամ) և այլն։*

Այսպիսով, կոտորակային թիվ կարող է ստացվել վորպես չափման արդյունք։

119. Կոտորակային թվերի ստացումն ամբողջ թիվը հավասար մասերի բաժանելիս։ *Դիցուք, պահանջվում է 5 կգ հացը*

բաժանել 8 հավասար մասերի: Այդ բաժանումը կարող ենք կատարել այսպես. յենթադրենք, վոր յուրաքանչյուր կիլոգրամ հացը բաժանված է 8 հավասար մասերի (ութերորդական մասերի). այն ժամանակ 5 կգ հացը կունենա 8.5, այսինքն՝ 40 մաս, իսկ 5 կիլոգրամի մեկ ութերորդ մասում կլինի 40:8, այսինքն՝ 5 մաս: Ուրեմն, 5 կիլոգրամի մեկ ութերորդ մասը հավասար է մեկ կիլոգրամի $\frac{5}{8}$-ին (և ընդհանրապես վորևե 5 միավորի ութերորդ մասը հավասար է մեկ այդպիսի միավորի $\frac{5}{8}$-ին):

Վերցնենք մի այլ որինակ ևս. պահանջվում է 28 թիվը փոքրացնել 5 անգամ, այսինքն՝ 28-ի փոխարեն վերցնել այդ թվի մեկ հինգերորդ մասը: 28-ը 25 և 3 թվերի գումարն է: 25-ի հինգերորդ մասը հավասար է 5-ի: 3-ի հինգերորդ մասը գտնելու համար յուրաքանչյուր միավորը բաժանենք 5 հավասար մասերի, յուրաքանչյուր միավորից վերցնելով $\frac{1}{5}$, կգտնենք, վոր յերեք միավորի հինգերորդ մասը կլինի $\frac{3}{5}$: Ուրեմն, 28-ի հինգերորդ մասը հավասար է $5\frac{3}{5}$-ի:

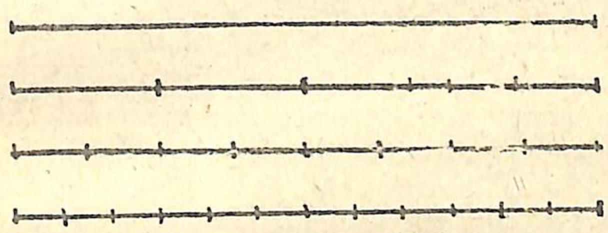
Սակայն 28-ի հինգերորդ մասը կարելի յե գտնել նաև այսպես. մեկ միավորի հինգերորդ մասը $\frac{1}{5}$ է, մյուս միավորի հինգերորդ մասը նույնպես $\frac{1}{5}$ է. յեթե այս ձևով 28-ի յուրաքանչյուր միավորից վերցնենք $\frac{1}{5}$-ական մասեր, ապա կստանանք $\frac{28}{5}$: Այսպիսով՝ **ամբողջ թիվը մի քանի հավասար մասերի բաժանելու համար բավական է այդ թիվը վերցնել վորպես կոտորակի համարիչ, իսկ հայտարար գրել մյուս թիվը, վորը ցույց է տալիս, թե ամբողջ թիվը քանի հավասար մասերի յե բաժանվում:**

Որինակներ. 7-ի մեկ տասներկուերորդ մասը $\frac{7}{12}$ է, 15-ի

քառորդը $\frac{15}{4}$ է, $\frac{8}{13}$ կոտորակը 8-ի տասներեքերորդ մասն է, $\frac{29}{6}$ կոտորակը՝ 29-ի մեկ վեցերորդ մասը:

Հետևություն: Յուրաքանչյուր կոտորակ կարելի յե դիտել վոչ միայն վորպես միավորի **հավասար** մասերի ամփոփումը, այլ և վորպես **մի քանի ամբողջ միավորների** մեկ մասը: Այսպես, $\frac{5}{8}$ կոտորակը վոչ միայն կազմում է մեկ միավորի 5 ութերորդ մասը, այլ և 5 միավորի մեկ ութերորդ մասը:

120. Կոտորակային թվերի հավասարությունը յեվ անհավասարությունը: Յերկու կոտորակային թվեր համարվում են հավասար, յեթե այդ թվերի արտահայտած մեծությունները, **չափված միևնույն միավորի ժամանակ**, իրար հավասար են



1

$\frac{3}{4}$

$\frac{6}{8}$

$\frac{9}{12}$

Գծ. 2.

Վերցնենք վորևե կոտորակ, որինակ, $\frac{3}{4}$ (դիցուք, թե դա 2-րդ գծագրում պատկերած յերկարության $\frac{3}{4}$ մասն է): Յուրաքանչյուր քառորդը կիսենք: Այն ժամանակ կստանանք ավելի մանր մասեր. մի քառորդում կա 2 այդպիսի մաս, ուրեմն միավորի մեջ կպարունակվի 2.4=8 այդպիսի մաս. հետևապես, դրանք ութերորդ մասեր են. այդ ութերորդական մասերը 3 քառորդում կպարունակվեն 2.3=6 անգամ, ուրեմն, $\frac{3}{4}$ կոտորակը հավասար է $\frac{6}{8}$ կոտորակին: Սրանով ուզում ենք ասել, վոր յեթե յերկու յերկարություններից մեկը $\frac{3}{4}$ մետր է, իսկ մյուսը՝

$\frac{6}{8}$ մետր, դրանք հավասար են իրար․ կամ յեթե յերկու քաշերից մեկը հավասար է $\frac{3}{4}$ կիլոգրամի, իսկ մյուսը՝ $\frac{6}{8}$ կիլոգրամի, դրանք իրար հավասար են և այլն։

Յերկու անհավասար կոտորակային թվերից մեծը համարվում է այն, վորն ավելի մեծ մեծություն է արտահայտում չափման միևնույն միավորի ժամանակ։ Այսպես, յեթե ասում ենք, վոր $\frac{1}{5} > \frac{1}{8}$, ապա դրանով ցանկանում ենք արտահայտել, վոր, որինակ, $\frac{1}{5}$ գրամն ավելի մեծ է, քան $\frac{1}{8}$ գրամը, $\frac{1}{5}$ ժամն ավելի մեծ է, քան $\frac{1}{8}$ ժամը և այլն։

Իսկ յեթե յերկու կոտորակների համարիչները միևնույնն են, ապա մեծ կլինի այն կոտորակը, վորի հայտարարն ավելի փոքր է, վորովհետև նա պարունակում է հավասար թվով ավելի խոշոր մասեր, քան մյուսը։ Այսպես, $\frac{2}{3}$-ն ավելի մեծ է, քան $\frac{2}{5}$-ը։

121. Կանոնավոր յեվ անկանոն կոտորակ։ Այն կոտորակը, վորի համարիչը հայտարարից փոքր է, կոչվում է կանոնավոր, իսկ այն կոտորակը, վորի համարիչը հայտարարից մեծ է կամ հավասար է նրան, կոչվում է անկանոն։ Ակնհայտ է, վոր կանոնավոր կոտորակը միավորից փոքր է, իսկ անկանոն կոտորակը մեծ է կամ հավասար է նրան՝ որինակ․

$$\frac{7}{8}<1,\ \frac{8}{8}=1,\ \frac{9}{8}>1։$$

122. Ամբողջ թվի անկանոն կոտորակ դարձնելը։ Ամեն մի ամբողջ թիվ կարելի յե արտահայտել միավորի ինչպիսի մասերով ուզենանք։ Դիցուք, պետք է 8-ն արտահայտել քսաներորդական մասերով։ Մեկ միավորի մեջ կա 20 քսաներորդական մաս․ հետևապես, 8 միավորի մեջ կլինի $20\cdot8$ քսաներորդական, այսինքն՝ 160 մաս։ Ուրեմն․

$$8=\frac{20\cdot8}{20}=\frac{160}{20}։$$

Նման ձևով 25 թիվը քառորդ մասերով կարտահայտվի $\frac{100}{4}$, 100 թիվը տասնյոթերորդական մասերով կարտահայտվի $\frac{1700}{17}$ տեսքով և այլն։

ԿԱՆՈՆ։ Ամբողջ թիվը տված հայտարարն ունեցող անկանոն կոտորակի ձևով արտահայտելու համար պետք է այդ հայտարարը բազմապատկել տված ամբողջ թվով յեվ ստացած արտադրյալն ընդունել վորպես համարիչ, իսկ հայտարար գրել տվածը։

Դիտողություն։ Յերբեմն ոգտակար է լինում ամբողջ թիվը պատկերացնել այնպիսի կոտորակի տեսքով, վորի համարիչը հավասար է այդ ամբողջ թվին, իսկ հայտարարը միավոր է։ Այսպես, 5-ի փոխարեն յերբեմն գրում են $\frac{5}{1}$ (հինգ մեկերորդ)։ Այսպիսի արտահայտությունները իմաստավորելու համար պայմանավորվում են, վոր թվի «առաջին» մասը հենց ինքը թիվն է։

123. Խառը թիվն անկանոն կոտորակ դարձնելը։ Դիցուք, թե պահանջվում է $8\frac{3}{5}$ խառը թիվը դարձնել անկանոն կոտորակ։ Այդ նշանակում է իմանալ, թե քանի հինգերորդական մաս է պարունակվում ութ ամբողջ միավորի և նույն միավորի յերեք հինգերորդական մասերի մեջ միասին վերցրած։ Մի միավորի մեջ պարունակվում են 5 հինգերորդական մասեր, հետևապես ութը միավորի մեջ կպարունակվեն $5\cdot8$, այսինքն՝ 40 այդպիսի մասեր․ ուրեմն, 8-ը միավորի և յերեք հինգերորդի մեջ միասին կլինի $40+3$, այսինքն՝ 43 այդպիսի մաս։

Յեվ այսպես, $8\frac{3}{5}=\frac{43}{5}$։ Սրա նման՝

$$3\frac{7}{8}=\frac{8\cdot3+7}{8}=\frac{31}{8};$$

$$10\frac{1}{4}=\frac{4\cdot10+1}{4}=\frac{41}{4};$$

$$25\frac{2}{7}=\frac{7\cdot25+2}{7}=\frac{177}{7}։$$

ԿԱՆՈՆ: Խառը թիվն անկանոն կոտորակ դարձնելու համար ամբողջ թիվը բազմապատկում են հայտարարով, ստացած արտադրյալին ավելացնում են համարիչը յեվ այդ թիվը վերցնում են վորպես վորոնելի կոտորակի համարիչ, իսկ հայտարար թողնում են նախկինը:

124. Անկանոն կոտորակը խառը թիվ դարձնելը: *Դիցուք, պահանջվում է $\frac{100}{8}$ անկանոն կոտորակը դարձնել խառը թիվ, այսինքն՝ իմանալ, թե այդ անկանոն կոտորակի մեջ քանի ամբողջ միավոր է պարունակվում և ելի քանի ութերորդական մասեր, վորոնք միավոր չեն կազմում: Քանի վոր միավորը պարունակում է 8 ութերորդական, ապա 100 ութերորդականի մեջ կպարունակվի այնքան միավոր, վորքան անգամ 8 ութերորդականը պարունակվում է 100 ութերորդականի մեջ: 8 ութերորդականը 100 ութերորդականի մեջ պարունակվում է 12 անգամ, ընդ վորում 4 ութերորդական մնում է: Ուրեմն 100 ութերորդականը պարունակում է 12 ամբողջ միավոր և ելի 4 ութերորդական մաս: Յեվ այսպես՝*

$$\frac{100}{8}=12\frac{4}{8};$$

Սրա նման.

$$\frac{59}{8}=7\frac{3}{8};\quad \frac{314}{25}=12\frac{14}{25};\quad \frac{85}{17}=5;\ \frac{25}{25}=1.$$

ԿԱՆՈՆ: Անկանոն կոտորակը խառը թիվ կամ ամբողջ թիվ դարձնելու համար համարիչը բաժանում են հայտարարի վրա, այդ բաժանման քանորդը ցույց կտա, թե խառը թվի մեջ քանի ամբողջ միավոր կա, իսկ մնացորդը՝ թե միավորի քանի մասեր յեվս:

Անկանոն կոտորակը խառը թիվ դարձնելը յերբեմն անվանում են նաև ամբողջ թվի անջատում այդ կոտորակից:

II. ԿՈՏՈՐԱԿԻ ՄԵԾՈՒԹՅԱՆ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆԸ ՆՐԱ ԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՓՈՓՈԽՄԱՆ ՀԵՏԵՎԱՆՔՈՎ

125. Կոտորակի յերկու անդամների մեծացումը կամ փոքրացումը միևնույն թիվ անգամ: *Նորից դիմենք 2-րդ*

գծագրին (եջ 112): § 120-ում մենք յուրաքանչյուր քառորդը բաժանեցինք յերկու հավասար մասի, և այսպիսով ստացանք ութերորդական մասեր. յերեք քառորդում պարունակվում է 6 ութերորդական, և այդ պատճառով էլ, ինչպես տեսանք, $\frac{3}{4}$ կոտորակը հավասար է $\frac{6}{8}$ կոտորակին:

Յեթե յուրաքանչյուր քառորդը յերկուսի փոխարեն բաժանենք յերեք հավասար մասերի, ապա կստանանք ավելի մանր մասեր, վորոնցից ամբողջ թվի մեջ կլինի 3.4, այսինքն՝ 12 (ուրեմն, դրանք կլինեն տասներկուերորդական մասեր), իսկ 3 քառորդների մեջ կլինի 3.3, այսինքն՝ 9 մաս. այդ ժամանակ $\frac{3}{4}$-ի փոխարեն կստանանք $\frac{9}{12}$ կոտորակը, վորն ըստ մեծության հավասար է $\frac{3}{4}$-ին: Այսպիսով, յուրաքանչյուր քառորդ մաս, բաժանելով 2, 3, 4, 5 և այլն հավասար մասերի, կստանանք մի շարք այդպիսի հավասար կոտորակներ.

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\frac{15}{20}=\frac{18}{24}=\dots$$

Այս կոտորակներից յուրաքանչյուրը, սկսած յերկրորդից, ստացվում է առաջին կոտորակից՝ $\frac{3}{4}$-ից, նրա համարիչն ու հայտարարը միևնույն թվով 2-ով, 3-ով, 4-ով և այլն բազմապատկելուց հետո. ուրեմն, **կոտորակի մեծությունը չի փոխվի, յերբ նրա համարիչն ու հայտարարը բազմապատկենք միևնույն թվով** *(կամ—վոր նույնն է—մեծացնենք հավասար թիվ անգամ):*

Կոտորակի այս հատկությունը կարելի յե ընդհանուր ձևով արտահայտել այսպես.

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}.$$

Այստեղից հետևում է, վոր **կոտորակի մեծությունը չի փոխվի նաև այն ժամանակ, յերբ նրա համարիչն ու հայտարարը բաժանենք միևնույն թվի վրա** *(կամ, վոր նույնն է, փոքրացնենք հավասար թիվ անգամ):*

Որինակ, նկատելով, վոր $\frac{30}{50}$ կոտորակի յերկու անդամներն ել բաժանվում են 10-ի վրա, կարող ենք այդ կոտորակը փոխել $\frac{3}{5}$ կոտորակով, վորը կստացվի, յեթե $\frac{30}{50}$ կոտորակի համարիչը և հայտարարը փոքրացնենք 10 անգամ։

126. **Կոտորակի միայն մի անդամի մեծացումը կամ փոքրացումը մի քանի անգամ։ Յերբ կոտորակի համարիչը մեծացնենք (կամ փոքրացնենք) մի քանի անգամ, ապա կոտորակը կմեծանա (կամ կփոքրանա) նույնքան անգամ։**

Որինակ, $\frac{4}{10}$ կոտորակի համարիչը մեծացնելով 3 անգամ, կստանանք $\frac{12}{10}$։ Այս կոտորակը նախկինից 3 անգամ մեծ ե, վորովհետև նրա մեջ մասերի թիվը 3 անգամ ավելի յե, իսկ մասերը մնացել են նույնը։

Յերբ կոտորակի հայտարարը մեծացնենք (կամ փոքրացնենք) մի քանի անգամ, ապա կոտորակը կփոքրանա (կամ կմեծանա) նույնքան անգամ։ Որինակ, $\frac{4}{10}$ կոտորակի հայտարարը մեծացնելով 5 անգամ, կստանանք $\frac{4}{50}$։ Այս կոտորակը նախկինից 5 անգամ փոքր ե, վորովհետև (§ 125-ի համաձայն) $\frac{4}{10}=\frac{4\cdot5}{10\cdot5}=\frac{20}{50}$, իսկ $\frac{20}{50}$-ը 5 անգամ մեծ ե $\frac{4}{50}$։

127. **Կոտորակի մեծացումը կամ փոքրացումը մի քանի անգամ։** Իմանալով, թե ինչպես ե փոխվում կոտորակը, յերբ փոխվում են նրա համարիչը և հայտարարը, կարող ենք արտածել հետևյալ կանոնները.

1) Կոտորակը մի քանի անգամ մեծացնելու համար բավական ե նույնքան անգամ մեծացնել նրա համարիչը կամ նույնքան անգամ փոքրացնել նրա հայտարարը.

2) Կոտորակը մի քանի անգամ փոքրացնելու համար բավական ե նույնքան անգամ փոքրացնել նրա համարիչը, կամ նույնքան անգամ մեծացնել նրա հայտարարը։

Որինակներ.

Մեծացնենք $\frac{7}{12}$-ը 5 անգամ. կստանանք $\frac{35}{12}$;

Մեծացնենք $\frac{7}{12}$-ը 6 անգամ. կստանանք $\frac{42}{12}$ կամ $\frac{7}{2}$։

Փոքրացնենք $\frac{8}{9}$-ը 7 անգամ. կստանանք $\frac{8}{63}$։

Փոքրացնենք $\frac{8}{9}$-ը 4 անգամ. կստանանք $\frac{8}{36}$ կամ $\frac{2}{9}$։

Իհարկե, համարիչի մի քանի անգամ փոքրացումը (կոտորակը փոքրացնելիս) կամ հայտարարի մի քանի անգամ փոքրացումը (կոտորակը մեծացնելիս) հնարավոր ե վոչ բոլոր դեպքերում (ինչպես այդ յերեվում ե բերված որինակներից), այլ միայն այն ժամանակ, յերբ համարիչը կամ հայտարարը բաժանվում են այն թվի վրա, վորը ցույց ե տալիս, թե քանի անգամ պետք ե փոքրացնել կամ մեծացնել կոտորակը։

128. **Կոտորակի յերկու անդամների մեծացումը կամ փոքրացումը միևնույն թվով։** Ընդունենք, վոր $\frac{a}{b}$ կոտորակի յերկու անդամներին ավելացրել ենք միևնույն m թիվը, այն ժամանակ կստանանք $\frac{a+m}{b+m}$ նոր կոտորակը։ Նոր կոտորակը բաղդատենք նախկինի հետ։ Դրա համար նախկին կոտորակի յերկու անդամները կբազմապատկենք b+m-ով, իսկ նոր կոտորակի յերկու անդամները՝ b-ով

$$\frac{a}{b}=\frac{a(b+m)}{b(b+m)};\quad \frac{a+m}{b+m}=\frac{(a+m)b}{(b+m)b}.$$

Այժմ բաղդատենք այդ յերկու կոտորակների համարիչները, վորովհետև նրանց հայտարարները նույնն են.

$$a(b+m)=ab+am \text{ և } (a+m)b=ab+bm$$

Ստացած ամեն մի գումարից հանելով ab, առաջին դեպքում կստանանք am և յերկրորդ դեպքում՝ bm։ Յեթե վերցրած կոտորակը միավորից փոքր ե, այսինքն՝ յեթե $a<b$, ապա այն ժամանակ $am<bm$. ուրեմն, մեր կատարած գործողության հետևանքով կանոնավոր կոտորակը մեծացավ։ Իսկ յեթե տված կոտորակը միավորից մեծ ե, այսինքն՝ յեթե $a>b$, ապա այն ժամանակ $am>bm$. նշանակում ե այդպիսի կոտորակը մեր կատարած գործողությունից փոքրացավ։ Այսպիսով՝

Կոտորակի անդամներին միևնույն թիվն ավելացնելուց կոտորակը, եթե միավորից փոքր է, մեծանում է, իսկ եթե միավորից մեծ է, փոքրանում է։

Օրինակ, եթե վերցնենք $\frac{1}{2}$ կոտորակը և նրա համարիչին ու հայտարարին ավելացնենք մեկական միավոր, ապա կստանանք $\frac{1+1}{2+1}=\frac{2}{3}$ կոտորակը, որը $\frac{1}{2}$-ից մեծ է, իսկ եթե վերցնենք $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$ կոտորակը և նույնն անենք նրա հետ, կստացվի $\frac{3+1}{2+1}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$ կոտորակը, որը $\frac{3}{2}$-ից փոքր է։

III. ԿՈՏՈՐԱԿԻ ԿՐՃԱՏՈՒՄԸ

129. Ինչն է կոչվում կոտորակի «կրճատում»։ Կոտորակի կրճատում կոչվում է կոտորակի փոխարինումը մի ուրիշ, իրեն հավասար կոտորակով, որն ունի ավելի փոքր անդամներ և ստացվում է տված կոտորակի համարիչն ու հայտարարը միևնույն թվի վրա բաժանելով։

Իհարկե, կրճատել կարելի է միայն այնպիսի կոտորակը, որի անդամներն ունեն որևէ ընդհանուր բաժանարար, բացի միավորից. օրինակ, $\frac{8}{12}$ կոտորակը կարելի է կրճատել, իսկ $\frac{9}{20}$-ը՝ ոչ, քանի որ առաջին կոտորակի համարիչը և հայտարարը, բացի միավորից, ունեն նաև մի այլ ընդհանուր բաժանարար՝ 4-ը (կրճատումից հետո ստացվում է $\frac{2}{3}$ կոտորակը), իսկ երկրորդ կոտորակի համարիչն ու հայտարարը, բացի միավորից, ոչ մի ընդհանուր բաժանարար չունեն։

Այն կոտորակը, որը չի կարելի կրճատել, կոչվում է անկրճատելի։

130. Կրճատման երկու եղանակ։ *Առաջին եղանակը* (հաջորդական կրճատումը) *այն է, որ ղեկավարվելով բաժանելիության հատկանիշներով, որոշում են, թե տված կոտորակի համարիչը և հայտարարը չե՞ն բաժանվում արդյոք որևէ ընդհանուր բաժանարարի վրա (բացի միավորից). եթե այդպիսի*

բաժանարար գոյություն ունի, ապա դրանով կրճատում են կոտորակը։ Կրճատումից հետո ստացված կոտորակը, եթե հնարավոր է, նորից նույն ձևով կրճատում են և այդպիսի հաջորդական կրճատումը շարունակում են այնքան, մինչև որ ստացվում է անկրճատելի կոտորակ։

Օրինակ.

$$\frac{\overset{10}{\smile}\!\!840}{3600}=\frac{\overset{4}{\smile}\!\!84}{360}=\frac{\overset{3}{\smile}\!\!21}{90}=\frac{7}{30}.$$

Հիշողության համար օգտակար է սկզբում կոտորակի վերևը գրել այն թիվը, որով կրճատում են։ Հետագայում, որոշ ունակություններ ձեռք բերելուց հետո, այդ գրանցումը սովորաբար բաց են թողնում։

Երկրորդ եղանակը (լրիվ կրճատումը) *այն է, որ գտնում են կոտորակի անդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը և, եթե դա լինի ոչ միավորը, այդ անդամները բաժանում են նրա վրա։ Օրինակ, ասենք, թե պետք է կրճատել $\frac{391}{527}$ կոտորակը։ Դրա համար գտնում ենք 391 և 527 թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը (որը հավասար է 17-ի) և նրանով կրճատում.*

$$\frac{391}{527}=\frac{391:17}{527:17}=\frac{23}{31}.$$

Այս դեպքում կրճատումից հետո ստացվում է անկրճատելի կոտորակ։ Իսկապես, կոտորակի անդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը պետք է պարունակի այդ անդամների մեջ գտնվող բոլոր ընդհանուր պարզ բազմապատկիչները, ուստի, երբ նրա վրա բաժանենք համարիչը և հայտարարը, ապա ստացած քանորդներն արդեն իրենց մեջ ոչ մի ընդհանուր բազմապատիկ չեն կարող պարունակել (բացի միավորից), հետևապես, և ոչ մի ընդհանուր բաժանարար չեն կարող ունենալ։

131. Անկրճատելի կոտորակների մասին թեորեմ։ Եթե տված կոտորակը հավասար է որևէ անկրճատելի կոտորակի, ապա տված կոտորակի ան-

դամներ ստացվում են այդ անկրճատելի կոտորակի համապատասխան անդամներից, բազմապատկելով միևնույն ամբողջ թվով։

Ընդունենք, որ

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1},$$

միաժամանակ ընդունենք, որ առաջին կոտորակն անկրճատելի յե, այսինքն՝ որ նրա a և b անդամները ընդհանուր բաժանարարներ չունեն, բացի միավորից։ Պահանջվում է ապացուցել, որ a_1-ը բազմապատիկ է a-ին, b_1-ը բազմապատիկ է b-ին և այն էլ հավասար թիվ անգամ։ Ապացուցելու համար յերկրորդ կոտորակի յերկու անդամները կբազմապատկենք b-ով, իսկ առաջինի անդամները—b_1-ով, քանի որ կոտորակների մեծությունները դրանից չեն փոխվի, ապա կստանանք

$$\frac{ab_1}{bb_1}=\frac{a_1b}{b_1b}$$

հավասարությունը, որտեղից գտնում ենք, որ

$$ab_1=a_1b.$$

ab_1 արտադրյալը բաժանվում է a-ի վրա, ուրեմն, և a_1b արտադրյալը նույնպես բաժանվում է a-ի վրա, բայց, ըստ պայմանի b և a թվերը փոխադարձաբար պարզ են. ուրեմն, պետք է որ a_1-ը բաժանվի a-ի վրա (§ 88)։ a_1-ը a-ի վրա բաժանելուց ստացված քանորդը նշանակելով m տառով, կարող ենք ընդունել $a_1=am$, որից հետո վերջին հավասարումը տալիս է

$$ab_1=amb,$$

Այս հավասարության յերկու մասն էլ բաժանելով a-ի վրա, կստանանք

$$b_1=mb.$$

Յեվ այսպես, պարզվում է, որ $a_1=am$ և $b_1=bm$, այն, ինչ որ պահանջվում էր ապացուցել։

1-ին հետևություն։ Յերկու անկրճատելի կոտորակներ իրար հավասար են միայն այն ժամանակ, յերբ հավասար են նրանց համարիչները յեվ հավասար հայտարարները։

2-րդ հետևություն։ Յուրաքանչյուր կոտորակ հավասար է մեկ յեվ միայն մեկ անկրճատելի կոտորակի։

Իսկապես, կրճատման յերկրորդ յեղանակը (§ 130) ցույց է տալիս, որ յուրաքանչյուր կոտորակ հավասար է որևէ անկրճատելի կոտորակի. յեթե նա հավասար լիներ յերկու անկրճատելի կոտորակների, ապա, այդ կոտորակներն իրար հավասար կլինեյին, որը հնարավոր չէ 1-ին հետևության ուժով։ Ուրեմն, տված կոտորակն իսկապես հավասար է միայն մեկ անկրճատելի կոտորակի։

IV. ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐՆ ԱՄԵՆԱՓՈՔՐ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՀԱՅՏԱՐԱՐԻ ԲԵՐԵԼԸ.

132. Բացատրություն։ *Օրինակի համար վերցնենք $\frac{5}{12}$ և $\frac{7}{15}$ կոտորակները և պարզենք այն հարցը, թե արդյոք չի՞ կարելի այդ կոտորակներն արտահայտել միավորի միևնույն մասերով։ $\frac{5}{12}$ կոտորակն անկրճատելի յե, ուստի այն կոտորակները, որոնց կարող է հավասարվել $\frac{5}{12}$ կոտորակը, պետք է ունենա 12-ին բազմապատիկ հայտարարներ։ Ուրիշ խոսքով, բացի տասներկուերորդական մասերից, մեր վերցրած $\frac{5}{12}$ կոտորակը կարելի յե արտահայտել քսանչորսերորդական, յերեսունվեցերորդական, քառասունութերորդական և այլ մասերով։ Նմանապես այն կոտորակների հայտարարները, որոնց կարող է հավասարվել չկրճատվող $\frac{7}{15}$ կոտորակը, պետք է լինեն 15-ին բազմապատիկ թվեր. հետևապես, այդ յերկու կոտորակների ընդհանուր հայտարարը պետք է լինի 12-ի և 15-ի ընդհանուր բազմապատիկը, իսկ ընդհանուր հայտարարը պետք է լինի 12-ի և 15-ի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը։ Գտնենք այդ թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը.*

$$12=2\cdot2\cdot3$$
$$15=3\cdot5$$
$$\text{ամենափոքր ընդհ. բազ.}=2\cdot2\cdot3\cdot5=60.$$

Այդ էլ հենց կլինի $\frac{5}{12}$ և $\frac{7}{15}$ կոտորակների ամենափոքր ընդհանուր հայտարարը։ Այդ կոտորակներից յուրաքանչյուրը վաթսուներորդական մասերով արտահայտելու համար նրանց հայտարարների համար գտնենք այսպես կոչված լրացուցիչ բազմապատկիչներ, *այսինքն՝ յուրաքանչյուր հայտարարի համար* գտնենք այն թիվը, որով պետք է բազմապատկել այն՝ ամենափոքր ընդհանուր հայտարարն ստանալու համար։ *Քանի որ $60=12\cdot5=15\cdot4$,*

V. ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ԹՎԵՐՈՎ

ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ԹՎԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ

134. Սահմանումը յև կանոնի ստացումը։ *Կոտորակային թվերի գումարումը կարելի յե սահմանել այնպես, ինչպես և ամբողջ թվերի գումարումը (§ 19), այն է.*

գումարումը այն գործողությունն է, որով մի քանի տված թվեր *(գումարելիներ)* միացվում են մի թվի *(գումարի)* մեջ, որը պարունակում է գումարելիների բոլոր միավորները յև բոլոր մասերը։

1) Դիցուք, պահանջվում է գտնել միևնույն հայտարարն ունեցող մի քանի կոտորակների գումարը, օրինակ, այսպիսի կոտորակների.

$$\frac{7}{11}+\frac{3}{11}+\frac{5}{11}.$$

Ակնհայտ է, որ որևէ միավորի 7 տասնմեկերորդական և 3 տասնմեկերորդական, և էլի 5 տասնմեկերորդական մասերը կազմում են նույն միավորի 7+3+5 տասնմեկերորդականը, այսինքն՝

$$\frac{7}{11}+\frac{3}{11}+\frac{5}{11}=\frac{7+3+5}{11}=\frac{15}{11}=1\frac{4}{11}.$$

2) Դիցուք, թե պահանջվում է գումարել տարբեր *հայտարար ունեցող կոտորակներ, օրինակ.*

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{10}+\frac{9}{16}.$$

Այն ժամանակ, բոլոր այդ կոտորակները բերելով ամենափոքր ընդհանուր հայտարարի, գումարումը կկատարենք այնպես, ինչպես առաջին դեպքում։

$$\overbrace{\frac{3}{4}}^{20}+\overbrace{\frac{7}{10}}^{8}+\overbrace{\frac{9}{16}}^{5}=\frac{60+56+45}{80}=\frac{161}{80}=2\frac{1}{80}.$$

Այն թիվը, որը հիշելու համար գրված է յուրաքանչյուր կոտորակի վերևը, այն լրացուցիչ բազմապատկիչն է, որով

պետք է բազմապատկել կոտորակի անդամները, այդ կոտորակն ընդհանուր հայտարարի բերելու համար։

ԿԱՆՈՆ։ Կոտորակները գումարելու համար պետք է նախապես դրանց բերել ընդհանուր հայտարարի, ապա գումարել համարիչները յև գումարի տակ գրել ընդհանուր հայտարարը։

3) Դիցուք, վերջապես, պահանջվում է գումարել խառը թվեր.

$$4\frac{2}{15}+8\frac{9}{10}+3\frac{5}{6}.$$

Նախ կգումարենք կոտորակները.

$$\overbrace{\frac{2}{15}}^{2}+\overbrace{\frac{9}{10}}^{3}+\overbrace{\frac{5}{6}}^{5}=\frac{4+27+25}{30}=\frac{56}{30}=1\frac{26}{30}=1\frac{13}{15}.$$

Այնուհետև կգումարենք ամբողջ թվերը և նրանց գումարին կավելացնենք կոտորակների գումարումից ստացված միավորը.

$$4+8+3+1=16.$$

Ուրեմն, լրիվ գումարը հավասար է 16 $\frac{13}{15}$։

Դիտողություն։ *Կոտորակային թվին զերո գումարելու պայմանը նույնն է, ինչ ասված է ամբողջ թվերը գումարելու վերաբերյալ, այսինքն՝* **որևէ թվի զերո գումարել կամ զերոյին որևէ թիվ գումարել—նշանակում է այդ թիվը թողնել անփոփոխ։**

135. Գումարի հատկությունները։ *Կոտորակային թվերի գումարն ունի նույն հատկությունները, ինչ որ ամբողջ թվերի գումարը (§ 20), այն է՝*

1) գումարելիների տեղափոխումից գումարը չի փոխվում յև

2) գումարը չի փոխվի, յերբ գումարելիների որևէ խումբը փոխարինենք նրանց գումարով։

Գումարելիների փոփոխությունից գումարի փոփոխվելը կոտորակային թվերի համար ևս մնում է (§ 28) նույնն, ինչ և ամբողջ թվերի համար, այսինքն.

յերբ վորեվե գումարելի մեծանա կամ փոքրանա վորեվե թվով, ապա գումարը յեվս կմեծանա կամ կփոքրանա միեվնույն թվով։

ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ԹՎԵՐԻ ՀԱՆՈՒՄԸ

136. Սահմանումը յեվ կանոնի ստացումը։ Հանումը մի գործողություն է, վորտեղ տված մեծ թվից (*նվազելիից*) վերցվում է նրա այն մասը, վորը հավասար է տված փոքր թվին (*հանելիին*)։

Կարելի յե նաև ասել, վոր հանումը մի գործողություն է (գումարմանը հակադարձ), վորով յերկու գումարելիների տված գումարի և այդ գումարելիներից մեկի միջոցով գտնվում է մյուս գումարելին։

1) Դիցուք, տված են միևնույն հայտարարն ունեցող յերկու կոտորակներ՝ իրարից հանելու համար, որինակ․

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}:$$

Յեթե 7 ութերորդականից անջատենք այն մասը, վորը հավասար է 3 ութերորդականի, ապա, ակներև է, կմնա 7—3 ութերորդական․

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7-3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}:$$

2) Դիցուք, տված կոտորակներն ունեն տարբեր *հայտարարներ, որինակ․*

$$\frac{11}{15}-\frac{3}{8}:$$

Այն ժամանակ, այդ կոտորակները բերելով ընդհանուր հայտարարի, հանումը կկատարենք այնպես, ինչպես առաջ բացատրվեց․

$$\overset{8}{\frac{11}{15}}-\overset{15}{\frac{3}{8}}=\frac{88-45}{120}=\frac{43}{120}:$$

ԿԱՆՈՆ։ Կոտորակից կոտորակ հանելու համար պետք է նախապես դրանց բերել ընդհանուր ամենափոքր հայտարարի,

ապա նվազելիի համարիչից հանել հանելիի համարիչը յեվ նրանց տարբերության տակ գրել ընդհանուր հայտարարը։

3) Յեթե պետք է խառը թիվը մի ուրիշ խառը թվից հանել, ապա, յեթե հնարավոր է, կոտորակը հանում են կոտորակից, իսկ ամբողջն՝ ամբողջից։ Որինակ․

$$8\overset{4}{\frac{9}{11}}-5\overset{11}{\frac{3}{4}}=8\frac{36}{44}-5\frac{33}{44}=3\frac{3}{44}:$$

Իսկ յեթե հանելիի կոտորակը նվազելիի կոտորակից մեծ է, ապա նվազելիի ամբողջ թվից վերցնում են մեկ միավոր, վերածում են անհրաժեշտ մասերի և գումարում նվազելիի կոտորակին, վորից հետո վարվում են այնպես, ինչպես նկարագրված է վերևում։ Որինակ․

$$10\overset{6}{\frac{3}{11}}-5\overset{11}{\frac{5}{6}}=10\frac{18}{66}-5\frac{55}{66}=9\frac{84}{66}-5\frac{55}{66}=4\frac{29}{66}:$$

Նույն ձևով կատարվում է կոտորակի հանումն ամբողջ թվից․ որինակ․

$$7-2\frac{3}{5}=6\frac{5}{5}-2\frac{3}{5}=4\frac{2}{5},$$

$$10-\frac{3}{17}=9\frac{17}{17}-\frac{3}{17}=9\frac{14}{17}:$$

Դիտողություն։ 1) *Զերո հանելիս պահպանվում է նույն պայմանը, ինչ նշված է ամբողջ թվերը հանելիս, այն է՝* **վորեվե թվից զերո հանել, նշանակում է այդ թիվը թողնել անփոփոխ։ 2) Տված կոտորակային թվերը փոփոխելուց նրանց տարբերությունը փոխվում է նույն այնպես, ինչպես յեվ ամբողջ թվերի տարբերությունը,** *այն է՝* **յերբ նվազելին մեծացնենք** *(կամ փոքրացնենք)* **վորեվե թվով, ապա տարբերությունը յեվս կմեծանա** *(կամ կփոքրանա)* **միեվնույն թվով․ յերբ հանելին մեծացնենք** *(կամ փոքրացնենք)* **վորեվե թվով ապա տարբերությունն յեվս կփոքրանա** *(կամ կմեծանա)* **միեվնույն թվով։**

137. Շատ խնդիրներ լուծելիս անհրաժեշտ է լինում գտնել տված թվի մասը։ *Օրինակ կարող են ծառայել հետևյալ խնդիրները․*

1. ԽՆԴԻՐ։ Գնացքը շարժվում է հավասարաչափ, ժամում 40 կմ արագությամբ։ Ինչքա՞ն ճանապարհ կանցնի նա $\frac{7}{8}$ ժամում։

Ակնհայտ է, որ $\frac{7}{8}$ ժամում գնացքը կանցնի այնքան կիլոմետր, որքան կիլոմետր պարունակվում է 40 կիլոմետրի $\frac{7}{8}$ մասում։ 40-ի $\frac{7}{8}$-ը գտնելու համար նախ գտնենք այդ թվի $\frac{1}{8}$-ը (այսինքն՝ 40-ը փոքրացնենք 8 անգամ), և ապա ստացված արդյունքը մեծացնենք 7 անգամ.

40-ի $\frac{1}{8}$-ը կազմում է 5,

40-ի $\frac{7}{8}$-ը կազմում է $5\times7=35$։

Ուրեմն, գնացքը $\frac{7}{8}$ ժամում կանցնի 35 կմ։

Այս խնդրի մեջ գտանք 40-ի $\frac{7}{8}$-ը։

2. ԽՆԴԻՐ։ Մեկ մետր կտորեղենը արժե $18\frac{1}{2}$ ռուբլի։ Քանի՞ ռուբլի պետք է վճարել այդ կտորեղենի $1\frac{3}{4}$ մետրին (այսինքն՝ $\frac{7}{4}$ մետրին)։

Ակնհայտ է՝ որ $\frac{7}{4}$ մետրն արժե այնքան ռուբլի, որքան ռուբլի կա $18\frac{1}{2}$ ռուբլու $\frac{7}{4}$-ում։ Այդ իմանալու համար նախ կգտնենք այդ թվի $\frac{1}{4}$-ը (այսինքն՝ $18\frac{1}{2}$-ը կփոքրացնենք 4 ան-

գամ), իսկ այնուհետև ստացված արդյունքը կմեծացնենք 7 անգամ.

$18\frac{1}{2}$-ի (այսինքն՝ $\frac{37}{2}$-ի) $\frac{1}{4}$-ը կազմում է $\frac{37}{2 \cdot 4}$ (§ 127)։

$18\frac{1}{2}$-ի (այոինքն՝ $\frac{37}{2}$-ի) $\frac{7}{4}$-ը կազմում է $\frac{37 \cdot 7}{2 \cdot 4}=\frac{259}{8}=32\frac{3}{8}$։

Ուրեմն, $\frac{7}{4}$ մետրին պետք է վճարել $32\frac{3}{8}$ ռուբլի։

Այս խնդրում գտանք $18\frac{1}{2}$ թվի $\frac{7}{4}$-ը։

3. ԽՆԴԻՐ։ Գտնել $\frac{5}{6}$ թվի $\frac{8}{3}$-ը։

Նախ կգտնենք $\frac{5}{6}$-ի $\frac{1}{3}$-ը (այսինքն՝ $\frac{5}{6}$-ը կփոքրացնենք 8 անգամ), իսկ այնուհետև ստացված արդյունքը կմեծացնենք 8 անգամ։

$\frac{5}{6}$-ի $\frac{1}{3}$-ը կազմում է $\frac{5}{6 \cdot 3}$;

$\frac{5}{6}$-ի $\frac{8}{3}$-ը կազմում է $\frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 3}=\frac{40}{18}=2\frac{2}{9}$։

Այս խնդրում գտանք $\frac{5}{6}$ թվի $\frac{8}{6}$-ը։

Այդ խնդիրներից յեզրակացնում ենք հետևյալ կանոնը. **Տված թվի որևէ մասի մեծությունը գտնելու համար պետք է այդ թիվը փոքրացնել այնքան անգամ, որքան միավոր կա մասն արտահայտող կոտորակի հայտարարում յեվ ստացված արդյունքը մեծացնել այնքան անգամ, որքան միավոր կա կոտորակի համարիչում։**

ՏՎԱԾ ԹՎԻ ՏՈԿՈՍՆԵՐԸ ԳՏՆԵԼԸ

138. Ինչ է տոկոսը։ *Մենք արդեն գիտենք, որ միավորի մի քանի ամենից ավելի գործածական մասերն ստացել են առանձին անուններ, մեկ յերկրորդը անվանում են կես, մեկ յերրորդ մասը — մեկ յերրորդ, մեկ չորրորդը — քառորդ։ Շատ հաճախ*

(օրինակ, արտադրանքների հաշվառման և դրամական հաշվումների ժամանակ) գործածվում են հարյուրերորդական մասեր, այդ պատճառով էլ դրանք նույնպես ստացել են առանձին անուն։

Որևէ թվի հարյուրերորդական մասը կոչվում է այդ թվի տոկոս։ Ուստի, օրինակ, որևէ թվի 5 տոկոս նշանակում է նույնը, ինչ այդ թվի 5 հարյուրերորդականը (կամ մեկ քսաներորդականը)։

Տոկոսը նշանակում են % նշանով. այսպես, որևէ թվի 17% նշանակում է այդ թվի 17 տոկոսը, այսինքն՝ $\frac{17}{100}$ մասը։

Մեր պետական աշխատանքային խնայողական դրամարկղերն ավանդատուներին տալիս են տարեկան 3% յեկամուտ. այդ նշանակում է, որ խնայողական դրամարկղ դրված յուրաքանչյուր գումար մի տարվա ընթացքում մեծանում է 3%-ով, այսինքն՝ (այդ գումարի) $\frac{3}{100}$-ով. այդ 3%-ը կազմում է ավանդատուի տարեկան յեկամուտը։

Յեթե ասում են, որ ստախանովական բանվորը կատարել է նորման 250%-ով, ապա այդ նշանակում է, որ նրա մշակած արտադրանքը կազմում է 250%, այսինքն՝ նորմայի, այսինքն՝ տրված առաջադրանքի $\frac{250}{100}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$ մասը, ուրիշ խոսքով, նա $2\frac{1}{2}$ անգամ ավելի շատ է արտադրել, քան յենթադրվում էր ըստ նորմայի։

139. Տված թվի տոկոսները գտնելը։ Դիցուք, պահանջվում է գտնել 245 թվի 18%-ը. քանի որ 18% նշանակում է $\frac{18}{100}$ մաս, ապա խնդիրը լուծվում է § 137-ի կանոնով.

$$245\text{-ի } 18\%\text{-ը կազմում է } \frac{245\cdot 18}{100}=44\frac{1}{10}.$$

Քննարկենք նաև հետևյալ յերեք խնդիրները։

1 ԽՆԴԻՐ. 240 ռուբլի արժողությամբ կոստյում պատվիրելիս պատվիրատուն վորպես կանխավճար մուծեց 15%-ը. գտնել կանխավճարի գումարը։

Ակնհայտ է, վոր պետք է գտնենք 240-ի 15%-ը (այսինքն՝ $\frac{15}{100}$ մասը). § 137-ի կանոնի համաձայն

$$240\text{-ի } 15\%\text{-ը կազմում է } \frac{240\cdot 15}{100}=36 \text{ (ռուբլի)}.$$

Այսպիսով, կանխավճարի գումարը հավասար է 36 ռուբլու։

2. ԽՆԴԻՐ. Անտառահատների բրիգադն առաջադրանք ուներ 90 խորանարդ մետր փայտ պատրաստելու. առաջադրանքը գերակատարվեց 20%-ով։ Վորքա՞ն փայտ պատրաստեց բրիգադը։

ԼՈՒԾՈՒՄ.

$$90\text{-ի } 20\%\text{-ը կազմում է } \frac{90\cdot 20}{100}=18 \text{ (խոր. մետր)}.$$

Հետևապես, առաջադրանքը (90 խոր. մետրը) գերակատարված է 18 խոր. մետրով և ուրեմն, բրիգադը պատրաստել է $90+18=108$ (խոր. մետր)։

3. ԽՆԴԻՐ. Պետական ներքին փոխառությունը բերում է տարեկան 4% յեկամուտ. քանի՞ տարուց հետո 300 ռուբլու պարտատոմսերի յեկամուտը կկազմի 42 ռուբլի։

ԼՈՒԾՈՒՄ.

Նախ կիմանանք, թե 300 ռուբլու պարտատոմսերը տարեկան ինչքան յեկամուտ են բերում. դրա համար պետք է գտնենք 300-ի 4%-ը.

300-ի 4%-ը կազմում է $\frac{300\cdot 4}{100}=12$ (ռուբլի)։ Ուրեմն պարտատոմսերը տարեկան բերում են 12 ռուբլի յեկամուտ։ Ուստի, 42 ռուբլի յեկամուտ կստացվի $42:12=3\frac{1}{2}$ տարուց հետո։

ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ

140. Սահմանումներ. 1) Կոտորակային թվի բազմապատկումն ամբողջ թվով սահմանվում է նույն ձևով, ինչպես և ամբողջ թվերի բազմապատկումը, այսինքն՝ վորևէ թիվ (բազմապատկելի) բազմապատկել ամբողջ թվով (բազմապատկիչ)—նշանակում է կազմել հավասար գումարելիների գումար, վորոնց յու-

ւրաքանչյուր գումարելին հավասար է բազմապատկելիին, իսկ գումարելիների թիվը—բազմապատկիչին։

Այսպես, $\frac{7}{8}$-ը բազմապատկել 5-ով—նշանակում է գտնել

$$\frac{7}{8}+\frac{7}{8}+\frac{7}{8}+\frac{7}{8}+\frac{7}{8}$$

գումարը։

2) Վորևէ թիվ (*բազմապատկելի*) բազմապատկել կոտորակով (*բազմապատկիչ*)—նշանակում է գտնել բազմապատկելիի այդ մասը։

Այսպես, 5-ը բազմապատկել $\frac{7}{8}$-ով—նշանակում է գտնել հինգ միավորի $\frac{7}{8}$ մասը։

$\frac{3}{4}$-ը բազմապատկել $\frac{2}{3}$-ով—նշանակում է գտնել $\frac{3}{4}$-ի $\frac{2}{3}$-ը։

Այսպիսով, տված թվի մասը գտնելը, վորը քննարկեցինք դրանից առաջ, այժմ կանվանենք բազմապատկում կոտորակով։

3) Վորևէ թիվ (*բազմապատկելի*) բազմապատկել խառը թվով (*բազմապատկիչ*)—նշանակում է բազմապատկելին բազմապատկել նախ՝ բազմապատկիչի ամբողջ թվով, հետո՝ նրա կոտորակով, և այդ յերկու բազմապատկումների արդյունքները գումարել։

Օրինակ՝

$$\frac{4}{5}\cdot 3\frac{2}{7}=\frac{4}{5}\cdot 3+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{7}։$$

Այն թիվը, վոր ստացվում է բազմապատկումից հետո, այդ բոլոր դեպքերում կոչվում է արտադրյալ, *այսինքն՝ նույնպես, ինչպես և ամբողջ թվերը բազմապատկելիս։*

Այս սահմանումներից յերևում է, վոր կոտորակային թվերի բազմապատկումը միշտ հնարավոր և միշտ միարժեք գործողություն է։

141. Այս սահմանումների նպատակահարմարությունը։ *Թվաբանության մեջ բազմապատկման վերաբերյալ վերջին յերկու սահմանումների նպատակահարմարությունը պարզելու համար վերցնենք այսպիսի խնդիր.*

Խ ն դ ի ր. Գնացքը շարժվելով հավասարաչափ, մի ժամում անցնում է 40 կմ։ Ինչպե՞ս պետք է իմանալ, թե այդ գնացքը տվյալ ժամանակամիջոցում քանի՞ կիլոմետր կանցնի։

Յեթե կանգ առնեյինք բազմապատկման այն մի սահմանման վրա, վորը նշվում է ամբողջ թվերի թվաբանության մեջ (հավասար գումարելիների գումարումը), ապա մեր խնդիրը կունենար յերեք տարբեր լուծումներ, այն է.

յեթե տված ժամերի թիվը ամբողջ է (օրինակ, 5 ժամ), ապա խնդիրը լուծելու համար պետք է 40 կմ *բազմապատկել ժամերի այդ թվով։*

Յեթե տված ժամերի թիվը արտահայտվում է կոտորակով (օրինակ, $\frac{3}{4}$ ժամ), ապա պետք է գտնել 40 կիլոմետրի $\frac{3}{4}$ մասի մեծությունը։

Վերջապես, յեթե տված ժամերի թիվը խառն է (օրինակ, $5\frac{3}{4}$ ժամ), ապա պետք է 40 կմ *բազմապատկել խառը թվում գտնվող ամբողջ թվով և ստացած արդյունքին ավելացնել 40 կիլոմետրի այն մասը, վորքան խառը թվի կոտորակն է։*

Սակայն մեր տված սահմանումները թույլ են տալիս այս բոլոր հնարավոր դեպքերի համար տալ մեկ ընդհանուր պատասխան.

պետք է 40 կմ *բազմապատկել տված ժամերի թվով, ինչպիսին էլ վոր լինի այն։*

Այսպիսով, յեթե խնդիրը ընդհանուր ձևով ներկայացնենք այսպես.

Գնացքը, շարժվելով հավասարաչափ, մի ժամում անցնում է v կմ։ *Քանի՞ կիլոմետր կանցնի գնացքը t ժամում.*

ապա, ինչպիսին էլ վոր լինեն v և t թվերը, մենք կարող ենք տալ մի պատասխան, վոր վորոնելի թիվը արտահայտվում է $v \cdot t$ բանաձևով։

Ծանոթություն։ *Գտնել տված թվի վորևէ մասը, ըստ մեր սահմանման, նշանակում է միևնույնը, ինչ տված թիվը բազմապատկել այդ մասն արտահայտող կոտորակով. ուստի, գտնել տված թվի, օրինակ, 5%-ը (այսինքն՝ հինգ հարյուրերորդակա-*

նը) նույնն է, ինչ տված թիվը բազմապատկել $\frac{5}{100}$-ով կամ $\frac{1}{20}$-ով․ գտնել տված թվի $125^0/_0$-ը միևնույնն է, ինչ այդ թիվը բազմապատկել $\frac{125}{100}$-ով կամ $\frac{5}{4}$-ով, և այլն։

142. Դիտողություն այն մասին, թե բազմապատկելուց յերբ է մեծանում յեվ յերբ է փոքրանում թիվը։ Կանոնավոր կոտորակով բազմապատկելուց թիվը փոքրանում է, իսկ անկանոն կոտորակով բազմապատկելուց թիվը մեծանում է, յերբ այդ անկանոն կոտորակը միավորից մեծ է և մնում է անփոփոխ, յերբ այդ անկանոն կոտորակը հավասար է միավորի։

Օրինակ, $5 \cdot \frac{7}{8}$ *արտադրյալը պետք է 5-ից փոքր լինի, քանի վոր դա ցույց է տալիս 5 թվի* $\frac{7}{8}$ *մասը, իսկ հնգի* $\frac{7}{8}$ *մասն ավելի փոքր է, քան հնգի* $\frac{8}{8}$ *մասը, այսինքն՝ փոքր է 5-ից։* $5 \cdot \frac{9}{8}$ *արտադրյալը պետք է ավելի մեծ լինի, քան 5-ը, վորովհետև նա ցույց է տալիս 5 թվի* $\frac{9}{8}$ *մասը, իսկ հնգի* $\frac{9}{8}$ *մասն ավելի մեծ է, քան* $\frac{8}{8}$ *մասը, այսինքն՝ ավելի յե 5-ից։ Վերջապես,* $5 \cdot \frac{8}{8}$ *արտադրյալը, այսինքն՝ հնգի* $\frac{8}{8}$ *մասը հավասար է 5-ի։*

Դիտողություն։ *Կոտորակային թվերը բազմապատկելիս, ինչպես և ամբողջ թվերը բազմապատկելիս, արտադրյալն ընդունվում է հավասար զերոյի, յեթե արտադրիչներից վորևե մեկը հավասար է զերոյի, այսպես,* $0 \cdot \frac{7}{8} = 0$ և $\frac{7}{8} \cdot 0 = 0$։

143. Բազմապատկման կանոնների ստացումը։ 1) Կոտորակի բազմապատկումն ամբողջ թվով։ *Դիցուք, պահանջվում է* $\frac{3}{10}$ *կոտորակը բազմապատկել 5-ով։ Այդ նշանակում է* $\frac{3}{10}$*-ը մեծացնել 5 անգամ։ Կոտորակը 5 անգամ մեծացնելու համար բավական է նրա համարիչը մեծացնել 5 անգամ կամ հայտարարը փոքրացնել նույնքան անգամ (§ 127)։*

Ուստի՝

$$\frac{3}{10} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}, \text{ կամ } \frac{3}{10} \cdot 5 = \frac{3}{10:5} = \frac{3}{2}.$$

1 ԿԱՆՈՆ։ Կոտորակն ամբողջ թվով բազմապատկելու համար պետք է այդ ամբողջ թվով բազմապատկել համարիչը, իսկ հայտարարը թողնել նույնը. սրա փոխարեն նույնպես կարելի յե տված թվի վրա բաժանել կոտորակի հայտարարը (յերբ այդ հնարավոր է), իսկ համարիչը թողնել նույնը։

Դիտողություն։ *Կոտորակի և նրա հայտարարի արտադրյալը հավասար է այդ կոտորակի համարիչին։*

Այսպես՝

$$\frac{5}{8} \cdot 8 = \frac{5 \cdot 8}{8} = 5.$$

2) Ամբողջ թվի բազմապատկումը կոտորակով։ *Դիցուք, թե տված է 7-ը բազմապատկել* $\frac{4}{9}$*-ով։ Դա նշանակում է գտնել 7-ի* $\frac{4}{9}$ *մասը։ Դրա համար նախ կգտնենք 7-ի* $\frac{1}{9}$*-ը, իսկ հետո* $\frac{4}{9}$*-ը։*

7-ի $\frac{1}{9}$*-ը կազմում է* $\frac{7}{9}$ *(§ 119);*

7-ի $\frac{4}{9}$*-ը կազմում է* $\frac{7 \cdot 4}{9}$ *(§ 127)։*

Ուրեմն,

$$7 \cdot \frac{4}{9} = \frac{7 \cdot 4}{9} = \frac{28}{9}.$$

2 ԿԱՆՈՆ։ Ամբողջ թիվը կոտորակով բազմապատկելու համար պետք է ամբողջ թիվը բազմապատկել կոտորակի համարիչով յեվ այդ արտադրյալը գրել համարիչ, իսկ հայտարար գրել տված կոտորակի հայտարարը։

3) Կոտորակի բազմապատկումը կոտորակով։ *Դիցուք, պետք է* $\frac{3}{5}$*-ը*

բազմապատկել $\frac{7}{8}$-ով։ Այդ նշանակում է գտնել $\frac{3}{5}$-ի $\frac{7}{8}$-ը։ Դրա համար նախ կգտնենք $\frac{3}{5}$-ի $\frac{1}{8}$-ը, իսկ այնուհետև՝ $\frac{7}{8}$-ը․

$\frac{3}{5}$-ի $\frac{1}{8}$-ը կազմում է $\frac{3}{5\cdot8}$ (§ 127);

$\frac{3}{5}$-ի $\frac{7}{8}$-ը կազմում է $\frac{3\cdot7}{5\cdot8}$;

Ուրեմն,

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{8}=\frac{3\cdot7}{5\cdot8}=\frac{21}{40}.$$

3 ԿԱՆՈՆ։ Կոտորակը կոտորակով բազմապատկելու համար պետք է համարիչը բազմապատկել համարիչով, հայտարարը հայտարարով յեվ առաջին արտադրյալը գրել արտադրյալի համարիչ, իսկ յերկրորդը՝ հայտարար։

Դիտողություն։ *Այս կանոնը կարելի է կիրառել թե կոտորակն ամբողջով և թե ամբողջ թիվը կոտորակով բազմապատկելու համար, եթե միայն ամբողջ թիվը դիտենք որպես կոտորակ, որի հայտարարը միավոր է։ Այսպես․*

$$\frac{3}{10}\cdot5=\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{1}=\frac{3\cdot5}{10\cdot1}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2};$$

$$7\cdot\frac{4}{9}=\frac{7}{1}\cdot\frac{4}{9}=\frac{7\cdot4}{1\cdot9}=\frac{28}{9}=3\frac{1}{9}.$$

Այսպիսով, հենց նոր մեկնաբանած յերեք կանոնները պարփակվում են մի կանոնի մեջ, որն ընդհանուր տեսքով կարելի է արտահայտել այսպես․

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

4) Խառը թվերի բազմապատկումը։

4 ԿԱՆՈՆ։ Խառը թվերը բազմապատկելու համար պետք է նրանց դարձնել անկանոն կոտորակներ յեվ այնուհետեվ բազմապատկել կոտորակների բազմապատկման կանոններով։ *Օրինակ․*

$$1)\ 7\cdot5\frac{3}{4}=7\cdot\frac{23}{4}=\frac{7\cdot23}{4}=\frac{161}{4}=40\frac{1}{4};$$

$$2)\ 2\frac{3}{5}\cdot4\frac{2}{3}=\frac{13}{5}\cdot\frac{14}{3}=\frac{13\cdot14}{5\cdot3}=\frac{182}{15}=12\frac{2}{15}.$$

144. Կրճատում բազմապատկման ժամանակ։ *Կոտորակները բազմապատկելիս, յեթե հնարավոր է, պետք է կատարել նախնական կրճատում, ինչպես այդ յերևում է հետևյալ օրինակներից․*

$$1)\ 12\cdot\frac{7}{8}=\frac{12\cdot7}{8}=\frac{3\cdot7}{2}=\frac{21}{2}=10\frac{1}{2};$$

$$2)\ \frac{16}{21}\cdot\frac{5}{28}=\frac{16\cdot5}{21\cdot28}=\frac{4\cdot5}{21\cdot7}=\frac{20}{147}.$$

Այդպիսի կրճատում հնարավոր է կատարել, վորովհետև կոտորակի մեծությունը չի փոխվի, յեթե նրա համարիչն ու հայտարարը փոքրացնենք միևնույն թիվ անգամ։

145. Արտադրյալի փոփոխվելը արտադրիչների փոփոխության հետեվանքով։ *Արտադրիչները փոփոխելիս կոտորակային թվերի արտադրյալը փոփոխվում է բոլորովին նույն ձևով, ինչպես և ամբողջ թվերի արտադրյալը (§ 53), այն է․*

յերբ արտադրիչներից վորեվե մեկը մեծացնենք (կամ փոքրացնենք) մի քանի անգամ, ապա արտադրյալը յեվս կմեծանա (կամ կփոքրանա) նույնքան անգամ։

Այսպես, յեթե

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}=\frac{12}{35}$$

օրինակում բազմապատկելին մեծացնենք, ընդունենք, թե 2 անգամ, այսինքն՝ $\frac{3}{5}$-ի փոխարեն վերցնենք $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}$, ապա նոր արտադրյալը կներկայացնի արդեն ոչ թե $\frac{3}{5}$-ի $\frac{4}{7}$ մասը, այլ այդ մասը վերցրած վորպես գումարելի յերկու անգամ, ուրեմն, նոր արտադրյալը պետք է նախորդից 2 անգամ մեծ լինի։ Յեվ իսկապես․

$$\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{7}=\frac{24}{35};\quad \frac{24}{35}\text{-ը 2 անգամ մեծ է } \frac{12}{35}\text{-ից։}$$

Նույն որինակի մեջ բազմապատկիչը մեծացնենք, ասենք թե, 3 անգամ, այսինքն՝ $\frac{4}{7}$-ի փոխարեն վերցնենք $\frac{4}{7}+\frac{4}{7}+\frac{4}{7}$։ Այն ժամանակ նոր արտադրյալը կհանդիսանա ոչ թե բազմապատկելիի $\frac{4}{7}$-ը, այլ նրա $\frac{4}{7}$-ը՝ վերցրած 3 անգամ. ուրեմն, նոր արտադրյալը պետք է նախորդից մեծ լինի 3 անգամ։ Յեվ իսկապես.

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{7}=\frac{36}{35};\quad \frac{36}{35}\text{-ը 3 անգամ մեծ է } \frac{12}{35}\text{-ից։}$$

146. Յերեք յեվ ավելի շատ կոտորակների արտադրյալը։ *Դիցուք, տրված է վերաբազմապատկելու յերեք կոտորակներ՝ $\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}$, ընդ որում յենթադրվում է, որ բազմապատկումը պետք է կատարել այն հաջորդականությամբ, ինչպես որ գրված են արտադրիչները, այսինքն՝ պահանջվում է $\frac{2}{3}$-ը բազմապատկել $\frac{7}{8}$-ով և ապա ստացված արտադրյալը բազմապատկել $\frac{5}{6}$-ով։ Բազմապատկելով առաջին յերկու կոտորակները, կստանանք $\frac{2\cdot7}{3\cdot8}$. այս թիվը բազմապատկելով յերրորդ կոտորակով, կգտնենք*

$$\frac{2\cdot7\cdot5}{3\cdot8\cdot6}=\frac{1\cdot7\cdot5}{3\cdot8\cdot3}=\frac{35}{72}\text{; Ուրեմն,}$$

Մի քանի կոտորակներ իրար հետ բազմապատկելու համար պետք է նրանց համարիչները բազմապատկել առանձին ու հայտարարները առանձին յեվ առաջին արտադրյալը գրել արտադրյալի համարիչ, իսկ յերկրորդը—արտադրյալի հայտարար։

Դիտողություն։ *Այս կանոնը կարելի յե կիրառել նաև այնպիսի արտադրյալների նկատմամբ, որոնց մեջ մի քանի բազմապատկիչներ ամբողջ կամ խառը թվեր են, յեթե միայն ամբողջ*

թիվը դիտենք վորպես կոտորակ միավոր հայտարարով, իսկ խառը թվերը նախորոք դարձնենք անկանոն կոտորակներ։ Որինակ,

$$\frac{3}{4}\cdot5\cdot1\frac{5}{6}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{1}\cdot\frac{11}{6}=\frac{3\cdot5\cdot11}{4\cdot1\cdot6}=\frac{5\cdot11}{4\cdot2}=\frac{55}{8}=6\frac{7}{8}\text{։}$$

147. Բազմապատկման հիմնական հատկությունները։ *Բազմապատկման այն հատկությունները, վորոնք նշել ենք ամբողջ թվերի համար (§ 56, 57, 59), պատկանում են նաև կոտորակային թվերի բազմապատկմանը։ Թվենք այդ հատկությունները։*

1) Արտադրիչների տեղափոխությունից արտադրյալը չի փոխվում։

Որինակ.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\text{։}$$

Իսկապես, նախորդ պարագրաֆի կանոնի համաձայն առաջին արտադրյալը հավասար է $\frac{2\cdot5\cdot3}{3\cdot6\cdot4}$ կոտորակին, իսկ յերկրորդը հավասար է $\frac{5\cdot3\cdot2}{6\cdot4\cdot3}$ կոտորակին։ Բայց այդ կոտորակներն իրար հավասար են, վորովհետև նրանց անդամները իրարից տարբերվում են միայն ամբողջ արտադրիչների կարգով, իսկ արտադրիչների տեղափոխումից ամբողջ թվերի արտադրյալը չի փոխվում։

2) Արտադրյալը չի փոխվի, յեթե արտադրիչների վորեվե խումբ փոխարինենք նրանց արտադրյալով։

Որինակ.

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}\right),$$

վորովհետև՝

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}=\frac{5\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot4\cdot7\cdot5}$$

և

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}\right)=\frac{5\cdot3}{6\cdot4}\cdot\frac{2\cdot1}{7\cdot5}=\frac{5\cdot3\cdot(2\cdot1)}{6\cdot4\cdot(7\cdot5)}=\frac{5\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot4\cdot7\cdot5}$$

Արդյունքները միևնույն են։

Բազմապատկման այս հատկությունից կարելի յե դուրս բերել այսպիսի յեզրակացություն.

Վորեվե թիվ արտադրյալով բազմապատկելու համար կարելի յե այդ թիվը բազմապատկել առաջին արտադրիչով յեվ ստացած թիվը բազմապատկել յերկրորդով յեվ այլն։

Որինակ՝

$$10\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}\right)=10\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7},$$

վորովհետև 2-րդ հատկության հիման վրա $10\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}\right)$ *արտադրյալում փակագծի մեջ յեղած թվով բազմապատկումը կարող ենք փոխարինել հաջորդական բազմապատկումով՝* $\frac{3}{4}$*-ով և* $\frac{5}{7}$*-ով։*

3. Բազմապատկման բաշխական որենքը *(***գումարման վերաբերյալ***)***։ Գումարը վորեվե թվով բազմապատկելու համար կարելի յե յուրաքանչյուր գումարելին առանձին բազմապատկել այդ թվով յեվ արդյունքները գումարել։**

Այդ որենքը բացատրեցինք ամբողջ թվերի նկատմամբ (§ 59)։ Այդ որենքն առանց վորևէ փոփոխությունների ճիշտ է նաև կոտորակային թվերի համար։

Ցույց տանք, իսկապես, վոր

$$(a+b+c+\cdots)m=am+bm+cm+\cdots$$

հավասարությունը (բազմապատկման բաշխական որենքը գումարման վերաբերյալ) մնում է ճիշտ և այն ժամանակ, յերբ տառերը նշում են կոտորակային թվեր։ Քննության առնենք յերեք դեպք։

1) Նախ յենթադրենք, վոր բազմապատկիչն ամբողջ թիվ է, որինակ, $m=3$ *(a, b, c — ուզած վորևէ թվեր են)։ Համաձայն ամբողջ թվով բազմապատկելու սահմանման, կարելի յե գրել (պարզության համար վերցնում ենք յերեք գումարելի) այսպես.*

$$(a+b+c)\cdot 3=(a+b+c)+(a+b+c)+(a+b+c)։$$

Գումարման զուգորդման որենքի հիման վրա կարող ենք աջ մասի փակագծերը բաց թողնել. կիրառելով գումարման տեղափոխման որենքը, և հետո նորից զուգորդմանը, ակներև է, կարող ենք հավասարության աջ մասը արտագրել այսպես.

$$(a+a+a)+(b+b+b)+(c+c+c)։$$

Այն ժամանակ կստանանք.

$$(a+b+c)\cdot 3=a\cdot 3+b\cdot 3+c\cdot 3։$$

Ուրեմն, այս դեպքում բաշխական որենքը հաստատվում է։

2) Այժմ յենթադրենք, վոր m *բազմապատկիչը կոտորակ է միավոր համարիչով, որինակ,* $m=\frac{1}{8}$*։* $a+b+c$ *գումարը բազմապատկել* $\frac{1}{8}$*-ով — նշանակում է գտնել նրա* $\frac{1}{8}$ *մասը։ Այդ մասը հավասար է* $\frac{a}{8}+\frac{b}{8}+\frac{c}{8}$*, վորին կարող ենք համոզվել, յեթե այդ արտահայտությունը բազմապատկենք 8-ով։ Իսկապես, քանի վոր 8-ն ամբողջ թիվ է, ապա առաջին դեպքում ապացուցածի համաձայն, բազմապատկումից հետո կստանանք.*

$$\frac{a}{8}\cdot 8+\frac{b}{8}\cdot 8+\frac{c}{8}\cdot 8,$$

վորը կազմում է

$$a+b+c։$$

Ուրեմն, այդ գումարի ութերորդ մասն իսկապես հավասար է

$$\frac{a}{8}+\frac{b}{8}+\frac{c}{8},$$

վորը կարելի յե գրել այսպես՝

$$a\cdot\frac{1}{8}+b\cdot\frac{1}{8}+c\cdot\frac{1}{8}։$$

Հետևապես՝

$$(a+b+c)\cdot\frac{1}{8}=a\cdot\frac{1}{8}+b\cdot\frac{1}{8}+c\cdot\frac{1}{8}։$$

Մենք տեսնում ենք, վոր բաշխական որենքը հաստատվում է նաև այս դեպքում։

3) Վերջապես, ընդունենք, վոր m *բազմապատկիչը ուզած վորևէ համարիչով կոտորակ է, որինակ,* $m=\frac{9}{8}$ *(սրան է վերաբերում նաև այն դեպքը, յերբ m-ը խառը թիվ է)։*

$a+b+c$ *գումարը բազմապատկել* $\frac{9}{8}$*-ով — նշանակում է գտնել այդ գումարի* $\frac{9}{8}$*-ը, վորի համար բավական է 9-ով բազմապատկել այդ գումարի*

մեկ ութերորդը: Բայց գումարի $\frac{1}{8}$-ը, ինչպես այժմ համոզվեցինք, հավասար է $\frac{a}{8}+\frac{b}{8}+\frac{c}{8}$, ուրեմն, նրա $\frac{9}{8}$ մասը կլինի՝

$$\left(\frac{a}{8}+\frac{b}{8}+\frac{c}{8}\right)\cdot 9,$$

վորը, առաջին դեպքի համաձայն, հավասար է՝

$$\frac{a}{8}\cdot 9+\frac{b}{8}\cdot 9+\frac{c}{8}\cdot 9,$$

այսինքն՝

$$a\cdot\frac{9}{8}+b\cdot\frac{9}{8}+c\cdot\frac{9}{8}.$$

Ուրեմն՝

$$(a+b+c)\cdot\frac{9}{8}=a\cdot\frac{9}{8}+b\cdot\frac{9}{8}+c\cdot\frac{9}{8}:$$

Այսպիսով, բաշխական օրենքը հաստատվում է բոլոր դեպքերում:

ԳՏՆԵԼ ԱՆՀԱՅՏ ԹԻՎԸ, ՅԵՐԲ ՏՎԱԾ Ե ՆՐԱ ՄԱՍԸ

148. Խնդիրներ յեվ կանոն: Նախքան կոտորակային թըվերի բաժանմանն անցնելը, օգտակար է քննության առնել, թե ինչպես կարելի յե գտնել անհայտ թիվը, յերբ տված է նրա վորևէ մասի մեծությունը: Պարզության համար այդ հարցը կբացատրենք հետևյալ պարզ խնդիրներով:

§ 137-ում տված խնդիրները կփոխենք այսպես.

1. ԽՆԴԻՐ: **Գնացքը, հավասարաչափ շարժվելով, $\frac{7}{8}$ ժամում անցավ 35 կմ: Այդ գնացքը քանի՞ կիլոմետր կանցնի մի ժամում:**

Իհարկե, գնացքը մի ժամում անցնում է այնքան կիլոմետրներ, վորոնց $\frac{7}{8}$ մասը կազմում է 35 կմ: Ուրեմն, այս խնդրի մեջ մեզ տված է անհայտ թվի յոթ ութերորդ մասի մեծությունը (35 կմ), իսկ պահանջվում է գտնել այդ թիվը:

Քանի վոր 35 կմ կազմում է անհայտ թվի $\frac{7}{8}$-ը, ապա 35 կմ փոքրացնելով 7 անգամ, կգտնենք այդ անհայտ թվի $\frac{1}{8}$ մասը,

իսկ այնուհետև մեծացնելով արդյունքը 8 անգամ, կստանանք այդ թվի $\frac{8}{8}$-ը, այսինքն՝ լրիվ թիվը: Պարզության համար մեր դատողությունը կարտահայտենք ավելի մանրամասն գրությամբ.

անհայտ թվի $\frac{7}{8}$-ը կազմում է 35,

» » $\frac{1}{8}$-ը կազմում է $\frac{35}{7}$,

» » $\frac{8}{8}$-ը կազմում է $\frac{35\cdot 8}{7}=\frac{5\cdot 8}{1}=40$:

Ուրեմն, գնացքը մի ժամում անցնում է 40 կմ:

2-րդ ԽՆԴԻՐ: **$1\frac{3}{4}$ մետր կտորեղենն արժե $32\frac{3}{8}$ ռուբլի: Ի՞նչ արժե այդ կտորեղենի 1 մ:**

Քանի վոր $1\frac{3}{4}$ մետրը $=\frac{7}{4}$ մետրի և այդ $\frac{7}{4}$ մետրն արժե $32\frac{3}{8}$ ռուբլի, ապա $32\frac{3}{8}$ ռուբլին փոքրացնելով 7 անգամ, կիմանանք $\frac{1}{4}$ մետրի արժեքը, իսկ այնուհետև այդ արժեքը մեծացնելով 4 անգամ, կգտնենք ամբողջ մետրի արժեքը: Այդ արտահայտենք մանրամասն գրությամբ.

$\frac{7}{4}$ մետրն արժե $32\frac{3}{8}$ ռուբլի $=\frac{259}{8}$ ռուբլի,

$\frac{1}{4}$ » » $\frac{259}{8\cdot 7}$ ռուբլի,

$\frac{4}{4}$ » » $\frac{259\cdot 4}{8\cdot 7}=18\frac{1}{2}$ ռուբլի:

2-րդ ԽՆԴԻՐ: Գտնել այն թիվը, վորի $\frac{8}{3}$-ը կազմում է $2\frac{2}{9}\left(=\frac{20}{9}\right)$:

Անհայտ թվի $\frac{8}{3}$-ը կազմում է $\frac{20}{9}$,

» » $\frac{1}{3}$-ը կազմում է $\frac{20}{9 \cdot 8}$,

» » $\frac{3}{3}$-ը կազմում է $\frac{20 \cdot 3}{9 \cdot 8} = \frac{5}{6}$։

Այս խնդիրներից յեզրակացնում ենք հետևյալ կանոնը. **անհայտ թիվը գտնելու համար, յերբ տված է նրա որևէ մասի մեծությունը, բավական է այդ մեծությունը փոքրացնել այնքան անգամ, որքան միավոր կա կոտորակի համարիչում և արդյունքը մեծացնել այնքան անգամ, որքան միավոր կա այդ կոտորակի հայտարարում։**

149. Թիվը գտնելը, յերբ տված են նրա տոկոսները։ Դիցուք, տված է, որ որևէ թվի 18%-ը կազմում է $14\frac{2}{5}$. այդ թիվը գտնելու համար նկատում ենք, որ $14\frac{2}{5}$-ը կազմում է այդ թվի $\frac{18}{100}$-ը. ուստի, նախորդ պարագրաֆի կանոնի համաձայն՝ անհայտ թիվը կստացվի, յեթե $14\frac{2}{5} = \frac{72}{5}$-ը բաժանենք 18-ի վրա $\left(\text{կստանանք } \frac{4}{5}\right)$ և արդյունքը բազմապատկենք 100-ով (կստացվի 80)։

Քննարկենք յերկու խնդիր։

1-ին ԽՆԴԻՐ։ Խնայողական դրամարկղի ավանդատուի 4 տարվա յեկամուտը կազմում է 12 ռ. 84 կոպ.։ Գտնել ավանդի գումարը[1])։

ԼՈՒԾՈՒՄ։ 4 տարվա յեկամուտը կազմում է 12 ռ. 84 կոպ. կամ 1284 կոպ.։ Ուրեմն, 1 տարվա յեկամուտը կազմում է 1284 : : 4=321 (կոպ)։ Քանի որ խնայդրամարկղը վճարում է տարեկան

1) Յենթադրվում է, որ յուրաքանչյուր տարվա վերջում ավանդատուն դրամարկղից վերցնում է իր յեկամուտը, այնպես որ դրված ավանդի գումարը հետևյալ տարին մնում է նախկինը։

3%, ապա 321 կոպ. կազմում է ավանդ դրած գումարի 3%-ը։ Այդ գումարը գտնելու համար, նախորդ պարագրաֆի կանոնի հիման վրա, պետք է 321-ը բաժանել 3-ի վրա և արդյունքը բազմապատկել 100-ով.

$$\frac{321}{3} \cdot 100 = 10700 \,(= 107 \text{ ռուբլի})։$$

2-րդ ԽՆԴԻՐ։ Քաղաքի ազգաբնակչությունը կազմում է 134 400 մարդ։ Հոկտեմբերյան սոցիալիստական Մեծ հեղափոխությունից հետո նա աճել է 60%-ով։ Վորքա՞ն բնակիչ է ունեցել քաղաքը մինչև հեղափոխությունը։

ԼՈՒԾՈՒՄ. Բնակիչների անհայտ թվին ավելացել է այդ թվի 60%-ը։ Քանի որ յուրաքանչյուր թիվ կազմում է իր 100%-ը (հարյուր հարյուրերորդական մասը), ապա բնակիչների նոր թիվը (134 400) կազմում է նրանց նախկին թվի 160%-ը։ Ուստի, բնակիչների նախկին թիվը գտնելու համար, նախորդ պարագրաֆի կանոնի համաձայն, պետք է 134 400-ը բաժանել 160-ի վրա և արդյունքը բազմապատկել 100-ով.

$$\frac{134400}{160} \cdot 100 = 84\,000 \text{ (մարդ)}։$$

ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ԹՎԵՐԻ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ

150. Սահմանում։ **Բաժանումը մի գործողություն է** (բազմապատկմանը հակադարձ), **որով յերկու արտադրիչների տված արտադրյալի** (բաժանելիի) **և արտադրիչներից մեկի** (բաժանարարի) **միջոցով գտնում են մյուս արտադրիչը** (քանորդը)։

Օրինակ, $\frac{7}{8}$-ը բաժանել $\frac{3}{5}$-ի վրա—նշանակում է գտնել այնպիսի թիվ, վորը բազմապատկելով $\frac{3}{5}$-ով՝ ստացվի $\frac{7}{8}$, կամ գտնել այնպիսի թիվ, վորով պետք է բազմապատկել $\frac{3}{5}$-ը, $\frac{7}{8}$ ստանալու համար։ Առաջին դեպքում քանորդը հանդիսանում

է վորոնելի բազմապատկելին, իսկ յերկրորդ դեպքում—վորոնելի բազմապատկիչը։

Քանի վոր բազմապատկելիի և բազմապատկիչի տեղերը կարելի յե փոխել, ուստի, քանորդի մեծությունն անկախ է նրանից, քանորդը բազմապատկելի յե՞, թե բազմապատկիչ։

Դիտողություն։ 1) Ամբողջ թվերի թվաբանության մեջ այդ սահմանումը կիրառելի յե միայն առանց մնացորդի բաժանումների նկատմամբ, իսկ կոտորակային թվերի թվաբանության մեջ այդ սահմանումը, ինչպես կտեսնենք, միշտ կիրառելի յե, բացառությամբ այն դեպքի, յերբ բաժանարարը հավասար է զերոյի։

2) Կանոնավոր կոտորակի վրա բաժանելիս թիվը մեծանում է, իսկ անկանոն կոտորակի վրա բաժանելիս՝ փոքրանում, յերբ այդ անկանոն կոտորակը միավորից մեծ է, և մնում է անփոփոխ, յերբ նա հավասար է միավորի։

Օրինակ, $5:\frac{7}{8}$ քանորդը պետք է 5-ից մեծ լինի, վորովհետև քանորդը բազմապատկած $\frac{7}{8}$-ով պետք է կազմի 5, իսկ քանի վոր $\frac{7}{8}$-ով բազմապատկելիս, ինչպես գիտենք, յուրաքանչյուր թիվ փոքրանում է, ապա ուրեմն քանորդը պետք է 5-ից մեծ լինի։ Նույն ձևով բացատրվում է այն, վոր $5:\frac{9}{8}$ քանորդը պետք է 5-ից փոքր լինի (քանի վոր $\frac{9}{8}$-ով բազմապատկելիս այդ քանորդը մեծանալով պիտի տա 5 թիվը)։

151. Բաժանման կանոնների ստացումը։ Բաժանման ժամանակ կարող են հանդես գալ հետևյալ հինգ դեպքերը․

1) Ամբողջ թվի բաժանումն ամբողջ թվի վրա։ Այսպիսի բաժանում քննարկեցինք ամբողջ թվերի թվաբանության մեջ։ Բայց այնտեղ ճիշտ բաժանում միշտ հնարավոր չէր, քանի վոր բաժանելին միշտ հավասար չէ բաժանարարի և ամբողջ թվի արտադրյալին, ուստի, ընդհանուր դեպքում պետք յեղավ քննարկելու բաժանումը մնացորդով։ Իսկ այժմ, ընդունելով կոտորակով բազմապատկումը, մենք ամբողջ թվերի բաժանման ամեն մի դեպք կարող ենք համարել հնարավոր, բացառությամբ

զերոյի վրա բաժանելուց, վորն այստեղ էլ մնում է անհնարին։ Դիցուք, պահանջվում է 5-ը բաժանել 7-ի վրա, այսինքն՝ գտնել այն թիվը, վորը բազմապատկելով 7-ով, տալիս է 5։ Այդ թիվը $\frac{5}{7}$ կոտորակն է, վորովհետև $\frac{5}{7}\cdot 7=5$։ Ճիշտ նույնպես էլ

$20:7=\frac{20}{7}$, վորովհետև $\frac{20}{7}\cdot 7=20$։

1-ին ԿԱՆՈՆ։ Ամբողջ թիվն ամբողջ թվի վրա բաժանելու համար պետք է կազմել մի կոտորակ, վորի համարիչը հավասար է բաժանելիին, իսկ հայտարարը—բաժանարարին։

Նկատենք, վոր ամբողջ թվերի բնագավառում առանց մնացորդի բաժանումը կոչվում է «ամբողջային» բաժանում, վորովհետև քանորդում ստացվում է ամբողջ թիվ և վոչ թե կոտորակային։

2) Կոտորակի բաժանումն ամբողջ թվի վրա։ Դիցուք, պետք է $\frac{8}{9}$-ը բաժանել 4-ի վրա, այսինքն՝ պահանջվում է գտնել այնպիսի թիվ, վորը պետք է բազմապատկել 4-ով, $\frac{8}{9}$ ստանալու համար։

Քանի վոր 4-ով բազմապատկելիս յուրաքանչյուր թիվ մեծանում է 4 անգամ, ուրեմն, 4 անգամ մեծացնելիս վորոնելի թիվը պետք է կազմի $\frac{8}{9}$, ուստի և այն գտնելու համար բավական է $\frac{8}{9}$-ը փոքրացնել 4 անգամ։ Կոտորակը 4 անգամ փոքրացնելու համար պետք է նրա համարիչը փոքրացնել 4 անգամ, կամ հայտարարը մեծացնել նույնքան անգամ (§ 127)։ Ուստի՝

$$\frac{8}{9}:4=\frac{8:4}{9}=\frac{2}{9},$$

կամ

$$\frac{8}{9}:4=\frac{8}{9\cdot 4}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9},$$

2-րդ ԿԱՆՈՆ։ Կոտորակն ամբողջ թվի վրա բաժանելու համար, պետք է այդ թվի վրա բաժանել կոտորակի համարիչը

(յեթե այդ հնարավոր է), թողնելով միևնույն հայտարարը, կամ այդ ամբողջ թվով բազմապատկել կոտորակի հայտարարը, թողնելով միևնույն համարիչը։

3) Ամբողջ թվի բաժանումը կոտորակի վրա։ *Դիցուք, պետք է 3-ը բաժանել $\frac{2}{5}$-ի վրա, այսինքն՝ պահանջվում է գտնել այնպիսի թիվ, վորը պետք է բազմապատկել $\frac{2}{5}$-ով, 3 ստանալու համար։ Քանի վոր վորևէ թիվ բազմապատկել $\frac{2}{5}$-ով—նշանակում է գտնել այդ թվի $\frac{2}{5}$ մասը, ապա՝*

անհայտ քանորդի $\frac{2}{5}$*-ը կազմում է* 3;

» » $\frac{1}{5}$*-ը կազմում է* $\frac{3}{2}$;

» » $\frac{5}{5}$*-ը կազմում է* $\frac{3}{2}\cdot 5 = \frac{3.5}{2}$։

Ուրեմն.

$$3 : \frac{2}{5} = \frac{3\cdot 5}{2} = \frac{15}{2} = 7\,\frac{1}{2}։$$

3-րդ ԿԱՆՈՆ։ Ամբողջ թիվը կոտորակի վրա բաժանելու համար պետք է այդ ամբողջ թիվը բազմապատկել տված կոտորակի հայտարարով յեվ այդ արտադրյալը վերցնել վորպես համարիչ, իսկ տված կոտորակի համարիչը դարձնել հայտարար։

4) Կոտորակի բաժանումը կոտորակի վրա։ *Դիցուք, պետք է $\frac{5}{6}$-ը բաժանել $\frac{7}{11}$-ի վրա, այսինքն՝ պահանջվում է գտնել այնպիսի թիվ, վորը բազմապատկելով $\frac{7}{11}$-ով, կազմի $\frac{5}{6}$։ Քանի վոր վորևէ թիվ $\frac{7}{11}$-ով բազմապատկել—նշանակում է գտնել այդ թվի $\frac{7}{11}$ մասը, ապա՝*

անհայտ քանորդի $\frac{7}{11}$*-ը կազմում է* $\frac{5}{6}$;

» » $\frac{1}{11}$*-ը կազմում է* $\frac{5}{6.7}$;

» » $\frac{11}{11}$*-ը կազմում է* $\frac{5.11}{6.7}$։

Ուրեմն.

$$\frac{5}{6} : \frac{7}{11} = \frac{5\cdot 11}{6\cdot 7} = \frac{55}{42} = 1\,\frac{13}{42}։$$

4-րդ ԿԱՆՈՆ։ Կոտորակը կոտորակի վրա բաժանելու համար պետք է առաջին կոտորակի համարիչը բազմապատկել յերկրորդ կոտորակի հայտարարով, իսկ առաջին կոտորակի հայտարարը՝ յերկրորդ կոտորակի համարիչով յեվ առաջին արտադրյալը վերցնել վորպես համարիչ, իսկ յերկրորդը՝ հայտարար։

Դիտողություն։ *Այս կանոնին կարելի յե յենթարկել նախորդ բոլոր դեպքերը, յեթե միայն ամբողջ թիվը դիտենք վորպես միավոր հայտարար ունեցող կոտորակ։ Այսպես՝*

$$5 : 7 = \frac{5}{1} : \frac{7}{1} = \frac{5\cdot 1}{1\cdot 7} = \frac{5}{7};$$

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{8}{9} : \frac{4}{1} = \frac{8\cdot 1}{9\cdot 4} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9};$$

$$3 : \frac{2}{5} = \frac{3}{1} : \frac{2}{5} = \frac{3\cdot 5}{1\cdot 2} = \frac{15}{2} = 7\,\frac{1}{2}։$$

Այսպիսով, կոտորակների բաժանման կանոնը բոլոր դեպքերում կարելի յե արտահայտել այսպիսի տառային հավասարությամբ.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}։$$

5) Խառը թվերի բաժանումը։

5-րդ ԿԱՆՈՆ։ Խառը թվերը բաժանելու համար պետք է նրանց դարձնել անկանոն կոտորակներ յեվ ապա բաժանել կոտորակների բաժանման կանոնների համաձայն։

Օրինակ.

$$8 : 3\frac{5}{6} = 8 : \frac{23}{6} = \frac{8\cdot6}{23} = \frac{48}{23} = 2\frac{2}{23};$$

$$7\frac{3}{4} : 5\frac{1}{2} = \frac{31}{4} : \frac{11}{2} = \frac{31\cdot2}{4\cdot11} = \frac{31}{22} = 1\frac{9}{22}.$$

152. Բաժանման փոխարինումը բազմապատկումով։ *Յեթե տված կոտորակի համարիչը փոխադրենք հայտարարի տեղը, իսկ հայտարարը՝ համարիչի, ապա այդ տեղափոխությունից ստացվող կոտորակը տվածի նկատմամբ կոչվում ե* **հակադարձ** *կոտորակ։ Այսպես, $\frac{7}{8}$-ի համար հակադարձ կոտորակը կլինի $\frac{8}{7}$։ Ամբողջ թիվն ել ունի հակադարձ կոտորակ, օրինակ, 5-ի կամ $\frac{5}{1}$-ի համար հակադարձ կոտորակը կլինի $\frac{1}{5}$։ Ուստի, հակադարձ կոտորակներն ավելի հարմար ե անվանել* **հակադարձ թվեր։** *Այն թիվը, վորը հակադարձ ե տվածին, կարելի յե սահմանել նաև վորպես քանորդ, ստացված միավորը տված թվի վրա բաժանելուց։ Այսպես, $\frac{7}{8}$-ին հակադարձ թիվն ե.*

$$\frac{1}{\frac{7}{8}} = \frac{8}{7}.$$

Այս սահմանման համաձայն կարելի յե գտնել նաև խառը թվերի հակադարձ թվերը։ Այսպես, $4\frac{5}{8}$-ի համար հակադարձ թիվը կլինի

$$\frac{1}{4\frac{5}{8}} = \frac{1}{\frac{37}{8}} = \frac{8}{37}.$$

Ակնհայտ ե, վոր յուրաքանչյուր թվի և նրա հակադարձ թվի արտադրյալը հավասար ե միավորի։

Պայմանավորվելով սրանում, կարող ենք արտահայտել բաժանման այսպիսի կանոն։

Վորեվե թիվ մի այլ թվի վրա բաժանելու համար կարելի յե բաժանելին բազմապատկել բաժանարարի հակադարձ թվով։

Այս կանոնի ճշտությանը կարելի յե համոզվել հետևյալ օրինակներով.

$$8 : 9 = \frac{8}{9} \text{ և } 8\cdot\frac{1}{9} = \frac{8}{9};$$

$$\frac{7}{8} : 5 = \frac{7}{40} \text{ և } \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{5} = \frac{7}{40};$$

$$5 : \frac{7}{8} = \frac{40}{7} \text{ և } 5\cdot\frac{8}{7} = \frac{40}{7};$$

$$\frac{2}{7} : \frac{3}{5} = \frac{10}{21} \text{ և } \frac{2}{7}\cdot\frac{5}{3} = \frac{10}{21};$$

$$5 : 3\frac{1}{3} = \frac{3}{2} \text{ և } 5\cdot\frac{1}{3\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

153. Կրճատումը բաժանման ժամանակ։ *Կոտորակային թվեր բաժանելիս, յեթե հնարավոր ե, պետք ե* **նախապես** *կատարել կրճատումներ, ինչպես այդ ցույց ե տված հետևյալ օրինակներում*

1) $12 : \frac{8}{11} = \frac{12\cdot11}{8} = \frac{3\cdot11}{2} = \frac{33}{2} = 16\frac{1}{2};$

2) $\frac{8}{9} : \frac{6}{7} = \frac{8\cdot7}{9\cdot6} = \frac{4\cdot7}{9\cdot3} = \frac{28}{27} = 1\frac{1}{27};$

3) $\frac{5}{12} : \frac{7}{18} = \frac{5\cdot18}{12\cdot7} = \frac{5\cdot3}{2\cdot7} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}.$

Այսպիսի կրճատում կարելի յե անել, վորովհետև, յերբ կոտորակի համարիչը և հայտարարը փոքրացնում ենք միևնույն թիվ անգամ, նրա մեծությունը չի փոխվում։

154. Ինչպես պետք ե թիվը բաժանել արտադրյալի վրա։ *Բաժանման (անմնացորդ) այն հատկությունը, վորը նշել ենք ամբողջ թվերի համար (§ 76), պատկանում ե և՛ կոտորակային թվերին, այն ե.*

Վորեվե թիվ մի քանի արտադրիչների արտադրյալի վրա բաժանելու համար կարելի յե այդ թիվը բաժանել առաջին արտադրիչի վրա, ստացված արդյունքը բաժանել յերկրորդ արտադրիչի վրա յեվ այլն։

Այսպես, $10:\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\right)=10:\frac{2}{3}:\frac{5}{7}$, վորովհետև կոտորակների բազմապատկման և բաժանման կանոնների համաձայն կստանանք՝

$$10:\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\right)=10:\frac{2.5}{3.7}=\frac{10.(3.7)}{2.5}=\frac{10.3.7}{2.5}$$

$$10:\frac{2}{3}:\frac{5}{7}=\frac{10.3}{2}:\frac{5}{7}=\frac{10.3.7}{2.5},$$

այսինքն՝ կստանանք միևնույն թիվը, ինչպես արտադրյալի վրա միանգամից բաժանելով, նույնպես և արտադրիչների վրա հաջորդաբար բաժանելով:

155. Քանորդի փոփոխությունը տված թվերի փոփոխության հետեվանքով: Բաժանելին և բաժանարարը փոփոխելիս կոտորակային թվերի քանորդը փոփոխվում է կատարելապես նույն ձևով, ինչպես ամբողջ թվերի քանորդը (§ 77), այն է.

յեթե բաժանելին մեծացնենք (կամ փոքրացնենք) **մի քանի անգամ, ապա քանորդը կմեծանա** (կամ կփոքրանա) **նույնքան անգամ. յեթե բաժանարարը մեծացնենք** (կամ փոքրացնենք) **մի քանի անգամ, ապա քանորդը կփոքրանա** (կամ կմեծանա) **նույնքան անգամ:**

Հատուկ ուշադրություն դարձնենք այն բանի վրա, վոր **յեթե յեվ բաժանելին յեվ բաժանարարը մեծացնենք կամ փոքրացնենք միևնույն թիվ անգամ, ապա քանորդը չի փոխվի.**

Այսպես, յեթե $\frac{5}{6}:\frac{7}{11}=\frac{55}{42}$ օրինակի մեջ բաժանելին և բաժանարարը մեծացնենք, դիցուք, 3 անգամ, ապա կստանանք՝

$$\frac{15}{6}:\frac{21}{11}=\frac{15.11}{6.21}=\frac{5.11}{6.7}=\frac{55}{42};$$

քանորդը մնաց միևնույնը:

Ընդհանուր ձևով այդ կարելի յե արտահայտել այսպես.

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}=\frac{a:m}{b:m}$$

156. Յերկու թվերի հարաբերությունը: Ինչպես տեսանք, կոտորակային թվեր մտցնելուց հետո բաժանումը դառնում է միշտ հնարավոր գործողություն (բացառությամբ զերոյի վրա բաժանելը): Ուրեմն, յեթե տված են յերկու թվեր, ապա գոյություն ունի առաջին թիվը յերկրորդի վրա բաժանելուց ստացվող քանորդը (յեթե միայն յերկրորդ թիվը զերո չե):

Մի թիվ մյուսի վրա բաժանելուց ստացվող քանորդն այլ կերպ կոչվում է այդ թվերի **հարաբերություն**: Առաջին թիվը (բաժանելին) կոչվում է **հարաբերության նախորդ անդամ**, իսկ յերկրորդ թիվը (բաժանարարը) կոչվում է **հարաբերության հետնորդ անդամ**:

Այսպես, $2\frac{1}{2}$ և $\frac{1}{7}$ թվերի հարաբերությունը հանդիսանում է

$$\frac{2\frac{1}{2}}{\frac{1}{7}}=\frac{35}{2}=17\frac{1}{2}$$

քանորդը. $2\frac{1}{2}$-ը այդ հարաբերության նախորդ անդամն է, $\frac{1}{7}$-ը՝ նրա հետնորդ անդամը:

Յեթե յերկու թվերի հարաբերությունն ամբողջ թիվ է, ապա նա ցույց է տալիս, թե հետնորդ անդամը քանի անգամ է պարունակվում նախորդ անդամի մեջ[1]). սակայն պայմանավորվել են արտահայտության այս ձևն օգտագործել նաև այն դեպքում, յերբ հարաբերությունը կոտորակային թիվ է: Այսպես, վերևում քննարկած օրինակում ասում ենք, վոր $\frac{1}{7}$-ը $2\frac{1}{2}$-ի մեջ պարունակվում է տասնյոթ և կես անգամ:

Կիրառություններում հաճախ պետք է լինում քննարկել միևնույն անունն ունեցող յերկու անվանական թվերի հարաբերությունը: Դիցուք, պահանջվում է իմանալ, թե $4\frac{1}{4}$ կգ քանի

[1]) Այսպես, § 108-ում մենք արդեն յերկու միատեսակ չափերի հարաբերություն անվանեցինք այն թիվը, վորը ցույց է տալիս, թե փոքր չափը քանի՞ անգամ է պարունակվում մեծի մեջ:

անգամ է մեծ $2\frac{1}{2}$ կիլոգրամից։ Պատասխանը տրվում է $4\frac{1}{4}$ և $2\frac{1}{2}$ թվերի հարաբերությամբ, բայց այդ հարաբերության անդամները հաճախ գրում են իրենց անունների հետ միասին, այսինքն՝

$$\frac{4\frac{1}{4}\text{ կգ}}{2\frac{1}{2}\text{ կգ}}=1\frac{7}{10},$$

ըստ որում ինքը $1\frac{7}{10}$ թիվը վերացական է, որովհետև նա ցույց է տալիս, թե մի քաշը քանի՞ անգամ է պարունակվում մյուսի մեջ։

Քանի որ թվերի հարաբերությունը այդ թվերի քանորդն է, որտեղ որպես բաժանելի հանդիսանում է նախորդ անդամը, իսկ բաժանարար—հետևորդը, ապա նա էլ ունի քանորդի բոլոր հատկությունները. այդ հատկություններից հիշենք հետևյալները.

1) Ամեն մի թիվ կարող է լինել հարաբերության նախորդ անդամ. հետևորդ անդամ կարող է լինել ամեն թիվ, բացի զերոյից։

2) Նախորդ անդամը հավասար է հետևորդ անդամի յեվ հարաբերության արտադրյալին։

3) Հետևորդ անդամը հավասար է նախորդին՝ բաժանած հարաբերության վրա։

4) Հարաբերությունը չի փոխվի, յեթե հարաբերության յերկու անդամները բազմապատկենք կամ բաժանենք միևնույն թվի վրա։

4-րդ հատկությունից հետևում է, որ կոտորակային թվերի հարաբերությունը կարելի յե փոխարինել ամբողջ թվերի հարաբերությամբ։ Դիցուք, տված է $\frac{5}{12}:\frac{3}{8}$ հարաբերությունը. այդ հարաբերության յերկու անդամները բազմապատկելով տված կոտորակների ամենափոքր ընդհանուր հայտարարով, այսինքն 24-ով, տված հարաբերությունը փոխարինում ենք նրան հավա-

սար 10 : 9 հարաբերությամբ, որի անդամներն արդեն ամբողջ թվեր են։

Նման ձևով էլ.

$$3\frac{1}{4}:\frac{5}{6}=\frac{13}{4}:\frac{5}{6}=\left(\frac{13}{4}\cdot12\right):\left(\frac{5}{6}\cdot12\right)=39:10.$$

Դիտողություններ, 1. Յերկու թվերի հարաբերությունը, որ սահմանեցինք, յերբեմն անվանում են քանորդական կամ յերկրաչափական հարաբերություն, զանազանելու տարբերական կամ թվաբանական հարաբերությունից, որը սահմանվում է որպես այդ թվերի տարբերություն։ Այսուհետև հարաբերություն ասելով միշտ կհասկանանք քանորդական հարաբերություն։

2. Յեթե հարաբերության անդամները տեղափոխենք, այսինքն՝ նախորդ անդամը դարձնենք հետևորդ և ընդհակառակը, ապա ստացած նոր հարաբերությունը կոչվում է հակադարձ նախկինին։

157. Յերկու թվերի տոկոսային հարաբերությունը։ Դիցուք, պետք է իմանալ, թե 250-ի որ տոկոսն է կազմում $42\frac{1}{2}$-ը. 250-ի մեկ տոկոսը կազմում է $\frac{250}{100}$, այդ պատճառով $42\frac{1}{2}$-ը կազմում է 250-ի այնքան տոկոսը, որքան անգամ $42\frac{1}{2}$-ի մեջ պարունակվում է $\frac{250}{100}$ թիվը, այսինքն՝

$$42\frac{1}{2}:\frac{250}{100}=\frac{42\frac{1}{2}}{250}\cdot100=17(\%).$$

Այն թիվը, որը ցույց է տալիս, թե տված թիվը մյուսի որ տոկոսն է կազմում, կոչվում է այդ թվերի տոկոսային հարաբերություն։ Քննարկած օրինակը ցույց է տալիս, որ յերկու թվերի տոկոսային հարաբերությունը գտնելու համար պետք է այդ թվերի հարաբերությունը բազմապատկել 100-ով։

Նույն յեզրակացության կարելի յե գալ նաև այլ ճանապարհով։ Գտնելու համար, թե 250-ի որ տոկոսն է կազմում

$42\frac{1}{2}$ թիվը, պետք է $\frac{42\frac{1}{2}}{250}$ հարաբերությունն արտահայտել տոկոսներով, այսինքն՝ հարյուրերորդական մասերով։ Բայց իմանալու համար, թե տված թվում քանի հարյուրերորդական մասեր են պարունակվում, պետք է այդ թիվը բազմապատկել 100-ով (այսպես, 5 թվի մեջ պարունակվում է $5 \cdot 100=500$ հարյուրերորդական մասեր, $\frac{1}{2}$ թվի մեջ՝ $\frac{1}{2} \cdot 100=50$ հարյուրերորդական մասեր և այլն)։ Այդ պատճառով $\frac{42\frac{1}{2}}{250}$ թիվը կազմում է $\frac{42\frac{1}{2}}{250} \cdot 100=17$ հարյուրերորդական մասեր, այսինքն՝ 17 տոկոս։

Քննարկենք երկու խնդիր։

1-ին ԽՆԴԻՐ։ Խորհտնտեսությունն ունի 80 000 հա հող, որից 69 200 հա ցանված է ցորեն. ամբողջ մակերեսի ո՞ր տոկոսն են բռնում ցորենի դաշտերը:

Խնդիրը լուծելու համար պետք է գտնել, թե 69 200-ը 80 000-ի որ տոկոսն է կազմում, այլ խոսքով, պետք է գտնել 69 200-ի և 80 000-ի տոկոսային հարաբերությունը։ Սահմանած կանոնի համաձայն գտնում ենք.

$$\frac{69\,200}{80\,000} \cdot 100 = 86\frac{1}{2}\ (\%);$$

2-րդ ԽՆԴԻՐ: 325 կգ ալյուրից ստացված է 429 կգ հաց։ Գտնել աճի տոկոսը։

Լուծում: Աճը կազմում է $429-325=104$ (կգ)։

Խնդիրը լուծելու համար պետք է գտնել 104-ի և 325-ի տոկոսային հարաբերությունը. ըստ սահմանած կանոնի գտնում ենք.

$$\frac{104}{325} \cdot 100 = 32\ (\%)։$$

ՀԻՆԳԵՐՈՐԴ ԲԱԺԻՆ

ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐ

I. ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

158. Տասնորդական մասեր։ Այն մասերը, որոնք ստացվում են որևէ միավոր 10-ի, 100-ի, 1000-ի վրա, ընդհանրապես միավորով և մեկ կամ մի քանի զերոներով արտահայտված թվի վրա բաժանելուց, կոչվում են տասնորդական մասեր։

Այսպես, հաջորդաբար փոքրացող տասնորդական մասեր կլինեն հետևյալները.

$$\frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{10\,000},\ \frac{1}{100\,000},\ \frac{1}{1\,000\,000}\ \text{և այլն։}$$

Երկու վոչ հավասար տասնորդական մասերից մեծը կոչվում է բարձր կարգի տասնորդական մաս, իսկ փոքրը՝ ցածր կարգի տասնորդական մաս։ Յուրաքանչյուր տասնորդական մասի մեջ պարունակվում է հաջորդ ցածր կարգի 10 տասնորդական մաս։ Այսպես՝

$$\frac{1}{10}=\frac{10}{100},\quad \frac{1}{100}=\frac{10}{1000},\quad \frac{1}{1000}=\frac{10}{10\,000}\ \text{և այլն։}$$

159. Տասնորդական կոտորակ: Այն կոտորակը, որի հայտարարը մեկ միավոր է մեկ կամ մի քանի զերոներով, կոչվում է տասնորդական. այդպիսին են, օրինակ՝

$$\frac{3}{10},\quad \frac{27}{100},\quad \frac{27401}{1000},\quad 3\frac{1}{1000}\ \text{և այլն}$$

կոտորակները։

Մյուս կոտորակները, որոնք ունեն ուզած ամեն տեսակ հայտարարներ, տասնորդական կոտորակներից տարբերելու համար կոչվում են սովորական կամ հասարակ կոտորակներ։

160. Տասնորդական նշաններ. Ամբողջ թվի թվանշանային պատկերացման ժամանակ իրար մոտ գտնվող յերկու թվանշաններից աջ կողմինը միշտ ցույց է տալիս 10 անգամ ավելի փոքր միավորներ, քան ձախը: Պայմանավորվենք թվանշանների տեղի այս հատկությունը տարածել նաև այն թվանշանների վրա, վորոնք գրված են հասարակ միավորի աջ կողմում: Յենթադրենք,

$$63,48259...$$

գրության մեջ 3 թվանշանը նշանակում է հասարակ միավորները: Այն ժամանակ 4-ը նշանակում է հասարակ միավորից 10 անգամ փոքր միավորներ, այսինքն՝ տասնորդական մասեր, 8-ը նշանակում է հարյուրերորդական մասեր, 2-ը՝ հազարերորդական, 5-ը՝ տասհազարերորդական, 9-ը՝ հարյուրհազարերորդական մասեր և այլն: Տեղերի նշանակությունը չշփոթելու համար պայմանավորվենք ամբողջ թիվը տասնորդական մասերից անջատել ստորակետով: Պակասող մասերի տեղը, նույնպես և ամբողջ թվի տեղը, յեթե այն չկա, կդնենք զերոներ: Այս պայմաններում, օրինակ, 0,0203 արտահայտությունը նշանակում է 2 հարյուրերորդ 3 տասհազարերորդ:

Նման ձևով էլ 25,703-ը նշանակում է 25 ամբողջ 7 տասներորդ 3 հազարերորդ, 0,82-ը նշանակում է 8 տասներորդ 2 հարյուրերորդ և այլն:

Այն թվանշանները, վորոնք գտնվում են ստորակետից աջ, կոչվում են **տասնորդական նշաններ:**

161. Տասնորդական կոտորակի պատկերումն առանց հայտարարի: Ամեն մի տասնորդական կոտորակ կարող ենք գրել առանց հայտարարի: Դիցուք, տված է $\frac{32736}{1000}$ տասնորդական կոտորակը: Այդ կոտորակից նախ կանջատենք ամբողջ թիվը, կստանանք $32\frac{736}{1000}$: Ապա այդ կոտորակը կպատկերացնենք այսպես՝

$$\frac{32736}{1000}=32+\frac{700}{1000}+\frac{30}{1000}+\frac{6}{1000}=32+\frac{7}{10}+\frac{3}{100}+\frac{6}{1000},$$

Ուրեմն, այդ կոտորակը կարելի յե պատկերել այսպես՝

$$\frac{32736}{1000}=32,736:$$

Այդ կարելի յե հեշտ ստուգել, վերածելով 32,736 թվի ամբողջ միավորներն ու բոլոր տասնորդական մասերն ամենափոքր մասերի (հազարերորդական), վորն ամենից ավելի հեշտ է անել այսպես. քանի վոր ամբողջ միավորը պարունակում է 10 տասներորդական, ապա 32 ամբողջը կազմում է 320 տասներորդական. դրանց ավելացնելով 7 տասներորդական, կստանանք 327 տասներորդական: Քանի վոր տասներորդական մասը պարունակում է 10 հարյուրերորդական, ապա 327 տասներորդականը կազմում է 3270 հարյուրերորդական, դրանց ավելացնելով 3 հարյուրերորդական, կստանանք 3273 հարյուրերորդական: Քանի վոր 1 հարյուրերորդականը=10 հազարերորդականի, ապա 3273 հարյուրերորդականը=32730 հազարերորդականի. այս թվին ավելացնելով էլի 6 հազարերորդական, կստանանք տված կոտորակը՝ 32736 հազարերորդական:

Դիցուք, տված է $\frac{578}{100000}$ տասնորդական կոտորակը, վորի մեջ ամբողջ թիվ չկա: Այդ կոտորակը կարելի յե պատկերացնել այսպես.

$$\frac{578}{100000}=\frac{500}{100000}+\frac{70}{100000}+\frac{8}{100000}=\frac{5}{1000}+\frac{7}{10000}+\frac{8}{100000}:$$

Հետևապես, այդ կոտորակը կպատկերվի այսպես.

$$\frac{578}{100000}=0,00578:$$

ԿԱՆՈՆ: Տասնորդական կոտորակն առանց հայտարարի գրելու համար բավական է գրել նրա համարիչը, յեվ նրա մեջ աջ կողմից ստորակետով անջատել այնքան տասնորդական նշան, վորքան զերո կա հայտարարում (վորի համար յերբեմն կա-

րեք և լինում համարիչի ձախ կողմում կցագրել մի քանի զերոներ)։

Հետագա շարադրանքում միշտ կընդունենք (յեթե հատուկ վերապահում չլինի), որ տասնորդական կոտորակը պատկերված է առանց հայտարարի։

Դիտողություն։ Տասնորդական կոտորակի (առանց հայտարարի գրված) **աջից կամ ձախից զերոներ կցագրելը չի փոխում նրա մեծությունը։** Օրինակ, հետևյալ թվերից յուրաքանչյուրը

7,05; 7,0500; 007,05

արտահայտում են միևնույն թիվը՝ 7 ամբողջ 5 հարյուրերորդական, որովհետև 500 տասհազարերորդականը հավասար է 5 հարյուրերորդականի, իսկ 007-ը արտահայտում է ուղղակի 7։

162. Ինչպես է կարդացվում տասնորդական կոտորակը։ Նախ կարդում են ամբողջ թիվը (իսկ յեթե ամբողջ թիվ չկա, ասում են «զերո ամբողջ»), ապա կարդում են այն թիվը, որը գրված է ստորակետից հետո, ինչպես յեթե ամբողջ թիվ լիներ այն և վերջում ավելացնում են այն մասերի անունը, որոնցով վերջանում է կոտորակի տասնորդական պատկերումը. օրինակ, 0,00378-ը կարդացվում է՝ 0 ամբողջ 378 հարյուր հազարերորդական։ Ուրեմն առանց հայտարարի գրած տասնորդական կոտորակը կարդացվում է այնպես, ինչպես կկարդացվեր, յեթե նա գրված լիներ համարիչով և հայտարարով։

Սակայն, այն տասնորդական կոտորակը, որը **խիստ շատ** տասնորդական նշաններ ունի, գերադասում են կարդալ այլ կերպ. ստորակետից սկսած բոլոր տասնորդական նշանները բաժանում են մասերի, յուրաքանչյուրում 3-ական նշան (բացի վերջինից, որի մեջ կարող են լինել մեկ կամ յերկու նշաններ), ապա յուրաքանչյուր մասը կարդում են որպես ամբողջ թիվ ավելացնելով առաջին մասի թվին «հազարերորդական» բառը, յերկրորդ մասին—«միլիոներորդական», յերրորդին—«միլիարդերորդական» և այլն. վերջին մասի թվի անվանն ավելացնում են կոտորակի վերջին թվանշանով արտահայտվող մասերի անունը։ Այսպիսով՝

0, 028 306 000 07

կոտորակը կարդացվում է այսպես. 0 ամբողջ 28 հազարերորդական 306 միլիոներորդական 07 հարյուրմիլիարդերորդական։

163. Տասնորդական կոտորակների բաղդատումն ըստ մեծության։ Դիցուք, ցանկանում ենք իմանալ՝ հետևյալ թվերից որն է մեծ—

0,735-ը, թե 0,7348-ը։

Դրա համար քիչ տասնորդական նշաններ ունեցող թվի աջ կողմում կցագրում ենք (թեկուզ և միայն մտավորապես) այնքան զերո, մինչև որ յերկու թվերի մեջ էլ տասնորդական նշանների թիվը լինի միևնույնը՝

0,7350; 0,7348։

Այժմ տեսնում ենք, որ առաջին թիվը պարունակում է 7350 տասհազարերորդական, իսկ յերկրորդը՝ 7348 տասհազարերորդական. կոտորակների հայտարարները հավասարվեցին, ուրեմն դրանցից մեծ կլինի այն կոտորակը, որի համարիչը մեծ է. որովհետև 7350-ն ավելի մեծ է, քան 7348-ը, ապա և առաջին թիվը մեծ է յերկրորդից։

Նման ձևով հեշտ է համոզվել, որ

3,01 > 2,998; 3,7 > 3,6874; 3,64 < 3,6985 և այլն։

ԿԱՆՈՆ։ Տված յերկու տասնորդական կոտորակներից մեծ է այն, որի ամբողջների թիվն ավելի մեծ է. ամբողջների հավասարության դեպքում—այն կոտորակը, որի տասերորդական մասերի թիվն ավելի մեծ է. ամբողջների յեվ տասերորդական մասերի հավասարության դեպքում — այն կոտորակը, որի հարյուրերորդական մասերի թիվն ավելի մեծ է յեվ այլն։

164. Տասնորդական կոտորակի մեծության փոփոխումն ստորակետի տեղափոխումից։ Յեթե 3,274 թվի մեջ ստորակետը մի թվանշանով տեղափոխենք դեպի աջ, կստանանք մի նոր թիվ՝ 32,74։ Առաջին թվի մեջ 3-ը նշանակում է հասարակ միավոր, իսկ յերկրորդ թվի մեջ—տասնավոր, հետևապես այդ թվանշանի նշանակությունը մեծացավ 10 անգամ։ Առաջին թվի մեջ 2 թվանշանը նշանակում է տասնորդական մասեր, իսկ յերկրորդի մեջ—հասարակ միավորներ, հետևապես դրա նշանակու-

թյունն էլ մեծացավ 10 անգամ։ Նույնպես տեսնում ենք, վոր մյուս թվանշանների նշանակությունն էլ մեծացավ 10 անգամ։ Այսպիսով, **ստորակետը մի թվանշանով դեպի աջ տեղափոխելուց տասնորդական կոտորակը մեծանում է 10 անգամ։**

Այստեղից հետևում է, վոր ստորակետը յերկու թվանշանով դեպի աջ տեղափոխելուց տասնորդական կոտորակը մեծանում է 100 անգամ՝ 3 թվանշանով տեղափոխելուց՝ 1000 անգամ և այլն։

Ընդհակառակը, **ստորակետը մի թվանշանով դեպի ձախ տեղափոխելուց տասնորդական կոտորակը փոքրանում է 10 անգամ։**

Հետևապես, ստորակետը յերկու թվանշանով դեպի ձախ տեղափոխելուց տասնորդական կոտորակը փոքրանում է 100 անգամ, յերեք թվանշան տեղափոխելուց՝ 1000 անգամ և այլն։

165. Տասնորդական կոտորակի մեծացնելը կամ փոքրացնելը 10 անգամ, 100 անգամ, 1000 անգամ և այլն։ Դիցուք, պետք է 0,02 թիվը մեծացնել 10 000 անգամ։ Դրա համար բավական է նրա ստորակետը չորս թվանշանով դեպի աջ տեղափոխել։ Բայց տված թվի մեջ կան ընդամենը յերկու տասնորդական նշաններ։ Չորս նշաններ ունենալու համար աջ կողմում կկցագրենք յերկու զերո, վորից թվի մեծությունը չի փոխվի։ Ապա տեղափոխելով ստորակետը թվի վերջը, կստանանք 0200 ամբողջ թիվը կամ ուղղակի 200։

Դիցուք, պետք է նույն 0,02 թիվը փոքրացնել 100 անգամ։ Դրա համար բավական է նրա ստորակետը յերկու թվանշանով տեղափոխել դեպի ձախ։ Բայց տված թվի մեջ ստորակետից դեպի ձախ գտնվում է միայն մի թվանշան։ Ձախ կողմից կկցագրենք 2 զերո, վորից թվի մեծությունը չի փոխվի։ Ապա ստորակետը տեղափոխելով յերկու թվանշանով դեպի ձախ, կստանանք 0,0002։

Յուրաքանչյուր ամբողջ թիվ կարելի յե դիտել վորպես տասնորդական կոտորակ, վորի ստորակետից դեպի աջ գտնվում են ցանկացած թվով զերոներ, ուստի ամբողջ թվի մեծացումը կամ փոքրացումը 10, 100, 1000 և այլն անգամ կատարվում է նույն ձևով, ինչպես և տասնորդական կոտորակում։ Օրինակ, յեթե 567,000... ամբողջ թիվը փոքրացնենք 100 անգամ, կստանանք 5,67։

Դիտողություն։ Տասնորդական կոտորակի նշված հատկությունը, ստորակետի տեղափոխության հետ իր մեծության փոփոխելը 10 անգամ, 100 անգամ և այլն, թույլ է տալիս մետրական չափերով արտահայտված ամբողջ անվանական թիվը շատ արագ վերածել կամ անդրադարձնել։

Դիցուք, օրինակ, պետք է 3 մետր 8 դեցիմետր և 4 սանտիմետր բարդ անվանական թիվը արտահայտել մետրերով։ Քանի վոր դեցիմետրը մետրի տասներորդական մասն է, իսկ սանտիմետրը՝ հարյուրերորդական մասը, ապա, ակներև է, վոր տված բարդ անվանական թիվը մետրերով կարտահայտվի այսպես՝ 3,84 մետր։ Այս տասնորդական կոտորակի ստորակետը տեղափոխելով դեպի աջ, կգտնենք, վոր 3,84 մետրը=38,4 դեցիմետրի=384 սանտիմետրի։

Դիցուք դարձյալ պետք է 8746 միլիգրամ պարզ անվանական թիվը դարձնել բարդ (այսինքն՝ արտահայտել բարձր կարգի միավորներով)։ Քանի վոր գրամը հավասար է 1000 միլիգրամի, ապա 8746 միլիգրամը=8,746 գրամի=8 գրամի 7 դեցիգրամի 4 սանտիգրամի և 6 միլիգրամի։

II. ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐՈՎ

ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ

166. Տասնորդական կոտորակների գումարումը կատարվում է այնպես, ինչպես ամբողջ թվերի գումարումը։ Դիցուք պետք է գումարել 2,078+0,75+13,5602 թվերը։ Այդ թվերը կգրենք իրար տակ այնպես, վոր ամբողջները լինեն ամբողջների տակ, տասներորդականները—տասներորդականների, հարյուրերորդականները—հարյուրերորդականների տակ և այլն։ Ընդ վորում բոլոր ստորակետները դասավորվում են իրար տակ։

$$\begin{array}{r} 2{,}078 \\ +\,0{,}75 \\ 13{,}5602 \\ \hline 16{,}3882 \end{array}$$

Գումարումն սկսում ենք ամենափոքր մասերից։ Տասհազարերորդական մասերը գումարելուց կստանանք 2, այդ թիվը գրում ենք գծի տակ։ Հազարերորդական մասերը գումարելուց կստանանք 8, վորը գրում ենք գծի տակ։ Հարյուրերորդական մասերը գումարելուց կստանանք 18, բայց 18 հարյուրերորդականը=10 հարյուրերորդականի+8 հարյուրերորդականի, ապա

հարյուրերորդականը կազմում է մեկ տասներորդական. հիշենք այդ, գումարելիների տասներորդական մասերին գումարելու համար, իսկ 8 հարյուրերորդականը կգրենք գծի տակ։ Այսպես շարունակում ենք գործողությունը մինչև վերջ։ Գումարի մեջ ստորակետը դրվում է գումարելիների ստորակետների տակ։

ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ՀԱՆՈՒՄԸ

167. Տասնորդական կոտորակների հանումը կատարվում է այնպես, ինչպես ամբողջ թվերի հանումը։ *Դիցուք, պետք է կատարել 5,709—0,3078 հանումը։ Հանելին կգրենք նվազելիի տակ այնպես, որ միևնույն անվան միավորները լինեն իրար տակ.*

$$\begin{array}{r} 5,709 \\ -\;0,3078 \\ \hline 5,4012 \end{array}$$

Հանելիի վերջին թվանշանը հանելու համար 9 հազարերորդականներից վերցնենք 1 հազարերորդականը և վերածենք տասհազարերորդական մասերի, կստանանք 10 տասհազարերորդական։ Ուրեմն, հանելիի 8 թվանշանը պետք է հանել 10-ից, իսկ 7 թվանշանը՝ 8-ից։

Նույն ձևով էլ կատարվում է տասնորդական կոտորակի հանումն ամբողջ թվից, օրինակ.

$$\begin{array}{r} 3 \\ -\;1,873 \\ \hline 1,127 \end{array}$$

3 միավորից վերցնում ենք մեկը և վերածում տասներորդական մասերի, որոնցից վերցնում ենք մեկը և վերածում հարյուրերորդական մասերի, հարյուրերորդականներից վերցնում ենք 1 հարյուրերորդականը և վերածում հազարերորդական մասերի։ Սրա հետևանքով 3 ամբողջի փոխարեն կստանանք 2 ամբողջ 9 տասներորդական 9 հարյուրերորդական և 10 հազարերորդական։ Ուրեմն, հանելիի 3 թվանշանը պետք է հանել 10-ից, 7 և 8 թվանշանները՝ 9-ից, իսկ 1 թվանշանը՝ 2-ից։

ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ

168. *Քննության առնենք երկու դեպք. առաջին*—**երբ արտադրիչներից մեկն ամբողջ թիվ է,** *երկրորդ*—**երբ երկու արտադրիչներն էլ տասնորդական կոտորակներ են։**

Օրինակներ՝

1) 3,085·23; 2) 8,375·2,56.

Եթե այս օրինակների մեջ տասնորդական կոտորակները պատկերացնեյինք համարիչի և հայտարարի միջոցով և գործողությունը կատարեյինք ըստ հասարակ կոտորակների բազմապատկման կանոնի, ապա կստանայինք՝

$$1)\ \frac{3085}{1000}\cdot 23=\frac{3085\cdot 23}{1000}=\frac{70955}{1000}=70,955;$$

$$2)\ \frac{8375}{1000}\cdot\frac{256}{100}=\frac{8375\cdot 256}{1000\cdot 100}=\frac{2144000}{100000}=21,44000=21,44.$$

ԿԱՆՈՆ. Տասնորդական կոտորակները բազմապատկելու համար բավական է, առանց ուշադրություն դարձնելու ստորակետների վրա, նրանց բազմապատկել որպես ամբողջ թվեր և արտադրյալի աջ կողմից ստորակետով անջատել այնքան տասնորդական նշաններ, որքան նշաններ կան բազմապատկելիի և բազմապատկիչի մեջ միասին։

Ամենալավն է գործողությունը գրել այսպես.

$$\begin{array}{r} 3,085 \\ \times\quad 23 \\ \hline 9255 \\ 6170 \\ \hline 70,955 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8,375 \\ \times\; 2,56 \\ \hline 50250 \\ 41875 \\ 16750 \\ \hline 21,44000 \end{array}$$

ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ

169. Բաժանում ամբողջ թվի վրա։ Մոտավոր քանորդ։ *Դիցուք, պահանջվում է 39,47-ը բաժանել 8-ի վրա։ Գործողու-*

թյունը գրենք այնպես, ինչպես ընդունված է ամբողջ թվերը բաժանելիս։

$$\begin{array}{r|l} 39,47 & 8 \\ \hline 74 & 4,93 \\ 27 & \\ 3 & \end{array}$$

39 ամբողջը բաժանում ենք 8-ի վրա քանորդում ստանում ենք 4 ամբողջ և մնացորդում 7 ամբողջ։ Մնացորդը վերածում ենք տասնորդական մասերի և ցած ենք բերում բաժանելիի 4 տասնորդականը, ստանում ենք 74 տասնորդական, 74 տասնորդականը բաժանում ենք 8-ի վրա, քանորդում ստանում ենք 9 տասնորդական և մնացորդում 2 տասնորդական։ Մնացորդը վերածում ենք հարյուրերորդական մասերի և բաժանելիի 7 հարյուրերորդականը ցած ենք բերում, ստանում ենք 27 հարյուրերորդական։ Վերջիններս բաժանելով 8-ի վրա, քանորդում ստանում ենք 3 հարյուրերորդական և մնացորդում 3 հարյուրերորդական։

Ենթադրենք, թե այստեղ ընդհատում ենք գործողությունը։ Այն ժամանակ կստանանք 4,93 մոտավոր քանորդը։ Իմանալու համար, թե նա ինչքանով է տարբերվում իսկական քանորդից, կգտնենք այդ իսկական քանորդը և կհամեմատենք մոտավոր քանորդի հետ։ Իսկական քանորդն ստանալու համար բավական է 4,93 թվին ավելացնել այն կոտորակը, որը կստացվի մնացորդը (3 հարյուրերորդականը) 8-ի վրա բաժանելուց։ 3 միավորը 8-ի վրա բաժանելուց ստանում ենք միավորի $\frac{3}{8}$-ը, 3 հարյուրերորդականն 8-ի վրա բաժանելուց ստանում ենք $\frac{3}{8}$ հարյուրերորդականը։ Ուրեմն, իսկական քանորդը հավասար է $4,93+\frac{3}{8}$ հարյուրերորդական գումարին։ Բաց թողնելով $\frac{3}{8}$ հարյուրերորդականը, մենք կանենք մի սխալ, որ լրիվ հարյուրերորդականից փոքր է։ Այդ պատճառով ասում են, որ

4,93-ը մոտավոր քանորդն է $\frac{1}{100}$-ի ճշտությամբ։ Եթե $\frac{3}{8}$ հարյուրերորդականը բաց թողնելու փոխարեն այդ կոտորակը լրացնենք մինչև լրիվ հարյուրերորդական մաս (մեծացնելով $\frac{5}{8}$ հարյուրերորդականով), ապա կկատարենք սխալ $\frac{1}{100}$-ից նույնպես փոքր. այն ժամանակ կստանանք մի ուրիշ մոտավոր քանորդ $4,93+0,01$, այսինքն՝ 4,94, նույնպես $\frac{1}{100}$-ի ճշտությամբ։ 4,93 թիվն իսկական քանորդից փոքր է, իսկ 4,94-ը՝ մեծ, այդ պատճառով էլ ասում են, որ առաջին թիվը մոտավոր քանորդն է պակասորդով, իսկ երկրորդը — ավելցուկով։

Եթե գործողությունը շարունակելու լինենք, մնացորդները դարձնելով ավելի ու ավելի փոքր տասնորդական մասեր, ապա կստանանք մոտավոր քանորդներ ավելի մեծ ճշտությամբ։ Այսպես, եթե 3 հարյուրերորդական մնացորդը դարձնենք հազարերորդական մասեր և 30 հազարերորդականը բաժանենք 8-ի վրա, ապա կստանանք 3,933(պակասորդով) կամ 4,934 (ավելցուկով) մոտավոր քանորդը, ընդորում սխալը 0,001-ից փոքր է։ Գործողությունը շարունակելով, կստանանք՝

$$\begin{array}{r|l} 39,47 & 8 \\ \hline 74 & 4,93375 \\ 27 & \\ 30 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

Գործողությունը բավականաչափ երկար շարունակելով, կարող ենք երբեմն հասնել 0 մնացորդի (ինչպես մեր օրինակում). այն ժամանակ կստանանք իսկական քանորդը։ Հակառակ դեպքում պետք է բավարարվենք մոտավոր քանորդով, ընդորում սխալը կարելի է կատարել ցանկացածի չափ փոքր։

Եթե, օրինակ, ցանկանում ենք մոտավոր քանորդը գտնել մեկ միլիոներորդականի ճշտությամբ, ապա գործողությունն ընդհատում ենք այն ժամանակ, երբ քանորդում ստացվել է միլիոներորդական մասերն արտահայտող թվանշանը։

ԿԱՆՈՆ։ Տասնորդական կոտորակի բաժանումն ամբողջ թվի վրա կատարվում է այնպես, ինչպես և ամբողջ թվերի բաժանումը, ընդ որում մնացորդները դառնում են ավելի ու ավելի փոքր տասնորդական մասեր, և գործողությունը շարունակում այնքան, մինչև որ ստացվում է իսկական քանորդը, կամ մոտավոր քանորդում ստացվում է այն տասնորդական մասերի թվանշանը, որոնցով ցանկանում են սահմանափակվել։

Նույն կերպ են վարվում ամբողջ թիվն ամբողջի վրա բաժանելիս, եթե ցանկանում են քանորդն ստանալ տասնորդական կոտորակի տեսքով։ Օրինակ, 123-ի բաժանումը 7-ի վրա կարելի է կատարել այսպես.

```
123 | 7
 53 | 17,57...
  40
   50
    1
```

Դիտողություն։ Ցույց տալու համար, որ որևէ հավասարություն ճիշտ չէ, այլ միայն մոտավոր է, երբեմն գործածում են հավասարության կրճատված նշանը՝ ≈. այսպես, եթե գրած է

39,47 : 8≈4,93,

ապա դրանով ուզում են արտահայտել, որ 39,47-ը 8-ի վրա բաժանելուց ստացված քանորդը **մոտավորապես** հավասար է 4,93-ի։

170. Մոտավոր քանորդի սխալի մեծությունը. Երկու մոտավոր քանորդներից (միևնույն ճշտությամբ վերցրած)՝ մեկն ավելցուկով, իսկ մյուսը պակասորդով, որևէ մեկը միշտ ճիշտ է վերջին կարգի տասնորդական մասի $\frac{1}{2}$-ի չափ. այդպիսի քանորդ կլինի պակասորդով քանորդը, եթե մնացորդը

բաժանարարի $\frac{1}{2}$-ից փոքր է և ավելցուկով քանորդ է, եթե մնացորդը բաժանարարի $\frac{1}{2}$-ից մեծ է։ Քննության առնենք, օրինակ, 39,47 : 8 բաժանումը (տես նախորդ պարագրաֆը)։ Ընդունենք, թե վերցնում ենք 4,93 մոտավոր քանորդը, որտեղ 3 մնացորդը բաժանարարի կեսից փոքր է (4-ից փոքր է)։ Այն ժամանակ իսկական քանորդը կլինի 4,93+$\frac{3}{8}$ հարյուրերորդը, ուրեմն, նա 4,93-ից տարբերվում է $\frac{3}{8}$ հարյուրերորդով $\left(\frac{1}{2}\right.$ հարյուրերորդից փոքր$\left.\right)$, իսկ 4,94-ից տարբերվում է $\frac{5}{8}$ հարյուրերորդով $\left(\frac{1}{2}\right.$ հարյուրերորդից մեծ$\left.\right)$, (այս դեպքում ավելի ձեռնտու է վերցնել պակասորդով քանորդը)։

Շարունակենք բաժանումը.

```
39,47 | 8
 74   | 4,933
  27
   30
    6
```

Նույն օրինակի մեջ այժմ վերցնենք 4,933 մոտավոր քանորդը, որտեղ 6 մնացորդը բաժանարարի կեսից մեծ է։ Իսկական քանորդը կլինի 4,933 + $\frac{6}{8}$ հազարերորդը, ուրեմն, նա 4,933 թվից տարբերվում է $\frac{6}{8}$ հազարերորդով $\left(\frac{1}{2}\right.$հազարերորդից մեծ$\left.\right)$, իսկ 4,934-ից տարբերվում է $\frac{2}{8}$ հազարերորդով $\left(\frac{1}{2}\right.$ հազարերորդից փոքր$\left.\right)$ (այս դեպքում, ուրեմն, ավելի ձեռնտու է վերցնել ավելցուկով քանորդը)։

Երբ մնացորդը բաժանարարի կեսից փոքր է, ապա քանորդի այն թվանշանը, որը պետք է հաջորդի այն թվանշանին, որի վրա կանգ ենք առել, ակներև է, 5-ից փոքր կլինի, իսկ եթե մնացորդը բաժանարարի կեսից մեծ է, ապա այդ թվանշանը պետք է լինի 5 կամ 5-ից մեծ։

171. Բաժանում տասնորդական կոտորակի վրա։ Դիցուք, թե պետք է 3,753-ը բաժանել 0,85-ի վրա։ Այդ նպատակի համար բաժանելիի և բաժանարարի մեջ ստորակետը տեղափոխենք այնքան **միևնույն** թվով տասնորդական թվանշաններով (մեր օրինակում 2-ով), որ **բաժանարարը դառնա ամբողջ թիվ**։ Քանի որ այդ դեպքում բաժանելին և բաժանարարը կմեծանան միևնույն թիվ անգամ (մեր օրինակում 100 անգամ), ապա դրանից քանորդը չի փոխվի (§ 155)։ Այսպիսով, տասնորդական կո-

տորակի վրա բաժանումը կհանգեցնենք ամբողջ թվի վրա բաժանելուն.

$$375,3 : 85 \approx 4,415,$$

որը կատարվում է այնպես, ինչպես նշվեց առաջ։

Ճիշտ նույն ձևով են վարվում նաև ամբողջ թիվը տասնորդական կոտորակի վրա բաժանելիս, օրինակ.

$$7 : 0,325 = 7000 : 325 \approx 21,538.$$

ԿԱՆՈՆ։ Որևէ թիվ տասնորդական կոտորակի վրա բաժանելու համար պետք է վերացնել բաժանարարի ստորակետը և բաժանելին մեծացնելով այնքան անգամ, որքան անգամ մեծացել է բաժանարարը ստորակետը վերացնելու հետևանքով, բաժանել ամբողջ թվի վրա բաժանելու կանոնի համաձայն։

172. Տասնորդական կոտորակներով հաշվելու մի օրինակ։ Դիցուք, պահանջվում է հաշվել

$$\frac{7,5 \cdot 0,09 \cdot 3,725}{0,18 \cdot 2,7 \cdot 3,2675}$$

կոտորակը։

Այդ կոտորակի մեջ վերացնենք բոլոր ստորակետները և տեսնենք, թե դրանից ինչպես կփոխվի կոտորակի մեծությունը։ Նրա համարիչը կմեծանա 10.100.1000 անգամ, այսինքն՝ 1000000 անգամ։ Հայտարարը կմեծանա 100.10.10000 անգամ, այսինքն՝ 10000000 անգամ։ Որպեսզի չփոխվի կոտորակի մեծությունը, պետք է համարիչը մեծացնել ևս 10 անգամ, օրինակ, 0,09 կոտորակի ստորակետը վերացնելուց հետո ստացված 9-ի փոխարեն վերցնել 90։ Այժմ հաշվենք

$$\frac{75 \cdot 90 \cdot 3725}{18 \cdot 27 \cdot 32675}$$

արտահայտությունը, նախապես կրճատելով 75-ը և 18-ը 3-ով, 90-ը և 27-ը 9-ով ու 3725-ը և 32675-ը 25-ով, կստանանք.

$$\frac{25 \cdot 10 \cdot 149}{6 \cdot 3 \cdot 1307} = \frac{37250}{23526} \approx 1,58.$$

173. Տոկոսային հաշվումներ տասնորդական կոտորակներով։ Տոկոսային հաշվումների ժամանակ, ինչպես տեսնում ենք, հաճախ կարիք է լինում բազմապատկել և բաժանել 100-ով. և քանի որ այդ գործողությունները հատկապես հեշտ են կատարվում տասնորդական կոտորակներով, ապա ամեն տեսակի տոկոսային հաշվումների ժամանակ տասնորդական կոտորակներից օգտվելը դառնում է շատ հարմար։ Քննության առնենք մի քանի խնդիրներ։

1-ին խնդիր։ Ինչքա՞ն յեկամուտ կբերի խնայողական դրամարկղ դրված 728 ռուբլի գումարը 2 տարի 3 ամսվա ընթացքում։

Քանի որ դրամարկղը բերում է տարեկան 3% յեկամուտ, ապա տարեկան յեկամուտը կազմում է 728-ի 3%-ը, կամ 0,03 մասը, այսինքն՝

728.0,03=21,84(=21 ռ. 84 կ.)։

3 ամսվա յեկամուտը, այսինքն՝ 0,25 տարվա յեկամուտը, կազմում է տարեկան յեկամուտի 0,25 մասը, այսինքն՝

21,84.0,25=5,46(=5 ռ. 46 կ.)։

2 տարի 3 ամսվա յեկամուտը կկազմի

21,84.2+5,46=49,14(=49 ռ. 14 կ.)։

2-րդ խնդիր։ Անհայտ թվի 3,4%-ը կազմում է 1,6388։ Գտնել այդ թիվը։

Ըստ § 149-ում նշված կանոնի, մենք պետք է 1,6388-ը բաժանենք 3,4-ի վրա և արդյունքը բազմապատկենք 100-ով։ Կստանանք, որ

$$\frac{1,6388}{3,4} \cdot 100 = \frac{1638,8}{34} = 48,2.$$

3-րդ խնդիր։ Խնայողական դրամարկղում դրված է ավանդ. 9 ամսից հետո ավանդը հետ է վերցված, ընդ որում ավանդատուին տրված է 633 ռ. 95 կ.։ Գտնել սկզբնական ավանդի գումարը։

Ավանդատուի տարեկան յեկամուտը կազմում է անհայտ ավանդի 3%-ը կամ 0,03 մասը։ Ուրեմն, 9 ամսվա (այսինքն՝

$\frac{3}{4}$ կամ 0,75 տարվա) յեկամուտը կազմում է անհայտ ավանդի

$$0{,}03\cdot0{,}75=0{,}0225\ (=2{,}25^0/_0),$$

այսպիսով, ավանդատուի ստացած 633,95 ռուբլին կազմում է անհայտ ավանդի 1,0225 մասը (կամ 102,25$^0/_0$-ը)։ Այդ ավանդը գտնելու համար պետք է 633,95-ը բաժանենք 1,0225-ի վրա,

$$\frac{633{,}95}{1{,}0225}=620 \text{ (ռուբլի)}։$$

4-րդ խնդիր։ Խանութի շրջանառությունը ըստ պլանի կազմում է 75 300 ռուբլի, բայց իրականում նա կազմեց 85 842 ռուբլի։ Քանի՞ տոկոսով է կատարված պլանը։

Այս խնդիրը լուծելու համար մենք պետք է գտնենք 85 842 և 75 300 թվերի տոկոսային հարաբերությունը, այսինքն՝ $\frac{85842}{75300}$ հարաբերությունն արտահայտենք հարյուրերորդական մասերով. այդ նպատակով ամենապարզ միջոցն է՝ տված թվերի բաժանումից ստացվող քանորդն արտահայտել տասնորդական կոտորակներով, ինչպես այդ ցույց է տված § 171-ում։

$$\frac{85842}{75300}=1{,}14,$$

այսպիսով, պլանը կատարված է 114$^0/_0$-ով։

III. ՀԱՍԱՐԱԿ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԸ ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԴԱՐՁՆԵԼԸ

174. Նախնական դիտողություններ։ *Քանի որ տասնորդական կոտորակներով գործողությունները կատարվում են ավելի հեշտ, քան հասարակ կոտորակներով, ապա հաճախ օգտակար է լինում հասարակ կոտորակները դարձնել տասնորդական[1]։*

1) *Սակայն տասնորդական և հասարակ կոտորակների նկատմամբ միաժամանակ գործողություն կատարելիս՝ միշտ չէ որ նպատակահարմար է այդ կոտորակները բերել նույն տեսքի. օրինակ, յեթե պահանջվում է 0,567-ը բազմապատկել $\frac{3}{7}$-ով, ապա անհրաժեշտ չէ $\frac{3}{7}$-ը դարձնել տասնորդական կոտորակ, կարելի յե 0,567-ը բազմապատկել 3-ով և արդյունքը բաժանել 7-ի վրա։*

Նշենք այդպիսի ձևափոխման յերկու յեղանակ։

175. Առաջին յեղանակ. հայտարարը պարզ բազմապատկիչների վերածելով։ *Դիցուք, պահանջվում է $\frac{7}{40}$ կոտորակը դարձնել տասնորդական։ Դրա համար հարց ենք տալիս մեզ, թե արդյոք հնարավոր չէ՞ այդ կոտորակը բերել այնպիսի հայտարարի, որն արտահայտվի միավորով և զերոներով։ Յեթե այդ հնարավոր լիներ, ապա այն ժամանակ կստանայինք տասնորդական կոտորակ, գրված համարիչի և հայտարարի միջոցով, իսկ այդպիսի կոտորակ չեյինք դժվարանա գրել և առանց հայտարարի։ Անկրճատելի կոտորակը մի այլ հայտարարի բերելու համար պետք է նրա յերկու անդամները բազմապատկել միևնույն թվով (§ 132)։ Իմանալու համար, թե 40-ն ինչ թվով պետք է բազմապատկել, միավորով և զերոներով թիվ ստանալու համար, ուշադրություն անենք այն,* որ միավորով և զերոներով արտահայտվող ամեն մի թիվ վերածվում է միայն 2 և 5 բազմապատկիչների, ընդորում այդ բազմապատկիչները վերածման մեջ մտնում են միևնույն թիվ անգամ, այն է՝ այնքան անգամ, որքան զերո կա միավորին կից։

Օրինակ.

$$1000=10\cdot10\cdot10=2\cdot5\cdot2\cdot5\cdot2\cdot5;$$

$$10\,000=10\cdot10\cdot10\cdot10=2\cdot5\cdot2\cdot5\cdot2\cdot5\cdot2\cdot5 \text{ և այլն։}$$

Նկատելով այս, 40-ը վերածենք պարզ բազմապատկիչների.

$$40=2\cdot2\cdot2\cdot5։$$

Այս վերածումից տեսնում ենք, որ յեթե 40-ը յերկու անգամ բազմապատկենք 5-ով, ապա բազմապատկումից հետո կստացվի այնպիսի թիվ, որի մեջ 2-ը և 5-ը որպես բազմապատկիչներ կմտնեն միևնույն թիվ անգամ (3-ական անգամ). ուրեմն կստացվի միավորով և զերոներով թիվ (յերեք զերոյով)։ Վորպեսզի միաժամանակ կոտորակը իր արժեքը չփոխի, պետք է և նրա համարիչը բազմապատկել 2 անգամ 5-ով. այն ժամանակ

$$\frac{7}{40}=\frac{7\cdot5\cdot5}{40\cdot5\cdot5}=\frac{175}{1000}=0{,}175։$$

Օրինակներ՝

1) $\frac{7}{8}=\frac{7}{2.2.2}=\frac{7.5.5.5}{2.2.2.5.5.5}=\frac{875}{1000}=0,875;$

2) $\frac{4}{125}=\frac{4}{5.5.5}=\frac{4.2.2.2}{5.5.5.2.2.2}=\frac{32}{1000}=0,032;$

3) $\frac{11}{20}=\frac{11}{2.2.5}=\frac{11.5}{2.2.5.5}=\frac{55}{100}=0,55:$

176. Վոր հասարակ կոտորակները դառնում են տասնորդական յեվ վորոնք չեն դառնում: *Հասարակ կոտորակը տասնորդական դարձնելու նշած յեղանակից կարելի յե դուրս բերել հետևյալ յերկու հետևանքները.*

1) Յերբ հասարակ կոտորակի հայտարարը, բացի 2-ից յեվ 5-ից, ուրիշ պարզ բազմապատկիչներ չի պարունակում, ապա այդպիսի կոտորակը դառնում է տասնորդական, ընդվորում այդ տասնորդական կոտորակն ունի այնքան տասնորդական նշաններ, վորքան անգամ հասարակ կոտորակի հայտարարի մեջ, կրճատումից հետո, 2 յեվ 5 բազմապատկիչներից մեկն ու մեկն ավելի մեծ թիվ անգամ է կրկնվում:

Ասենք, օրինակ, հասարակ կոտորակի հայտարարի մեջ, կրճատումից հետո, ավելի շատ կրկնվում է 2 բազմապատկիչը և ասենք, այդ բազմապատկիչը մտնում է 4 անգամ: Այն ժամանակ կարիք է լինում 5 բազմապատկիչն ավելացնել այնքան անգամ, վոր դրանից հետո 2 արտադրիչները (2 և 5) հայտարարի մեջ մտնեն 4-ական անգամ. ուրեմն, բազմապատկումից հետո հայտարարում կստացվի 1 չորս զերոներով, այդ պատճառով էլ տասնորդական կոտորակը կունենա 4 տասնորդական նշան: Օրինակ.

$$\frac{7}{80}=\frac{7}{2.2.2.2.5}=\frac{7.5.5.5}{80.5.5.5}=\frac{875}{10000}=0,0875:$$

2) Յերբ հասարակ կոտորակի հայտարարը իր մեջ պարունակում է 2-ից յեվ 5-ից տարբեր վորեվե պարզ բազմապատկիչներ, վորոնք համարիչի հետ չեն կրճատվում, ապա այդպիսի կոտորակը տասնորդական չի դառնում:

Վերցնենք, օրինակ, $\frac{35}{84}$ կոտորակը, վորի հայտարարը պարունակում է 3 և 7 պարզ բազմապատկիչները (այն է՝ 84=2.2.3.7), նրանցից մեկը (7) կրճատվում է, կրճատումից հետո ստանում ենք $\frac{5}{12}$: Քանի վոր 12-ը պարունակում է 3 արտադրիչը, ապա այդ կոտորակը տասնորդական չի դառնում, վորովհետև ինչպիսի ամբողջ թվերով էլ վոր բազմապատկենք նրա հայտարարը, յերբեք չենք ստանա միավորով և զերոներով պատկերացվող թիվ:

Այդպիսի կոտորակները կարելի յե դարձնել միայն **մոտավոր տասնորդականներ,** *կիրառելով ձևափոխման յերկրորդ յեղանակը:*

177. Յերկրորդ յեղանակ. համարիչը հայտարարի վրա բաժանելով: *Այս յեղանակն ավելի գործածական է, քան առաջինը, քանի վոր նա կիրառելի յե նաև այնպիսի հասարակ կոտորակների նկատմամբ, վորոնք դառնում են միայն մոտավոր տասնորդական կոտորակներ:*

Դիցուք, պետք է $\frac{23}{8}$ կոտորակը դարձնել տասնորդական: $\frac{23}{8}$ թիվը կարելի յե դիտել վորպես 23-ը 8-ի վրա բաժանելուց ստացված քանորդ (§ 151, 1-ին կանոն): Բայց, ինչպես տեսանք, յերկու ամբողջ թվերի քանորդը կարելի յե գտնել տասնորդական կոտորակի տեսքով՝ ճիշտ կամ մոտավոր: Դրա համար պետք է բաժանումից ստացվող մնացորդները միայն դարձնել ավելի և ավելի փոքր տասնորդական մասեր, այնքան ժամանակ, մինչև մնացորդում ստացվի զերո, կամ քանորդում ստացվեն այն կարգի տասնորդական մասերը, վորից այն կողմ չենք ցանկանում շարունակել:

```
23 | 8
70 |2,875
 60
  40
   0
```

Մեր օրինակում ստացվեց ճիշտ քանորդը՝ $\frac{23}{8}=2,875:$

Դիցուք, պետք է $\frac{3}{14}$-ը դարձնել տասնորդական կոտորակ։

Քանի որ այդ կոտորակն անկրճատելի է և հայտարարը պարունակում է, 2-ից և 5-ից տարբեր, 7 պարզ բազմապատկիչը, ապա այն չի կարելի դարձնել տասնորդական կոտորակ. սակայն կարելի է գտնել այնպիսի տասնորդական կոտորակ, որը մոտավորապես հավասարվում է $\frac{3}{14}$-ի և այն էլ ուզած ճշտությամբ։

Եթե, օրինակ, ցանկանում ենք գտնել այնպիսի տասնորդական կոտորակ, որը $\frac{3}{14}$-ից տարբերվի ավելի քիչ, քան 0,001, ապա 3-ը 14-ի վրա բաժանելուց բավական է գտնել միայն 3 տասնորդական նշաններ.

$$\begin{array}{r|l} 3 & 14 \\ \hline 30 & 0{,}214 \\ \underline{\ \ 20} & \\ \underline{\ \ \ 60} & \\ 4 & \end{array}$$

0,214 մոտավոր քանորդը ճիշտ քանորդից, այսինքն $\frac{3}{14}$-ից, տարբերվում է հազարերորդի կեսից պակաս։ Եթե բաժանումը էլի շարունակենք, ապա սխալը կդառնա ավելի ու ավելի քիչ։ Բայց բաժանումը երբեք չի կարող վերջանալ, որովհետև հակառակ դեպքում կստանայինք այնպիսի տասնորդական կոտորակ, որը ճիշտ և ճիշտ հավասար է $\frac{3}{14}$-ի, իսկ այդ հնարավոր չէ. այսպիսով, շարունակելով բաժանումը, քանորդում կարող ենք ստանալ ուզած չափով տասնորդական նշաններ։

178. Վերջավոր և անվերջ տասնորդական կոտորակներ։ Թվի կլորացումը։ Եթե հասարակ կոտորակը, օրինակ՝ $\frac{3}{14}$-ը, չի կարելի ներկայացնել տասնորդական կոտորակի ձևով, ապա այնուամենայնիվ, ինչպես ցույց է տված § 177-ում, 3-ը 14-ի վրա բաժանելով, կարող ենք քանորդում միշտ նորանոր թվանշաններ գրել, այսպիսով միշտ նորանոր տասնորդական կոտորակներ ստանալով. այդ տասնորդական կոտորակները տալիս են $\frac{3}{14}$-ին ավելի ու ավելի մոտ թվեր. ուստի, այս դեպքում պայմանավորվել են ասել, որ $\frac{3}{14}$ թիվը վերածվում է անվերջ տասնորդական կոտորակի.

$$\frac{3}{14}=0,214...;$$

այստեղ երեք կետերը նշանակում են, որ քանորդի թվանշանների շարքը գրված թվանշաններով (2, 1, 4) չի սպառվում, այլ կարող է անվերջ շարունակվել. ուստի, նույն իրավունքով էլ մենք կարող էինք գրել.

$$\frac{3}{14}=0,2...,\ \frac{3}{14}=0,21...,\ \frac{3}{14}=0,2142...,$$ և այլն։

Այսպիսի անվերջ տասնորդական կոտորակներից տարբերելու համար այն կոտորակները, որոնցով մինչև այժմ զբաղվեցինք, անվանում են վերջավոր տասնորդական կոտորակներ։

Անվերջ տասնորդական կոտորակները (նաև մեծ թվով տասնորդական նշաններ ունեցող վերջավոր կոտորակները) գործնական կարիքների համար հարկավոր է լինում կլորացնել, ճիշտ կոտորակի փոխարեն վերցնելով ցանկացած ճշտությամբ մոտավոր կոտորակը պակասորդով կամ ավելցուկով (§ 169)։ Այսպես, եթե ցանկանում ենք սահմանափակվել մինչև մեկ հարյուրերորդական ճշտությամբ, ապա

$$3,141592653...$$

կոտորակի փոխարեն վերցնում ենք մոտեցումը՝ 3,14 (պակասորդով), իսկ եթե ըստ հարցի պայմանների ցանկալի է մինչև մեկ հազարերորդական ճշտությունը, ապա վերցնում ենք 3,142 (ավելցուկով)։

179. Պարբերական կոտորակներ։ Այն անվերջ տասնորդական կոտորակը, որի մեկ կամ մի քանի թվանշանները ան-

փոփոխ կրկնվում են միևնույն հաջորդականությամբ, կոչվում է պարբերական տասնորդական կոտորակ, իսկ կրկնվող թվանշանների համախումբը կոչվում է այդ կոտորակի պարբերություն։

Պարբերական կոտորակները լինում են պարզ և խառը։ Պարզ պարբերական կոտորակ կոչվում է այն, որի պարբերությունն սկսվում է ստորակետից անմիջապես հետո, օրինակ, 2,363636..., խառը կոչվում է այն, որի ստորակետի և առաջին պարբերության միջև կան մեկ կամ մի քանի չկրկնվող թվանշաններ, օրինակ, 0,5232323... պարբերական կոտորակները կրճատ գրում են այսպես.

2,3636...-ի փոխարեն գրում են 2,(36)
0,52323-ի » » 0,5(23),

այսինքն, պարբերությունն առնում են փակագծի մեջ։

180. Անվերջ տասնորդական կոտորակը, որն ստացվում է հասարակ կոտորակը տասնորդական դարձնելիս, պետք է լինի պարբերական։ Այդ հատկությանը համոզվենք մի որևէ օրինակով։ Դիցուք, ցանկանում ենք $\frac{19}{7}$ կոտորակը դարձնել տասնորդական։ Քանի որ 7 հայտարարը կազմված չէ 2 և 5 բազմապատկիչներից և տված կոտորակը չկրճատվող է, ապա նա չի կարող վերջավոր տասնորդական կոտորակ դառնալ։ Հետևապես, նա դառնում է անվերջ տասնորդական կոտորակ։ Նրա առաջին մի քանի տասնորդական նշաններն ստանալու համար սկսենք 19-ը բաժանել 7-ի վրա։ Քանի որ բաժանումը չի կարող վերջանալ.

```
19 | 7
50   2,71428571
 10
  80
   20
    60
     40
      50
       10
        3
```


ապա մնացորդները պետք է անվերջ շատ լինեն։ Բայց մնացորդները բաժանարարից միշտ փոքր են, ուստի, հետևյալ վեց մնացորդներից՝ 1, 2, 3, 4, 5, 6—ավելի տարբեր մնացորդներ լինել չեն կարող։ Այստեղից հետևում է, որ բաժանումը բավականաչափ շարունակելուց հետո մնացորդներն անպայման կսկսեն կրկնվել։ Իսկապես, յոթերորդ մնացորդը ստացվում է նույնը, ինչ և առաջինը։ Բայց յեթե մնացորդը կրկնվեց, ապա նրան կցագրելով զերո, կստանանք նույնպիսի բաժանելի, որն առաջ կար (50), ուրեմն, քանորդում կսկսեն ստացվել այն թվանշանները, ինչ առաջ կային, այսինքն՝ քանորդում կստացվի պարբերական կոտորակ։ Մեր օրինակի մեջ պարբերությունը սկըսվեց ստորակետից հետո առաջին թվանշանից, ուստի և ստացվեց պարզ պարբերական կոտորակ։ Ուրիշ օրինակներում կարող է պատահել, որ պարբերությունը սկսվի ոչ թե առաջին թվանշանից, այլ օրինակ, յերրորդից կամ որևէ ուրիշ թվանշանից հետո. այդ դեպքում կստացվի խառը պարբերական կոտորակ։

IV. ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԸ ՀԱՍԱՐԱԿ ԴԱՐՁՆԵԼԸ

181. Նախնական դիտողություն։ § 180-ում տեսանք, որ հասարակ կոտորակը տասնորդական դարձնելիս միշտ ստացվում է կամ վերջավոր, կամ պարբերական տասնորդական կոտորակ։ Դիցուք այժմ, ընդհակառակը, տված է պարբերական տասնորդական կոտորակ և ցանկանում ենք գտնել այն հասարակ կոտորակը, որի վերածումից ստացվում է տված պարբերական կոտորակը։ Դրա համար նախ տեսնենք, թե ինչպիսի պարբերական կոտորակներ են ստացվում այն հասարակ կոտորակների ձևափոխումից, որոնց համարիչը միավոր է, իսկ հայտարարը՝ 9 թվանշանը, գրված մեկ կամ մի քանի անգամ շարքով, օրինակ $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$ և այլն։

$$\frac{1}{9} \qquad\qquad \frac{1}{99} \qquad\qquad \frac{1}{999}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 9 \\ \hline 10 & 0,111\ldots \\ \underline{10} & \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1 & 99 \\ \hline 100 & 0,0101\ldots \\ \underline{} & \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1 & 999 \\ \hline 1000 & 0,001001\ldots \\ \underline{} & \\ 1 & \end{array}$$

$$\frac{1}{9}=0,(1) \qquad \frac{1}{99}=0,(01) \qquad \frac{1}{999}=0,(001)։$$

Այս բաժանումների քննարկումից հեշտ է յեզրակացնել, վոր այդպիսի պարբերական կոտորակների պարբերությունը կազմված է կամ միավորից, կամ միավորից և նրան նախորդող զերոներից, ընդվորում պարբերության մեջ կա այնքան թվանշան, վորքան անգամ կոտորակի հայտարարում կրկնվում է 9 թվանշանը։

182. Պարզ պարբերական կոտորակը հասարակ կոտորակ դարձնելը։ Դիցուք, ցանկանում ենք գտնել այն հասարակ կոտորակը, վորից ստացվում է 0,2323... պարզ պարբերական կոտորակը։ Դրա համար այս պարբերական կոտորակը կբաղդատենք մի այլ, ավելի պարզ, կոտորակի հետ, վորի պարբերությունն ունի նույնքան թվանշաններ, բայց կազմված է միավորից և նրան նախորդող զերոներից.

0,232323...
0,010101...

Առաջին կոտորակը պարունակում է 23 հարյուրերորդական 23 տասհազարերորդական 23 միլիոներորդական և այլն, իսկ յերկրորդ կոտորակը պարունակում է 1 հարյուրերորդական 1 տասհազարերորդական 1 միլիոներորդական և այլն։ Ուրեմն, առաջին կոտորակի մեջ բոլոր այդ կարգի տասնորդական մասեր պարունակվում են 23 անգամ ավելի շատ, քան յերկրորդում։ Այդ պատճառով, յեթե կա այնպիսի հասարակ կոտորակ, վորի ձևափոխությունից ստացվում է 0,(23) պարբերականը, ապա նա պետք է 23 անգամ ավելի մեծ լինի այն հասարակ կոտորակից,

վորից ստացվում է 0,(01) պարբերական կոտորակը[1]), բայց, ինչպես տեսանք, 0,(01) կոտորակը ստացվում է $\frac{1}{99}$-ից, հետևապես, 0,(23) կոտորակը պետք է ստացվի $\frac{23}{99}$-ից։ Յեվ իրոք.

$$\begin{array}{r|l} 23 & 99 \\ \hline 230 & 0,23\ldots \\ \underline{198} & \\ 320 & \\ \underline{297} & \\ 23 & \end{array}$$

$$\frac{23}{99}=0,232323\ldots=0,(23)$$

ԿԱՆՈՆ։ Պարզ պարբերական կոտորակը հասարակ դարձնելու համար բավական է նրա պարբերությունը դարձնել համարիչ, իսկ հայտարարում 9 թվանշանը գրել այնքան անգամ, վորքան թվանշան կա պարբերության մեջ։

Որինակներ.

$$1)\ 0,(7)=\frac{7}{9};\quad 2)\ 2,(05)=2\frac{5}{99};$$

$$3)\ 0,(063)=\frac{63}{999}=\frac{7}{111}։$$

183. Խառը պարբերական կոտորակը հասարակ կոտորակ դարձնելը։ Ասենք, պետք է գտնել այն հասարակ կոտորակը, վորից ստացվում է 0,3(52) խառը պարբերական կոտորակը։ Դրա համար վերջինիս ստորակետը մի թվանշանով տեղափոխենք դեպի աջ. կստանանք 3,(52) պարզ պարբերական կոտորակը, վորն ստացվում է $3\frac{52}{99}$ հասարակ կոտորակից։ Բայց ստորակետը մի թվանշան դեպի աջ տեղափոխելով, կոտորակը մեծացա

1) Այս հաստատման ավելի լուրջ հիմնավորումը տես § 190-ում։

րինք 10 անգամ, հետևապես, $3\frac{52}{99}$ կոտորակը պետք է 10 անգամ ավելի մեծ լինի այն կոտորակից, որից ստացվել է 0,3(52) կոտորակը։ Այդ պատճառով, որոնելի կոտորակը գտնելու համար բավական $3\frac{52}{99}$-ը բաժանել 10-ի վրա։ Այսպիսով․

$$0{,}35252\ldots=3{,}(52):10=3\frac{52}{99}:10=\frac{349}{99}:10=\frac{349}{990},$$

Եվ իսկապես․

```
 349 | 990
3490 | 0,352
2970
 5200
 4950
  2500
  1980
   520
```

$$\frac{349}{990}=0{,}3525252\ldots=5{,}3(52)$$

Կարելի է արտածել խառը պարբերական կոտորակը հասարակ դարձնելու շատ հարմար կանոն․ դրա համար ուշադրություն դարձնենք այն բանի վրա, թե ինչպես կարելի է կատարել $3\frac{52}{99}$ խառը թվի բաժանումը 10-ի վրա։ Նախ խառը թիվը դարձնենք անկանոն կոտորակ։ Դրա համար պետք է 3-ը բազմապատկել 99-ով և հետո գումարել 52-ը։ Բայց փոխանակ 3-ը 99-ով բազմապատկելու, կարող ենք 3-ը բազմապատկել 100-ով և արդյունքը փոքրացնել 3-ով։ Այսպիսով,

$$3\frac{52}{99}=\frac{3\cdot 99+52}{99}=\frac{3\cdot 100-3+52}{99};$$

Փոխանակ 3-ը հանելու և ապա 52-ը գումարելու, կարելի է նախ գումարել 52-ը, իսկ հետո հանել 3։ Հետևապես․

$$3\frac{52}{99}=\frac{3\cdot 100+52-3}{99}=\frac{352-3}{99};$$

Մնում է այս կոտորակը փոքրացնել 10 անգամ, այսինքն՝ հայտարարին կցագրել զերո․ այդ դեպքում կստանանք այն հասարակ կոտորակը, որից ստացվում է 0,3(52) պարբերականը։ Այսպիսով,

$$0{,}35252\ldots=\frac{352-3}{990}=\frac{349}{990};$$

Նախորդի նման դատելով, կգտնենք, որ

$$0{,}26444\ldots=\frac{264-26}{900}=\frac{238}{900}=\frac{119}{450};$$

$$5{,}7888\ldots=\frac{578-57}{90}=\frac{521}{90}=5\frac{71}{90},$$

կամ

$$5{,}7888\ldots=5\frac{78-7}{90}=5\frac{71}{90};$$

ԿԱՆՈՆ։ Խառը պարբերական կոտորակը հասարակ կոտորակ դարձնելու համար բավական ե մինչեվ յերկրորդ պարբերությունը գտնվող թվից հանել մինչեվ առաջին պարբերությունը գտնվող թիվը, ստացած պարբերությունը վերցնել վորպես համարիչ, իսկ հայտարար գրել 9 թվանշանն այնքան անգամ, վորքան թվանշան կա պարբերության մեջ, այնքան զերոներով, վորքան թվանշան կա ստորակետի յեվ առաջին պարբերության միջեվ։

184. Վո՞ր հասարակ կոտորակները դառնում են պարզ պարբերական կոտորակներ յեվ վորոնք խառը պարբերական։ Մենք արդեն գիտենք, որ յուրաքանչյուր հասարակ կոտորակ տասնորդական դարձնելիս ստացվում է կամ վերջավոր, կամ պարբերական տասնորդական կոտորակ։ Մենք գիտենք նույնպես, թե որ դեպքերում է ստացվում վերջավոր և որ դեպքերում—պարբերական տասնորդական կոտորակ։ Այժմ պարզենք, թե ստացվող պարբերական կոտորակը որ դեպքերում կլինի պարզ և որ դեպքերում—խառը։ Այն կանոնները, որ կնշենք, կհիմնավորվեն մոտակա պարագրաֆներում, իսկ այստեղ բերում ենք միայն մի քանի նախնական կշռադատումներ, որոնք խոսում են ի նպաստ այդ կանոնների։

1. Այն հասարակ կոտորակը, վորի հայտարարը, կրճատումից հետո, 2 յեվ 5 բազմապատկիչներ չի պարունակում, դառնում է պարզ պարբերական կոտորակ։

Օրինակ․

$$\frac{3}{7}=0,(428571);\quad \frac{2}{3}=0,(6);\quad \frac{5}{11}=0,(45)։$$

Իրոք, առաջին, վոր այդպիսի կոտորակը պետք է դառնա վորևէ պարբերական կոտորակ (§ 180)․ յերկրորդ, վոր այդ պարբերական կոտորակը չի կարող լինել խառը, վորովհետև, ինչպես տեսանք, խառը պարբերական կոտորակը դառնում է այնպիսի հասարակ կոտորակ, վորի հայտարարը պարունակում է 2 և 5 բազմապատկիչները։ Հետևապես, տված կոտորակը պետք է դառնա պարզ պարբերական կոտորակ։

2) Այն հասարակ կոտորակը, վորի հայտարարը, կրճատումից հետո, ուրիշ բազմապատկիչների հետ պարունակում է 2 կամ 5 բազմապատկիչները կամ յերկուսը միասին, դառնում է խառը պարբերական կոտորակ։

Օրինակ՝

$$\frac{35}{42}=\frac{5}{6}=0,8(3);\quad \frac{8}{15}=0,5(3);$$

$$\frac{119}{450}=0,26(4)$$ *և այլն*։

Իրոք, առաջին, վոր այդպիսի կոտորակը պետք է դառնա վորևէ պարբերական կոտորակ, և յերկրորդ, վոր այդ պարբերական կոտորակը չի կարող լինել պարզ, վորովհետև, ինչպես տեսանք, պարզ պարբերական կոտորակն առաջանում է այնպիսի հասարակ կոտորակից, վորի հայտարարը չի պարունակում 2 և 5 բազմապատկիչներ։ Հետևապես, տված կոտորակը պետք է դառնա խառը պարբերական կոտորակ։

ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՆԱՎՈՐՈՒՄԸ

185. Դիտողություն։ *Պարբերական կոտորակների հասարակ դառնալու նախորդ մեկնաբանությունը լրիվ չափով կուռ չէ։ Այդ մեկնաբանության մեջ, ի միջի այլոց, յենթադրվում է (§ 182), վոր յեթե յուրաքանչյուր գումարելին մեծանա մի քանի անգամ, ապա գումարն էլ կմեծանա նույնքան անգամ։ Այս նախադասությունը, վորը բոլորովին հիմնավորված է վերջավոր թվով*

գումարելիների գումարի համար, չի կարելի առանց հատուկ ապացույցի կիրառել անվերջ թվով գումարելիների գումարների նկատմամբ (ինչպիսին են բոլոր պարբերական անվերջ կոտորակները)։

Պարբերական կոտորակների կուռ տեսությունը հիմնված է սահմանի հասկացողության վրա։

Համառոտակի շարադրենք այդ տեսությունը։

186. Թվերի հաջորդականության սահմանը։ *Դիցուք, տված է* a_1, a_2, a_3..., a_n... *թվերի անվերջ հաջորդականություն։ Պայմանավորվենք* a *թիվն անվանել այս հաջորդականության սահման, յեթե* a_n-a *տարբերությունն իր բացարձակ մեծությամբ n-ի բոլոր բավականաչափ մեծ արժեքների համար դառնում է ցանկացած չափով փոքր։ Այսպես,*

$$1+1,\ 1+\frac{1}{2},\quad 1+\frac{1}{3},\dots,\quad 1+\frac{1}{n},\dots,$$

թվերի հաջորդականության սահմանը 1 է, վորովհետև

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)-1=\frac{1}{n}$$

տարբերությունը դառնում է ցանկացած չափով փոքր՝ բոլոր բավականաչափ մեծ n-երի համար։

187. *Յեթե անվերջ տասնորդական կոտորակի մեջ վերցնենք առաջին մի քանի տասնորդական նշանները, իսկ մնացածը դուրս թողնենք, ապա կստացվի վերջավոր տասնորդական կոտորակ, վորը կանվանենք տված անվերջ տասնորդական կոտորակի հատվածը։*

Այսպես՝

0,8; 0,83; 0,833; 0,8333; *և այլն*

կոտորակները հանդիսանում են 0,8(3) անվերջ պարբերական կոտորակի հատվածները։ Ընդհանրապես, յուրաքանչյուր անվերջ տասնորդական կոտորակ ունի հատվածների անվերջ հաջորդականություն, ըստ վորում այդ հատվածներից յուրաքանչյուրը վերջավոր տասնորդական կոտորակ է։

1-ին ԹԵՈՐԵՄ։ Անվերջ տասնորդական կոտորակ դարձող հասարակ կոտորակը այդ անվերջ տասնորդական կոտորակի հատվածների հաջորդականության սահմանն է։

Ապացույց։ *Իսկապես, մենք գիտենք, վոր ստացվող անվերջ տասնորդական կոտորակի առաջին՝ (այսինքն՝ առաջին տասնորդական նշանով վերջացող) հատվածը տված հասարակ կոտորակից տարբերվում է ավելի քիչ, քան* $\frac{1}{10}$, *յերկրորդ հատվածն ավելի քիչ, քան* $\frac{1}{100}$, *յերրորդն ավելի քիչ, քան* $\frac{1}{1000}$ *և այլն։ Այդ պատճառով բավականաչափ մեծ թվով տասնորդական նշաններ ունեցող յուրաքանչյուր հատված տված հասարակ կոտորակից կտարբերվի ցանկացած չափով փոքր թվով։ Սակայն, սահմանի վորոշման համաձայն, այդ էլ հենց նշանակում է, վոր տված հասարակ կոտորակը սահմանն է այն անվերջ տասնորդական կոտորակի հատվածների հաջորդականության, վորին նա վերածվում է։*

188. 2-րդ ԹԵՈՐԵՄ. Յեթե յերկու հասարակ կոտորակներ իրար հավասար են, ապա նրանք դառնում են միևնույն տասնորդական կոտորակ (*վերջավոր կամ անվերջ*)։

Ապացույց. *Դիցուք $\frac{a}{b}$ և $\frac{a_1}{b_1}$ կոտորակները հավասար են։ Յենթադրենք, վոր այդ կոտորակները տասնորդական դարձնելիս (համարիչը բաժանելով հայտարարի վրա) կանգ ենք առել հազարերորդական մասերի վրա. Այն ժամանակ կիմանանք $\frac{a}{b}$ և $\frac{a_1}{b_1}$ կոտորակներից յուրաքանչյուրի մեջ պարունակվող հազարերորդական մասերի ամենամեծ թիվը (քանի վոր յեթե քանորդը մեծացնեյինք թեկուզ 1 հազարերորդականով, կստանայինք ավելի մեծ թիվ, քան պետք է ստացվեր ճիշտ բաժանման դեպքում)։ Սակայն ըստ պայմանի $\frac{a}{b}$ և $\frac{a_1}{b_1}$ կոտորակները հավասար են, հետևապես, նրանցից յուրաքանչյուրի մեջ պարունակվող հազարերորդական մասերի ամենամեծ թիվը պետք է լինի միևնույնը։ Այսպիսով, $\frac{a}{b}$ և $\frac{a_1}{b_1}$ կոտորակների վերածումներից ստացվող յերկու տասնորդական կոտորակների սկզբի յերեք տասնորդական նշանները պետք է լինեն միևնույնը։ Նույնպիսի դատողությամբ էլ կհամոզվենք, վոր կամավոր թվով տասնորդական նշանները պետք է լինեն միևնույնը, այլ խոսքով, յերկու կոտորակները պետք է ճշտությամբ համընկնեն։*

189. 3-րդ ԹԵՈՐԵՄ: (*Նախորդի հակադարձը*)։ Յեթե յերկու հասարակ կոտորակներ դառնում են միևնույն տասնորդական կոտորակը (*վերջավոր կամ անվերջ*), ապա այդ կոտորակները հավասար են։

Ապացույց: *Դիցուք $\frac{a}{b}$ և $\frac{a_1}{b_1}$ կոտորակները դառնում են N միևնույն տասնորդական կոտորակը։ Յեթե այդ կոտորակը վերջավոր է, ապա կունենանք*

$$\frac{a}{b}=N \text{ և } \frac{a_1}{b_1}=N$$

հավասարությունները. հետևապես,

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}.$$

Իսկ յեթե N կոտորակն անվերջ է, ապա $\frac{a}{b}$ և $\frac{a_1}{b_1}$ կոտորակներից յուրաքանչյուրը հավասար է N կոտորակի հատվածների հաջորդականության սահմանին, հետևապես,

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}.$$

190. 4-րդ ԹԵՈՐԵՄ: Պարզ պարբերական կոտորակի հատվածների հաջորդականության սահմանը հավասար է այն հասարակ կոտորակին, վորի համարիչը մինչ յերկրորդ յեվ մինչ առաջին պարբերությունը գտնվող թվերի տարբերությունն

է, իսկ հայտարարը—թվանշան 9-ը՝ գրված շարքով այնքան անգամ, վորքան թվանշան կա պարբերության մեջ:

Ապացույց: *Վերցնենք, որինակ, 7,2323... պարզ պարբերական կոտորակը։ Xn-ով նշանակենք այս կոտորակի այն հատվածը, վորը պարունակում է n պարբերություններ, այսինքն՝ ընդունենք*

$$7{,}\overbrace{23\,23\ldots23}^{n}=7+\frac{23}{100}+\frac{23}{100^2}+\ldots+\frac{23}{100^n}=X_n.$$

Այս հավասարության յերկու մասը բազմապատկենք 100-ով, կստանանք

$$723{,}\overbrace{2323\ldots23}^{n-1}=723+\frac{23}{100}+\frac{23}{100^2}+\ldots+\frac{23}{100^{n-1}}=100X_n.$$

Այս հավասարությունից հանելով նախորդը, կգտնենք, վոր

$$723-7-\frac{23}{100^n}=99X_n;$$

վորտեղից

$$\frac{723-7}{99}-\frac{23}{100^n\cdot 99}=X_n,$$

կամ

$$\frac{723-7}{99}-X_n=\frac{23}{100^n\cdot 99}.$$

Վերջին հավասարությունից յերևում է, վոր պարբերությունների n թվի մեծացման հետ (723—7):99 հաստատուն թվի և Xn-ի տարբերությունը դառնում է ու մնում ավելի փոքր, քան տրված վորևէ թիվ (վորքան էլ վոր նա փոքր լինի), իսկ այդ նշանակում է, վոր

$$\text{սահման } X_n=\frac{723-7}{99}=7\frac{23}{99}.$$

Այդ սահմանի ստացման յեղանակից յերևում է, վոր 723-ը, դա մինչ յերկրորդ պարբերությունը գտնվող թիվն է, իսկ 7-ը, մինչ առաջին պարբերությունը գտնվող թիվը. ուրեմն, համարիչը բավարարում է թեորեմին. հայտարարը նույնպես բավարարում է թեորեմին, քանի վոր 9 թվանշանը կրկնվում է այնքան անգամ, վորքան թվանշան կա պարբերության մեջ։

Նկատենք, վոր պարբերական կոտորակի ամբողջ թիվը կարող եյինք նրանից անջատել, այսինքն՝ գրել այսպես.

$$\text{սահմ. } 7{,}(23)=7+\text{սահման } 0{,}(23)=7+\frac{23}{99}=7\frac{23}{99}.$$

191. 5-րդ ԹԵՈՐԵՄ: Խառը պարբերական կոտորակի հատվածների հաջորդականության սահմանը հավասար է այն հասարակ կոտորակին, վորի համարիչը մինչ յերկրորդ յեվ մինչ առաջին պարբերությունը գտնվող թվերի տարբերությունն է, իսկ հայտարարը—9 թվանշանը, շարքով գրված այնքան անգամ, վորքան թվանշան կա պարբերության մեջ, վերջում այնքան զերոներով, վորքան թվանշան կա ստորակետի յեվ առաջին պարբերության միջեվ:

Ապացույց: Վերցնենք մի խառը պարբերական կոտորակ, որինակ, այս 8,52(375). և ընդունենք, դարձյալ

$$8,52\overbrace{375\,375\ldots375}^{n}=8+\frac{52}{100}+\frac{375}{100\cdot1000}+\frac{375}{100\cdot1000^2}+\ldots+\frac{375}{100\cdot1000^n}=X_n.$$

Այս հավասարության յերկու մասը բազմապատկենք 100-ով, իսկ այնուհետև յերկրորդ անգամ 100·1000-ով, կստանանք.

$$852+\frac{375}{1000}+\ldots+\frac{375}{1000^n}=100X_n;$$

$$852\,375+\frac{375}{1000}+\ldots+\frac{375}{1000^{n-1}}=100\,000X_n:$$

Վերջին հավասարությունից հանելով նախորդը, կգտնենք.

$$852375-852-\frac{375}{1000^n}=99900\,X_n,$$

վորտեղից

$$\frac{852375-852}{99900}-\frac{375}{1000^n\cdot99900}=X_n,$$

կամ

$$\frac{852375-852}{99900}-X_n=\frac{375}{1000^n\cdot99900}$$

Վերջին հավասարությունից յերևում է, վոր n-ի անվերջ մեծացման հետ

$$\text{սահման } X_n=\frac{852375-852}{99900}=8\frac{52323}{99900}$$

Պարբերական կոտորակի ամբողջ թիվը այստեղ էլ կարող էինք անջատել նրանից, այսինքն, այսպես գրել.

$$\text{սահման } X_n=8+\text{սահման } 0,52(375)=8+\frac{52375-52}{99900},$$

Օրինակներ.

1) $2,(05)=\frac{205-2}{99}=\frac{203}{99}=2\frac{5}{99}$

2) $0,(063)=\frac{63}{999}=\frac{7}{111}$,

3) $0,26(4)=\frac{264-26}{900}=\frac{238}{900}=\frac{119}{450}$,

4) $5,7(8)=\frac{578-57}{90}=\frac{521}{90}=5\frac{71}{90}$, կամ $5,7(8)=5\frac{78-7}{90}=5\frac{71}{90}$.

192. Դիտողություն. 4 և 5 թեորեմները ցույց են տալիս, վոր յուրաքանչյուր պարբերական տասնորդական կոտորակի հատվածների հաջորդականությունը սահման ունի վորևէ հասարակ կոտորակ: Այստեղից, 1-ին թեորեմի հիման վրա, հետևում է, վոր յեթե ընդհանրապես կա այդպիսի հասարակ կոտորակ, վորը վերածվում է տվյալ պարբերական կոտորակին, ապա այդ հասարակ կոտորակը հավասար է տված պարբերական կոտորակի սահմանին:

Սակայն նախորդ թեորեմներից դեռևս չի հետևում, վոր ամեն մի պարբերական կոտորակի համար կարելի յե գտնել այնպիսի հասարակ կոտորակ, վորը վերածվում է այդ պարբերական կոտորակին: Յեվ իսկապես, այդ ճիշտ է վոչ ամեն մի պարբերական կոտորակի համար, ինչպես իսկույն կտեսնենք:

193. 6-րդ ԹԵՈՐԵՄ: Յեթե տված պարբերական կոտորակի պարբերությունը կազմված է միայն 9 թվանշանից, ապա չկա այնպիսի հասարակ կոտորակ, վորը վերածվեր տված պարբերական կոտորակին: Մյուս բոլոր դեպքերում այն հասարակ կոտորակը, վորը հանդիսանում է պարբերական կոտորակի հատվածների տված հաջորդականության սահմանը, վերածվում է այդ պարբերական կոտորակի:

Այդ նշանակում է, վոր գրելով վորևէ (պարզ կամ խառը) պարբերական կոտորակ, միայն թե նրա պարբերությունը կազմված չլինի բացառապես ինն թվանշանից, մենք միշտ կարող ենք գտնել այն հասարակ կոտորակը, վորը վերածվում է տված պարբերական կոտորակին, իսկ, ընդհակառակն, այն պարբերական կոտորակը, վորը վորպես պարբերություն ունի 9 թվանշանը, չի կարող հանդիսանալ վորևէ հասարակ կոտորակի վերածում:

Ապացույց: 1) Դիցուք տված է վորևէ պարբերական կոտորակ, վորի պարբերությունը 9 է, որինակ 5,28(9): Յեթե գոյություն ունենար այնպիսի հասարակ կոտորակ, վորը տասնորդական դարձնելիս տար 5,28(9), ապա, ինչպես գիտենք, այդ կոտորակը հավասար պետք է լիներ տված պարբերական կոտորակի հատվածների հաջորդականության սահմանին, բայց 5,28(9) կոտորակի համար, 5-րդ թեորեմի համաձայն, այդ սահմանը հավասար է՝

$$\frac{5289-528}{9\cdot10^2}=\frac{5280+9-528}{9\cdot10^2}=\frac{528\cdot10-528+9}{9\cdot10^2}=\frac{528\cdot9+9}{9\cdot10^2}=\frac{528+1}{10^2},$$

այսինքն այնպիսի կոտորակ է, վորի հայտարարը 2-ից և 5-ից բացի ուրիշ պարզ բազմապատկիչներ չի պարունակում, իսկ այդպիսի կոտորակը, ինչպես գիտենք, վերածվում է վերջավոր և վոչ թե պարբերական տասնորդական կոտորակի: Թեորեմը ապացուցեցինք մի որինակով (դիտողական դարձնելու համար), սակայն մեր բերած դատողությունը, ակներև է, ճիշտ է մնում 9-ը վորպես պարբերություն ունեցող ամեն մի պարբերական կոտորակի համար:

2) Դիցուք, այժմ տված է այնպիսի պարբերական կոտորակ, վորի պարբերությունը կազմված է 9-ից տարբեր, մեկ կամ մի քանի թվանշաններից, որինակ, 7,(23): 4-րդ թեորեմն ապացուցելիս ընդունեցինք, վոր

$$\overbrace{7,2323\ldots23}^{n}=X_n$$

և տեսանք, վոր յերբ n-ը աճում է,

$$7\frac{23}{99}=\frac{723-7}{99}=\text{սահմ. } X_n;$$

ավելի ճիշտ՝ այնտեղ ունեյինք

$$\frac{723-7}{99}-X_n=\frac{23}{100^n\cdot 99}<\frac{1}{100^n},$$

քանի վոր $\frac{23}{99}<1$-ից (հենց այս վերջին անհավասարությունը, վորը մնում է ճիշտ 0-ից տարբեր, ամեն մի պարբերության համար, թույլ է տալիս մասնավոր օրինակի համար տված մեր դատողությունը տարածել ամեն մի կոտորակի վրա, վորի պարբերությունը 0-ից տարբեր է)։ Բայց այդ նշանակում է, վոր X_n վերջավոր տասնորդական կոտորակը, վորի հայտարարը 100^n է, հանդիսանում է $\frac{723-7}{99}$ թվի մոտեցումը (պակասորդով) $\frac{1}{100^n}$-ի ճշտությամբ։ Ինչպես գիտենք, այդպիսի մոտեցումներ հանդիսանում են, այն հատվածները վորոնք ստացվում են տված թիվը տասնորդական կոտորակ դարձնելիս՝ ուրեմն, X_n-ը $\frac{723-7}{99}$ թվի վերածման հատվածն է. իսկ քանի վոր n-ը կամավոր է, ապա $\frac{723-7}{99}$ թվի տասնորդական կոտորակի վերածումն իսկապես համընկնում է տված 7,(23) պարբերական կոտորակի հետ։

194. Հետևություններ. 1) Պարզ պարբերական կոտորակ դարձող հասարակ կոտորակի հայտարարը, կրճատումից հետո, 2 յեվ 5 բազմապատիկներ չի պարունակում, վորովհետև ըստ 4-րդ թեորեմի՝ այդ հայտարարը միշտ կարելի յե ներկայացնել վորպես 9 թվանշանով վերջացող թիվ, այդ պատճառով էլ չի կարող բաժանվել վոչ 2-ի յեվ վոչ էլ 5-ի վրա, իսկ կրճատումից հետո ավելի յեվս չի կարող այդ բազմապատիկները պարունակել։

2) Խառը պարբերական կոտորակ դարձող հասարակ կոտորակի հայտարարը պարունակում է 2 կամ 5 բազմապատիկը կամ յերկուսն էլ միասին։

Իսկապես, 5-րդ թեորեմի համաձայն, այդ հայտարարը կարելի յե ներկայացնել զերոյով վերջացող թվով և այդ պատճառով էլ նա բաժանվում է և 2-ի և 5-ի վրա։ Այս յերկու բազմապատիկները կարող էին համարիչի հետ կրճատվել միայն այն դեպքում, յեթե համարիչը վերջանար զերոյով։ Բայց համարիչը ստացվում է, յերբ մինչ առաջին պարբերությունը գտնվող թիվը հանում ենք մինչ յերկրորդ պարբերությունը գտնվող թվից. քանի վոր պարբերության վերջին թվանշանը և մինչ պարբերության վերջին թվանշանը միևնույնը լինել չեն կարող (յեթե պարբերությունն սկսված է հարկավոր տեղից), ապա համարիչը զերոյով վերջանալ չի կարող։ Այդ պատճառով կրճատումից հետո էլ (յեթե այդ հնարավոր է) հայտարարում կմնա կամ 2, կամ 5 բազմապատիկը, կամ յերկուսն էլ միասին։

3) Այն հասարակ կոտորակը, վորի հայտարարը 2 յեվ 5 բազմապատիկներ չի պարունակում, դառնում է պարզ պարբերական կոտորակ։

Օրինակ՝

$$\frac{3}{7}=0,(428571);\quad \frac{2}{3}=0,(6);\quad \frac{5}{11}=0,(45).$$

Իրոք, 1) այդպիսի կոտորակը պետք է դառնա վորևէ պարբերական կոտորակ (§ 180). 2) այդ պարբերական կոտորակը խառը լինել չի կարող, վորովհետև, ինչպես տեսանք, խառը պարբերական կոտորակ կարող է դառնալ միայն այնպիսի հասարակ կոտորակը, վորի հայտարարը 2 և 5 բազմապատիկներ է պարունակում։ Հետևապես, տված կոտորակը պետք է դառնա պարզ պարբերական։

4) Այն հասարակ կոտորակը, վորի հայտարարը կրճատումից հետո պարունակում է այլ բազմապատիկների հետ 2 կամ 5 (կամ այդ յերկու) բազմապատիկը, դառնում է խառը պարբերական կոտորակ.

Օրինակ՝

$$\frac{35}{42}=\frac{5}{6}=0,8(3);\quad \frac{8}{15}=0,5(3);\quad \frac{110}{450}=0,26(4) \text{ և այլն։}$$

Իսկապես. 1) այդպիսի կոտորակը պետք է դառնա վորևէ պարբերական կոտորակ. 2) այդ պարբերական կոտորակը պարզ լինել չի կարող, վորովհետև, ինչպես տեսանք, պարզ պարբերական կոտորակ կարող է դառնալ միայն այն հասարակ կոտորակը, վորի հայտարարը 2 և 5 բազմապատիկներ չի պարունակում։ Հետևապես, տված կոտորակը պետք է դառնա խառը պարբերական կոտորակ։

ՎԵՑԵՐՈՐԴ ԲԱԺԻՆ

ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

I. ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

195. Համեմատություններ։ Երկու հարաբերությունների հավասարությունը կոչվում է համեմատություն։ *Այսպես,*

$$\frac{3}{4}=\frac{9}{12}, \qquad \frac{10}{2\frac{1}{2}}=\frac{1\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}, \qquad \frac{3\frac{1}{2}\text{ կգ}}{5\text{ կգ}}=\frac{\frac{1}{2}\text{ մ}}{\frac{5}{7}\text{ մ}}$$

հավասարությունները համեմատություններ են։

Այս համեմատությունները կարելի է գրել նաև այսպես․

$$3:4=9:12, \quad 10:2\frac{1}{2}=1\frac{1}{3}:\frac{1}{3} \text{ և այլն։}$$

Այդ համեմատությունները բառերով կարդում են այսպես․ 3-ը հարաբերում է 4-ին այնպես, ինչպես 9-ը 12-ին, 10-ը հարաբերում է $2\frac{1}{2}$-ին այնպես, ինչպես $1\frac{1}{3}$-ը $\frac{1}{3}$-ին *և այլն։*

Համեմատություն կազմող երկու հարաբերությունների անդամները կարող են լինել կամ վերացական (ինչպես առաջին երկու օրինակներում), կամ նույնանուն անվանական թվեր (ինչպես երրորդ օրինակում)։ Վերջին դեպքում միանգամայն թույլատրելի է, որ առաջին հարաբերության անդամները ունենան մի անուն (օրինակ, կիլոգրամ), իսկ երկրորդ հարաբերության անդամները—բոլորովին այլ անուն (օրինակ, մետր), այդ երկու հարաբերություններից յուրաքանչյուրը վերացական թիվ է, և համեմատությունն այդ երկու վերացական թվերի հավասարությունն է։

Յուրաքանչյուր համեմատություն, ակներև է, ունի երկու նախորդ և երկու հետնորդ անդամ։ Համեմատություն կազմող հարաբերությունների անդամները կոչվում են նաև համեմատության անդամներ։

$$3:4=9:12 \qquad (1)$$

համեմատության մեջ 3-ը և 12-ը կոչվում են ծայրի *անդամներ, իսկ 4-ը և 9-ը՝* միջին *անդամներ։ Համեմատության յուրաքանչյուր անդամը կոչվում է մյուս երեք անդամների չորրորդ* համեմատականը։

196. Համեմատության հիմնական հատկությունը։ *Այս պարագրաֆում կխոսենք միայն վերացական անդամներ ունեցող համեմատությունների մասին։*

Քննության առնենք $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$ *համեմատությունը․ հավասար հարաբերություններից յուրաքանչյուրը կբազմապատկենք միևնույն 4 . 12 թվով, այսինքն՝ հետնորդ անդամների արտադրյալով, ստացվում են դարձյալ հավասար թվեր․*

$$\frac{3.4.12}{4}=\frac{9.4.12}{12},$$

կամ կրճատումից հետո․

$$3 \cdot 12=9 \cdot 4. \qquad (1)$$

Այս հավասարությունը ցույց է տալիս, որ

համեմատության ծայրանդամների արտադրյալը հավասար է միջին անդամների արտադրյալին։

Սակայն հեշտ է համոզվել, և ընդհակառակը, **եթե ընտրված են չորս թվեր այնպես, որ նրանցից երկուսի արտադրյալը հավասար է մյուս երկու թվերի արտադրյալին, ապա այդպիսի թվերը միշտ հանդիսանում են համեմատության անդամներ։**

Իսկապես, վերցնենք, օրինակ․

$$4 \cdot 15=3 \cdot 20$$

հավասարությունը․ Նրա երկու մասերը բաժանելով 15 . 3 արտադրյալի վրա, կրճատումից հետո կստանանք․

$$\frac{4}{3}=\frac{20}{15}.$$

կարող եյինք տված հավասարության յերկու մասերը բաժանել նաև այլ արտադրյալների վրա, որինակ, 4 · 3-ի, 4 · 20-ի կամ 15 · 20-ի վրա, և այսպիսով, ստանալ մի քանի տարբեր համեմատություններ։

Այս կանոնից միակ բացառություն կազմում է այն դեպքը, յերբ այդ յերկու արտադրյալներից վորևէ մեկի (կամ յերկուսի) մեջ յերկու բազմապատկիչներն էլ զերոներ են. որինակ, 0 · 5=0 . 0. այս դեպքում, ակներև է, վոր տված թըվերից համեմատություն կազմել չի կարելի, վորովհետև այդ համեմատության մեջ հետևորդ անդամներից առնվազն մեկը պետք է զերո լիներ, վորը, ինչպես գիտենք, անթույլատրելի յե։

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ համեմատության հիմնական հատկությունը ընդհանուր տեսքով գրվում է այսպես.

$$ad=bc$$

Ընդհակառակը, ad=bc հավասարությունից հետևում է, վոր

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d},\quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a} \text{ և } \frac{d}{c}=\frac{b}{a}.$$

197. Հիմնական հատկության հետեվանքները։ 1) **Համեմատության յուրաքանչյուր ծայրանդամ հավասար է միջին անդամների արտադրյալին, բաժանած մյուս ծայրանդամի վրա յեվ համեմատության յուրաքանչյուր միջին անդամ հավասար է ծայրանդամների արտադրյալին, բաժանած մյուս միջին անդամի վրա։**

Այդ հնարավորություն է տալիս գտնելու համեմատության անհայտ անդամը, յեթե տրված 3 անդամները հայտնի յեն. որինակ,

$$10 : x=45 : 20$$

համեմատության մեջ, վորտեղ x-ով նշանակված է նրա անհայտ միջին անդամը, գտնում ենք

$$x=\frac{10 \cdot 20}{45}=4\frac{4}{9}.$$

2) Համեմատության անդամների տեղափոխությունները։ Յուրաքանչյուր համեմատության մեջ կարելի յե տեղափոխել 1) միջին անդամները, 2) ծայրանդամները և 3) ծայրանդամ-

ները միջին անդամների տեղը և ընդհակառակը։ Այդ տեղափոխումներից համեմատությունը չի խախտվի, վորովհետև միջին և ծայրանդամների արտադրյալների միջև յեղած հավասարությունը չի խախտվի։ Դիցուք, որինակ, ունենք

$$1)\ 4 : 7=12 : 21$$

համեմատությունը, նրա միջին անդամները տեղափոխելով՝ կստանանք.

$$2)\ 4 : 12=7 : 21.$$

Այս յերկու համեմատություններից յուրաքանչյուրի մեջ տեղափոխենք ծայրանդամները, այն ժամանակ կստանանք էլի յերկու համեմատություններ.

$$3)\ 21 : 7=12 : 4; \qquad 4)\ 21 : 12=7 : 4.$$

Վերջապես, ստացած չորս համեմատություններից յուրաքանչյուրում միջին անդամները դնենք ծայրանդամների տեղը և, ընդհակառակը, այն ժամանակ կստանանք էլի չորս համեմատություններ.

$$5)\ 7 : 4=21 : 12; \qquad 7)\ 7 : 21=4 : 12;$$
$$6)\ 12 : 4=21 : 7; \qquad 8)\ 12 : 21=4 : 7.$$

Կարելի յեր այս ութը համեմատություններից յուրաքանչյուրում տեղափոխել հարաբերությունները, այսինքն՝ յերկրորդ հարաբերությունը դարձնել առաջին, իսկ առաջինը՝ յերկրորդ, սակայն այդ տեղափոխությունից նոր համեմատություն չի ստացվի, վորին կարելի յե անմիջապես համոզվել։ Յեթե, որինակ, 5-րդ համեմատության հարաբերությունները տեղափոխենք, նոր համեմատություն չենք ստանա, այլ կստանանք 4-րդ համեմատությունը։ Հետեվապես, բոլոր հնարավոր տեղափոխումների միջոցով մեկի փոխարեն կարելի յե ստանալ ութը համեմատություն։

3) Համեմատության ստուգումը։ Միևնույն հիմնական հատկության հիման վրա, համեմատությունն ստուգելու համար, բավական է համոզվել, վոր նրա ծայրանդամների արտադրյալը հավասար է միջին անդամների արտադրյալին։ Որինակ, *4 : 7=868 : 1519* համեմատությունը ճիշտ է, քանի վոր

$$1519 \cdot 4=868 \cdot 7.$$

198. Միջին յերկրաչափական։ Վերցնենք այնպիսի համեմատություն, որի միջին անդամները նույնն են. օրինակ,

$$36:12=12:4։$$

Այդպիսի համեմատության կրկնվող անդամը կոչվում է համեմատության մնացած յերկու անդամների **միջին յերկրաչափական**։ Այսպես, 12-ը 36-ի և 4-ի միջին յերկրաչափականն է։

Այսպիսով, յեթե պահանջվում է գտնել a և b յերկու թվերի միջին յերկրաչափականը, ապա այդ նշանակելով x-ով, կարող ենք գրել

$$a:x=x:b$$

համեմատությունը, որտեղից

$$x^2=ab։$$

Ուրեմն, **յերկու տված թվերի միջին յերկրաչափականը մի այնպիսի յերրորդ թիվ է, որի քառակուսին հավասար է տված թվերի արտադրյալին**[1]։ Օրինակ, 25 և 4 թվերի միջին յերկրաչափականը հավասար է 10-ի, որովհետև $10^2=25\cdot4$։

199. Միջին թվաբանական։ Տված մի քանի թվերի միջին թվաբանական կոչվում է այն քանորդը, որն ստացվում է տված թվերի գումարն այդ գումարելիների թվի վրա բաժանելուց։ Օրինակ, տված 10, 2, 8, 12 չորս թվերի միջին թվաբանականը հավասար է

$$\frac{10+2+8+12}{4}=\frac{32}{4}=8։$$

Միջին թվաբանականն ունի այն հատկությունը, որ յեթե տված թվերը գումարելիս նրանցից յուրաքանչյուրը փոխարինենք միջին թվաբանականով, ապա այդ փոխարինումից գումարը չի փոխվի։ Այսպես, տված 10, 2, 8 և 12 թվերի գումարը հավասար է 32-ի և 8+8+8+8 գումարը նույնպես հավասար է 32-ի։

Յենթադրենք, օրինակ, որ գործարանի արտադրողականությունն ընթացիկ տարվա առաջին չորս ամիսներում, համեմատած նախորդ տարվա դեկտեմբեր ամսվա արտադրողականության հետ, բարձրացել է՝ հունվարին—10 000 ռուբլով, փետրվարին—2000—ռուբլով, մարտին—8000 ռուբլով, և ապրիլին—12 000 ռուբլով։ Այն ժամանակ կարելի յե ասել, որ այդ 4 ամսում արտադրողականության միջին բարձրացումը կազմում է ամսական 8000 ռուբլի։ Այդ պետք է հասկանալ այն իմաստով, որ գործարանի արտադրողականությունը բոլոր 4 ամիսներում յեղել է այնպես, ինչպես կլիներ, յեթե ամեն ամիս բարձրանար հավասարապես, այն է՝ 8000 ռուբ.։

1) Հետևապես, յերկու թվերի միջին յերկրաչափականը հավասար է այդ թվերի արտադրյալի քառակուսի արմատին։

Հաճախ նման ձևով են խոսում միջին վաստակի, շարժման միջին արագության, ազգաբնակության միջին խտության մասին և այլն։ Այդպիսի արտահայտություններում հասկացվում է, որ խոսքը վերաբերում է միջին թվաբանականին։

200. Ածանցյալ համեմատություններ։ Տված համեմատությունից կարելի յե ստանալ մի քանի այլ համեմատություններ, որոնք կոչվում են **ածանցյալ** համեմատություններ։ Դրանք ստացվում են հետևյալ դատողությունների հիման վրա։

Վերցնենք որևէ հարաբերություն, օրինակ, 21 : 7։ Յեթե սրա նախորդ անդամին ավելացնենք հետնորդ անդամը, իսկ հետնորդ անդամը թողնենք անփոփոխ, ապա կստանանք մի նոր հարաբերություն (21+7) : 7, որը նախկին հարաբերությունից մեծ է 1 միավորով։ Իսկ յեթե նախորդ անդամից հանենք հետնորդ անդամը (յեթե այդ հնարավոր է, ինչպես մեր օրինակում), իսկ հետնորդ անդամը թողնենք անփոփոխ, ապա կստանանք մի նոր հարաբերություն (21—7) : 7, որը նախկին հարաբերությունից փոքր է 1 միավորով։

Նկատելով այս, վերցնենք որևէ համեմատություն.

$$21:7=30:10$$

և սրանից կազմենք մի նոր համեմատություն, այսպես.

$$(21+7):7=(30+10):10։ \qquad (1)$$

Այս համեմատությունը ճիշտ է, որովհետև նրա մեջ հարաբերություններից յուրաքանչյուրը միևնույն թվով, 1-ով, մեծ է տված համեմատության հարաբերություններից։ Մեր կազմած ածանցյալ համեմատությունը կարելի յե արտահայտել այսպես.

առաջին հարաբերության անդամների գումարն այնպես է հարաբերում նրա հետնորդ անդամին, ինչպես յերկրորդ հարաբերության անդամների գումարը հարաբերում է այդ հարաբերության հետնորդ անդամին։

Տված համեմատությունից այժմ կազմենք հետևյալ համեմատությունը.

$$(21-7):7=(30-10):10։ \qquad (2)$$

Այս համեմատությունը ճիշտ է, որովհետև նրա մեջ յուրաքանչյուր հարաբերությունը միևնույն թվով, 1 միավորով,

փոքր է տված համեմատության հարաբերություններից։ Մեր կազմած այս յերկրորդ ածանցյալ համեմատությունը կարելի յե արտահայտել այսպես․

առաջին հարաբերության անդամների տարբերությունն այնպես է հարաբերում նրա հետնորդ անդամին, ինչպես յերկրորդ հարաբերության անդամների տարբերությունը հարաբերում է այդ հարաբերության հետնորդ անդամին։

Տեղափոխելով այս յերկու ածանցյալ համեմատությունների անդամները, կարելի յե ստանալ նաև այլ ածանցյալ համեմատություններ։ Այսպես, տեղափոխենք առաջին ածանցյալ համեմատության և տված համեմատության միջին անդամները․

$$(21+7):(30+10)=7:10,$$

$$21:30=7:10\text{։}$$

Այդ յերկու համեմատությունների մեջ յերկրորդ հարաբերությունները միևնույն են, ուրեմն, առաջին հարաբերությունները պետք է լինեն իրար հավասար՝

$$(21+7):(30+10)=21:30\text{։}$$

Տեղափոխելով սրա միջին անդամները, կստանանք․

$$(21+7):21=(30+10):30\text{։} \qquad (3)$$

Այս յերրորդ ածանցյալ համեմատությունը կարելի յե արտահայտել այսպես․

առաջին հարաբերության անդամների գումարն այնպես է հարաբերում նրա նախորդ անդամին, ինչպես յերկրորդ հարաբերության անդամների գումարը հարաբերում է այդ հարաբերության նախորդ անդամին։

Տեղափոխենք յերկրորդ ածանցյալ համեմատության և տված համեմատության միջին անդամները, կստանանք․

$$(21-7):(30-10)=7:10,$$
$$21:30=7:10;$$

վորտեղից՝

$$(21-7):(30-10)=21:30,$$

կամ

$$(21-7):21=(30-10):30\text{։} \qquad (4)$$

Այս չորրորդ ածանցյալ համեմատությունը կարելի յե արտահայտել այսպես․

առաջին հարաբերության անդամների տարբերությունը այնպես է հարաբերում նրա նախորդ անդամին, ինչպես յերկրորդ հարաբերության անդամների տարբերությունը հարաբերում է այդ հարաբերության նախորդ անդամին։

Տեղափոխելով առաջին և յերկրորդ ածանցյալ համեմատությունների միջին անդամները, կստանանք․

$$(21+7):(30+10)=7:10;$$
$$(21-7):(30-10)=7:10;$$

վորտեղից

$$(21+7):(30+10)=(21-7):(30-10),$$

կամ

$$(21+7):(21-7)=(30+10):(30-10)\text{։} \qquad (5)$$

Այս հինգերորդ ածանցյալ համեմատությունը կարելի յե արտահայտել այսպես․

առաջին հարաբերության անդամների գումարն այնպես է հարաբերում նրանց տարբերությանը, ինչպես յերկրորդ հարաբերության անդամների գումարը հարաբերում է նրանց տարբերությանը։

201. Հավասար հարաբերությունների հատկությունը։ *Նշենք ելի մի հատկություն, վորը պատկանում է վոչ միայն համեմատությանը, այսինքն՝ յերկու հարաբերությունների հավասարությանը, այլև յերեք, չորս և ավելի թվով հարաբերությունների հավասարությանը։*

Վերցնենք մի քանի հավասար հարաբերություններ, որինակ, այսպիսի․

$$40:10=20:5=8:2=\ldots$$

Քանի վոր յուրաքանչյուր հարաբերության մեջ նախորդ անդամը հավասար է հետնորդ անդամի և հարաբերության արտադրյալին, և քանի վոր մեր որինակում հարաբերությունը հավասար է 4-ի, ապա կարող ենք գրել՝

$$40=10\cdot4;\ \ 20=5\cdot4;\ \ 8=2\cdot4;\ldots$$

Այս հավասարությունների ձախ մասերն իրար գումարենք, իսկ աջ մասերն՝ իրար։ Ակնհայտ է, որ հավասար թվերի գումարումից պետք է ստանանք և հավասար գումարներ. ուստի,

$$40+20+8+\dots=10\cdot4+5\cdot4+2\cdot4+\dots$$

Այս հավասարության աջ մասում 10, 5, 2,... թվերը առանձին-առանձին բազմապատկվում են 4-ով և ապա ստացված արտադրյալները գումարվում։ Դրա փոխարեն կարելի էր նախապես 10, 5, 2,... թվերը գումարել և ապա գումարը միանգամից բազմապատկել 4-ով։ Այդ պատճառով մեր դուրս բերած վերջին հավասարությունը կարող ենք արտագրել այսպես.

$$40+20+8+\dots=(10+5+2+\dots)\cdot4.$$

Այս հավասարության երկու մասերը կբաժանենք $10+5+2+\dots$ գումարի վրա, որից հավասարությունը չի խախտվի, և կստանանք.

$$(40+20+8+\dots):(10+5+2+\dots)=4.$$

Սակայն մեր վերցրած հավասար հարաբերություններից յուրաքանչյուրը նույնպես հավասար է 4-ի, ուրեմն՝

$$(40+20+8+\dots):(10+5+2+\dots)=40:10=20:5=8:2=\dots$$

Դիցուք, ընդհանրապես ունենք մի քանի հավասար հարաբերություններ.

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=q.$$

Այն ժամանակ

$$a=bq;\quad a_1=b_1q;\quad a_2=b_2q;\ \dots$$ և այլն.

Գումարելով այս հավասարությունները, կստանանք.

$$a+a_1+a_2+\dots=bq+b_1q+b_2q+\dots=(b+b_1+b_2+\dots)q.$$

Հավասարության երկու մասերն այժմ բաժանենք $b+b_1+b_2+\dots$ գումարի վրա, որից հավասարությունը չի խախտվի.

$$\frac{a+a_1+a_2+\dots}{b+b_1+b_2+\dots}=q.$$

Բայց տված հարաբերություններից յուրաքանչյուրը նույնպես հավասար է q-ի, ուրեմն՝

$$\frac{a+a_1+a_2+\dots}{b+b_1+b_2+\dots}=\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots$$

Այսպիսով.

Եթե մի քանի հարաբերություններ հավասար են իրար, ապա նրանց բոլոր նախորդ անդամների գումարն այնպես է հարաբերում բոլոր հետնորդ անդամների գումարին, ինչպես նախորդ անդամներից որևէ մեկը հարաբերում է իր հետնորդ անդամին։

Ամեն մի համեմատություն հանդիսանում է երկու հարաբերությունների հավասարություն, ուրեմն՝ մեր նշած հատկությունը պատկանում է մասնավորապես ամեն մի համեմատության։

II. ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ԿԱԽՈՒՄԸ

202. Ուղիղ համեմատական մեծություններ։ Դիցուք, 3 մ մահուդն արժե 360 ռուբլի. այդ դեպքում երկու անգամ ավելի մեծ քանակությամբ մահուդը, այսինքն՝ 6 մ, արժե երկու անգամ ավելի, այսինքն՝ $360\cdot2=720$ ռուբլի. երեք անգամ ավելի մեծ քանակությամբ մահուդը, այսինքն՝ 9 մ, արժե երեք անգամ ավելի, այսինքն՝ $360\cdot3=1080$ ռուբլի և այլն։

Ընդհանրապես, եթե ապրանքի տված քանակը մեծացնենք կամավոր թիվ անգամ, ապա նրա արժեքն էլ կմեծանա նույնքան անգամ. եթե ապրանքի տված քանակը փոքրացնենք մի քանի անգամ, ապա արժեքն էլ կփոքրանա նույնքան անգամ։

Եթե երկու մեծություններ իրար հետ կապված են այնպես, որ նրանցից որևէ մեկի մի քանի անգամ մեծացնելու (փոքրացնելու) հետևանքով նույնքան անգամ էլ անհրաժեշտաբար մեծանում (փոքրանում) է մյուսը, ապա այդպիսի երկու մեծությունները կոչվում են ուղիղ համեմատական։

Այսպես ապրանքի քանակը և նրա արժեքը ուղիղ համեմատական մեծություններ են։ Ճիշտ այդպես էլ՝

համասեռ մարմնի (օրինակ, երկաթի կտորի) քաշն ուղիղ համեմատական է նրա ծավալին,

հավասարաչափ շարժվող մարմնի (օրինակ, գնացքի) անցած ճանապարհը ուղիղ համեմատական է շարժման տևողությանը,

անփոփոխ հայտարարի դեպքում կոտորակի մեծությունն ուղիղ համեմատական է նրա համարիչին և այլն։

Յեթե մահուդի մի կտորը 4 մ է, իսկ մյուսը — 10 մ, ապա յերկրորդ կտորն առաջինից մեծ է $\frac{10}{4}=2\frac{1}{2}$ անգամ. ուրեմն, յերկրորդ կտորի արժեքն $2\frac{1}{2}$ անգամ ավելի մեծ է առաջինի արժեքից, այսինքն․

$$\frac{10\ \text{մ արժեքը}}{4\ \text{մ արժեքը}}=\frac{10\ \text{մ}}{4\ \text{մ}}\left(=2\frac{1}{2}\right).$$

Այսպիսով, **յեթե յերկու մեծություններ ուղիղ համեմատական են, ապա առաջին մեծության վորևե յերկու արժեքների հարաբերությունը հավասար է յերկրորդ մեծության համապատասխան արժեքների հարաբերությանը։**

203. ԽՆԴԻՐ։ 8 մ մահուդն արժե 960 ռուբլի, ի՞նչ արժե նույն մահուդի 15 մ։

1) Լուծում միավորի բերելու յեղանակով։

Մահուդի արժեքը համեմատական է նրա մետրերի թվին, դրա համար 1 մ արժե 8 անգամ քիչ, քան 8 մ, իսկ 15 մ արժե 15 անգամ ավելի, քան 1 մ, սակայն

8 մ արժե 960 ռուբլի,

ուրեմն,

$$1\ \text{մ արժե}\ \frac{960}{8}\ (=120\ \text{ռուբլի}).$$

$$15\ \text{մ արժե}\ \frac{960}{8}\cdot 15\ (=1800\ \text{ռուբլի}).$$

Այն յեղանակը, վորով լուծեցինք այս խնդիրը, կոչվում է **միավորի բերման յեղանակ**, վորովհետև 15 մ մահուդի արժեքը գտնելու համար նախ գտանք 1 մետրի արժեքը։

2) Խնդրի լուծումը համեմատության միջոցով։

15 մ մահուդի արժեքը նշանակելով x-ով, ըստ § 202-ի կանոնի, կունենանք՝

$$x:960=15:8$$

համեմատությունը, վորտեղից

$$x=\frac{960\cdot 15}{8}=1800\ (\text{ռուբլի}).$$

204. Համեմատական կախման արտահայտությունը բանաձևով։

Դիցուք, ունենք A և B յերկու վորևե համեմատական մեծություններ և յենթադրենք, վոր յերբ A մեծությունը հավասար է մեկ միավորի (այդ տեսակի մեծության), ապա B մյուս մեծությունը հավասարվում է k միավորի (մյուս տեսակի մեծության)։ Յեթե այժմ ընդունենք, վոր A մեծությունը կստանա վորևե արժեք x միավորների, այն ժամանակ B մեծության արժեքն արդեն վոչ թե k միավոր կլինի, այլ վորևե ուրիշ թիվ, վորը կնշանակենք y-ով։ Պարզության համար այդ արտահայտենք այսպիսի աղյուսակով.

A	B
1	k
x	y

Քանի վոր ըստ պայմանի A և B մեծությունները համեմատական են, ապա 1:x հարաբերությունը պետք է հավասար լինի k:y հարաբերությանը։ Հետևապես կարող ենք գրել

$$1:x=k:y$$

համեմատությունը, վորից կգտնենք

$$y=kx.$$

Այս բանաձևով հեշտությամբ կարող ենք գտնել վորևե x արժեքին համապատասխանող y թիվը, յեթե միայն հայտնի յե k-ն։ Յեթե, օրինակ,

$x=1, 2, 3, 4, 4\frac{1}{2}, 9\frac{3}{4},\ldots$ և այլն. ապա y-ը համապատասխանաբար հավասար

կլինի $k, 2k, 3k, 4k, 4\frac{1}{2}k, 9\frac{3}{4}k$ և այլն։

Այսպիսով.

յեթե յերկու մեծություններ համեմատական են, ապա նրանց միջև յեղած կախումը կարելի յե արտահայտել y=kx բանաձևով, վորտեղ y-ը յեվ x-ը փոփոխական թվեր են, վորոնք արտահայտում են վերցրած մեծությունների իրար համապատասխանող արժեքները, իսկ k—հաստատուն թիվ է, վորը հավասար է y-ի այն մասնավոր արժեքին, վորը համապատասխանում է x=1 արժեքին։ Ընդունված է այդ թիվն անվանել **համեմատության գործակից** (y-ի համեմատության գործակիցը x-ի նկատմամբ)։

Օրինակ, այդ բանաձևը կիրառելով մեր խնդրի նկատմամբ (§ 206), կարող ենք գրել՝

$$\text{մահուդի արժեքը}=k\times\text{մահուդի քանակը},$$

վորտեղ k-ն այն արժեքի մեծությունն է, յերբ մահուդի քանակը հավասար է միավորի։ Ուրեմն, յեթե արժեքն արտահայտվում է ռուբլիներով, իսկ քանակը՝ մետրերով, ապա k-ն 1 մետրի արժեքն է (120 ռուբլի)։

205. Հակադարձ համեմատական մեծություններ։ *Քննարկենք մի այսպիսի խնդիր.* **6 բանվոր մի աշխատանք վերջացնում են 18 օրում։ Նույն աշխատանքը քանի՞ օրում կվերջացնեն 9 բանվոր, եթե աշխատեն առաջինների նման։**

Այս խնդրում նույնպես խոսվում է երկու մեծությունների մասին՝ բանվորների քանակի և նրանց աշխատանքի տևողության մասին։ Այդ մեծությունները կախում ունեն իրարից, որովհետև մեկի փոփոխությամբ փոխվում է և մյուսը։ Բայց այս կախումը § 203-ում նշածից տարբեր է։

Այնտեղ մի մեծություն 2, 3 և այլն անգամ մեծացնելիս նույնքան անգամ մեծանում էր մյուս մեծությունը։ Իսկ այստեղ, եթե բանվորների թիվը երկու անգամ մեծացնենք, աշխատանքի տևողությունը կփոքրանա երկու անգամ, ընդհակառակը, եթե, օրինակ, բանվորների թիվը երեք անգամ փոքրացնենք, ապա տված աշխատանքի տևողությունը, ակնհայտաբար, երեք անգամ կմեծանա։

Եթե երկու մեծություններից մեկը մի քանի անգամ մեծացնելիս (փոքրացնելիս) մյուսը նույնքան անգամ փոքրանում (մեծանում) է, ապա երկու այդպիսի մեծությունները կոչվում են հակադարձ համեմատական։

Այսպես, բանվորների թիվը և տվյալ աշխատանքի տևողությունը հակադարձ համեմատական մեծություններ են։

Ճիշտ նույն ձևով

ապրանքի քաշը, որը կարելի է գնել տված գումարի դրամով (օրինակ, 100 ռուբլով), հակադարձ համեմատական է այդ ապրանքի մեկ միավոր քաշի արժեքին.

այն ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում տվյալ ճանապարհն անցնում է հավասարաչափ շարժվող մարմինը, հակադարձ համեմատական է շարժման արագությանը.

անփոփոխ համարիչի դեպքում կոտորակի մեծությունը հակադարձ համեմատական է նրա հայտարարին և այլն։

Եթե մի բրիգադում 6 բանվոր է, իսկ մյուսում՝ 9 բանվոր, այսինքն, առաջինից $\frac{9}{6}=1\frac{1}{2}$ *անգամ ավելի, ապա երկրորդ բրիգադը նույն աշխատանքը* $1\frac{1}{2}$ *անգամ արագ կկատարի, քան առաջինը, այսինքն՝*

$$\frac{\text{1-ին բրիգադի աշխատանքի տևողությունը}}{\text{2-րդ բրիգադի աշխատանքի տևողությունը}}=\frac{\text{2-րդ բրիգադի բանվորների թիվը}}{\text{1-ին բրիգադի բանվորների թիվը}}\left(=1\frac{1}{2}\right)։$$

Այսպիսով, եթե երկու մեծություններ հակադարձ համեմատական են, ապա առաջին մեծության որևէ երկու արժեքների հարաբերությունը հավասար է երկրորդ մեծության համապատասխան արժեքների հակադարձ հարաբերությանը։

206. *Այժմ լուծենք § 205-ում տված խնդիրը։*

1) Լուծում միավորի բերելու եղանակով։

Օրերի թիվը հակադարձ համեմատական է բանվորների թվին, այդ պատճառով 1 մարդը աշխատանքը կվերջացնի 6 անգամ ավելի շատ օրում, քան 6 մարդը, իսկ 9 մարդն այդ աշխատանքը կվերջացնի 9 անգամ ավելի քիչ օրում, քան վերջացնում է 1 մարդը։ Բայց 6 մարդն այդ աշխատանքը կվերջացնի 18 օրում, ուրեմն, 1 մարդն այն կվերջացնի $18\cdot6(=108$ *օրում), իսկ 9 մարդը նույն աշխատանքը կվերջացնի* $\frac{18\cdot6}{9}=12$ *(օրում)։*

2) Լուծում համեմատության միջոցով։ *Այն անհայտ օրերի թիվը, որի ընթացքում 9 բանվորը կվերջացնի աշխատանքը, նշանակելով x-ով, ըստ § 205-ում նշած կանոնի, կունենանք՝*

$$\frac{18}{x}=\frac{9}{6}$$

համեմատությունը, որտեղից

$$x=\frac{18\cdot6}{9}=12\ (\text{օր})։$$

Դիտողություն։ *Երկու իրարից կախում ունեցող մեծություններ համեմատական (ուղիղ կամ հակադարձ) լինելու համար, բավական չէ որ միայն մեկի մեծացման հետ մյուսն էլ մեծանա (ուղիղ համեմատականության դեպքում), կամ մեկի մեծացման հետ մյուսը փոքրանա (հակադարձ համեմատականության դեպքում)։ Օրինակ, եթե գումարելիներից որևէ մեկը*

մեծանա, ապա գումարն էլ կմեծանա, սակայն սխալ կլիներ ասել, որ գումարն ուղիղ համեմատական է գումարելիին, որովհետև եթե գումարելին մեծացնենք, ասենք, 3 անգամ, ապա, թեպետ գումարը կմեծանա, սակայն ոչ 3 անգամ: Նույն ձևով, օրինակ, չի կարելի ասել, որ երկու թվերի տարբերությունը հակադարձ համեմատական է հանելիին, քանի որ, եթե հանելին մեծանա, դիցուք, 2 անգամ, ապա, թեպետ տարբերությունը կփոքրանա, սակայն ոչ 2 անգամ: Համեմատականության համար պետք է, որ երկու մեծությունների մեծացումը և փոքրացումը կատարվի միևնույն թիվ անգամ:

207. Հակադարձ համեմատականության արտահայտությունը բանաձևով: *Դիցուք, A-ն և B-ն որևէ երկու հակադարձ համեմատական մեծություններ են և ենթադրենք, որ երբ A-ն հավասար է միավորի (այդ մեծության), մյուս մեծությունը՝ B-ն հավասար կլինի k միավորների (այդ մյուս մեծության): Եթե, դիցուք, A մեծությունը միավորի փոխարեն կընդունի x միավորների այլ արժեք, այն ժամանակ B մեծությունը, նախկին արժեքի (k միավորների) փոխարեն, կընդունի որևէ y արժեք:*

Պարզության համար այդ գրենք աղյուսակի ձևով.

A	B
1	k
x	y

Քանի որ A և B մեծություններն ըստ պայմանի հակադարձ համեմատական են, ապա 1:x հարաբերությունը հավասար է k:y հարաբերության հակադարձ մեծությանը, այսինքն՝ y:k հարաբերությանը: Այդ պատճառով կարող ենք գրել՝

$$1:x=y:k$$

համեմատությունը, որտեղից կգտնենք, որ

$$y=\frac{k}{x}\ (\text{կամ } xy=k):$$

Այսպիսով՝

եթե երկու մեծություններ հակադարձ համեմատական են, ապա նրանց միջև եղած կախումը կարելի է արտահայտել $y=\frac{k}{x}$ բանաձևով (*կամ այլ կերպ* $xy=k$ *բանաձևով*), որտեղ x-ը և y-ը այդ մեծությունների իրար համապատասխանող որևէ արժեքներն են, իսկ k-ն հաստատուն թիվ է և հավասար է y-ի արժեքին, երբ $x=1$:

Այս բանաձևով կարող ենք հաշվել x-ի ամեն մի տվյալ արժեքին համապատասխանող y-ի մեծությունը, եթե միայն հայտնի է k թիվը: Այսպես, եթե $x=1, 2, 3, 4, 4\frac{1}{2},\ldots$ *և այլն,*

ապա $y=k, \frac{k}{2}, \frac{k}{3}, \frac{k}{4}, \frac{k}{4\frac{1}{2}},\ldots$ *և այլն:*

Աշխատանքի տևողության վերաբերյալ մեր խնդրի համար (§ 205) k հաստատուն թիվը մեկ բանվորին համապատասխանող օրերի թիվն է (108 օր). այն ժամանակ 2 բանվորը աշխատանքը կվերջացնեն $\frac{108}{2}=54$ *(օրում), 3 (բանվորը)՝* $\frac{108}{3}=36$ *(օրում) և այլն:*

208. Խնդրի օրինակ համեմատական մեծությունների վերաբերյալ, երբ այդ մեծությունները երկուսից ավելի են:

ԽՆԴԻՐ: 5 միանման կերոսինկա 24 օր օրական 6 ժամ վառելով ծախսեց 120 լ կերոսին: Քանի՞ օր կբավականացնի 216 լ կերոսինը, եթե 9 այդպիսի կերոսինկա վառվի օրական 8 ժամ:

Այս խնդրի տվյալները դասավորենք այսպես.

120 լ. — 5 կերոսինկա — 6 ժամ — 24 օր

216 լ. — 9 կերոսինկա — 8 ժամ — x օր

Տեսնում ենք, որ նոր պայմաններում և՛ ունեցած կերոսինի քանակը, և՛ կերոսինկաների թիվը, և՛ նրանց ամենօրյա վառվելու ժամերի թիվը փոխված են. այս բոլոր փոփոխությունների ազդեցությունը միանգամից հաշվելը դժվար է. ուստի նախ կընդունենք, որ փոփոխվում է տված թվերից որևէ մեկը, օրինակ, կերոսինի քանակը, իսկ մյուսները մնում են անփոփոխ: Ստանում ենք այսպիսի խնդիր. քանի՞ օր կբավականացնի 216 լ կերոսինը, եթե նույն 5 կերոսինկաները առաջվա պես օրական վառվեն 6 ժամ: Եթե այդ պայմաններում 120 լ բավականացնում է 24 օր, ապա 216 լ կբավականացնի $\frac{24\cdot216}{120}$ *օր, քանի որ օրերի թիվը, ակնհայտ է, ուղիղ համեմատական է վառվող կերոսինի քանակին: Այժմ արդեն կարող ենք գրանցել այսպես. 216 լ — 5 կերոսինկա — 6 ժամ —* $\frac{24\cdot216}{120}$ *օր:*

Այժմ կփոխենք կերոսինկաների թիվը, անփոփոխ թողնելով ունեցած կերոսինի քանակը (216 լ) և որական վառվելու ժամանակամիջոցը (6 ժամ)։ Ակնհայտ է, վոր յեթե 5 կերոսինկայի փոխարեն վառվի մեկը, ապա կերոսինի նույն պաշարը, որական նույնքան ժամանակ վառվելով, կբավականացնի 5 անգամ ավելի յերկար ժամանակ, իսկ յեթե մեկ կերոսինկայի փոխարեն վառվի 9-ը, ապա յեղած կերոսինը կբավականացնի 9 անգամ ավելի քիչ ժամանակ (որերի թիվը հակադարձ համեմատական է կերոսինկաների թվին). ուստի կարող ենք գրանցել այսպես.

$$216\ լ - 9\ կերոսինկա - 6\ ժամ - \frac{24 \cdot 216 \cdot 5}{120 \cdot 9}\ որ։$$

Մնում է փոխել որական վառվելու ժամերի թիվը։ Պարզ է, վոր յեթե կերոսինի տված պաշարը և կերոսինկաների թիվը մնա նախկինը, ապա որերի թիվը կմեծանա (կփոքրանա) այնքան անգամ, վորքան անգամ փոքրացնենք (մեծացնենք) որական վառվելու ժամերի թիվը. այլ խոսքով, վառվելու որերի թիվը և որական վառվելու ժամերի թիվը հակադարձ համեմատական են։ Այդ պատճառով, որական 6 ժամի փոխարեն 8 ժամ վառելով, պետք է վերջին գրանցման մեջ ստացած որերի թիվը բազմապատկենք 6-ով և բաժանենք 8-ի վրա։ Ահա դրա գրանցումը.

$$216\ լ - 9\ կերոսինկա - 8\ ժամ - \frac{24 \cdot 216 \cdot 5 \cdot 6}{120 \cdot 9 \cdot 8}\ որ։$$

այսպիսով.

$$x = \frac{24 \cdot 216 \cdot 5 \cdot 6}{120 \cdot 9 \cdot 8} = 18\ (որ)։$$

III. ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ԲԱԺԱՆՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

209. 1-ին ԽՆԴԻՐ։ 84-ը բաժանել 3 մասի համեմատական 7, 5 և 2 թվերի շարքին։

Դա պետք է հասկանալ այսպես. 84-ը բաժանել 3 այնպիսի մասերի, վոր առաջին մասը հարաբերի 7-ին այնպես, ինչպես յերկրորդը՝ 5-ին և ինչպես յերրորդը՝ 2-ին։

Վորոնելի մասերը տառերով անվանենք x_1, x_2, x_3։ Խնդրում պահանջվում է, վոր այդ մասերը բավարարեն հետևյալ համեմատություններին.

$$\frac{x_1}{7} = \frac{x_2}{5} = \frac{x_3}{2}\ ։$$

Օգտվելով հավասար հարաբերությունների հատկությունից (§ 201), գտնում ենք.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{7 + 5 + 2} = \frac{x_1}{7} = \frac{x_2}{5} = \frac{x_3}{2}\ ։$$

Բայց $x_1 + x_2 + x_3 = 84$ և $7 + 5 + 2 = 14$, ուստի, նախորդ տողը կարող ենք արտագրել այսպես.

$$\frac{84}{14} = \frac{x_1}{7};\quad \frac{84}{14} = \frac{x_2}{5};\quad \frac{84}{14} = \frac{x_3}{2}\ ։$$

Այստեղից յեզրակացնում ենք.

$$x_1 = \frac{84}{14} \cdot 7 = 42;\quad x_2 = \frac{84}{14} \cdot 5 = 30;\quad x_3 = \frac{84}{14} \cdot 2 = 12,$$

այսինքն՝ հանգում ենք հետևյալ կանոնին.

ԿԱՆՈՆ։ Թիվը տված թվերին համեմատական մասերի բաժանելու համար պետք է այդ թիվը բաժանել տված թվերի գումարի վրա յեվ քանորդը հաջորդաբար բազմապատկել տված թվերից յուրաքանչյուրով։

210. 2-րդ ԽՆԴԻՐ։ 968-ը բաժանել 4 մասի՝ համեմատական $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$ թվերի շարքին։

Նախ և առաջ տված կոտորակային թվերի շարքը կփոխարինենք ամբողջ թվերի շարքով։ Դրա համար բոլոր կոտորակները կբերենք ընդհանուր հայտարարի և խառը կոտորակը կդարձնենք անկանոն կոտորակ.

$$1\frac{1}{2} = \frac{60}{40};\quad \frac{3}{4} = \frac{30}{40};\quad \frac{2}{5} = \frac{16}{40};\quad \frac{3}{8} = \frac{15}{40}\ ։$$

Որոնելի թվերը նշանակելով x_1, x_2, x_3, x_4, կստանանք․

$$\frac{x_1}{\frac{60}{40}}=\frac{x_2}{\frac{30}{40}}=\frac{x_3}{\frac{16}{40}}=\frac{x_4}{\frac{15}{40}},$$

կամ բոլոր չորս հարաբերությունները փոքրացնելով 40 անգամ (հետնորդ անդամների հայտարարները՝ 40-ը վերացնելով)

$$\frac{x_1}{60}=\frac{x_2}{30}=\frac{x_3}{16}=\frac{x_4}{15},$$

որից հետո խնդիրը լուծվում է, ինչպես 1-ին խնդիրը։

Ծանոթություն։ 2-րդ խնդիրը կարելի է լուծել և ուղղակի, 1-ին խնդրում նշված կանոնի համաձայն, սակայն հաշվումները հեշտացնելու համար ավելի հարմար է նախ հարաբերությունների հետնորդ անդամները փոխարինել ամբողջ թվերով, ինչպես այդ արված է բնագրում։

211. ԽՆԴԻՐ 3։ 125-ը բաժանել 4 այնպիսի մասերի, որ առաջին մասը հարաբերի երկրորդ մասին, ինչպես 2 : 3, երկրորդը՝ երրորդին, ինչպես 3 : 5, իսկ երրորդը՝ չորրորդին, ինչպես 5 : 6։

$$x_1 : x_2 = 2 : 3, \quad x_2 : x_3 = 3 : 5, \quad x_3 : x_4 = 5 : 6.$$

այս համեմատությունների միջին անդամները տեղափոխելով, գտնում ենք․

$$x_1 : 2 = x_2 : 3, \quad x_2 : 3 = x_3 : 5, \quad x_3 : 5 = x_4 : 6,$$

կամ

$$\frac{x_1}{2}=\frac{x_2}{3}=\frac{x_3}{5}=\frac{x_4}{6},$$

որից հետո խնդիրը լուծվում է 1-ին խնդրի նման։

212. 4-րդ ԽՆԴԻՐ․ 125-ը բաժանել 4 այնպիսի մասերի, որ առաջին մասը հարաբերի երկրորդին, ինչպես 2 : 3, երկրորդը՝ երրորդին, ինչպես 4 : 5, իսկ երրորդը՝ չորրորդին, ինչպես 6 : 11։

Այս խնդիրն իր տեսքով նման է 3-րդ խնդրին․ սակայն այս խնդիրների միջև կա էական տարբերություն։ 3-րդ խնդրի մեջ 2 : 3, 3 : 5, 5 : 6 հարաբերություններն այնպիսին են, որ առաջնի հետնորդ անդամը հավասար է երկրորդի նախորդ անդամին, իսկ երկրորդի հետնորդ անդամը հավասար է եր-

րորդի նախորդ անդամին։ Դրա հետևանքով կարելի է ասել, որ առաջին խնդրում պահանջվում է 125-ը բաժանել 4 մասի՝ համեմատական 2, 3, 5, 6 թվերին։ Ուրեմն, այս խնդիրը ոչնչով չի տարբերվում 1-ին խնդրից։

Ներկա խնդրի մեջ 2 : 3, 4 : 5 և 6 : 11 հարաբերություններն այնպիսին են, որ նրանցից մեկի հետնորդ անդամը հավասար չէ մյուսի նախորդ անդամին։ Սակայն այս դեպքն էլ կարելի է լուծել դատողությամբ, նախորդ խնդրի նման։

Որոնելի մասերը նշանակելով x_1, x_2, x_3, x_4 տառերով՝ կարող ենք գրել հետևյալ երեք համեմատությունները․

$$x_1 : x_2 = 2 : 3, \quad x_2 : x_3 = 4 : 5, \quad x_3 : x_4 = 6 : 11.$$

Այս համեմատությունների միջին անդամները տեղափոխելով, կգտնենք․

$$x_1 : 2 = x_2 : 3, \qquad (1)$$
$$x_2 : 4 = x_3 : 5, \qquad (2)$$
$$x_3 : 6 = x_4 : 11; \qquad (3)$$

(2) համեմատությունից գտնում ենք՝

$$x_2=\frac{4 \cdot x_3}{5},$$

որտեղից

$$\frac{x_2}{3}=\frac{4x_3}{5 \cdot 3}=\frac{x_3}{\frac{15}{4}}$$

Այնուհետև (3) համեմատությունից գտնում ենք՝

$$x_3=\frac{6 \cdot x_4}{11},$$

որտեղից

$$\frac{x_3}{\frac{15}{4}}=\frac{6x_4}{11 \cdot \frac{15}{4}}=\frac{x_4}{\frac{55}{8}},$$

այսպիսով,

$$\frac{x_1}{2}=\frac{x_2}{3}=\frac{x_3}{\frac{15}{4}}=\frac{x_4}{\frac{55}{8}}$$

վորից հետո խնդիրը լուծվում է 2-րդ խնդրի ձևով։

213. 5-րդ ԽՆԴԻՐ։ Տված a թիվը բաժանել m, n և p թվերին հակադարձ համեմատական մասերի։

Այդ նշանակում է, վոր պահանջվում է a թիվը բաժանել այնպիսի մասերի, վորոնք ուղիղ համեմատական են m, n և p թըվերի հակադարձ մեծություններին, *այսինքն՝ ուղիղ համեմատական են* $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$ *և* $\frac{1}{p}$ *թվերին։ Վորոնելի մասերը նշանակելով* x_1, x_2 *և* x_3, *կունենանք՝*

$$x_1:\frac{1}{m}=x_2:\frac{1}{n}=x_3:\frac{1}{p}.$$

այստեղից

$$x_1:x_2=\frac{1}{m}:\frac{1}{n}=n:m,$$

$$x_2:x_3=\frac{1}{n}:\frac{1}{p}=p:n,$$

այսինքն՝ յեթե x_1, x_2 *և* x_3 *թվերը հակադարձ համեմատական են* m, n, p *թվերին, ապա* $x_1:x_2$ *հարաբերությունը հավասար է* n:m *հարաբերությանը (և վոչ թե* m:n, *ինչպես ուղիղ համեմատականության ժամանակ), ճիշտ նույնպես* $x_2:x_3$ *հարաբերությունը հավասար է* p:n *հարաբերության (և վոչ թե* n:p *հարաբերության, ինչպես ուղիղ համեմատականության ժամանակ)։*

214. Համեմատական բաժանման ավելի բարդ խնդրի մի օրինակ։ Ձեռագիրն արտատպելու համար վճարվեց 123 ռուբլի։ Արտատպեցին յերեք մեքենագրուհի, վորոնցից առաջինն աշխատեց 8 ժամ, մի ժամում արտատպելով 6-ական եջ. յերկրորդն աշխատեց 6 ժամ, մի ժամում արտատպելով 10-ական եջ, յերրորդն աշխատեց 7 ժամ, մի ժամում արտատպելով 8-ական եջ։ Ինչքա՞ն վաստակեց յուրաքանչյուր մեքենագրուհին։

Յեթե բոլոր յերեք մեքենագրուհիների աշխատանքի արտադրողականությունը միահավասար լիներ, ապա վաստակած գումարը պետք է համեմատական չափով բաշխել ըստ աշխատանքի ժամանակի։ Մյուս կողմից, յեթե նրանք բոլորն էլ աշխատեյին հավասար թվով ժամեր, ապա աշխատավարձը պետք եր բաշխել համեմատական նրանց աշխատանքի արտադրողականության։ Բայց բոլոր յերեք մեքենագրուհիների թե աշխատանքի ժամանակը և թե աշխատանքի արտադրողականությունը տարբեր են։ Այդ պատճառով այս խնդիրը լուծելու համար դատում ենք այսպես։ Առաջին մեքենագրուհին աշխատելով 8 ժամ՝ մի ժամում արտատպեց 6 եջ, հետևապես ընդամենը արտատպեց 6.8 (եջ), ճիշտ նույնպես յերկրորդն արտատպեց 10.6 (եջ) և յերրորդը՝ 7.8 (եջ)։ Ուստի աշխատավարձի ընդհանուր գումարը, այսինքն՝ 123 ռուբլին, պետք է բաժանվի 6.8, 10.6 և 8.7 արտադրյալներին համեմատական, այսինքն՝ 48, 60 և 56 թվերին, կամ, կրճատումից հետո, 12, 15, 14 թվերին համեմատական մասերի։ Վորոնելի թվերը նշանակելով x_1, x_2, x_3, *գտնում ենք.*

$$x_1=\frac{123\cdot 12}{12+15+14}=\frac{123\cdot 12}{41}=3\cdot 12=36 \text{ (ռուբլի)։}$$

$$x_2=\frac{123\cdot 15}{41}=3\cdot 15=45 \text{ (ռուբլի),}$$

$$x_3=\frac{123\cdot 14}{41}=3\cdot 14=42 \text{ (ռուբլի)։}$$

6000-ից ՉԱՆՑՆՈՂ ՊԱՐԶ ԹՎԵՐԻ ԱՂՅՈՒՍԱԿԸ

2	241	571	919	1289	1663	2081	2467	2879	3329	3733
3	251	577	929	1291	1667	2083	2473	2887	3331	3739
5	257	587	937	1297	1669	2087	2477	2897	3343	3761
7	263	593	941	1301	1693	2089	2503	2903	3347	3767
11	269	599	947	1303	1697	2099	2521	2909	3359	3769
13	271	601	953	1307	1699	2111	2531	2917	3361	3779
17	277	607	967	1319	1709	2113	2539	2927	3371	3793
19	281	613	971	1321	1721	2129	2543	2939	3373	3797
23	283	617	977	1327	1723	2131	2549	2953	3389	3803
29	293	619	983	1361	1733	2137	2551	2957	3391	3821
31	307	631	991	1367	1741	2141	2557	2963	3407	3823
37	311	641	997	1373	1747	2143	2579	2969	3413	3833
41	313	643	1009	1381	1753	2153	2591	2971	3433	3847
43	317	647	1013	1399	1759	2161	2593	2999	3449	3851
47	331	653	1019	1409	1777	2179	2609	3001	3457	3853
53	337	659	1021	1423	1783	2203	2617	3014	3461	3863
59	347	661	1031	1427	1787	2207	2621	3019	3463	3877
61	349	673	1033	1429	1789	2213	2633	3023	3467	3881
67	353	677	1039	1433	1801	2221	2647	3037	3469	3889
71	359	683	1049	1439	1811	2237	2657	3041	3491	3907
73	367	691	1051	1447	1823	2239	2659	3049	3499	3911
79	373	701	1061	1451	1831	2243	2663	3061	3511	3917
83	379	709	1063	1453	1847	2251	2671	3067	3517	3919
89	383	719	1069	1459	1861	2267	2677	3079	3527	3923
97	389	727	1087	1471	1867	2269	2683	3083	3529	3929
101	397	733	1091	1481	1871	2273	2687	3089	3533	3931
103	401	739	1093	1483	1873	2281	2689	3109	3539	3943
107	409	743	1097	1487	1877	2287	2693	3119	3541	3947
109	419	751	1103	1489	1879	2293	2699	3121	3547	3967
113	421	757	1109	1493	1889	2297	2707	3137	3557	3989
127	431	761	1117	1499	1901	2309	2711	3163	3559	4001
131	433	769	1123	1511	1907	2311	2713	3167	3571	4003
137	439	773	1129	1523	1913	2333	2719	3169	3581	4007
139	443	787	1151	1531	1931	2339	2729	3181	3583	4013
149	449	797	1153	1543	1933	2341	2731	3187	3593	4019
151	457	809	1163	1549	1949	2347	2741	3191	3607	4021
157	461	811	1171	1553	1951	2351	2749	3203	3613	4027
163	463	821	1181	1559	1973	2357	2753	3209	3617	4049
167	467	923	1187	1567	1979	2371	2767	3217	3623	4051
173	479	827	1193	1571	1987	2377	2777	3221	3631	4057
179	487	829	1201	1579	1993	2381	2789	3229	3637	4073
181	491	839	1213	1583	1997	2383	2791	3251	3643	4079
191	499	853	1217	1597	1999	2389	2797	3253	3659	4091
193	503	857	1223	1601	2003	2393	2801	3257	3671	4093
197	509	859	1229	1607	2011	2399	2803	3259	3673	4099
199	521	863	1231	1609	2017	2411	2819	3271	3677	4111
211	523	877	1237	1613	2027	2417	2833	3299	3691	4127
223	541	881	1249	1619	2029	2423	2837	3301	9697	4129
227	547	883	1259	1621	2039	2437	2843	3307	3701	4133
229	557	887	1277	1627	2053	2441	2851	3313	3709	4139
233	563	907	1279	1637	2063	2447	2857	3319	2719	4153
239	569	911	1283	1657	2069	2459	2861	3323	3727	4157

6000-ից ՉԱՆՑՆՈՂ ՊԱՐԶ ԹՎԵՐԻ ԱՂՅՈՒՍԱԿԸ

4159	4339	4517	4679	4877	5021	5209	5407	5557	5717	5869
4177	4349	4519	4691	4889	5023	5227	5413	5563	5737	5879
4201	4357	4523	4703	4903	5039	5231	5417	5569	5741	5881
4211	4363	4547	4721	4909	5051	5233	5419	5573	5743	5897
4217	4373	4549	4723	4919	5059	5237	5431	5381	5749	5903
4219	4391	4561	4729	4931	5077	5261	5437	5591	5779	5923
4229	4397	4567	4733	4933	5081	5273	5441	5623	5783	5927
4231	4409	4583	4751	4937	5087	5279	5443	5639	5791	5939
4241	4421	4591	4759	4943	5099	5281	5449	5641	5801	5953
4243	4423	4597	4783	4951	5101	5297	5471	5647	5807	5981
4253	4441	4603	4787	4957	5107	5303	5477	5651	5813	5987
4259	4447	4621	4789	4967	5113	5309	5479	5653	5821	
4261	4451	4637	4793	4969	5119	5323	5483	5657	5827	
4271	4457	4639	4799	4973	5147	5333	5501	5659	5839	
4273	4463	4643	4801	4987	5153	5347	5503	5669	5843	
4283	4481	4649	4813	4993	5167	5351	5507	5683	5849	
4289	4483	4651	4817	4999	5171	5381	5519	5689	5851	
4297	4493	4657	4831	5003	5179	5387	5521	5693	5857	
4327	4507	4663	4861	5009	5189	5393	5527	5701	5861	
4337	4513	4673	4871	5011	5197	5399	5531	5711	5867	

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Եջ

Վերամշակող հեղինակի առաջաբանը 3

Առաջին բաժին. Ամբողջ թվեր

I. Ամբողջ թվեր, նրանց անվանումը և նշանակումը . . 7
II. Թվարկության տարբեր սիստեմներ 14
III. Գումարում 18
IV. Հանում 23
V. Գործողության նշանները, հավասարության և անհավասարության նշանները։ Փակագծեր 29
VI. Բազմապատկում 31
VII. Բաժանում 48

Երկրորդ բաժին. Թվերի բաժանելիության մասին

I. Թվերի բաժանելիության հատկանիշները . . 65
II. Թվերի վերածումը պարզ բազմապատկիչների . . 74
III Բարդ թվի բաժանարարները գտնելը . . 84
IV. Մի քանի թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը . 85
V. Մի քանի թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը . 91

Երրորդ բաժին. Մեծությունների չափումը. չափերի մետրական սիստեմը

Չորրորդ բաժին. Սովորական (հասարակ) կոտորակներ

I. Հիմնական հասկացողություններ 106
II. Կոտորակի մեծության փոփոխությունը նրա անդամների փոփոխման հետևանքով 112
III. Կոտորակի կրճատումը 115
IV. Կոտորակներն ամենափոքր ընդհանուր հայտարարի բերելը . 118
V. Գործողություններ կոտորակային թվերով . . . 121

Հինգերորդ բաժին. Տասնորդական կոտորակներ

1. Տասնորդական կոտորակների հիմնական հատկությունները . 155
II. Գործողություններ տասնորդական կոտորակներով . . 161
III Հասարակ կոտորակներ տասնորդական դարձնելը . . 170
IV. Պարբերական կոտորակները հասարակ դարձնելը . . 177

Վեցերորդ բաժին. Համեմատական մեծություններ

I. Համեմատություններ 190
II. Մեծությունների համեմատական կախումը . . . 199
III. Խնդիրներ համեմատական բաժանման վերաբերյալ . . 206
6000-ից չանցնող պարզ թվերի աղյուսակը . . . 212

Պատ. խմբագիր՝ Ց. Արաջյան
Տեխ. խմբագիր՝ Ի. Վարդանյան
Սրբագրիչ՝ Մ. Մարտիկյան
Նոտրոլ սրբագրիչներ՝ Վ. Ավագյան, Հա. Մանուկյան։

ՎՐԻՊԱԿՆԵՐ

Եջ	Տող	Տպագրված է	Պետք է լինի
34	14 վերևից	խնդիրները	խնդիրը
78	13 ներքևից	rn 2=	rn—2=
89	22 վերևից	a_2	a_n
173	3 »	2.2.2.5.5.	2.2.2.5.5.5.
178	1 ներքևից	23	23 / 8
181	17 »	պարբերություն	տարբերություն
189	1 վերևից	բազմապատկիչնե	բազմապատկիչներ

Գլավլիտի լիազոր Վ.—1112. Հրատ. № 4971
Պատվեր 619. Տիրաժ 30000.
Տպագր. 12,5 մամ.
Մեկ մամ. 36,480 նշան.
Հանձնված է արտադրության 7/VII 1939 թ
Ստորագրված է տպագրության համար 22/VIII 1939 թ

Պետհրատի I տպարան, Երևան, Լենինի 65

2

ՀՀ Ազգային գրադարան
NL0259190

ԳԻՆԸ 1 Ռ. 70 ԿՈՊ.
ԿԱԶՄԸ 50 ԿՈՊ.