Ա. ԿԻՍԵԼՅՈՎ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

ՄԻՋ. ԴՊՐՈՑԻ
6, 7 ՅԵՎ 8 ԴԱՍԱՐԱՆՆԵՐԻ
ՀԱՄԱՐ

ՊԵՏՀՐԱՏ

Ա. ԿԻՍԵԼՅՈՎ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

ԱՌԱՋԻՆ ՄԱՍ

ԴԱՍԱԳԻՐՔ

ՎՈՉ ԼՐԻՎ ՄԻՋՆԱԿԱՐԳ ԵՎ ՄԻՋՆԱԿԱՐԳ
ԴՊՐՈՑԻ 6-ՐԴ, 7-ՐԴ ԵՎ 8-ՐԴ
ԴԱՍԱՐԱՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

ՉՈՐՐՈՐԴ ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Բնագիրը հաստատված է ՌՍՖՍՀ Լուսժողկոմատի կողմից

ՊԵՏԱԿԱՆ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 1938

ԱՌԱՋԻՆ ՀԱՏՎԱԾ

ՆԱԽՆԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐ

I. ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ՆՇԱՆԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆ

1. Տառերի գործածությունը՝ *ա) Թվերի ընդհանուր հատկությունների արտահայտելու համար։*

Դիցուք կամենում ենք գրավոր կերպ արտահայտել, որ երկու թվերի արտադրյալը չի փոխվի, եթե բազմապատկելին և բազմապատկիչի տեղերը փոխանակենք։ Այդ դեպքում մի թիվը նշանակելով a *տառով իսկ մյուսը՝* b *տառով, կարող ենք գրել հետևյալ հավասարությունը՝*

$$a \times b = b \times a, \text{ կամ ավելի կարճ } ab = ba,$$

եթե մի անգամ ընդմիշտ պայմանավորվենք, որ եթե իրար կողքի գրված երկու տառերի միջև վոչ մի նշան չկա, ապա այդ նշանակում է, որ նրանց միջև բազմապատկման նշան է ենթադրվում։

Այսպես են վարվում ամեն անգամ, եթե կամենում են արտահայտել, որ մի հատկություն պատկանում է վոչ թե ինչ որ առանձին թվերի, այլ ամեն տեսակ թվերի։

Թվերի նշանակման համար տառերը սովորաբար վերցնում են լատինական (կամ ֆրանսական) այբբենից։

բ) Կրճատ արտահայտելու համար այն կանոնը, որի միջոցով կարելի յե լուծել նման պայմաններ ունեցող խնդիրները, վորոնք իրարից տարբերվում են տվյալ թվերի մեծությամբ միայն։

Դիցուք, օրինակ՝ լուծում ենք հետևյալ խնդիրը․

Գտնել 520-ի 3%-ը

Այդ դեպքում այսպես ենք դատում.

վորևե թվի 1%-ը կազմում է այդ թվի $\frac{1}{100}$ մասը. կնշանակի՝

$$520\text{-ի } 1\%\text{-ը կազմում է } \frac{520}{100} = 5{,}2;$$

$$» \quad 3\%\text{-ը} \quad » \quad \frac{520}{100} \times 3 = 15{,}6,$$

Մի քանի այսպիսի խնդիրներ լուծելով՝ մենք նկատում ենք, վոր վորևե թվի տոկոսները գտնելու համար բավական է այդ թիվը բաժանել 100-ի վրա և ստացած քանորդը բազմապատկել տոկոսների թվով։ Այս դիտելիորեն արտահայտելու համար՝ խնդիրը կառաջարկենք հետևյալ ընդհանուր տեսքով՝

Գտնել a թվի p%-ը,

Խնդիրն այսպես կլուծենք.

$$a \text{ թվի } 1\%\text{-ը կազմում է } \frac{a}{100};$$

$$» \quad » \quad p\%\text{-ը} \quad » \quad \frac{a}{100} \times p։$$

Վորոնելի թիվը նշանակելով x տառով՝ մենք կարող ենք գրել հետևյալ հավասարությունը՝

$$x = \frac{a}{100} \times p,$$

վորից անմիջապես յերևում է, թե ինչպես կարելի յե գտնել տված վորևե թվի տոկոսները։

Վերցնենք մի ուրիշ որինակ։ Թվաբանության մեջ կոտորակների բազմապատկման կանոնը բառերով այսպես ենք արտահայտում՝ կոտորակը կոտորակով բազմապատկելու համար պետք է համարիչների արտադրյալը բաժանել հայտարարների արտադրյալի վրա։ Տառային նշանակումների օգնությամբ այս կանոնը կարող ենք շատ կարճ բանաձևել։ Իրոք, առաջին կոտորակի համարիչը նշանակելով a և հայտարարը b, իսկ յերկրորդ կոտորակինը համապատասխանաբար c և d, կարող ենք գրել՝

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{bd}։$$

Դժվար չե տեսնել, վոր այս գրությունը բազմապատկման

ընդհանուր կանոն է տալիս ամեն տեսակ կոտորակների համար, վորովհետև տառերի տակ մենք կարող ենք հասկանալ ամեն տեսակ թվեր։

Այդպես ել կոտորակների բաժանման կանոնի համար կունենանք հետևյալ գրությունը՝

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Նկատենք հետևյալը՝

Ամեն մի հավասարություն կամ անհավասարություն, վորը տառերի յեվ գործողությունների նշանների միջոցով վորևե առնչություն է արտահայտում թվերի միջև, կոչվում է բանաձև (կամ ֆորմուլ)։

Բերենք որինակի համար մի քանի բանաձևեր։

Յեթե ուղղանկյան հիմքը և բարձրությունը չափենք միևնույն գծային միավորով և հիմքի համար ստանանք b թիվը, իսկ բարձրության համար h թիվը, ապա այդ ուղղանկյան s մակերեսը, արտահայտած համապատասխան քառակուսի միավորներով, կորոշվի այսպիսի բանաձևով՝ $s = bh$։ Պահպանելով նույն նշանակումները, յեռանկյան մակերեսի համար կստանանք հետևյալ բանաձևը՝

$$s = \frac{1}{2} bh։$$

Ֆիզիկայից հայտնի յե, վոր վորևե նյութի տեսակարար կշիռը վորոշելու համար պետք է այդ նյութի տվյալ քանակի կշիռը բաժանել նրա ծավալի վրա։ Յեթե մարմնի կշիռը (գրամներով) նշանակենք p, նրա ծավալը (խորանարդ սանտիմետրներով) v և տեսակարար կշիռը d, ապա կարող ենք տեսակարար կշիռը վորոշելու այդ կանոնը կարճ արտահայտել հետևյալ բանաձևով՝

$$d = \frac{p}{v}։$$

2. Հանրահաշվական արտահայտություն. Յեթե տառերով (կամ տառերով և թվանշաններով) նշանակված մի քանի թվեր իրար հետ միացած են այնպիսի նշաններով, վորոնք նշում են, թե թվերի նկատմամբ ինչ գործողություններ և ինչ հաջորդականությամբ պետք է կատարել, ապա այդպիսի նշանակումը կոչվում է հանրահաշվական արտահայտություն։

Հանրահաշվական արտահայտության օրինակներ՝

$$\frac{a}{100}\times p, \quad ab, \quad 2x+1։$$

Կարճության համար հաճախ «հանրահաշվական արտահայտություն» ասելու փոխարեն կասենք «արտահայտություն»։

Վորևէ արտահայտություն հաշվել տառերի տվյալ թվային արժեքների համար՝ նշանակում է նրա մեջ տառերի փոխարեն դնել այդ թվային արժեքները և կատարել արտահայտության մեջ նշած բոլոր գործողությունները. այդպիսով ստացված թիվը կոչվում է հանրահաշվական արտահայտության թվական (թվային) մեծություն՝ տառերի տվյալ թվային արժեքների համար։

Այսպես օրինակ՝ $\frac{a}{100}\times p$ արտահայտության թվային արժեքը, յերբ $p=3$ և $a=520$, հավասար է՝

$$\frac{520}{100}\times 3=5,2\times 3=15,6։$$

3. Հանրահաշվի մեջ դիտվող գործողությունները հետևյալներն են՝ գումարում, հանում, բազմապատկում, բաժանում, աստիճանում (աստիճան բարձրացնելը) և արմատում (արմատ հանելը)։ Թե ինչ են առաջին չորս գործողությունները, այդ հայտնի յե թվաբանությունից։ Հինգերորդ գործողությունը՝ աստիճանումը, բազմապատկման մասնավոր դեպքն է, յերբ իրարով բազմապատկվում են մի քանի հավասար արտադրիչներ։ Այդպիսի արտադրիչների արտադրյալը կոչվում է աստիճան, իսկ նրանց թիվը՝ աստիճանի ցուցիչ (կամ աստիճանացույց)։ Աստիճան բարձրացվող թիվը կոչվում է աստիճանի հիմք։ Յեթե վորևէ թիվ իբրև արտադրիչ 2 անգամ է վերցվում, ապա արտադրյալը կոչվում է յերկրորդ աստիճան. յեթե վորևէ թիվ իբրև արտադրիչ 3 անգամ է վերցվում, ապա արտադրյալը կոչվում է յերրորդ աստիճան և այլն։ Այսպես օրինակ՝ 5-ի 2-րդ աստիճանը 5×5 արտադրյալն է, այսինքն 25-ը. $\frac{1}{2}$-ի յերրորդ աստիճանը $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ արտադրյալն է, այսինքն $\frac{1}{8}$-ը։ Թվի առաջին աստիճան կոչվում է հենց ինքը թիվը։

Յերկրորդ աստիճանն այլ կերպ կոչվում է քառակուսի, իսկ յերրորդ աստիճանը՝ խորանարդ։ Այդպիսի անուններ այն պատ-

ճառով են տրված, վոր $a\times a$ արտադրյալն արտահայտում է (քառակուսի միավորներով) այն քառակուսու մակերեսը, վորի կողմն a գծային միավոր յերկարություն ունի, իսկ $a\times a\times a$ արտադրյալն արտահայտում է (խորանարդ միավորներով) այն խորանարդի ծավալը, վորի կողմն a գծային միավոր յերկարություն ունի։

Արմատման մասին առայժմ չենք խոսի, վորովհետև այդ գործողությունը հանրահաշվի սկզբում քննության չի առնվում։

4. Հանրահաշվում գործածվող նշաններ։ Առաջին չորս գործողությունների նշանակման համար հանրահաշվի մեջ միևնույն նշաններն են գործածվում, ինչ վոր թվաբանության մեջ. միայն բազմապատկման նշանը, ինչպես արդեն ասացինք, սովորաբար չի գրվում, յեթե յերկու արտադրիչներն էլ, կամ նրանցից մեկը, նշանակված են տառերով։ Օրինակ՝ $a\times b$ (կամ $a\cdot b$) գրելու փոխարեն՝ գրում են ab, $3\times a$ գրելու փոխարեն՝ $3a$։ Իբրև բաժանման նշան գործածվում է, անխտիր, կամ կրկնակետ (:), կամ հորիզոնական գիծ. այսպես՝ $a:b$ և $\frac{a}{b}$ արտահայտությունները միևնույն են նշանակում, այսինքն, վոր a թիվը բաժանված է b թվի վրա։

Աստիճանումն ընդունված է կրճատ այսպես արտահայտել. գրում են այն թիվը, վորը վերցվում է իբրև արտադրիչ (աստիճանի հիմքը), և նրա վերևը աջ կողմից դնում են մյուս թիվը (աստիճանի ցուցիչը), վոր ցույց է տալիս, թե բարձրացվող թիվը քանի՞ անգամ պետք է կրկնվի իբրև արտադրիչ։ Այսպես օրինակ՝ 3^4-ը (կարդացվում է 3-ի չորրորդ աստիճանը) փոխարինում է հետևյալ մանրամասն նշանակմանը՝ $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3$։ Յեթե թվի մոտ աստիճանացույց չկա, ապա նրա աստիճանացույցը հասկացվում է 1. օրինակ՝ a նշանակում է նույնը, ինչ վոր a^1։

Վորևէ յերկու արտահայտությունների հավասարությունը նշանակվում է $=$ նշանով, իսկ անհավասարությունը $>$ (մեծ է) նշանով և $<$ (փոքր է) նշանով։ Օրինակ՝ յեթե գրված է.

$$5+2=7; \qquad 5+2>6; \qquad 5+2<10,$$

ապա այդ նշանակում է $5+2$ հավասար է 7-ի, $5+2$ մեծ է 6-ից, $5+2$ փոքր է 10-ից։

5. **Գործողությունների կարգը։** Թե ինչ կարգով պետք է կատարել հանրահաշվական արտահայտության մեջ նշված գործողությունները, այդ մասին պայմանավորվել են հետևյալը— Նախ կատարել աստիճանումն ու արմատումը, ապա բազմապատկումն ու բաժանումը յեվ վերջապես գումարումն ու հանումը։

Այսպես, յեթե գրված է $3a^2b-\frac{b^3}{c}+d$ արտահայտությունը, ապա նրա հաշվելու ժամանակ նախ պետք է կատարենք աստիճանումը (a թիվը քառակուսի բարձրացնել և b թիվը խորանարդ), ապա բազմապատկումն ու բաժանումը (3-ը բազմապատկել a^2-ով և ստացած արդյունքը b-ով. b^3-ը բաժանել c-ի վրա) և վերջապես հանումն ու գումարումը ($3a^2b$-ից հանել $\frac{b^3}{c}$ և արդյունքին գումարել d)։

Յերբ խնդրի պայմաններն այնպես են, որ կարիք է լինում շեղվել գործողությունների այս կարգից, ապա փակագծեր են գործածում։ Փակագծերը ցույց են տալիս, որ նրանց մեջ առնված թվերի նկատմամբ գործողությունները պետք է մյուսներից շուտ կատարել։

Այսպես, թվաբանությունից գիտենք, որ

$$5+7\cdot2 \qquad \text{և} \qquad (5+7)2$$

արտահայտությունները նույնը չեն նշանակում։ Առաջին դեպքում պետք է 7-ը բազմապատկել 2-ով և արդյունքը գումարել 5-ին (ստանում ենք 19)։ Յերկրորդ դեպքում նախ պետք է 5-ը և 7-ը գումարել և ապա արդյունքը բազմապատկել 2-ով (ստանում ենք 24)։

Նույնպես և յեթե գրված է՝

$$(a+b)c-d,$$

ապա այդ նշանակում է, որ նախ պետք է գումարել a և b-ն, այնուհետև ստացված թիվը բազմապատկել c-ով և ապա ստացածից հանել d։

Յեթե կարիք է լինում փակագծերի մեջ առնել մի այնպիսի արտահայտություն, որն արդեն փակագծեր ունի, ապա նոր

փակագծերին սովորաբար վորևե ուրիշ ձև են տալիս։ Որինակ, այս արտահայտությունը՝

$$a\{b-[c+(d-e)]\},$$

նշանակում է, որ d-ից հանված է e, ստացված տարբերությունը գումարված է c-ին, ստացված գումարը հանված է b-ից և այդ տարբերությամբ բազմապատկված է a-ն։

Փակագծերին սովորաբար այսպիսի անուններ են տալիս՝ կլոր կամ փոքր փակագծեր՝ ( ), քառակուսի կամ միջակ փակագծեր՝ [ ], ձևավոր կամ մեծ փակագծեր՝ { }։

Յերբ արտահայտության մեջ մի քանի տեսակ փակագծեր կան, ապա գործողությունները սովորաբար նախ կատարվում են փոքր փակագծերի մեջ առնված թվերի նկատմամբ, ապա միջակ փակագծերի մեջ գրվածների և ապա մեծ փակագծերի մեջ գրվածների նկատմամբ։

Փակագծերի մեջ նշված գործողությունները կատարելով մենք վոչնչացնում ենք, կամ ինչպես ասում են, «բացում ենք» փակագծերը։

Այսպես,

$$5\{24-2[10+2(6-2)-3(5-2)]\}$$

արտահայտության մեջ նախ բացում ենք փոքր փակագծերը՝

$$5\{24-2[10+2\cdot4-3\cdot3]\}$$

Այնուհետև բացում ենք միջակ փակագծերը՝

$$5\{24-2\cdot9\}.$$

Վերջապես բացում ենք մեծ փակագծերը՝

$$5\cdot6=30.$$

Վարժություններ

1. Քառակուսու կողմը հավասար է a մ-ի, արտահայտել նրա պարագիծը և մակերեսը։

2. Յեթե խորանարդի կողը հավասար է m սմ-ի, ինչպես կարտահայտվեն նրա մակերևույթը և ծավալը։

5. Գործողությունների կարգը։ *Թե ինչ կարգով պետք է կատարել հանրահաշվական արտահայտության մեջ նշված գործողությունները, այդ մասին պայմանավորվել են հետևյալը— Նախ կատարել աստիճանումն ու արմատումը, ապա բազմապատկումն ու բաժանումը յեվ վերջապես գումարումն ու հանումը։*

Այսպես, յեթե գրված է $3a^2b-\frac{b^3}{c}+d$ *արտահայտությունը, ապա նրա հաշվելու ժամանակ նախ պետք է կատարենք աստիճանումը (a թիվը քառակուսի բարձրացնել և b թիվը խորանարդ), ապա բազմապատկումն ու բաժանումը (3-ը բազմապատկել* a^2*-ով և ստացած արդյունքը b-ով.* b^3*-ը բաժանել c-ի վրա) և վերջապես հանումն ու գումարումը (*$3a^2b$*-ից հանել* $\frac{b^3}{c}$ *և արդյունքին գումարել d)։*

Յերբ խնդրի պայմաններն այնպես են, վոր կարիք է լինում շեղվել գործողությունների այս կարգից, ապա փակագծեր են գործածում։ Փակագծերը ցույց են տալիս, վոր նրանց մեջ առնված թվերի նկատմամբ գործողությունները պետք է մյուսներից շուտ կատարել։

Այսպես, թվաբանությունից գիտենք, վոր

$$5+7\cdot 2 \quad \text{և} \quad (5+7)2$$

արտահայտությունները նույնը չեն նշանակում։ Առաջին դեպքում պետք է 7-ը բազմապատկել 2-ով և արդյունքը գումարել 5-ին (ստանում ենք 19)։ Յերկրորդ դեպքում նախ պետք է 5-ը և 7-ը գումարել և ապա արդյունքը բազմապատկել 2-ով (ստանում ենք 24)։

Նույնպես և յեթե գրված է՝

$$(a+b)c-d,$$

ապա այդ նշանակում է, վոր նախ պետք է գումարել a և b-ն, այնուհետև ստացված թիվը բազմապատկել c-ով և ապա ստացածից հանել d։

Յեթե կարիք է լինում փակագծերի մեջ առնել մի այնպիսի արտահայտություն, վորն արդեն փակագծեր ունի, ապա նոր

փակագծերին սովորաբար վորևե ուրիշ ձև են տալիս։ Որինակ, այս արտահայտությունը՝

$$a\{b-[c+(d-e)]\},$$

նշանակում է, վոր d-ից հանված է e, ստացված տարբերությունը գումարված է c-ին, ստացված գումարը հանված է b-ից և այդ տարբերությամբ բազմապատկված է a-ն։

Փակագծերին սովորաբար այսպիսի անուններ են տալիս՝ կլոր կամ փոքր փակագծեր՝ ( ), քառակուսի կամ միջակ փակագծեր՝ [ ], ձևավոր կամ մեծ փակագծեր՝ { }։

Յերբ արտահայտության մեջ մի քանի տեսակ փակագծեր կան, ապա գործողությունները սովորաբար նախ կատարվում են փոքր փակագծերի մեջ առնված թվերի նկատմամբ, ապա միջակ փակագծերի մեջ գրվածների և ապա մեծ փակագծերի մեջ գրվածների նկատմամբ։

Փակագծերի մեջ նշված գործողությունները կատարելով մենք վոչնչացնում ենք, կամ ինչպես ասում են, «բացում ենք» փակագծերը։

Այսպես,

$$5\{24-2[10+2(6-2)-3(5-2)]\}$$

արտահայտության մեջ նախ բացում ենք փոքր փակագծերը՝

$$5\{24-2[10+2\cdot 4-3\cdot 3]\}$$

Այնուհետև բացում ենք միջակ փակագծերը՝

$$5\{24-2\cdot 9\}.$$

Վերջապես բացում ենք մեծ փակագծերը՝

$$5\cdot 6=30։$$

Վարժություններ

1. Քառակուսու կողմը հավասար է a մ-ի, արտահայտել նրա պարագիծը և մակերեսը։

2. Յեթե խորանարդի կողը հավասար է m սմ-ի, ինչպես կարտահայտվեն նրա մակերեսույթը և ծավալը։

3. Ուղղանկյան հիմքը x մ է, իսկ բարձրությունը d մ-ով կարճ է հիմքից։ Արտահայտել նրա մակերեսը։

4. Մի յերկնիշ թիվ բաղկացած է x տասնավորներից և y պարզ միավորներից. ընդամենը քանի՞ միավորներ կան այդ թվի մեջ։

5. Յեռանիշ թվի մեջ կա a հարյուրավոր, b տասնավոր և c պարզ միավոր։ Ի՞նչ բանաձևով կարելի յե արտահայտել այդ թվի մեջ յեղած բոլոր միավորների թիվը։

6. Իրար հետ խառնել են 2 տեսակի թեյ. առաջին տեսակից վերցրած է a կգ, յերկրորդից՝ b կգ։ Առաջին տեսակի թեյի կիլոգրամն արժե m ռուբլի, յերկրորդինը n ռուբլի։ Արտահայտել խառնուրդի մի կիլոգրամի գինը։

7. Հանրահաշվում ընդունված նշանների միջոցով գրել.

ա) x և y թվերի քառակուսիների գումարը.

բ) x և y թվերի գումարի քառակուսին.

գ) x և y թվերի քառակուսիների արտադրյալը.

դ) x և y թվերի արտադրյալի քառակուսին.

ե) a և b թվերի գումարի և նրանց տարբերության արտադրյալը.

զ) m և n թվերի գումարի և նրանց տարբերության քանորդը (վերջինս արտահայտել յերկու ձևով, այսինքն թե : նշանի և թե գծի միջոցով)։

8. Հաշվել հետևյալ արտահայտությունները, յեթե $a=20$, $b=8$ և $c=3$.

ա) $(a+b)c$ բ) $a+bc$ գ) $(a+b)a-b$

դ) $(a+b)(a-b)$ ե) $(a+b):c$ զ) $\frac{a+b}{b-c}$.

9. Գրել այն արտահայտությունը, վորը կստացվի, յեթե $3ab$ արտադրյալի մեջ a-ի տեղ դնենք $x+y$ գումարը և b-ի տեղը $x-y$ տարբերությունը։

Պատմական տեղեկություններ

«Հանրահաշիվը» օտար բառով կոչվում է «ալգեբրա». այս բառն արաբական ծագում ունի։ Այս բառով էր սկսվում այն մաթեմատիկական աշխատության վերնագիրը, վոր գրել է արաբ գիտնական Ալխվարիզմին (820 թ.)։

Յեվրոպայում այս բառն առաջին անգամ գործածեց, իբրև իր մաթեմատիկական աշխատության վերնագիր, իտալացի մաթեմատիկոս Բոմբելլին 1572 թվին, վորից հետո հետզհետե սկսեցին գործածել բոլոր մաթեմատիկոսները։

Այս բառի նշանակությունը հասկանալի կլինի հավասարումների գլուխն անցնելուց հետո։

Թվերի նշանակման համար տառերի գործածությունն առաջին անգամ մտցրել է ֆրանսացի մաթեմատիկոս Վիետան 1591 թվին։ Նրանից հետո տառային նշանակումները հատկապես լայն չափերով գործածել է ֆրանսացի հռչակավոր փիլիսոփա և մաթեմատիկոս Ռենե Դեկարտը (1596—1650 թթ.)։

Հանրահաշվի մեջ ներկայումս գործածվող նշանները մտցված են տարբեր մաթեմատիկոսների կողմից տարբեր ժամանակներում։ Առաջները գործողությունների նշանակման համար գործ էյին ածում ամբողջ բառ և նույնիսկ նախադասություն։

Ավելի արագ հաշվումներ կատարելու գործնական պահանջը փորձեր էր առաջացնում առանձին, ամենից ավելի գործածական բառերը կրճատելու, մինչև վոր, վերջապես, այդ բառերը կամ նրանց կրճատումները փոխարինվեցին հատուկ նշաններով։ Նշենք ամենից ավելի գործածական նշանների առաջացման ժամանակը։

Գումարման և հանման նշանները՝ «+» և «—», մտցրել է գերմանացի մաթեմատիկոս Վիդմանը 1489 թվին։ Դեռ նրանից էլ առաջ այդ նշանները պատահում են իտալացի մեծ նկարիչ Լեոնարդո-դա-Վինչիի ձեռագրերում։

Հավասարության նշանակման համար անգլիացի հանրահաշվարան Ռեկորդը մտցրեց (1557 թվին) «=» նշանը, «վորովհետև,—ինչպես նա գրում է,—վորևէ յերկու առարկաներ չեն կարող ավելի հավասար լինել, քան միևնույն յերկարությունն ունեցող յերկու զուգահեռ ուղիղներ»։ Անգլիացի մի ուրիշ մաթեմատիկոս՝ Խերրիոտը, մտցրեց «$<$» և «$>$» նշանները (1631 թվին) և կետը՝ իբրև բազմապատկման նշան։

Գերմանացի մեծ մաթեմատիկոս Լայբնիցն առաջինը յեղավ, վոր մտցրեց (1694 թ.) «:» նշանը բաժանման նշանակման համար. բաժանումը նախքան այդ՝ գծով էր նշանակվում։

Փակագծերը՝ ( ), [ ] և { }, առաջին անգամ պատահում են ֆլամանդացի մաթեմատիկոս Ժիրարի գործերում (1629 թվին)։

Այս բոլոր նշանները միանգամից չեն գործածության մեջ մտել։ Մաթեմատիկոսներից վոմանք դեռևս շարունակում էյին ոգտվել մասամբ հին նշանակումներով։ Հանրահաշվական նշանների ամբողջությունն իր ներկա տեսքով կարելի յե վերջնականորեն կայունացած համարել միայն 18-րդ դարի վերջերին։ Այդ տեսակետից հսկայական ազդեցություն են արել անգլիացի մեծ գիտնական Իսահակ Նյուտոնի (1642—1727 թթ.) աշխատությունները։

II. ԱՌԱՋԻՆ ՉՈՐՍ ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Վերհիշենք գումարման, հանման, բազմապատկման և բաժանման գործողությունների ամենագլխավոր հատկությունները, վորոնք արդեն հայտնի յեն թվաբանությունից, և վորոնք մեզ հանրահաշվի մեջ ևս շատ հաճախ պետք են գալու։

6. Գումարում։ *ա)* Գումարը չի փոխվում գումարելիների տեղափոխությունից (գումարման տեղափոխական որենք)։ Այսպես՝

$$3+8=8+3; \qquad 5+2+4=2+5+4=4+2+5.$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$a+b=b+a; \qquad a+b+c+\ldots=b+a+c+\ldots=c+a+b+\ldots$$

Այստեղ բազմակետը ցույց է տալիս, վոր գումարելիների թիվը կարող է յերեքից ավելի լինել։

բ) Մի քանի գումարելիների գումարը չի փոխվիլ, յեթե նրանցից մի քանիսը փոխարինենք նրանց գումարով (գումարման զուգորդական որենք)։ Այսպես՝

$$3+5+7=3+(5+7)=3+12=15;$$

$$4+7+11+6+5=7+(4+5)+(11+6)=7+9+17=33.$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$a+b+c=a+(b+c)=b+(a+c) \text{ և այլն.}$$

Այս որենքը յերբեմն այսպես են արտահայտում՝ գումարելիները կարելի յե ցանկացած ձևով խմբավորել։

գ) Վորպեսզի վորևէ թվի ավելացնենք մի քանի թվերի գումարը, կարող ենք այդ թվին ավելացնել մեկը մյուսի յետևից ամեն մի գումարելին առանձին։ Այսպես՝

$$5+(7+3)=(5+7)+3=12+3=15.$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$a+(b+c+d+\ldots)=a+b+c+d+\ldots$$

7. Հանում։ *ա)* Վորպեսզի վորևէ թվից հանենք մի քանի թվերի գումարը, կարող ենք հանել մեկը մյուսի յետևից ամեն մի գումարելին առանձին։ Այսպես՝

$$20-(5+8)=(20-5)-8=15-8=7.$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$a-(b+c+d+\ldots)=a-b-c-d-\ldots$$

բ) Յերկու թվերի տարբերությունը գումարելու համար կարելի յե ավելացնել նվազելին յեվ հանել հանելին։ Այսպես՝

$$8+(11-5)=8+11-5=14.$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$a+(b-c)=a+b-c.$$

գ) Յերկու թվերի տարբերությունը հանելու համար կարելի յե հանել նվազելին յեվ ավելացնել հանելին, կամ նախ գումարել հանելին յեվ ապա հանել նվազելին։ Այսպես՝

$$18-(9-5)=18-9+5=14.$$

կամ

$$18-(9-5)=18+5-9=14.$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$a-(b-c)=a-b+c,$$

կամ

$$a-(b-c)=a+c-b:$$

8. Բազմապատկում։ *ա) Արտադրյալը չի փոխվում արտադրիչների տեղափոխությունից (բազմապատկման տեղափոխական օրենք)։ Այսպես՝*

$$4\cdot5=5\cdot4; \qquad 3\cdot2\cdot5=2\cdot3\cdot5=5\cdot3\cdot2:$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$ab=ba; \qquad abc\ldots=bac\ldots=cba\ldots$$

բ) Մի քանի արտադրիչների արտադրյալը չի փոխվում, երբ նրանցից մի քանիսը փոխարինում ենք նրանց արտադրյալով (բազմապատկման զուգորդական օրենք)։ Այսպես՝

$$7\cdot3\cdot5=5\cdot(3\cdot7)=5\cdot21=105:$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$abc=a(bc)=b(ac) \text{ և այլն։}$$

գ) Մի թիվ մի քանի թվերի արտադրյալով բազմապատկելու համար կարելի է այդ թիվը բազմապատկել առաջին արտադրիչով, ստացված արդյունքը բազմապատկել երկրորդ արտադրիչով և այսպես շարունակել։ Այսպես՝

$$3\cdot(5\cdot4)=(3\cdot5)\cdot4=15\cdot4=60:$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$a(bcd\ldots)=abcd\ldots$$

դ) Մի քանի թվերի արտադրյալը որևէ թվով բազմապատկելու համար կարելի է այդ թվով բազմապատկել արտադրիչներից մեկը, թողնելով մյուսներն անփոփոխ։ Այսպես՝

$$(3\cdot2\cdot5)\cdot3=(3\cdot3)\cdot2\cdot5=3\cdot(2\cdot3)\cdot5=3\cdot2(5\cdot3):$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$(abc\ldots)m=(am)bc\ldots=a(bm)c\ldots=ab(cm)\ldots \text{ և այլն։}$$

ե) Երկու կամ մի քանի թվերի գումարը որևէ թվով բազմապատկելու համար կարելի է ամեն մի գումարելին այդ թվով բազմապատկել և ստացված արդյունքները գումարել։ Այսպես՝

$$(5+3)7=5\cdot7+3\cdot7$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$(a+b+c+\ldots)m=am+bm+cm+\ldots$$

Նկատի ունենալով բազմապատկման տեղափոխական օրենքը, այս հատկությունը կարելի է այսպես արտահայտել՝ որևէ թիվ մի քանի թվերի գումարով բազմապատկելու համար՝ կարելի է այդ թիվը բազմապատկել ամեն մի գումարելիով առանձին և ստացված արդյունքները գումարել։ Այսպես՝

$$5\cdot(4+6)=5\cdot4+5\cdot6$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$m(a+b+c+\ldots)=ma+mb+mc+\ldots$$

Այս հատկությունը կոչվում է բազմապատկման բաշխական օրենք, որովհետև գումարի նկատմամբ կատարվող բազմապատկումը բաշխվում է առանձին գումարելիների վրա։

զ) Բաշխական օրենքը կարելի է կիրառել նաև տարբերության վրա։ Այսպես՝

$$(8-5)\cdot4=8\cdot4-5\cdot4; \qquad 7(9-6)=7\cdot9-7\cdot6.$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$(a-b)c=ac-bc; \qquad a(b-c)=ab-ac,$$

այսինքն՝ տարբերությունը որևէ թվով բազմապատկելու համար կարելի է զատ-զատ բազմապատկել նվազելին և հանելին և ապա առաջին արդյունքից հանել երկրորդը․ որևէ թիվ մի տարբերությամբ բազմապատկելու համար կարելի է այդ թիվը բազմապատկել նվազելիով առանձին և հանելիով առանձին և առաջին արդյունքից հանել երկրորդը։

Գ. ԲԱԺԱՆՈՒՄ ա) Գումարը որևէ թվի վրա բաժանելու համար կարելի յե ամեն մի գումարելին առանձին բաժանել այդ թվի վրա յեվ ստացած արդյունքները գումարել։ Օրինակ՝

$$(30+12+5):3=\frac{30}{3}+\frac{12}{3}+\frac{5}{3}=10+4+1\frac{2}{3}.$$

Ընդհանուր ձևով

$$(a+b+c+\dots):m=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\dots$$

բ) Տարբերությունը որևէ թվի վրա բաժանելու համար կարելի յե նվազելին առանձին յեվ հանելին առանձին բաժանել այդ թվի վրա յեվ ապա առաջին արդյունքից յերկրորդը հանել։

$$(20-8):5=\frac{20}{5}-\frac{8}{5}=4-1\frac{3}{5}.$$

Ընդհանուր ձևով

$$(a-b):m=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}.$$

գ) Արտադրյալը որևէ թվի վրա բաժանելու համար կարելի յե արտադրիչներից մեկը բաժանել այդ թվի վրա, թողնելով մյուսներն անփոփոխ։

$$(40\cdot12\cdot8):4=10\cdot12\cdot8=40\cdot3\cdot8=40\cdot12\cdot2.$$

Ընդհանուր ձևով՝

$(abc\dots):m=(a:m)\,bc\dots=a\,(b:m)\,c\dots$ և այլն։

դ) Որևէ թիվ մի քանի թվերի արտադրյալի վրա բաժանելու համար կարելի յե այդ թիվը բաժանել առաջին արտադրիչի վրա, ստացած քանորդը բաժանել յերկրորդ արտադրիչի վրա, յեվ այսպես շարունակել։

$$120:(2\cdot5\cdot3)=60:(5\cdot3)=12:3=4.$$

Ընդհանուր ձևով՝

$a:(bcd\dots)=[(a:b):c]:d\dots$ և այլն։

ե) Նշենք բաժանման հետևյալ կարևոր հատկությունը ևս.

Յեթե բաժանելին յեվ բաժանարարը բազմապատկենք (կամ բաժանենք) միևնույն թվով, ապա քանորդը չի փոխվի։

Այս հատկությունն ստուգենք հետևյալ յերկու օրինակներով՝

$$1)\ 8:3=\frac{8}{3}.$$

բաժանելին ու բաժանարարը բազմապատկենք, ասենք թե, 5-ով. կստանանք՝

$$(8\cdot5):(3\cdot5)=\frac{8\cdot5}{3\cdot5}=\frac{40}{15},$$

որը 5-ով կրճատելուց հետո կտա նախկին քանորդը՝ $\frac{8}{3}$.

$$2)\ \frac{3}{4}:\frac{5}{6}=\frac{3\cdot6}{4\cdot5}.$$

Բաժանելին և բաժանարարը բազմապատկենք, օրինակ՝ $\frac{2}{7}$-ով. նոր քանորդը կլինի՝

$$\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}\right):\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{7}\right),$$

որը, կոտորակների բազմապատկման և բաժանման կանոնների համաձայն, հավասար է՝

$$\frac{3\cdot2}{4\cdot7}:\frac{5\cdot2}{6\cdot7}=\frac{3\cdot2\cdot(6\cdot7)}{4\cdot7\cdot(5\cdot2)}=\frac{3\cdot2\cdot6\cdot7}{4\cdot7\cdot5\cdot2},$$

որը 2-ով և 7-ով կրճատելուց հետո տալիս է նախկին քանորդը՝ $\frac{3\cdot6}{4\cdot5}$.

Ընդհանրապես, ինչպիսի թվեր էլ որ լինեն a, b և m թվերը յեթե միայն m-ը զերո չէ, միշտ կունենանք $(am):(bm)=a:b$, որ կարելի յե նաև այսպես գրել.

$$\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}.$$

Ինչպես որ քանորդը չի փոխվում, յերբ բաժանելին և բաժանարարը բազմապատկում ենք միևնույն թվով, նույնպես էլ նա չի փոխվում նաև այն դեպքում, յերբ բաժանելին և բաժանարարը բաժանում ենք միևնույն թվի վրա, վորովհետև վորևէ թվի վրա բաժանելը համազոր է նրա հակադարձ թվով բազմապատկելուն։

10. Գործողությունների հատկությունների կիրառումը։ Գործողությունների այն հատկություններից, վոր նշեցինք, կարելի յե ոգտվել հանրահաշվական արտահայտությունների ձևափոխման համար. որինակ՝

ա) $a+b+a+2+b+a+8$։ Ոգտվելով գումարման զուգորդական հատկությունից՝ գումարելիներն այսպես կխմբավորենք՝

$$(a+a+a)+(b+b)+(2+8)։$$

Այս գումարն ավելի կարճ կարելի յե այսպես գրել՝

$$(a\cdot 3)+(b\cdot 2)+10,$$

վորը, ոգտվելով բազմապատկման տեղափոխական հատկությունից, կարելի յե այսպես գրել՝

$$3a+2b+10։$$

բ) $a+(b+a)$։ Վորպեսզի a թվին ավելացնենք $(b+a)$ գումարը, կարելի յե a-ին գումարել b և ապա ելի a. կստանանք $a+b+a$։ Գումարելիներն այսպես խմբավորենք՝

$$(a+a)+b։$$

Այս գումարն ավելի կարճ կարելի յե այսպես գրել. $a\cdot 2+b$ և կամ $2a+b$։

գ) $a\cdot(3x^2a)$։ Վորպեսզի a թիվը բազմապատկենք $3x^2a$ արտադրյալով, կարելի յե a-ն բազմապատկել 3-ով, ստացած արդյունքը բազմապատկել x^2-ով և նոր ստացած արդյունքն ել a-ով։ Կստանանք՝ $a\cdot 3x^2a$։ Այս արտադրյալը կարելի յե գրել՝ $3a^2x^2$, յեթե տառերը գրենք այբբենական կարգով և թվային արտադրիչն սկզբում։

դ) $\left(\frac{1}{5}ax\right)\cdot 10$։ Արտադրյալը 10-ով բազմապատկելու համար կարելի յե 10-ով բազմապատկել վորևէ արտադրիչը։ Բազմապատկենք $\frac{1}{5}$-ը 10-ով. կստանանք $2ax$։

ե) $(a+x+1)\cdot 3$։ Բազմապատկման բաշխական որենքի համաձայն կունենանք՝ $(a\cdot 3)+(x\cdot 3)+(1\cdot 3)$, վոր կարելի յե այսպես գրել՝ $3a+3x+3$։

զ) $\frac{9ab}{3}$։ Արտադրյալը վորևէ թվի վրա բաժանելու համար կարելի յե մի արտադրիչը բաժանել այդ թվի վրա. այստեղ $9ab$ արտադրյալի 9 արտադրիչը կբաժանենք 3-ի վրա և կստանանք $3ab$։

Վարժություններ

Պարզեցնել հետևյալ արտահայտությունները, ամեն անգամ բացատրելով, թե գործողությունների ինչ հատկություններից ենք ոգտվում յուրաքանչյուր որինակում՝

10.	$a+b+a+b+a$	$x+10+(12-x)+3$
11.	$5+a(b-5)+a$	$x+(a+x)$
12.	$m+(n-m)$	$5\,aabxabxx$
13.	$(3xy)\cdot(2z)$	$\left(\frac{2}{3}ax\right)\cdot 3$
14.	$(x+3)\cdot 5$	$7(x+y+z)$
15.	$(2a+8b-4c):4$	$(10a^2b):2$
16.	$(72x-18y):9$	$(20a^2x^3:5ax^2)$
17.	$\frac{a}{4}:\frac{b}{4}$	$\frac{15ax}{7}:\frac{5a}{7}$

ԵՐԿՐՈՐԴ ՀԱՏՎԱԾ

ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՆԿԱՏՄԱՄԲ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

I. ԳԱՂԱՓԱՐ ԱՅՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ, ՈՐՈՆՔ ԿԱՐՈՂ ԵՆ ԴԻՏՎԵԼ ԵՐԿՈՒ ՀԱԿԱԴԻՐ ԻՄԱՍՏՆԵՐՈՎ

11. *Խ ն դ ի ր 1. Ջերմաչափը կես գիշերին ցույց էր տալիս 2 աստիճան, իսկ կեսօրին՝ 5 աստիճան։ Քանի՞ աստիճանով է փոփոխվել ջերմաստիճանը կեսգիշերից մինչև կեսօր։*

Այս խնդրում պայմանները բավականաչափ որոշ չեն արտահայտված. պետք է նաև նշել՝ ջերմաչափը կեսգիշերին տաքության 2° էր ցույց տալիս, թե ցրտության 2°. Նման ցուցմունքներ պետք է անել նաև կեսօրվա ջերմաստիճանի նկատմամբ. Եթե և՛ կեսգիշերին, և՛ կեսօրին ջերմաչափը տաքություն էր ցույց տալիս, ապա ջերմաստիճանն այդ ժամանակամիջոցում տաքության 2°-ից բարձրացել է մինչև տաքության 5°-ը, կնշանակի բարձրացել է 3°-ով. սակայն եթե կեսգիշերին ջերմաչափը ցույց էր տալիս ցրտության 2° (0°-ից ցած), իսկ կեսօրին տաքության 5° (0°-ից բարձր), ապա ջերմաստիճանը բարձրացել է $2+5$ աստիճանով, այսինքն 7°-ով։ Կարող էր նաև պատահել, որ ջերմաստիճանը կեսգիշերին ցրտության 2° լիներ, իսկ կեսօրին նույնպես ցրտության 5° (այդ դեպքում ջերմաստիճանը ոչ թե բարձրացած կլիներ, այլ 3° իջած), կամ կարող էր պատահել, որ ջերմաստիճանը կեսգիշերին տաքության 2° լիներ, իսկ կեսօրին ցրտության 5°. (այդ դեպքում ջերմաստիճանն իջած կլիներ 7°-ով)։

Այս խնդրում խոսքը վերաբերում է այնպիսի մեծության, որն ուղղություն ունի՝ ջերմաստիճանի աստիճանների թիվը

կարող է ջերմաչափի զերոյագծից թե՛ դեպի վերև և թե՛ դեպի ներքև վերցվել։ Ընդունված է 0°-ից բարձր ջերմաստիճանը (տաքությունը) դրական համարել և այդ նշանակել աստիճանների թվի առաջ + նշան դնելով, իսկ 0°-ից ցած ջերմաստիճանը (ցրտությունը) բացասական համարել և այդ նշանակել աստիճանների թվի առաջ — նշան դնելով (թյուրիմացություն չի առաջանա, եթե առաջին թիվը բոլորովին առանց նշանի վերցնենք)։

Այժմ մեր խնդիրն այսպես արտահայտենք. ջերմաչափը կեսգիշերին ցույց էր տալիս -2°, իսկ կեսօրին $+5^\circ$։ Քանի՞ աստիճանով է փոփոխվել ջերմաստիճանը կեսգիշերից մինչև կեսօր։ Այս տեսքով խնդիրը միանգամայն որոշ պատասխան է ստանում, այն է՝ ջերմաստիճանը բարձրացավ $2+5$, այսինքն 7 աստիճանով։

Խ ն դ ի ր 2. Երբ (Մոսկվան Լենինգրադի հետ միացնող) Հոկտեմբերյան երկաթգծի արագընթաց գնացքը 100 կիլոմետր հեռավորության վրա էր գտնվում Բոլոգոյե կայարանից (այս կայարանը գտնվում է Մոսկվայի և Լենինգրադի միջև) այն ժամանակ այդ գծի փոստատար գնացքը գտնվում էր Բոլոգոյեից 50 կիլոմետրի վրա։ Ի՞նչ հեռավորության վրա էին գտնվում այդ գնացքներն իրարից այդ ժամանակ։

Այս տեսքով խնդիրը լրիվին որոշ չէ. իսկապես նրա մեջ չի ասված՝ երկու գնացքներն էլ Բոլոգոյեից դեպի մի՞ կողմ էին գտնվում, օրինակ դեպի Լենինգրադ, թե մեկը դեպի մի կողմ, իսկ մյուսը դեպի մյուս կողմ։ Եթե երկուսն էլ դեպի մի կողմ էին գտնվում, ապա նրանց հեռավորությունը եղել է $100-50$, այսինքն 50 կիլոմետր. իսկ եթե դեպի տարբեր կողմեր էին գտնվում, ապա նրանց հեռավորությունը եղել է $100+50$, այսինքն 150 կիլոմետր։ Ուրեմն, որպեսզի այս խնդիրը որոշ լինի, բավական չէ միայն իմանալ գնացքների հեռավորությունը Բոլոգոյեից, այլ պետք է նաև նշել, թե այդ հեռավորությունները ինչ ուղղություններով պետք է վերցնենք Բոլոգոյեից։

Այստեղ դարձյալ ունենք այնպիսի մեծության օրինակ, որի մեջ, բացի չափից, դիտում ենք նաև ուղղությունը։ Ուրեմն մի որևէ գծի (օրինակ՝ երկաթգծի) վրա նրա որոշ տեղից (օրինակ՝ Բոլոգոյե կայարանից) մի վորոշ հեռավորություն կարող ենք վերցնել թե մի ուղղությամբ (որինակ՝ դեպի Մոսկվա) և թե մյուս, հակադիր ուղղությամբ (որինակ՝ դեպի Լենինգրադ)։

Սովորական (թվաբանական) թվերը բավական չեն, վորպեսզի արտահայտեն հեռավորությունների թե չափը և թե ուղղությունը։ Պայմանավորվենք այսպիսի դեպքերում հետևյալ կերպ վարվել։

Հոկտեմբերյան գծի յերկու ուղղություններից վորևե մեկը (որինակ Լենինգրադից դեպի Մոսկվա) անվանենք դրական, իսկ հակադիր ուղղությունը (Մոսկվայից դեպի Լենինգրադ) բացասական. դրա համեմատ էլ այն հեռավորությունները, վորոնք դրական ուղղությամբ են վերցվում, կանվանենք դրական հեռավորություններ, իսկ այն հեռավորությունները, վորոնք բացասական ուղղությամբ են վերցվում, կանվանենք բացասական հեռավորություններ։ Դրական հեռավորությունները կարտահայտենք + նշանով (կամ բոլորովին առանց նշանի) վերցրած թվերով, իսկ բացասական հեռավորությունները՝ — նշանով վերցրած թվերով։ Այսպես, որինակ, յեթե գնացքը գտնվում է մի տեղում, վորը 100 կիլոմետր հեռու յե Բոլոգոյեյից Մոսկվայի ուղղությամբ, ապա մենք կասենք, վոր նրա հեռավորությունը Բոլոգոյեյից հավասար է +100 կիլոմետրի (կամ պարզապես 100 կիլոմետրի). իսկ յեթե գնացքը գտնվում է Բոլոգոյեյից ասենք, 50 կիլոմետր հեռու Լենինգրադի ուղղությամբ, ապա կասենք, վոր նրա հեռավորությունը Բոլոգոյեյից հավասար է —50 կիլոմետրի։ Այստեղ + և — նշանները, իհարկե, գումարման և հանման գործողություն չեն նշանակում, այլ միայն գործ են ածվում ուղղությունների պայմանական նշանակման համար։

Այժմ մեր խնդիրն այսպես արտահայտենք. յերբ Հոկտեմբերյան յերկաթգծի արագընթաց գնացքը Բոլոգոյեյից +100 կմ (կամ պարզապես 100 կմ) հեռավորության վրա յեր գտնվում, այն ժամանակ այդ գծի փոստատար գնացքը Բոլոգոյեյից —50 կմ հեռավորության վրա յեր գտնվում։ Այդ ժամանակ գնացքներն ինչ հեռավորություն ունեյին իրարից։

Այժմ խնդիրը միանգամայն վորոշ է արտահայտված, և միանգամայն վորոշ էլ պատասխան է ստացվում (տես. գծ. 1, վորի

վրա սլաքը ցույց է տալիս գծի դրական ուղղությունը). գնացքները գտնվում եյին 100+50, այսինքն 150 կիլոմետր հեռավորության վրա։

Գծ. 1.

12. Ուրիշ մեծություններ, վորոնք կարող են դիտվել յերկու հակադիր իմաստներով։ Բացի նախընթաց խնդիրներում նշած մեծություններից, կան էլի ուրիշ շատերը, վորոնք նույնպես ուղղություն ունեն, այսինքն կարող են յերկու հակադիր իմաստներով դիտվել։ Այդպիսի մեծություններ են, որինակ՝

Յեկամուտը (մուտք),	վոր	հակադիր	իմաստով	կլինի	ծախք (յելք)
շահումը,	»	»	»	»	կորուստ
ոգուտը,	»	»	»	»	վնաս
ունեցվածքը	»	»	»	»	պարտք

և այլն։

Յեթե պայմանավորվենք յեկամուտը, շահումը, ոգուտը, ունեցվածքը... համարել դրական մեծություններ և նրանք արտահայտել + նշանով (կամ առանց նշանի) վերցրած թվերով, ապա ծախքը, կորուստը, վնասը, պարտքը... պետք է համարել նույն տեսակի, բայց բացասական մեծություններ և նրանք արտահայտել — նշանով վերցրած թվերով. այդ դեպքում կարելի յե ասել, վոր ծախքը բացասական մուտք է, կորուստը՝ բացասական շահում է և այլն։ Այդպիսի պայմանավորումից հետո հասկանալի կլինի, որինակ, այսպիսի խոսքը՝ բնակարանային ընկերությունը բնակարաններից մուտք ունեցավ հունվարին +200 ռուբլի, փետրվարին +150 ռուբլի, մարտին —50 ռուբլի (կնշանակի՝ մարտին ծախք ունեցավ 50 ռուբլի). կամ այսպիսի խոսքերը՝ մեծ յեղբոր ունեցվածքը 500 ռուբլու յեր, միջնակինը՝

900 ռուբլու, փոքրինը՝—500 ռուբլու (կնշանակի փոքր եղբայրն ունեցվածք չունի, այլ պարտք ունի 500 ռուբլի)։

Պետք է սակայն ասել, որ գոյություն ունեն բազմաթիվ մեծություններ, որոնք չեն կարող երկու հակադիր իմաստներով վերցվել, որոնց մեջ չի կարելի «ուղղություն» նշել. այդպիսի մեծություններ են օրինակ՝ ծավալը, մակերեսը, խտությունը, կշիռը և այլն։

13. Հարաբերական թվեր. Թվաբանության մեջ ուսումնասիրվող թվերի միջոցով այնպիսի մեծություններն ենք արտահայտում, որոնց ուղղությունը նկատի չի առնվում (չափը, օրինակ՝ հետաքրքրվում են իմանալու որևէ հեռավորության չափը միայն, բայց ոչ այն ուղղությունը, որով պետք է այն վերցնել)։ Մինչդեռ հանրահաշվի մեջ ուսումնասիրվող թվերի միջոցով մենք արտահայտում ենք մեծությունների և՛ չափը, և՛ ուղղությունը։ Դրա համար մեծությունը վերցնելով որևէ մեկ իմաստով, նշանակում են՝ առջևը + նշան դրած թվով. իսկ նույն մեծությունը վերցնելով հակադիր իմաստով, նշանակում են՝ առջևը — նշան դրած թվով։

Առջևը + նշան ունեցող թիվը (+ նշանը կարելի է և չդնել) կոչվում է դրական թիվ. առջևը — նշան ունեցող թիվը կոչվում է բացասական թիվ։ Այսպես՝ $+10$, $+\frac{1}{2}$, $+0,3$ (կամ 10, $\frac{1}{2}$, $0,3$) դրական թվեր են, իսկ -3, $-\frac{5}{7}$, $-3,25$ բացասական թվեր են։ Թվերին միացնում են նաև 0-ն (զերոն), չընդունելով այն ո՛չ դրական և ո՛չ էլ բացասական թվերի մեջ. $+0$, -0 և պարզապես 0 նշանակումները համարժեք են համարվում։

Դրական ու բացասական թվերը և զերոն կոչվում են հարաբերական թվեր, որպեսզի տարբերվեն սովորական (կամ թվաբանական կամ բացարձակ) թվերից, որոնք իրենց առջև ոչ մի նշան չունեն։

Հարաբերական թվի բացարձակ մեծություն կոչվում է այդ թիվը, վերցրած առանց նշանի. այսպես՝ -10 թվի բացարձակ մեծությունը 10 է, $+5$ թվի բացարձակ մեծությունը 5 է։

Երկու հարաբերական թվեր հավասար են համարվում, եթե նրանց բացարձակ մեծությունները և նշանները նույնն են։

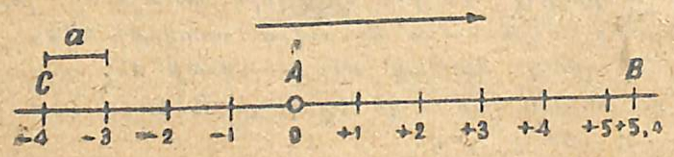
14. Թվի պատկերացումը ***թվային առանցքի վրա.*** Ուղիղի հատված (գծ. 2) կոչվում է որևէ ուղիղ գծի մի մասը, որը սահմանափակված է յերկու կողմից, օրինակ՝ մի կողմից A կետով և մյուս կողմից B կետով։ Ամեն մի հատվածի մեջ կարելի յե տարբերել առաջին՝ նրա յերկարությունը, յերկրորդ՝ ուղղությունը, որն ամեն մի տվյալ հատվածի համար կարող է յերկուսը լինել։ Օրինակ՝ մեր հատվածի մեջ ուղղությունը կարելի յե վերցնել կամ A կետից դեպի B կետը կամ ընդհակառակը, B կետից դեպի A կետը։ Յեթե այդ հատվածը վերցնում ենք A-ից դեպի B տանող ուղղությամբ, ապա A կետը կոչում ենք հատվածի սկիզբը, իսկ B կետը՝ հատվածի վերջը։

Գծ. 2.

Այդպիսի հատվածների միջոցով մենք կարող ենք հարաբերական թվերը դիտելիորեն արտահայտել հետևյալ ձևով։ Վերցնենք որևէ ուղիղ (օրինակ՝ հորիզոնական ուղիղ) և պայմանավորվենք, թե այդ ուղիղի յերկու ուղղություններից որը մեկն ենք համարում դրական (գծ. 3)։ Ընդունենք, օրինակ՝ ձախից դեպի աջ ուղղությունը (որը ցույց է տված սլաքով) իբրև դրական ուղղություն, այդ դեպքում հակադիր ուղղությունը՝ աջից դեպի ձախը, կլինի բացասական ուղղությունը։ Այնուհետև որևէ a յերկարություն (որը պատկերացված է գծագրում) կընդունենք իբրև յերկարության միավոր։ Դիցուք հիմա տված է որևէ դրական թիվ, օրինակ՝ $+5,4$։

Վերցնենք մեր ուղիղի վրա մի որևէ A կետ և այն կընդունենք իբրև հատվածների սկիզբը. նրանից սկսած դեպի աջ կդնենք յերկարության a միավորը 5,4 անգամ։ Կստանանք AB հատվածը, որի յերկարությունը հավասար է 5,4 միավորի և որի ուղղությունը դրական է։ Հենց այդ հատվածի B ծայրն էլ դիտելիորեն կարտահայտի $+5,4$ թիվը։ Այժմ վերցնենք որևէ բացասական թիվ, օրինակ՝ -4։ Այս թիվը դիտելիորեն պատկերացնելու համար՝ նույն A կետից դեպի ձախ կդնենք յերկարության 4 միավոր։ Կստանանք AC հատվածը, որի յերկարությունը հավասար է 4 միավորի, իսկ ուղղությունը բացասական է. այդ հատվածի C ծայրը կարտահայտի -4 թիվը։

Կարելի յե յերևակայել, վոր բոլոր հարաբերական թվերն արտահայտված են իբրև ծայրեր ուղղություն ունեցող (ուղղյալ) հատվածների, վորոնք վերցված են միևնույն ուղիղի վրա միևնույն A կետից, վոր ընդունված է վորպես հատվածների սկիզբ։



Գծ. 3.

Այդ դեպքում ուղիղի այն մասի վրա, վորը գտնվում է A-ից դեպի աջ, պատկերացված կլինեն դրական թվերը, իսկ ուղիղի այն մասի վրա, վորը գտնվում է A-ից դեպի ձախ, պատկերացված կլինեն բացասական թվերը։ Զերո թիվը այդ ուղիղի վրա արտահայտվում է A կետով։ Այդպիսի ուղիղը հաճախ կոչվում է թվային ուղիղ կամ թվային առանցք։

Քանի վոր այն հատվածների ուղղությունը, վորոնց ծայրերն արտահայտում են $+$ նշանով թվերը, հակադիր է այն հատվածների ուղղությանը, վորոնց ծայրերն արտահայտում են $-$ նշանով թվերը, ապա հենց այդ նշանները ևս ընդունված է անվանել հակադիր նշաններ։ Ամեն յերկու թվեր, վորոնց նշանները հակադիր են, իսկ բացարձակ մեծությունները հավասար, ինչպես օրինակ՝ $+3$ և -3, $+\frac{1}{2}$ և $-\frac{1}{2}$ և այլն, կոչվում են հակադիր թվեր։

Այժմ տեսնենք, թե ինչպես են կատարվում գործողությունները հարաբերական թվերի նկատմամբ։

II. ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ

15. Խնդիր։ Կոոպերատիվ ընկերությունն օգուտ ստացավ հունվարին a ռուբլի և փետրվարին՝ b ռուբլի։ Ի՞նչքան օգուտ ստացավ ընկերությունը 2 ամսվա ընթացքում։

Գրենք այդ խնդրի լուծման բանաձևը։ Պարզ է, վոր յերկու ամսում ստացված օգուտը հավասար է այն օգուտների գումարին,

վորոնք ստացված են ամեն մեկ ամսում առանձին։ Վորոնելի գումարը նշանակելով x, կստանանք հետևյալ բանաձևը՝

$$x = a + b.$$

Բայց կոոպերատիվը կարող է այդ ամիսներից մեկում կամ նույնիսկ յերկուսումն էլ վոչ թե օգուտ, այլ վնաս ունենալ։ Վորպեսզի մեր բանաձևը կարելի լինի նաև այդպիսի դեպքերում կիրառել, մենք պետք է a և b թվերի տակ հասկանանք հարաբերական թվեր, այսինքն դրական կամ բացասական թվեր, նայած թե տվյալ ամսում օգուտ է ստացվել թե վնաս։ Այսպիսով մենք պետք է գիտենանք հարաբերական թվերն իրար հետ գումարելը։

16. Յերկու թվերի գումարումը։ Նախ քննության առնենք հարաբերական թվերի գումարման յերկու մասնավոր դեպքեր։

ա) Յերկու հակադիր թվերի գումարը հավասար է զերոյի։ Այսպես՝

$$(+5)+(-5)=0; \quad (-3)+(+3)=0; \quad (+4,7)+(-4,7)=0$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$(+a)+(-a)=0.$$

Իրոք, յեթե կոոպերատիվը մի ամսում օգուտ է ստացել, իսկ մյուս ամսում ճիշտ նույնքան վնաս, ապա հետևանքն այն է լինում, վոր վոչ օգուտ է ստացած լինում, վոչ էլ վնաս։

Ճիշտ այդպես էլ, յեթե գնացքը կայարանից վորևէ ուղղությամբ անցել է 5 կմ, հետո էլ հակառակ ուղղությամբ նույնպես 5 կմ, ապա արդյունքն այն է, վոր նա բոլորովին չի հեռացել կայարանից։

բ) Վորևէ թվի զերո գումարել կամ զերոյին վորևէ թիվ գումարել, նշանակում է այդ թիվը թողնել անփոփոխ։ Այսպես՝

$$(+75)+0=+75; \quad (-75)+0=-75;$$

$$0+(+3,5)=+3,5 \quad 0+(-3,5)=-3,5.$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$(+a)+0=+a; \quad (-a)+0=-a.$$

Իրոք, յեթե կոոպերատիվն առաջին ամսում ստացել ե 75 ռուբլի օգուտ կամ վնաս, իսկ յերկրորդ ամսում վոչ օգուտ ե ստացել և վոչ էլ վնաս, ապա յերկու ամիսը լրանալուց հետո նրա օգուտը կամ վնասը նույնն ե մնացել, ինչ վոր առաջին ամսի վերջում։

Այժմ վերադառնանք § 15-ի խնդրին։ Նրա լուծման ընդհանուր բանաձևն եր՝

$$x = a + b.$$

Քննենք այն տարբեր դեպքերը, վորոնք կարող են տեղի ունենալ, յեթե a և b տառերը փոխարինենք տվյալ թվերով։

1-ին դեպք. Թե առաջին և թե յերկրորդ ամսում օգուտ ե ստացված։

Օրինակ՝ առաջին ամսում ստացված ե 200 ռուբլի օգուտ, իսկ յերկրորդ ամսում 150 ռուբլի օգուտ։ Այս դեպքում $a=200$; $b=150$։ Ակնհայտ ե, վոր

$$x = (+200)+(+150) = +350,$$

այսինքն կոոպերատիվը յերկու ամսում ստացավ 350 ռուբլի օգուտ։

2-րդ դեպք. Թե առաջին և թե յերկրորդ ամսում վնաս ե ստացվել։

Օրինակ՝ առաջին ամսում վնաս ե յեղել 200 ռուբլի, իսկ յերկրորդ ամսում՝ 150 ռուբլի։ Այս դեպքում $a=-200$; $b=-150$։ Ակնհայտ ե, վոր

$$x = (-200)+(-150) = -350,$$

այսինքն կոոպերատիվը յերկու ամսում վնաս ե ունեցել 350 ռուբլի։

Այս օրինակներից կարելի յե հետևյալ յեզրակացությունն անել՝

Յերկու նույնանշան թվեր գումարելու համար պետք ե նրանց բացարձակ մեծությունները գումարել յեվ դնել նույն նշանը։

3-րդ դեպք. մի ամսում օգուտ ե ստացվել, մյուս ամսում՝ վնաս, և օգուտն ավելի մեծ ե, քան վնասը։

Օրինակ՝ առաջին ամսում 200 ռուբլի օգուտ ե ստացվել, իսկ յերկրորդ ամսում 150 ռուբլի վնաս։

Այս դեպքում $a=+200$; $b=-150$։ Ակնհայտ ե, վոր կոոպերատիվը վերջին հաշվով 50 ռուբլի օգուտ ստացավ, այսինքն

$$x = (+200)+(-150) = +50.$$

4-րդ դեպք. մի ամսում օգուտ ե ստացվել, մյուս ամսում՝ վնաս, և օգուտն ավելի քիչ ե, քան վնասը։

Օրինակ՝ առաջին ամսում ստացվել ե 200 ռուբլի վնաս, իսկ յերկրորդ ամսում 150 ռուբլի օգուտ։

Այս դեպքում $a=-200$; $b=+150$։ Ակնհայտ ե, վոր վերջին հաշվով կոոպերատիվը յերկու ամսում 50 ռուբլի վնաս ստացավ, այսինքն

$$x = (-200)+(+150) = -50.$$

Վերջին յերկու օրինակներից կարելի յե հետևյալ յեզրակացությունն անել՝

Յերկու տարանշան թվեր գումարելու համար պետք ե գտնել նրանց բացարձակ մեծությունների տարբերությունը յեվ վերջինիս առաջ դնել այն թվի նշանը, վորի բացարձակ մեծությունն ավելի մեծ ե։

Յեթե + նշանը հապավենք դրական թվի առաջ, ապա վերի հավասարությունները կարող ենք ավելի կարճ գրել հետևյալ ձևով՝

$$200+(-150)=50; \quad -200+150=-50.$$

17. Գումարման կանոնների ուրիշ արտահայտությունը. Գումարման այն յերկու կանոնները, վոր մենք ստացանք, կարելի յե ուրիշ յերկու կանոններով փոխարինել, վորոնք շատ հարմար են կիրառման համար.

ա) Գումարել դրական թիվը նշանակում ե գումարել նրա բացարձակ մեծությունը։ Այսպես՝

$$(+7)+(+3)=+10 \text{ և } (+7)+3=7+3=10.$$

$$(-7)+(+3)=-4 \text{ և } (-7)+3=-7+3=-4.$$

բ) Գումարել բացասական թիվը, նշանակում է հանել նրա բացարձակ մեծությունը։ Այսպես՝

$$(+7)+(-10)=-3 \text{ և } (+7)-10=7-10=-3;$$

$$(-7)+(-10)=-17 \text{ և } (-7)-10=-7-10=-17.$$

Այս յերկու կանոնները կարելի յե կրճատ արտահայտել կրկնակի նշանների հետևյալ բանաձևերով.

$$+(+a)=+a; \qquad +(-a)=-a.$$

18. Յերեք յեվ ավելի թվերի գումարումը։ Նախ գտնում են առաջին յերկու գումարելիների գումարը, նրանց ավելացնում են յերրորդ գումարելին և այլն։ Դիցուք պահանջվում է գտնել հետևյալ գումարը՝

$$(+8)+(-5)+(-4)+(+3),$$

վորը կարելի յե ավելի կարճ գրել՝

$$8+(-5)+(-4)+3.$$

Գումարումը կատարում ենք այս կարգով՝

$$8+(-5)=3;\ 3+(-4)=-1;\ (-1)+3=2.$$

Ասենք՝ հարկ չկա այս կարգը պահպանելու, վորովհետև (ինչպես § 25-ում կտեսնենք) գումարելիները կարելի յե ցանկացած ձևով տեղափոխել և խմբավորել։

Վարժություններ

18. $(+7)+(+3)$ $\quad(-7)+(-3)$ $\quad\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(+2\frac{1}{2}\right)$

19. $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-2\frac{1}{2}\right)$ $\quad(+10)+(-2)$ $\quad(+10)+(-12)$

20. $(-5)+(+5)$ $\quad(-5)+(+2)$ $\quad4+(-3)$

21. $(-4)+3$ $\quad8+(-10)$ $\quad(-8)+10$

22. $(+8)+(-5)+(-3)+(+2)$

23. $(-7)+(-3)+(-1)+(+11)$

III. ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՀԱՆՈՒՄԸ

19. Խնդիր։ Գործարանի օգուտը յերկու ամսվա՝ հունվարի և փետրվարի ընթացքում կազմում եր a ռուբլի։ Ինչքա՞ն եր միայն փետրվարին ստացված օգուտը, յեթե գործարանը հունվարին b ռուբլի օգուտ է տվել։

Նախորդ խնդրից արդեն գիտենք, վոր յերկու ամսում ստացված օգուտը կազմում է առանձին ամիսներում ստացած օգուտների գումարը, թե a-ն և թե b-ն հարաբերական թվեր են, այսինքն դրական և բացասական թվեր են, և բացասական օգուտը նշանակում է վնաս։ Այսպես, յեթե հունվարին ստացած օգուտը յեղել է +2000 ռուբլի, իսկ փետրվարին —500 ռուբլի, ապա այս յերկու ամիսներում միասին օգուտը յեղել է նրանց գումարի չափ, այսինքն $(+2000)+(-500)=+1500$ ռուբլի։ Մի ուրիշ որինակ. յեթե օգուտը հունվարին յեղել է +1000 ռուբլի, իսկ փետրվարին —1500 ռուբլի, ապա օգուտը յերկու ամսում կլինի $(+1000)+(-1500)=-500$ ռուբլի։

Այս պատճառով փետրվար ամսվա ընթացքում ստացված օգուտը, վոր վորոնում ենք, պետք է այնպիսի դրական կամ բացասական թիվ լինի, վորը յեթե հարաբերական թվերի գումարման կանոնների համաձայն գումարենք հունվար ամսում ստացած օգուտի հետ, գումարում տա յերկու ամսվա օգուտը։

Այսպիսով մեր խնդրում տրված է գումարը՝ a, և մի գումարելին՝ b, և պահանջվում է գտնել մյուս գումարելին։

Այն գործողությունը, վորի միջոցով գտնում ենք գումարելիներից մեկը, յերբ տրված են գումարը յեվ մյուս գումարելին, կոչվում է հանում, անկախ նրանից՝ տված թվերը թվաբանական են, թե հարաբերական. տված գումարն այս դեպքում կոչվում է նվազելի, տված գումարելին՝ հանելի, իսկ վորոնելի թիվը՝ տարբերություն (կամ մնացորդ)։ Այստեղից հետևում է, վոր հանման շիտակությունը մենք միշտ կարող ենք ստուգել գումարման միջոցով. դրա համար վորոնելի տարբերությունը գտնելով՝ կգումարենք հանելիի հետ, յեթե գումարը տա նվազելին, ապա հանումը շիտակ է կատարված։

20. Տարբերության, վորպես յերկու գումարելիներից մեկի

գտնելը։ Վորոնելի տարբերությունը նշանակելով մեր խնդրում x-ով, կարող ենք գրել՝

$$x = a - b.$$

Գտնենք $a - b$ տարբերության մեծությունը հետևյալ մասնավոր դեպքերում՝

ա) Դիցուք $a = +1000$, $b = +400$։ Այս նշանակում է, վոր գործարանը հունվարին ոգուտ է տվել 400 ռուբլի, իսկ յերկու ամսում ոգուտ է ստացվել 1000 ռուբլի. պարզ է, վոր փետրվարին ել ոգուտ է տվել և այն ել 600 ռուբլի։ Կնշանակի՝

$$x = (+1000) - (+400) = +600$$

կամ ավելի պարզ՝

$$1000 - 400 = 600.$$

Արդյունքն ստուգենք գումարումով՝

$$(+600) + (+400) = +1000.$$

բ) Դիցուք $a = +1000$ և $b = +1000$։ Այդ նշանակում է, վոր գործարանը հունվարին ոգուտ է տվել 1000 ռուբլի և յերկու ամսվա ոգուտն ել դարձյալ նույնն է մնացել, այսինքն 1000 ռուբլի։ Պարզ է, վոր փետրվարին գործարանը վոչ ոգուտ է տվել և վոչ ել վնաս։ Կնշանակի՝

$$x = (+1000) - (+1000) = 0.$$

Ստուգենք գումարումով՝

$$(+1000) + 0 = +1000.$$

Հանումը շիտակ է կատարված։

Նույնպիսի դատողությամբ կգտնենք, վոր

$$(-1000) - (-1000) = 0.$$

գ) $a = +1000$, $b = +1200$։ Այս նշանակում է, վոր գործարանը հունվարին 1200 ռուբլի ոգուտ է տվել, իսկ յերկու ամսում ընդամենը ոգուտ է ստացվել միայն 1000 ռուբլի։ Պարզ է, վոր հունվարյան ոգուտի մի մասը՝ 200 ռուբլի, գործադրվել է փետրվարյան վնասը ծածկելու համար։ Այստեղից՝

$$(+1000) - (+1200) = -200.$$

կամ ավելի պարզ՝

$$1000 - 1200 = -200.$$

Ստուգենք գումարումով՝

$$(-200) + (+1200) = +1000.$$

դ) $a = +1000$; $b = -200$։ Այդ նշանակում է, վոր գործարանը հունվարին վնաս է տվել 200 ռուբլի, բայց յերկու ամսվա ընթացքում 1000 ռուբլի ոգուտ է ստացվել։ Պարզ է, վոր ոգուտը փետրվարին է ստացվել և այն ել այնքան, վոր թե ծածկել է հունվարյան 200 ռուբլի վնասը և թե մնացել է 1000 ռուբլի ոգուտ, այսինքն փետրվարին ստացվել է 1200 ռուբլի ոգուտ։ Այստեղից՝

$$+1000 - (-200) = +1200,$$

կամ

$$x = 1000 - (-200) = 1200.$$

Ստուգենք գումարումով՝

$$+1200 + (-200) = +1000.$$

ե) $a = -100$, $b = +800$։ Այս նշանակում է, վոր հունվարին ոգուտ է ստացվել 800 ռուբլի, մինչդեռ յերկու ամսում, միասին առած, առաջ է յեկել 100 ռուբլի վնաս։ Պարզ է, վոր փետրվարին վնաս է ստացվել և այնքան, վոր նա վոչնչացրել է հունվարյան վողջ ոգուտը՝ 800 ռուբլին, և դեռ վնաս է մնացել 100 ռուբլի՝ այսինքն փետրվարյան վողջ վնասը հավասար է 900 ռուբլու։ Այստեղից՝

$$(-100) - (+800) = -900,$$

կամ

$$-100 - 800 = -900.$$

Ստուգենք գումարումով

$$(-900) + (+800) = -100.$$

զ) $a = -100$, $b = -150$, այսինքն հունվարին վնաս է յեղել 150 ռուբլի, իսկ յերկու ամսում ընդամենը վնաս է յեղել 100 ռուբլի։ Կնշանակի հունվարյան վնասի մի մասը՝ 50 ռուբլի ծածկված է փետրվարին ստացած 50 ռուբլի ոգուտով։ Այստեղից՝

$$x = (-100) - (-150) = +50.$$

Ստուգենք գումարումով՝

$$50 + (-150) = -100.$$

21. Հանման կանոնը։ Ուշադրությամբ դիտելով նախորդ հոդվածի խնդիրները՝ կարող ենք նկատել, որ մեր քննած դեպքերից յուրաքանչյուրի մեջ մենք կարող էինք մեզ տված թվի հանումը փոխարինել նրան հակադիր թվի գումարումով։ Իրոք, վերցնենք, օրինակ՝ ա) դեպքը՝

$$(+1000)-(+400)=+600.$$

$+400$ թիվը հանելու փոխարեն գումարենք նրան հակադիր -400 թիվը՝

$$(+1000)+(-400)=+600.$$

Ստացվեց նույն արդյունքը։

Վերցնենք գ) դեպքը՝

$$(+1000)-(-200)=+1200.$$

Հանումը փոխարինենք հակադիր թվի գումարումով՝

$$+1000+(+200)=+1200.$$

Արդյունքը նույնն է։

Վերցնենք, վերջապես, ե) դեպքը՝

$$(-100)-(+800)=-900.$$

Հանման փոխարեն գումարում կատարելով, կստանանք՝

$$-100+(-800)=-900,$$

այսինքն նույն արդյունքը։

Նույնը կարելի է ցույց տալ նաև մնացած բոլոր դեպքերի նկատմամբ։

Այսպիսով մենք կարող ենք բոլոր դեպքերում էլ տվյալ թիվը հանելու փոխարեն նվազելուն ավելացնել հանելիի հակադիր թիվը։ Ուրիշ խոսքով, հանման գործողությունը մենք կարող ենք փոխարինել գումարման գործողությամբ, որը կատարելն արդեն գիտենք։ Այստեղից բխում է հետևյալ կանոնը՝

Որևէ թիվ հանելու համար բավական է նվազելիին ավելացնել հանելիին հակադիր թիվը։

22. Կրկնակի նշանների բանաձևերը։ Այսպիսով, տված կանոնի համաձայն, $+a$ դրական թվի հանումը կարելի է փոխարինել

$-a$ բացասական թվի ավելացումով, իսկ $-a$ բացասական թվի հանումը՝ $+a$ դրական թվի ավելացումով. այդ կարելի է կրկնակի նշանների հետևյալ բանաձևերով արտահայտել՝

$$-(+a)=-a; \quad -(-a)=+a.$$

23. Հանրահաշվական գումար կամ տարբերություն։ Հարաբերական թվերը հնարավորություն են տալիս ամեն մի տարբերություն ներկայացնել իբրև գումար, և ընդհակառակը, ամեն մի գումար ներկայացնել իբրև տարբերություն։ Օրինակ $7-3$ տարբերությունը կարելի է գրել այսպես. $(+7)+(-3)$, կամ ավելի պարզ՝ $7+(-3)$, իսկ $4+2$ գումարը կարելի է պատկերացնել այսպես. $(+4)-(-2)$, կամ ավելի պարզ $4-(-2)$։

Այսպես էլ ամեն մի արտահայտություն, որը ներկայացնում է հաջորդական գումարումների և հանումների մի շարք, կարող է ներկայացվել իբրև գումար։ Օրինակ՝

$$20-5+3-7=20+(-5)+3+(-7).$$

Այս պատճառով հանրահաշվի մեջ հարաբերական թվերի գումարման և հանման բոլոր դեպքերը կարելի է միավորել մի գործողության մեջ, որը կոչվում է հանրահաշվական գումարում։

Այն գումարը, որի մեջ գումարելիները կարող են լինել թե դրական, թե բացասական թվեր և թե զերո, կոչվում է հանրահաշվական գումար, ի տարբերություն թվաբանական գումարից, որի մեջ բոլոր գումարելիները սովորական (թվաբանական) թվեր են։ Նմանապես տարբերությունը հանրահաշվական է կոչվում, յեթե նրա մեջ նվազելին ու հանելին հարաբերական թվեր են։

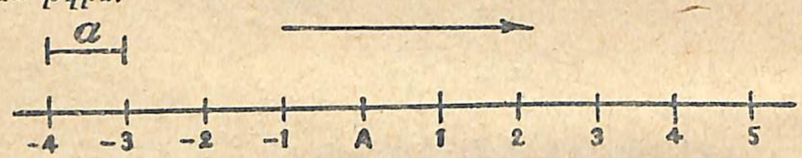
24. Հարաբերական թվերի բաղդատումն ըստ մեծության։ Երբ ասում ենք՝ 10-ը մեծ է 7-ից, այդ նշանակում է, որ $10-7$ տարբերությունը դրական թիվ է, մինչդեռ $7-10$ տարբերությունը բացասական թիվ է։ Պայմանավորվենք ավելի մեծի և ավելի փոքրի այս գաղափարը տարածել հարաբերական թվերի վրա, դրա համար a հարաբերական թիվը b հարաբերական թվից ավելի մեծ կհամարենք այն դեպքում, յեթե $a-b$ տարբերությունը դրական թիվ է յեվ a-ն ավելի փոքր կհամարենք b-ից այն դեպքում, յեթե $a-b$ տարբերությունը բացասական թիվ է։

Այս պայմաններից բղխում է, վոր

1. Ամեն մի դրական թիվ մեծ է զերոյից յեվ մեծ է ամեն մի բացասական թվից. որինակ՝ $8>0$ և $8>-10$, վորովհետև $8-0$ և $8-(-10)$ տարբերությունները յերկուսն էլ դրական թվեր են։

2. Ամեն մի բացասական թիվ փոքր է զերոյից յեվ փոքր ամեն մի դրական թվից. որինակ $-5<0$ և $-5<+2$, վորովհետև $-5-0$ և $-5-(+2)$ տարբերությունները բացասական թվեր են։

3. Յերկու բացասական թվերից մեծն այն է, վորի բացարձակ մեծությունն ավելի փոքր է. որինակ՝ $-5>-12$, վորովհետև $-5-(-12)$ տարբերությունը հավասար է $(+7)$ դրական թվին։



Գծ. 4.

Հանրահաշվական թվերի բաղդատական մեծությունները հըստակորեն պատկերացնելու համար ամենից ավելի լավ կլինի դիմել թվային առանցքի ոգնության։ Ընտրելով յերկարության վորևե միավոր (a-ն, 4-րդ գծ.)՝ յերևակայենք, վոր անսահմանափակ ուղիղի վրա նրա վորևե A կետից, վոր ընդունված է իբրև սկիզբ, դեպի աջ վերցված են այնպիսի հատվածներ, վորոնց ծայրերը պատկերացնում են դրական թվերը՝ $+1, +2, +3, +4, \ldots$, իսկ այդ նույն կետից դեպի ձախ վերցված են այնպիսի հատվածներ, վորոնց ծայրերը պատկերացնում են բացասական թվերը՝ $-1, -2, -3, -4, \ldots$։ Այն ժամանակ, այդ ուղիղի վրա շարժվելով ձախից դեպի աջ (ինչպես սլաքն է ցույց տալիս գծագրում), մենք շարունակ փոքր թվերից կանցնենք մեծ թվերի, մինչդեռ հակառակ ուղղությամբ, այսինքն աջից դեպի ձախ

շարժվելով, շարունակ մեծ թվերից կանցնենք փոքր թվերի։ Ուրիշ խոսքով՝ վորևե յերկու թվերից այն է մեծ, վորը թվային առանցքի վրա ավելի աջ է գտնվում։ Թվային առանցքի վրա հեշտ է ստուգել քիչ առաջ ավանդած յերեք դրույթների իրավացիությունը։

Դիտողություն. Յեթե կամենում են կարճ արտահայտել, վոր a-ն դրական թիվ է, ապա գրում են՝ $a>0$, իսկ յեթե պետք է նշել, վոր a-ն բացասական թիվ է, գրում են՝ $a<0$։

Վարժություններ

24. Մի ապրանք գնել են a ռուբլով և վաճառել b ռուբլով։ Ի՞նչքան ոգուտ են ստացել։ Հաշվել այդ ոգուտը, յեթե $a=40$ և $b=35$։ Ի՞նչ է ցույց տալիս այստեղ բացասական պատասխանը։

25. Մեկն ունի ամսական m ռուբլի յեկամուտ և n ռուբլի ծախք։ Նրա մոտ ամսական ի՞նչքան է մնում։ Հաշվել պատասխանը, յերբ $m=120$ և $n=130$։ Ի՞նչ է ցույց տալիս բացասական պատասխանը։

Հետևյալ որինակներում կատարել նշած գործողությունները՝

26. $12-(-2)$; $5-(-5)$; $(+8)-(-10)$; $(+1)-(-1)$։

27. $a-(-b)$; $(+m)-(-n)$; $(+2x)-(-3x)$։

28. $10+(+2)-(-4)-(+2)+(-2)$։

29. Հաշվել $a+b+c+d$ գումարը, յեթե $a=2$, $b=-3$, $c=-\frac{1}{2}$ և $d=-\frac{1}{4}$։

30. Հաշվել $m-n$ տարբերությունը, յեթե $m=-10$ և $n=-15$։

31. Ներկայացնել $10-2-3+7$ արտահայտությունն իբրև հարաբերական թվերի գումար։

32. Ներկայացնել $10+8$ արտահայտությունն իբրև հարաբերական թվերի տարբերություն։

IV. ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ՅԵՎ ՀԱՆՄԱՆ ԳԼԽԱՎՈՐԱԳՈՒՅՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

25. Համոզվեցանք որինակներով, վոր թվաբանական թվերի գումարման և հանման այն հատկությունները, վոր մենք

նշեցինք թվաբանական թվերի համար (§§ 6, 7), պահպանվում են նաև հարաբերական թվերի համար։

ա) Տեղափոխական օրենք՝ գումարը չի փոխվում գումարելիների տեղափոխումից։ Օրինակ՝

$$(+20)+(-5)=+15 \text{ և } (-5)+(+20)=+15;$$
$$(-10)+(-2)+(+40)=+28;$$
$$(+40)+(-10)+(-2)=+28;$$
$$(-2)+(+40)+(-10)=+28 \text{ և այլն։}$$

բ) Զուգորդական օրենք՝ գումարը չի փոխվի, եթե գումարելիներից մի քանիսը փոխարինենք նրանց գումարով։

Այսպես, երբ պետք է հաշվել հետևյալ գումարը՝

$$(-4)+(+3)+(-1)+(+5)=+3,$$

մենք կարող ենք գումարելիներից մի քանիսը, օրինակ՝ երկրորդը և երրորդը, փոխարինել նրանց գումարով, նախապես հաշվելով այդ գումարը. $(+3)+(-1)=+2$. այն ժամանակ կունենանք՝

$$(-4)+(+2)+(+5)=+3,$$

այսինքն կստանանք այն գումարը, ինչ որ առաջ։

գ) Որպեսզի որևէ թվի ավելացնենք մի քանի գումարելիների գումարը, կարելի է այդ թվին ավելացնել մեկը մյուսի ետևից յուրաքանչյուր գումարելին։

Դիցուք, օրինակ՝ պահանջվում է 40-ին ավելացնել $20+(-5)+(+7)$ գումարը, այդ կարելի է այսպես արտահայտել՝

$$40+[20+(-5)+(+7)]։$$

Մենք կարող ենք նախ հաշվել ավելացվող գումարը՝

$$20+(-5)=20-5=15; \quad 15+(+7)=15+7=+22,$$

և հետո ստացած թիվը՝ $+22$, գումարել 40-ին՝

$$40+(+22)=+62.$$

Բայց դրա փոխարեն մենք կարող ենք 40-ին նախ գումարել առաջին գումարելին՝ 20-ը, ապա երկրորդը՝ -5-ը և, վերջապես, երրորդը՝ $+7$-ը. կստանանք՝

$$40+20=60; \quad 60+(-5)=55; \quad 55+(+7)=62։$$

Վերջնական գումարը նույնն է ստացվում։

դ) Որպեսզի որևէ թվից հանենք մի քանի գումարելիների գումարը, կարելի է այդ թվից հանել մեկը մյուսի ետևից յուրաքանչյուր գումարելին առանձին։

Դիցուք, օրինակ՝ հարկավոր է 20-ից հանել այս գումարը՝ $10+(-4)+(-3)$. այդ կարող ենք այսպես արտահայտել՝

$$20-[10+(-4)+(-3)]։$$

Մենք կարող ենք նախ հաշվել այն գումարը, որը պետք է հանենք՝

$$10+(-4)=10-4=6; \quad 6+(-3)=6-3=3,$$

այնուհետև ստացված թիվը հանել 20-ից՝

$$20-3=17.$$

Բայց դրա փոխարեն մենք կարող ենք 20-ից հանել նախ առաջին գումարելին՝ 10, ապա երկրորդ գումարելին՝ (-4), և ապա երրորդ գումարելին՝ (-3). կստացվի՝

$$20-10=10; \quad 10-(-4)=10+4=14;$$
$$14-(-3=14+3=17.$$

Ստացանք նույն թիվը, ինչ որ առաջ։

Նույն ձևով կարելի է ցույց տալ գումարման և հանման նաև մյուս հատկությունների իրավացիությունը հարաբերական թվերի համար։

V. ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ

26. Խնդիր։ Հոկտեմբերյան երկաթգծով գնացքն ընթանում է 1 ժամում v կիլոմետր միջին արագությամբ*)։ Կեսօրի գնացքը գտնվում է Բոլոգոյե կայարանում։ Ո՞րտեղ կգտնվի գնացքը t ժամից հետո։

Արտածենք այս խնդրի լուծման բանաձևը։ Եթե գնացքը

* Հաշվումների պարզության համար մենք ենթադրում ենք, որ գնացքը շարունակ միատեսակ արագությամբ է շարժվում և ուշադրության չենք առնում կայարաններում կանգ առնելը։

1 ժամում անցնում է v կիլոմետր, ապա t ժամում կանցնի t անգամ մեծ հեռավորություն։ Կնշանակի վորոնելի x հեռավորությունը հավասար է v-ի և t-ի արտադրյալին։

$$x = vt$$

Յեթե, օրինակ՝ $v=40$ և $t=3$, ապա գնացքը գտնվում է Բոլոգոյեյից $40 . 3 = 120$ կմ հեռավորության վրա։

Գծ. 5.

Այս լուծումը դեռևս չի տալիս խնդրում տրված հարցի ճըշտորոշ պատասխանը։ Իրոք, մենք չգիտենք, թե ինչ ուղղությամբ պետք է վերցնենք այդ 120 կմ-ը՝ դեպի Լենինգրադ, թե դեպի Մոսկվա։ Հարաբերական թվերի մուծումը մեզ հնարավորություն է տալիս վորոշակի պատասխանելու դրված հարցին։

Պայմանավորվենք դրական համարել Լենինգրադից դեպի Մոսկվա տանող ուղղությունը։ Այս դեպքում այն բոլոր հեռավորությունները, վոր մենք կվերցնենք Բոլոգոյեյից դեպի Մոսկվա տանող ուղղությամբ, դրական կլինեն, իսկ դեպի Լենինգրադ տանող ուղղությամբ՝ բացասական։ Դրա համար էլ արագությունը, այսինքն գնացքի 1 ժամվա անցած ճանապարհը, դրական կլինի, յեթե գնացքը դեպի Մոսկվա յե շարժվում, և բացասական, յեթե գնացքը դեպի Լենինգրադ է գնում։

Այժմ կարող ենք ավելի ճշտորոշ պատասխան տալ խնդրի հարցին։

Յեթե գնացքը դեպի Մոսկվա յե գնում, կնշանակի նրա արագությունը $+40$ կմ է 1 ժամում և 3 ժամից հետո նա Բոլոգոյեյից կգտնվի $x=(+40) . 3=+120$ կմ հեռավորության վրա, այսինքն 120 կմ գնացած կլինի Մոսկվայի ուղղությամբ (գծ. 5)։

Յեթե գնացքը դեպի Լենինգրադ է գնում, ապա նրա արագությունը -40 կմ է և 3 ժամից հետո նա Բոլոգոյե կգտնվի

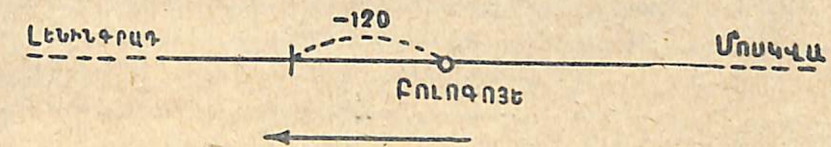
$(-40)+(-40)+(-40)=-120$ կմ հեռավորության վրա, այսինքն Լենինգրադի ուղղությամբ գնացած կլինի 120 կմ (գծ. 6)։ Այստեղից յեզրակացնում ենք, վոր

$$x=(-40)\cdot 3=-120.$$

Այժմ մեր բանաձևը՝

$$x = vt,$$

մեզ ճշտորոշ պատասխան է տալիս այն հարցին, թե վորտեղ կգտնվի գնացքը. միայն թե v-ն դրական արժեքներ կընդունի կամ բացասական, նայած թե ինչ ուղղությամբ է գնացքը շարժվում։



Գծ. 6.

Յեթե օրինակ՝ $v=+50$ և $t=+4$, ապա բանաձևը տալիս է՝

$$x=(+50)\cdot(+4)=+200,$$

այսինքն գնացքը կգտնվի Բոլոգոյեյից 200 կմ հեռավորության վրա դեպի Մոսկվա տանող ուղղությամբ։

Յեթե $v=-30$ և $t=+2$, ապա

$$x=(-30)\cdot(+2)=-60,$$

այսինքն գնացքը կգտնվի 60 կմ-ի վրա դեպի Լենինգրադ տանող ուղղությամբ։

Ինչպես թվաբանությունից հայտնի յե, ամբողջ թվով բազմապատկելը մի գործողություն է, վորի միջոցով մի թիվ (բազմապատկելին) իբրև գումարելի այնքան անգամ է կրկնվում, վորքան միավոր կա մյուս թվի (բազմապատկչի) մեջ։ Կոտորակով բազմապատկելը մի գործողություն է, վորի միջոցով գտնում ենք բազմապատկելիի նույն կոտորակը (մասը), միավորի ինչ կոտորակը վոր կազմում է բազմապատկիչը։

Նախընթաց խնդրից յերևում է, որ այս սահմանումները կիրառելի յեն նաև հարաբերական թվերի բազմապատկման դեպքում, յերբ բազմապատկիչը դրական թիվ է։ Որինակ՝ -5-ը բազմապատկել $+3$-ով (կամ պարզապես 3-ով), նշանակում է -5-ն իբրև գումարելի կրկնել 3 անգամ (կստանանք -15). բազմապատկել 0-ն 5-ով, նշանակում է 0-ն իբրև գումարելի կրկնել 5 անգամ (կստանանք 0). բազմապատկել -12-ը $+\frac{3}{4}$-ով (կամ պարզապես $\frac{3}{4}$-ով), կնշանակի գտնել -12-ի $\frac{3}{4}$-ը (կստանանք -9)։

27. Բազմապատկում բացասական թվով։ Նախընթաց խնդիրն այսպես ձևափոխենք. կեսօրին գնացքը գտնվում է Բոլոգոյեյում. վորտեղ էր գտնվում նա 3 ժամ առաջ։ Այս խնդիրը լուծելու համար դարձյալ պետք է գնացքի շարժման արագությունը բազմապատկենք շարժման ժամանակով։ Յերկու խնդիրն էլ նման պայմաններ ունեն և լուծման միատեսակ յեղանակ, բայց պատասխանը տարբեր կլինի, նայած՝ խոսքը *նախկեսօրյա* ժամանակի մասին է, թե *հետկեսօրյա*։

Յեթե մենք ցանկանում ենք, վոր մեր բանաձևը՝

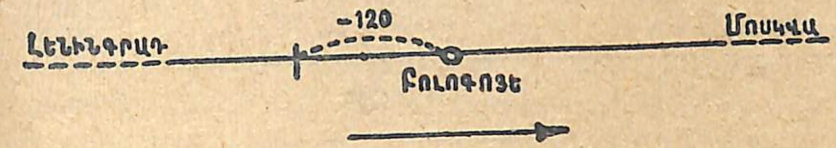
$$x = vt,$$

մեզ ճշտորոշ պատասխան տա բոլոր դեպքերում, հետևյալ ձևով կվարվենք։

Հետկեսօրյա ժամանակը կընդունենք դրական, իսկ նախկեսօրյա ժամանակը՝ բացասական. դրա համեմատ էլ t թիվը դրական կլինի կամ բացասական, նայած թե վոր ժամանակի մասին է խոսքը։ Այսպիսով յերկու բազմապատկիչներն էլ՝ v և t, այժմ կարող են ընդունել դրական և բացասական արժեքներ։

Դիտենք այն բոլոր դեպքերը, վորոնք հնարավոր են մեր խնդիրը լուծելիս, և բոլոր դեպքերում էլ ընդունենք, վոր գնացքը կեսօրին Բոլոգոյեյում է գտնվում և ժամը 40 կմ արագությամբ է գնում։

1-ին դեպք. Գնացքը դեպի Մոսկվա յե գնում. վորտեղ կլինի 3 ժամից հետո։



Գծ. 7.

Այս դեպքում արագությունը դրական է՝ $v = +40$, ժամանակը նույնպես դրական է՝ $t = +3$։ Այս դեպքն արդեն քննության է առնված, և պատասխանն էր՝

$$x = (+40) \cdot (+3) = +120.$$

2-րդ դեպք։ Գնացքը գնում է դեպի Լենինգրադ։ վորտեղ կլինի 3 ժամից հետո։

Այստեղ արագությունը բացասական է՝ $v = -40$. ժամանակը դրական է՝ $t = +3$։ Այս դեպքն էլ է քննության առնված։ Լուծումն էր՝

$$x = (-40) \cdot (+3) = -120.$$

3-րդ դեպք։ Գնացքը գնում է դեպի Մոսկվա։ Վորտեղ էր 3 ժամ առաջ։

Այս դեպքում արագությունը դրական է՝ $v = +40$, իսկ ժամանակը բացասական է՝ $t = -3$։

Ակնհայտ է, վոր 3 ժամ առաջ գնացքը գտնվում էր Լենինգրադի և Բոլոգոյեյի միջև, վերջինիցս 120 կմ-ի վրա (գծ. 7)։

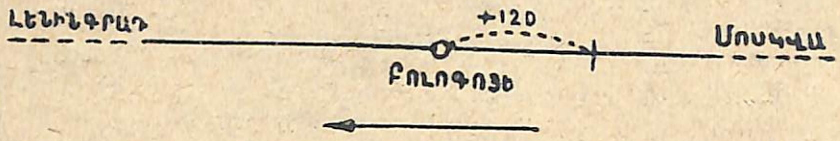
120 կմ հեռավորությունը Բոլոգոյեյից դեպի ձախ է գտնվում, հետևաբար՝ բացասական է։ Այսպիսով՝

$$x = (+40) \cdot (-3) = -120։$$

4-րդ դեպք։ Գնացքը գնում է դեպի Լենինգրադ. վորտեղ էր 3 ժամ առաջ։

Այստեղ թե արագությունը և թե ժամանակը բացասական են՝ $v = -40$ և $t = -3$։

Ակնհայտ ե, վոր 3 ժամ առաջ գնացքը գտնվում եր Մոսկվայի և Բոլոգոյեյի միջև, վերջինից 120 կմ հեռավորության վրա (գծ. 8)։



Գծ. 8.

Բոլոգոյեյից դեպի Մոսկվա հեռավորությունը դրական ե, հետևաբար՝

$$x = (-40) \cdot (-3) = +120 ։$$

28. Բազմապատկման կանոնը։ Յեթե նախորդ խնդրի մեջ 40 և 3 թվերի փոխարեն վորևե այլ թվեր (վորոնց թվում նաև կոտորակային թվեր) վերցնենք, ապա, ինչպես ակնհայտ ե, մեր դատողությունների ընթացքը դրանից չեր փոխվի։

Այժմ տանք հարաբերական թվերի բազմապատկման ընդհանուր կանոնը։

Գրենք այն բոլոր դեպքերը, վորոնք առաջ յեկան բազմապատկման ժամանակ և ընդհանրացնենք, տարածելով այդ դեպքերն ամեն տեսակ թվերի վրա։

$(+40) \cdot (+3) = +120$ կամ ընդհանուր ձևով $(+a) \cdot (+b) = +ab$
$(-40) \cdot (+3) = -120$ » » » $(-a) \cdot (+b) = -ab$
$(+40) \cdot (-3) = -120$ » » » $(+a) \cdot (-b) = -ab$
$(-40) \cdot (-3) = +120$ » » » $(-a) \cdot (-b) = +ab$

Բաղդատելով այս բոլոր դեպքերը մեկը մյուսի հետ՝ մենք նկատում ենք, վոր

1. Յեթե յերկու արտադրիչներն էլ նույն նշանն ունեն, ապա արտադրյալը դրական ե։

2. Յեթե յերկու արտադրիչները տարբեր նշաններ ունեն, ապա արտադրյալը բացասական ե։

3. Արտադրյալի բացարձակ մեծությունը հավասար ե արտադրիչների բացարձակ մեծությունների արտադրյալին։

Այստեղից ստանում ենք հետևյալ ընդհանուր կ ա ն ո ն ը.

Յերկու հարաբերական թվերի արտադրյալը գտնելու համար պետք ե նրանց բացարձակ մեծությունները բազմապատկել յեվ արտադրյալը վերցնել + նշանով, յեթե յերկու արտադրիչներն էլ միևնույն նշանն ունեն, յեվ — նշանով, յեթե նրանք հակադիր նշաններ ունեն։

Այս կանոնի այն մասը, վոր նշաններին ե վերաբերում, կոչվում ե նշանների կանոն։ Վերջինս սովորաբար այսպես են արտահայտում։

Յերկու թվեր բազմապատկելիս միատեսակ նշանները տալիս են +, իսկ տարբերները —։

Դիտելով բերած որինակները՝ կարելի յե նաև հետևյալ կանոնը գտնել, վորը հետագայում յերբեմն ոգտագործելու յենք. դրական թվով բազմապատկելիս բազմապատկելիի նշանը չի փոխվում (այսինքն արտադրյալը նույն նշանն ե ունենում, ինչ վոր բազմապատկելին). բացասական թվով բազմապատկելիս բազմապատկելիի նշանը փոխվում ե։

Նկատենք նաև, վոր արտադրյալը միշտ հավասար ե զերոյի, յեթե արտադրիչներից գոնե մեկը հավասար ե զերոյի։

29. Յերեք յեվ ավելի թվերի արտադրյալը։ Արտադրյալի նշանը։ Դիցուք հարկավոր ե հաշվել հետևյալ արտադրյալը.

$$(+2) \cdot (-1) \cdot (+3) \cdot (-10) \cdot (-4) \cdot (-5)$$

Դրա համար առաջին թիվը կբազմապատկենք յերկրորդով, ստացված արտադրյալը կբազմապատկենք յերրորդ թվով, նոր ստացված արտադրյալը կբազմապատկենք չորրորդ թվով և այսպես կշարունակենք՝

$$(+2) \cdot (-1) = -2,$$
$$(-2) \cdot (+3) = -6,$$
$$(-6) \cdot (-10) = +60,$$
$$(+60) \cdot (-4) = -240,$$
$$(-240) \cdot (-5) = +1200.$$

Յեթե միայն դրական թվեր բազմապատկվեին իրար հետ, ապա վերջնական արտադրյալի նշանը պետք է լիներ, իհարկե, +։ Բայց յերբ արտադրիչներից մի քանիսը կամ բոլոր արտադրիչները բացասական են, ապա արտադրյալը + նշան կունենա, յեթե բացասական արտադրիչների թիվը զույգ է, յեվ — նշան կունենա, յեթե բացասական արտադրիչների թիվը կենտ է։ Այսպես՝

Մեկ բացասական արտադրիչ՝

$$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)=-6;$$

յերկու բացասական արտադրիչ՝

$$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-10)=+60;$$

յերեք բացասական արտադրիչ՝

$$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-10)\cdot(-4)=-240$$ և այլն։

30. Բացասական թվի աստիճանը։ Նախորդ հոդվածի կանոնը կիրառենք հավասար արտադրիչների բազմապատկման, այսինքն աստիճան բարձրացնելու վրա։ Մենք գիտենք, վոր դրական թվի վորեվե աստիճանը դարձյալ դրական թիվ է տալիս։ Ի՞նչ նշան կունենա աստիճանը, յեթե հիմքը բացասական է։

Գտնենք բացասական թվի քառակուսին՝

$$(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=+9;\quad (-7)^2=(-7)\cdot(-7)=+49.$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$(-a)^2=(-a)\cdot(-a)=+a^2.$$

Բացասական թվի քառակուսին դրական թիվ է։

Այժմ գտնենք բացասական թվի խորանարդը։

$$(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-8.$$

$$(-6)^3=(-6)\cdot(-6)\cdot(-6)=-216.$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$(-a)^3=(-a)\cdot(-a)\cdot(-a)=-a^3.$$

Բացասական թվի խորանարդը բացասական թիվ է։

Դժվար չէ նկատել, վոր բացասական թիվը վորեվե զույգ աստիճան բարձրացնելիս դրական թիվ է ստացվում, վորովհետև բացասական արտադրիչների թիվը այս դեպքում զույգ է (տ. § 29)։

Այսպես՝

$$(-3)^4=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=+81.$$

$$(-2)^6=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=+64.$$

և այլն։

Նույն պատճառով բացասական թվի ամեն մի կենտ աստիճանը միշտ տալիս է բացասական թիվ։ Այսպես,

$$(-3)^5=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=-243;$$

$$(-2)^7=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-128;$$

և այլն։

Այսպիսով՝

Բացասական թվի զույգ աստիճանը զույգ թիվ է, իսկ կենտ աստիճանը՝ կենտ թիվ։

Մասնավորապես նկատենք, վոր

$$(-1)^2=(-1)^4=(-1)^6=\ldots=+1;$$

$$(-1)^3=(-1)^5=(-1)^7=\ldots=-1.$$

Վ ա ր ժ ո ւ թ յ ո ւ ն ն ե ր

33. $(-2)\cdot(-3)$; $(+7)\cdot(-2)$; $(-8)\cdot(-10)$.

34. $\left(-8\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+2\frac{3}{4}\right)$; $\left(+0{,}36\right)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)$.

35. $(-1)^2$; $(-1)^3$; $(-1)^4$; $(-1)^5$.

36. Հաշվել $ax2+bx+c$ արտահայտությունը, յեթե $a=3$, $b=-4$, $c=-5$ և $x=4$։

37. Հաշվել նույն արտահայտությունը, յեթե $a=-3$, $b=4$, $c=+5$ և $x=4$։

38. $4\cdot0$; $5\frac{1}{2}\cdot0$; $0{,}3\cdot0$; $-8\frac{3}{4}\cdot0$; $0\cdot x$.

39. $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+3{,}5\right)\cdot\left(+2\right)\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)$.

VII. ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ԵՎ ԲԱԺԱՆՄԱՆ ԳԼԽԱՎՈՐ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

34. Մի քանի օրինակներով ցույց տանք, թե բազմապատկման և բաժանման այն հատկությունները, որ մենք նշեցինք թվաբանական թվերի համար (§§ 8 և 9), պահպանում են իրենց ուժը նաև հարաբերական թվերի համար։

ա) Տեղափոխական օրենք՝ արտադրիչների տեղափոխությունից արտադրյալը չի փոխվում։

Նախ վերցնենք միայն երկու թվերի բազմապատկման դեպքեր՝

$(+5)\cdot(+2)=+10$ և $(+2)\cdot(+5)=+10$;

$(-5)\cdot(+2)=-10$ և $(+2)\cdot(-5)=-10$;

$$\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=+\frac{9}{20} \text{ և } \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=+\frac{9}{20} \text{ և այլն։}$$

Այժմ վերցնենք այնպիսի արտադրյալ, որը կազմված է երկուսից ավելի արտադրիչներից. օրինակ՝ $(-2)\cdot(-5)\cdot(+3)$։ Այս արտադրյալի բացարձակ մեծությունը հավասար է $2\cdot5\cdot3$, իսկ նշանը $+$ կլինի, որովհետև բացասական արտադրիչների թիվը տվյալ օրինակում զույգ է։ Եթե արտադրիչները տեղափոխենք, օրինակ՝ վերցնենք $(+3)\cdot(-5)\cdot(-2)$, ապա նոր արտադրյալի բացարձակ մեծությունը կլինի $3\cdot5\cdot2$, իսկ նշանի $+$ կամ $-$ լինելը կախված կլինի բացասական արտադրիչների թվից։ Բայց $3\cdot5\cdot2=2\cdot5\cdot3$, համաձայն թվաբանական թվերի բազմապատկման տեղափոխական օրենքի և բացասական արտադրիչների թիվը նույնն է մնում, ինչ որ առաջ։ Կնշանակի երկու արտադրյալներն էլ կունենան միևնույն բացարձակ մեծությունը և միևնույն նշանը։ Այդ պատճառով

$$(-2)\cdot(-5)\cdot(+3)=(+3)\cdot(-5)\cdot(-2)։$$

բ) Զուգորդական օրենք՝ արտադրյալը չի փոխվի, եթե մի քանի արտադրիչների փոխարեն դնենք նրանց արտադրյալը։

Այսպես, փոխանակ

$$(-5)\cdot(+3)\cdot(-2)$$

բազմապատկումն այն կարգով կատարելու, որով գրված են արտադրիչները, այսինքն փոխանակ վերցնելու

$$(-5)\cdot(+3)=-15,\quad (-15)\cdot(-2)=+30,$$

մենք կարող ենք վերևի երկու արտադրիչ, օրինակ $+3$ և -2, փոխարինել նրանց արտադրյալով, այսինքն տվյալ օրինակում -6-ով, և այնուհետև այդ թվով բազմապատկել յերրորդ արտադրիչը, մեր օրինակում՝

$$(-5)\cdot(-6)=+30\text{։ Այսպիսով՝}$$

$$(-5)\cdot(+3)\cdot(-2)=(-5)\cdot[(+3)\cdot(-2)]\text{։}$$

գ) Որևէ թիվ մի քանի թվերի արտադրյալով բազմապատկելու համար կարելի յե այդ թիվը բազմապատկել առաջին արտադրիչով, ստացած արտադրյալը բազմապատկել յերկրորդ արտադրիչով և այլն։

Ճիշտ այդպես էլ՝ որևէ թիվ մի քանի թվերի արտադրյալի վրա բաժանելու համար կարելի յե այդ թիվը բաժանել առաջին արտադրիչի վրա, ստացած քանորդը բաժանել յերկրորդ արտադրիչի վրա և այլն։

Այսպես, $+10$-ը թիվը $(-2)\cdot(+3)$ արտադրյալով բազմապատկելու համար կարող ենք նախ հաշվել այդ արտադրյալը, որ կանի -6, և ապա նրանով բազմապատկել $+10$-ը (կստանանք -60). բայց կարող ենք $+10$-ը նախ բազմապատկել -2-ով (կստանանք -20) և ապա ստացած արտադրյալը բազմապատկել $+3$-ով (կստանանք -60)։ Այսպիսով՝

$$(+10)\cdot[(-2)\cdot(+3)]=(+10)\cdot(-2)\cdot(+3)$$

ընդհանրապես (զուգորդական օրենքի համաձայն)

$$a(bc\ldots)=(a\cdot b)c\ldots$$

Նմանապես՝

$$10:[(-2)\ (+3)]=[10:(-2)]:(+3),$$

որովհետև

$$10:[(-2)\ (+3)]=10:(-6)=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3},$$

և

$$[10:(-2)]:(+3)=(-5):(+3)=-\frac{5}{3}\text{։}$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$a : (bc\ldots) = (a : b) : c\ldots$$

Կարելի յե նման ձևով յերևան բերել նաև բաշխական որենքի իրավացիությունը։

դ) Ցույց տանք նաև, վոր յեթե բաժանելին յեվ բաժանարարը բազմապատկենք (կամ բաժանենք) միևնույն թվով (բացի զերոյից), ապա քանորդը չի փոխվի։

Ինչպես առաջ տեսանք (§ 9, ե), $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ հավասարությունն ուղիղ ե ամեն թվաբանական թվերի համար, լինեն նրանք ամբողջ, թե կոտորակային։ Այժմ կստուգենք, վոր այդ հավասարությունը ճիշտ ե նաև այն դեպքում, յերբ a, b և m տառերը բոլորն ել, կամ նրանց մի մասը, հարաբերական թվեր են նշանակում։

Վերցնենք բաժանման վորևե որինակ, ասենք թե՝ 5 : 0,8, և բաժանելին ու բաժանարարը բազմապատկենք, դիցուք, 3-ով։ Դրանից քանորդը չի փոխվի, վորովհետև բոլոր թվերն ել թվաբանական են. այդ պատճառով կարող ենք հետևյալ հավասարությունը գրել՝

$$\frac{5}{0{,}8} = \frac{5.3}{0{,}8.3} = \frac{15}{2{,}4}.$$

Այժմ յենթադրենք, թե այս հավասարության մեջ թվերից վորևե մեկը բացասական ե դառնում, որինակ՝ 5-ը փոխարինվում ե —5-ով. կստացվի՝

$$\frac{-5}{0{,}8} = \frac{-5\cdot 3}{0{,}8.3} = -\frac{15}{2{,}4}.$$

Հավասարությունն այնուամենայնիվ պահպանվեց, վորովհետև յերկու քանորդների բացարձակ մեծություններն ել անփոփոխ մնացին և յերկուսն ել բացասական թվեր են։

Հեշտ ե նույնպես ստուգել, վոր հավասարությունը պահպանվում ե նաև այն ժամանակ, յերբ մյուս թվերից վորևե մեկն ենք դարձնում բացասական։ Կնշանակի՝ ինչպիսի դրական և բացասական թվեր ել նշանակեն a, b և m տառերը, $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ հավասարությունը միշտ ել պահպանվում ե։

Քանորդը չի փոխվել նաև բաժանելիի ու բաժանարարի միևնույն թվի վրա բաժանելուց, վորովհետև բաժանումը համազոր ե հակադարձ թվով բազմապատկելուն։

Նկատենք, սակայն, վոր այն թիվը, վորով բազմապատկում ենք (կամ բաժանում ենք) բաժանելին և բաժանարարը, չպետք ե զերո լինի, վորովհետև այդ դեպքում, § 33-ի գ. կետի համաձայն, քանորդն անորոշ ե դառնում։

Վարժություններ

43. Ստուգումով հավաստիանալ, վոր հետևյալ հավասարություններն ուղիղ են՝

$$(-5)\cdot(+2)\cdot(-1) = (+2)\cdot(-1)\cdot(-5) = (+2)\cdot(-5)\cdot(-1).$$

$$10\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(+5) = 10\cdot[(-3)\cdot(-2)\cdot(+5)] = 10\cdot(-2)\cdot[(-3)\cdot(+5)].$$

$$[10+(-3)+(-2)]\cdot(-7) = 10\cdot(-7)+(-3)\cdot(-7)+(-2)\cdot(-7)$$

$$\left(\frac{3}{4}-0{,}2+\frac{7}{8}\right)\cdot 0{,}3 = \frac{3}{4}\cdot 0{,}3 - 0{,}2\cdot 0{,}3 + \frac{7}{8}\cdot 0{,}3.$$

44. Հիմնվելով բազմապատկման զուգորդական հատկության վրա, ինչպես ե ամենից ավելի հարմար հաշվել հետևյալ արտադրյալները՝

$$8\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 125; \qquad 2{,}5\cdot 6\cdot 10\cdot 5; \qquad \frac{3}{4}\cdot 8{,}2\cdot 4\cdot 10.$$

45. Ստուգել, վոր 3,5 : (—7) քանորդը չի փոխվի, յեթե բաժանելին և բաժանարարը բազմապատկենք 4-ով։ Նույնը, յեթե բաժանենք —0,75-ի վրա։

ՅԵՐՐՈՐԴ ՀԱՏՎԱԾ

ԱՄԲՈՂՋ ՄԻԱՆԴԱՄ ՅԵՎ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ. ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐ

I. ՆԱԽՆԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐ

35. Միանդամ յեվ բազմանդամ։ Հանրահաշվական արտահայտությունները յերկու խմբի յեն բաժանվում, նայած թե նրանց մեջ վերջին հանրահաշվական գործողությունն ինչպիսին է։

Այն հանրահաշվական արտահայտությունը, վորի մեջ ըստ կարգի վերջին գործողությունը գումարում կամ հանում չէ, կոչվում է միանդամ։

Կնշանակի՝ միանդամը կամ մի առանձին թիվ է, վորն արտահայտված է տառով կամ թվանշանով, որինակ՝ $-a$, $+10$, կամ մի արտադրյալ է, որինակ՝ ab, $(a+b)c$, կամ մի քանորդ է, որինակ՝ $\frac{a-b}{c}$, կամ մի աստիճան է, որինակ՝ b^2. Բայց միանդամը չպետք է գումար կամ տարբերություն լինի։

Յեթե միանդամը քանորդ է ներկայացնում, նա կոչվում է կոտորակային միանդամ. բոլոր մյուս միանդամները կոչվում են ամբողջ միանդամներ։ Այսպես, որինակ՝ $\frac{a-b}{c}$ միանդամը կոտորակային է, մինչդեռ $(x-y)\cdot ab$, $a(x+b)^2$ միանդամներն ամբողջ են։ Վորովհետև հանրահաշվի սկզբում մենք խոսելու յենք միայն ամբողջ միանդամների մասին, ապա կարճության համար նրանց պարզապես «միանդամներ» կկոչենք։

Հանրահաշվական այն արտահայտությունը, վորը բաղկացած է իրար հետ + յեվ — նշաններով միացված մի քանի

միանդամներից, կոչվում է բազմանդամ։ Այսպես, որինակ՝ բազմանդամ է հետևյալ արտահայտությունը.

$$ab-a+b^2-10+\frac{a-b}{c}.$$

Այն առանձին արտահայտությունները, վորոնց + կամ — նշաններով միացնելուց ստացվում է բազմանդամը, կոչվում են նրա անդամներ։ Սովորաբար բազմանդամի անդամները դիտվում են այն նշանների հետ միասին, վորոնք դրված են նրանց առաջ. որինակ, ասում են՝ $-a$ անդամը, $+b^2$ անդամը և այլն։ Յեթե առաջին անդամի առաջ վոչ մի նշան չկա, պետք է հասկանալ + նշանը. այսպես, մեր որինակում առաջին անդամն է ab կամ $+ab$։

Յերկու անդամից բաղկացած արտահայտությունը կոչվում է յերկանդամ, յերեք անդամից բաղկացածը՝ յեռանդամ և այլն։

Յեթե բազմանդամի բոլոր անդամներն ամբողջ են, ապա բազմանդամը կոչվում է ամբողջ։

36. Գործակից։ Դիցուք տրված է՝

$$a3ab(-2),$$

արտադրյալը, վորի մեջ մի քանի արտադրիչներ թվանշաններով են արտահայտված, մի քանիսն էլ տառերով։ Այսպիսի արտադրյալները կարելի յե ձևափոխել (օգտվելով բազմապատկման զուգորդական հատկությունից), մի խմբի մեջ միացնելով a տառով արտահայտված բոլոր արտադրիչները և այլն. կստանանք՝

$$3\cdot(-2)\cdot(aa)\cdot b,$$

վոր կարելի յե ավելի կարճ գրել՝

$$-6a^2b.$$

Թվանշաններով արտահայտած արտադրիչը, վորը դրված է տառային արտադրիչներից առաջ, կոչվում է միանդամի գործակից (կոեֆիցյենտ)։ Այսպես, $-6a^2b$ միանդամի մեջ -6 թիվը գործակից է։

Նկատենք, վոր յեթե գործակիցն ամբողջ դրական թիվ է, ապա նա ցույց է տալիս, թե քանի անգամ է իբրև գումարելի կրկնվում այն տառային արտահայտությունը, վորին նա վերաբերում է. այսպես, $3ab$-ն նույնն է նշանակում, ինչ որ $(ab)\cdot 3$-ը, այսինքն $ab+ab+ab$: Եթե գործակիցն ամբողջ բացասական թիվ է, ապա նա ցույց է տալիս, թե քանի անգամ է իբրև հանելի կրկնվում այն տառային արտահայտությունը, որին նա վերաբերում է. այսպես $-3x$-ը նշանակում է՝ $-x-x-x$: Եթե գործակիցը կոտորակ է, ապա նա արտահայտում է, թե տառային արտահայտության թվային մեծության որ կոտորակն է վերցվում: Այսպես, $\frac{2}{3}ax$-ը նույնն է նշանակում, ինչ որ $ax\cdot\frac{2}{3}$-ը, իսկ բազմապատկել ax-ը $\frac{2}{3}$-ով, նշանակում է վերցնել այդ թվի $\frac{2}{3}$-ը:

37. Բազմանդամի հատկությունները: Ամեն մի բազմանդամ կարելի է դիտել որպես նրա անդամների հանրահաշվական գումարը: Օրինակ՝

$$2a-b+c$$

բազմանդամը ներկայացնում է $2a+(-b)+(+c)$ գումարը, որովհետև $+(-b)$ արտահայտությունը համազոր է $-b$ արտահայտության և $+(+c)$ արտահայտությունը նույնն է նշանակում, ինչ որ $+c$-ն: Դրա հետևանքով հարաբերական թվերի գումարի բոլոր հատկությունները (§ 25) պատկանում են նաև բազմանդամին: Հիշեցնենք այդ հատկություններից երկուսը:

ա) Տեղափոխական օրենք՝ բազմանդամի թվային մեծությունը չի փոխվում նրա անդամների տեղափոխությունից (անդամները պետք է տեղափոխել իրենց նշանների հետ միասին).

բ) Զուգորդական օրենք՝ բազմանդամի թվային մեծությունը չի փոխվում, յեթե նրա մի քանի անդամները փոխարինենք նրանց գումարով:

Նշենք բազմանդամի հետևյալ կարևոր հատկությունը ևս՝

գ) Եթե բազմանդամի յուրաքանչյուր անդամի առաջ նշանը փոխենք, ապա բազմանդամի թվային մեծությունը նույնպես կփոխի նշանը, իսկ նրա բացարձակ մեծությունը չի փոխվի:

Օրինակ՝ $2a^2-ab+b^2-\frac{1}{2}a$ բազմանդամի թվային մեծությունը, յերբ $a=-4$ և $b=-3$, հավասար է՝

$$2\cdot(-4)^2-(-4)\cdot(-3)+(-3)^2-\frac{1}{2}\cdot(-4)=$$

$$=2\cdot16-12+9+2=32-12+9+2=31,$$

իսկ

$$-2a^2+ab-b^2+\frac{1}{2}a$$

բազմանդամի թվային մեծությունը, յերբ տառերը նախկին արժեքներն ունեն, հավասար է՝

$$(-2)\cdot(-4)^2+(-4)\cdot(-3)-(-3)^2+\frac{1}{2}\cdot(-4)=$$

$$=-2\cdot16+12-9-2=-32+12-9-2=-31.$$

Վարժություններ

46. Պարզել հետևյալ արտադրյալները.

$$ax10xaax; \qquad aa(-5)\cdot bxx(+2);$$

$$ab\cdot\frac{3}{4}\cdot axx\left(-\frac{1}{2}\right); \qquad 5mxy(-4)mxyy.$$

47. Ներկայացնել իբրև գումարներ հետևյալ արտահայտությունները.

$2a$; $\qquad 3ax$; $\qquad 5a^2b$; $\qquad 4(a+1)$.

48. Հաշվել հետևյալ միանդամները՝

$$7a^2bc,\ \text{յեթե}\ a=3,\ b=2,\ c=\frac{5}{7};$$

$$0{,}8a(b+c),\ \text{յեթե}\ a=1,\ b=\frac{5}{6},\ c=0{,}25;$$

$$3(a+b)^2c,\ \text{յեթե}\ a=1,\ b=\frac{5}{6},\ c=0{,}25;$$

$$-7x^2y^3,\ \text{յեթե}\ x=-2\ y=1;$$

$0{,}52ax^2y$, յեթե $a=100$, $x=-3$, $y=-2$։

49. Հաշվել հետևյալ բազմանդամները՝

$$2x^4=x^3+5x^2-7x+1, \text{ յեթե } x=1, \text{ յեթե } x=2;$$

$$ax^2+bx+c, \text{ յեթե } a=3,\ b=-2\ c=-5,\ x=1։$$

50. Ստուգելով համոզվել, վոր

$$x^3-2x^2+3x-5 \text{ և } -x^3+2x^2-3x+5$$

յերկու բազմանդամները $x=2$ արժեքի համար այնպիսի թվեր են տալիս, վորոնք բացարձակ մեծությամբ հավասար են, բայց տարբեր նշաններ ունեն։

38. Նման անդամների միացում։ Բազմանդամի այն անդամները, վորոնք իրարից միայն գործակիցներով կամ նշաններով են տարբերվում, կամ բնավ չեն տարբերվում, կոչվում են նման անդամներ։

Որինակ՝

$$\underline{4a}-\underline{\underline{3x}}+\underline{0{,}5a}+\underline{\underline{8x}}+3ax-\underline{\underline{2x}}$$

բազմանդամի մեջ առաջին անդամը նման է յերրորդին (նրանք ընդգծված են մի գծիկով), յերկրորդ անդամը՝ չորրորդին և վեցերորդին (ընդգծված են յերկու գծիկով), իսկ հինգերորդ անդամն իրեն նմանը չունի։

Յեթե բազմանդամի մեջ իրար նման անդամներ կան, նրանք կարելի յե միացնել և մի անդամ դարձնել բազմանդամի գումարական հատկության հիման վրա։ Այսպես, մեր բերած որինակում անդամները կարող ենք այսպես խմբավորել.

$$(4a+0{,}5a)+(-3x+8x-2x)+3ax։$$

Բայց ակնհայտ է, վոր վորևէ թվի 4-ապատիկը և նույն թվի 0,5-ը միասին կազմում են․ այդ թվից 4,5 անգամ մեծ թիվ։ Կնշանակի՝ $4a+0{,}5a=4{,}5a$։ Նմանապես $-3x+8x=5x$ և $5x-2x=3x$։ Կնշանակի՝ բազմանդամը կարելի յե այսպես պատկերացնել՝

$$4{,}5a+3x+3ax։$$

Բազմանդամի բոլոր նման անդամների միավորումը մի անդամի մեջ կոչվում է բազմանդամի նման անդամների միացում։

Դիտողություն։ Յերկու նման անդամներ, վորոնց գործակիցները հավասար են, իսկ նշանները տարբեր, իրար վոչնչացնում են. այդպես են, որինակ՝ հետևյալ անդամները. $+2a$ և $-2a$, կամ $-\frac{1}{2}x^2$ և $+\frac{1}{2}x^2$։

Որինակներ.

1. $a+\underline{5mx}-\underline{2mx}+\underline{7mx}-\underline{8mx}=a+2mx$։

2. $\underline{4ax}+b^2-\underline{7ax}-\underline{3ax}+\underline{2ax}=-4ax+b^2=b^2-4ax$։

3. $\underline{4a^2b^3}-\underline{\underline{3ab}}+\underline{0{,}5a^2b^3}+3a^2c+\underline{\underline{8ab}}=4{,}5a^2b^3+5ab+3a^2c$։

Վարժություններ

51. $a^3x^2+3a^2x^3+\frac{1}{2}a^2x^3+a^2x^3$։

52. $2x-5xy-8xy-3{,}1xy-0{,}2xy$։

53. $a+8mxy^2-4\frac{1}{2}mxy^2$

54. $a-8mxy^2+4\frac{1}{2}mxy^2$։

55. $5a^3-7a^2b+7ab^2+a^2b-2a^3-8ab^2+a^3-12ab^2+3a^2b$։

56. $x^5-4ax^4-2ax^4+2a^2x^3+5ax^4-2a^2x^3+ax^4-7a^2x^3$։

Պատմական տեղեկություններ

Բացասական թվերը պատահում են դեռ հույն մաթեմատիկոս Դիոֆանտի մոտ (IV դ.)։ Նա այդպիսի թվերը կոչում է «անթույլատրելի» և խնդիրներ լուծելիս նրանց կարևորություն չի տալիս։ Բայց վորտեղ հարկավոր է լինում յերկու այնպիսի թվեր բազմապատկել, վորոնք — նշան ունեն, նա գործ է ածում մի կանոն, վորը նման է մեր կանոնին։ Նա ասում է «հանվող թիվը բազմապատկելով հանվող թվով՝ տալիս է ավելացվող թիվ»։ Այսպես նա ստանում է.

$$(7-3)\cdot(5-2)=7\cdot5-7\cdot2-3\cdot5+3\cdot2=12։$$

Հնդկացի մաթեմատիկոս Բրահմագուպտան (620 թ.) տալիս է արդեն հարաբերական թվերի գումարման և հանման կանոնների մանրամասն ցուցակը: Բերենք նրանցից մի քանիսը:

«Յերկու ունեցվածքների գումարն ունեցվածք է» (այսինքն, օրինակ՝

$$(+2)+(+3)=+5):$$

«Յերկու պարտքերի գումարը պարտք է» (այսինքն, օրինակ՝

$$(-2)+(-3)=-5):$$

«Ունեցվածքի և պարտքի գումարը հավասար է նրանց տարբերության» (այսինքն $(+5)+(-7)=-2$):

«Զերոյից հանվող պարտքը դառնում է ունեցվածք, իսկ ունեցվածքը՝ պարտք» ($0-(-3)=+3$; $0-(+3)=-3$) և այլն:

Յեվրոպայում դեռ 1544 թվին մաթեմատիկոս Շտիֆելը բացասական թվերը կոչում է «անհեթեթ թվեր»: Ժիրարն իր աշխատության մեջ արդեն օգտվում է բացասական թվերից (1629 թ.), բայց նրանք վերջնականորեն մուծվեցին մաթեմատիկայի մեջ Դեկարտի կողմից (1637 թ.), վորը և դիտեց բացասական թվերն իբրև ուղղված մեծություններ: Առաջներում գումարման և հանման գործողությունների նշանակման համար գործ էին ածում լատիներեն plus և minus բառերն առանց կրճատման, բայց հետագայում նրանք կրճատվեցին այնպես, վոր գրում էին միայն p և m, վերը գիծ դնելով:

II. ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄ ՅԵՎ ՀԱՆՈՒՄ

39. Միանդամների գումարումը: Դիցուք պահանջվում է գումարել մի քանի միանդամներ՝ $3a$; $-5b$; $+0{,}2a$; $-7b$ և c:

Նրանց գումարն այսպես կարտահայտվի՝

$$3a+(-5b)+(+0{,}2a)+(-7b)+c:$$

Բայց $+(-5b)$, $+(+0{,}2a)$ և $+(-7b)$ արտահայտությունները համազոր են $-5b$, $+0{,}2a$ և $-7b$ արտահայտություններին. ուստի տված միանդամների գումարը կարելի յե ավելի պարզ այսպես գրել.

$$\underline{3a}-\underline{\underline{5b}}+\underline{0{,}2a}-\underline{\underline{7b}}+c,$$

վորը նման անդամների միացումից հետո, տալիս է՝

$$3{,}2a-12b+c:$$

Կանոն: Մի քանի միանդամներ գումարելու համար պետք է այդ միանդամները մեկը մյուսի յետևից գրել իրենց նշաններով յեվ նման անդամների միացում կատարել:

40. Բազմանդամների գումարումը: Դիցուք վորևէ հանրահաշվական արտահայտության, վորը մենք կնշանակենք մի m տառով, պետք է ավելացնել $a-b+c$ բազմանդամը: Վորոնելի գումարը կարելի յե այսպես արտահայտել՝

$$m+(a-b+c):$$

Այս արտահայտությունը ձևափոխելու համար նկատի առնենք, վոր $a-b+c$ բազմանդամը ներկայացնում է $a+(-b)+c$ գումարը. բայց մի գումար ավելացնելու համար կարելի յե նրա ամեն մի գումարելին առանձին գումարել մեկը մյուսի յետևից: Ուստի.

$$m+(a-b+c)=m+a+(-b)+c:$$

Բայց ավելացնել $-b$, այդ միևնույնն է, թե հանել b. ուստի՝

$$m+(a-b+c)=m+a-b+c:$$

Կանոն: Վորևէ հանրահաշվական արտահայտության մի բազմանդամ ավելացնելու համար պետք է այդ արտահայտությանը կցել մեկը մյուսի յետևից բազմանդամի բոլոր անդամներն իրենց նշաններով յեվ ապա նման անդամների միացում կատարել:

Յեթե առաջին անդամի առջև նշան չկա, ապա հասկացվում է + նշանը:

Օրինակ.

$$3a^2-5ab+b^3+(4ab-b^2+7a^2):$$

Այն հանրահաշվական արտահայտությունը, վոր մենք նշանակել էինք մի m տառով, այս օրինակում տրված է $3a^2-5ab+$ $+b^3$ բազմանդամի տեսքով: Կիրառելով նշած կանոնը, կգտնենք՝

$$3a^2-5ab+b^3+(4ab-b^2+7a^2)=$$

$$=3a^2-5ab+b^2+4ab-b^2+7a^2=10a^2-ab.$$

Դիտողություն։ Յեթե գումարելու համար տրված բազմանդամները նման անդամներ են պարունակում (ինչպես մեր օրինակում), ապա օգտակար է գումարելիներն այնպես գրել մեկը մյուսի տակ, վոր նման անդամները նման անդամների տակ գան՝

$$\begin{array}{r} 3a^2-5ab+b^2 \\ +\ 7a^2+4ab-b^2 \\ \hline 10a^2-ab \end{array}$$

Վարժություններ

Գումարել հետևյալ բազմանդամները՝ գրելով տակետակ (նման անդամները նմանների տակ).

57. $(2x-y-z)+(2y+z-x)+2z-x-y)$.

58. $(3x^3-4x^2+2x-1)+(2x^2-3x+4)+(x^3-2+4x+3x^2)$.

59. $(4a^3-5a^2b+7ab^2-9b^2)+(-2a^3+4a^2b-ab^2-4b^3)+$
$+(8ab^2-10a^2b+6a^3+10b^3)$.

41. Միանդամների հանումը։ *Դիցուք պետք է* $10ax$ *միանդամից հանել* $-3ax$ *միանդամը։ Վորոնելի տարբերությունն այսպես կարտահայտվի՝*

$$10ax-(-3ax).$$

$-3ax$ *թվի հանումը կարելի յե հանման գործողության կանոնի համաձայն, փոխարինել այդ թվին հակադիր թվի ավելացումով։ Այդ հակադիր թիվն է* $+3ax$, *ուստի*

$$10ax-(-3ax)=10ax+(+3ax)=10ax+3ax=13ax.$$

Կ ա ն ո ն։ Միանդամը հանելու համար պետք է այդ միանդամը գրել նվազելիի կողքին հակադիր նշանով յեվ նման անդամների միացում կատարել, յեթե այդպիսինները կան։

42. Բազմանդամի հանումը։ *Դիցուք պահանջվում է վորևէ հանրահաշվական արտահայտությունից, վոր կնշանակենք* m *տառով, հանել* $a-b+c$ *բազմանդամը. այդ կարելի յե այսպես նշանակել.*

$$m-(a-b+c).$$

Հանումը կատարելու համար, հանման կանոնի համաձայն, բավական է m*-ին ավելացնել* $a-b+c$ *թվին հակադիր թիվը։ Այդ հակադիր թիվն է* $-a+b-c$. *կնշանակի՝*

$$m-(a-b+c)=m+(-a+b-c).$$

Այժմ կիրառելով բազմանդամների գումարման կանոնը՝ կստանանք.

$$m-(a-b+c)=m-a+b-c.$$

Կ ա ն ո ն։ Վորևէ հանրահաշվական արտահայտությունից մի բազմանդամ հանելու համար պետք է այդ արտահայտությանը կցագրել հանելի բազմանդամի բոլոր անդամները հակադիր նշաններով։

Յեթե պահանջվում է մի բազմանդամից մի այլ բազմանդամ հանել և այդ բազմանդամների մեջ նման անդամներ կան, ապա օգտակար կլինի հանելի բազմանդամը փոխած նշաններով գրել նվազելի բազմանդամի տակ, և այնպես, վոր նման անդամները նմանների տակ գան, ապա միացում կատարել։ Որինակ՝ $(7a^2-2ab+b^2)-(5a^2+4ab-2b^2)$ *հանումն ամենից ավելի լավ է այսպես կատարել՝*

$$\begin{array}{r} 7a^2-2ab+b^2 \\ -\ 5a^2-4ab+2b^2 \\ \hline 2a^2-6ab+3b^2 \end{array}$$

Վարժություններ.

60. $(2p^2-4p+8)-(p^2-5p-7)$

61. $4x^2+y^2+5$ *յեռանդամից հանել* $-2y^2+y+6$ *յեռանդամը։*

62. $\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}$*-ը հանել* $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+1$*-ից*

63. *Պարզել հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$x=(2a^2-2b^2+c^2)-(a^2-2b^2-c^2)+(3a^2+4b^2-3c^2).$$

43. Փակագծերի բացումը, յերբ նրանց առջև + կամ — նշան կա։ Դիցուք պահանջվում է

$$2a + (a - 3b + c) - (2a - b + 2c)$$

արտահայտության մեջ փակագծերը բանալ։ Այդ պետք է այնպես հասկանալ, վոր պահանջվում է փակագծերի ներսը գտնվող բազմանդամների նկատմամբ այն գործողությունները կատարել, վորոնք նշված են փակագծերի առջև դրված նշաններով։ Մեր օրինակում առաջին փակագծերի առջև դրված է + նշանը, իսկ յերկրորդ փակագծերի առջև՝ — նշանը։ Կատարելով գումարումը և հանումը վերևի կանոնների համաձայն, կստանանք, առանց փակագծերի, հետևյալ արտահայտությունը՝

$$2a + a - 3b + c - 2a + b - 2c = a - 2b - c.$$

Այսպիսով՝ յեթե այնպիսի փակագծեր ենք բացում, վորոնց առջև + նշան է դրված, ապա փակագծերի ներսը գրված անդամների նշանները պետք է անփոփոխ մնան, իսկ յեթե այնպիսի փակագծեր ենք բացում, վորոնց առջև — նշան է գրված, ապա պետք է փակագծերի ներսը գտնվող բոլոր անդամների նշանները փոխել։

Դիցուք պահանջվում է փակագծերը բանալ հետևյալ արտահայտության մեջ.

$$10p - [3p + (5p - 10) - 4].$$

Ամենից ավելի հարմար է նախ փոքր փակագծերը բանալ և ապա միջակները.

$$10p - [3p + 5p - 10 - 4] = 10p - 3p - 5p + 10 + 4 = 2p + 14.$$

44. Բազմանդամի մի մասը փակագծերի մեջ առնելը։ Բազմանդամի ձևափոխման համար յերբեմն օգտակար է լինում նրա մի քանի անդամները միասին փակագծերի մեջ առնելը և այդ ժամանակ յերբեմն ցանկալի յե լինում փակագծերի առջև + նշան դնել, այսինքն բազմանդամը պատկերացնել իբրև գումար, յերբեմն էլ ցանկալի յե լինում փակագծերի առջև — նշան դնել, այսինքն բազմանդամը պատկերացնել իբրև տարբերություն։ Դիցուք, օրինակ՝ $a + b - c$ բազմանդամի մեջ մենք ցան-

կանում ենք փակագծերի մեջ առնել վերջին յերկու անդամները, փակագծերի առջև դնելով + նշանը։ Այդ դեպքում գրում ենք.

$$a + b - c = a + (b - c),$$

այսինքն փակագծերի ներսը թողնում ենք նույն նշաններն, ինչ վոր կային տված բազմանդամի մեջ։ Վոր այդպիսի ձևափոխումն իրավացի յե, կարելի յե նկատել, փակագծերը բանալով գումարման կանոնի համաձայն. այն ժամանակ նորից կստանանք տված բազմանդամը։

Դիցուք միևնույն բազմանդամի մեջ պահանջվում է փակագծերի մեջ առնել վերջին յերկու անդամները, փակագծերի առջև դնելով — նշանը։ Այն ժամանակ այսպես կգրենք՝

$$a + b - c = a - (-b + c) = a - (c - b),$$

այսինքն փակագծերի ներսը բոլոր անդամների առջև նշանները փոխում ենք։ Վոր այսպիսի ձևափոխումն ուղիղ է, կարելի յե հավաստիանալ, յեթե փակագծերը նորից բանանք հանման կանոնի համաձայն. այն ժամանակ նորից կստանանք տվյալ բազմանդամը։

Կարելի յե նաև վողջ բազմանդամն առնել փակագծերի մեջ, փակագծերի առջև դնելով + նշանը կամ — նշանը։ Օրինակ՝ $a + b - c$ բազմանդամը կարելի յե այսպես գրել.

$$+(a + b - c) \text{ կամ } -(-a - b + c).$$

Վարժություններ

Փակագծերը բանալ և պարզել.

64. $x + [x - (x - y)]$ $\quad$ $m - \{n - [m + (m - n)] + m\}$

65. $a + b - c - [a - (b - c)] - [a + (b - c) - (a - c)]$

66. $(3x^2 - 4y^2) - (x^2 - 2xy - y^2) + [2x^2 + 2xy + (-4xy) + 3y^2]$.

67. $a - b - c + d$ բազմանդամի մեջ, առանց նրա թվական մեծությունը փոխելու, փակագծերի մեջ առնել ա) վերջին յերեք անդամները, փակագծերի առջև դնելով — նշանը. բ) վերջին յերկու անդամները, փակագծերի առջև դնելով + նշանը. գ) միջին յերկու անդամները, փակագծերի առջև դնելով — նշանը։

III. ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄ

45. Միանդամների բազմապատկումը։ *ա) Դիցուք պետք է* a^3*-ը բազմապատկել* a^2*-ով. այդ կարելի յե նշանակել այսպես՝* a^3a^2 *կամ, ավելի մանրամասն՝* $(aaa)\cdot(aa)$*։ Այստեղ* aaa *արտադրյալը բազմապատկված է* aa *արտադրյալով։ Բայց վորևե թիվ մի արտադրյալով բազմապատկելու համար կարելի յե այդ թիվը բազմապատկել առաջին արտադրիչով, ստացած արդյունքը բազմապատկել յերկրորդ արտադրիչով և այլն։ Այս պատճառով՝*

$$a^3a^2=(aaa)\cdot aa,$$

վոր կարելի յե նաև առանց փակագծերի գրել, վորովհետև զուգորդության կարգն առանց փակագծերի նույնն է մնում, ինչ վոր ցույց է տված փակագծերով. ուրեմն՝

$$a^3a^2=aaaaa=a^5.$$

Մենք տեսնում ենք, վոր արտադրյալի աստիճանացույցը հավասար է արտադրիչների աստիճանացույցերի գումարին։

Վերցնենք մի ուրիշ որինակ՝ x^3*-ը բազմապատկենք* x^4*-ով։ Դատելով այնպես, ինչպես և նախորդ դեպքում, կստանանք.*

$$x^3\cdot x^4=(xxx)\cdot(xxxx)=xxxxxxx=x^7.$$

Ընդհանրապես, a^m*-ի և* a^n*-ի արտադրյալը կլինի՝*

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}.$$

Կնշանակի միևնույն թվի աստիճանների արտադրյալը հավասար է այդ թվի այնպիսի աստիճանին, վորի ցուցիչը ներկայացնում է բազմապատկվող աստիճանների ցուցիչների գումարը։ Այդ կարճ այսպես են արտահայտում։

Միևնույն թվի աստիճանները բազմապատկելիս նրանց ցուցիչները գումարում ենք։

Այսպիսով՝

$$m^2m^3=m^5;\ x^3x=x^4;\ y^2y\cdot y^3=y^6.$$

բ) Դիցուք պետք է բազմապատկել՝

$$3ax^2(-5abx).$$

Քանի վոր $-5abx$ *միանդամն արտադրյալ է, ապա բավական է բազմապատկելին բազմապատկել առաջին բազմապատկչով, այսինքն* -5*-ով, արդյունքը բազմապատկել յերկրորդ բազմապատկչով, վոր է* a*, և այլն։ Կնշանակի՝*

$$3ax^2(-5abx)=3ax^2(-5)\cdot abx.$$

Այս արտադրյալի մեջ, օգտվելով բազմապատկման զուգորդական հատկությունից, բազմապատկիչները կխմբավորենք այսպես.

$$(+3)\cdot(-5)\cdot(aa)\cdot b\cdot(x^2x).$$

Կատարելով բազմապատկումը յուրաքանչյուր խմբի մեջ, կստանանք $-15a^2bx^3$*։*

Կանոն։ Միանդամը միանդամով բազմապատկելու համար պետք է նրանց գործակիցները բազմապատկել, միատեսակ տառերի ցուցիչները գումարել, իսկ այն տառերը, վորոնք կան միայն բազմապատկելիի կամ միայն բազմապատկչի մեջ, փոխադրել արտադրյալի մեջ իրենց ցուցիչներով։

Որինակներ՝

1. $0{,}7a^3x\cdot(3a^4x^2y^2)=2{,}1a^7x^3y^2$

2. $-3{,}5x^2y\cdot\left(\frac{3}{4}x\right)=-\frac{21}{8}x^3y.$

46. Միանդամի քառակուսին յեվ խորանարդը։ *Մենք գիտենք, վոր վորևե թիվ քառակուսի կամ խորանարդ բարձրացնել նշանակում է՝ այդ թիվը իբրև արտադրիչ կրկնել յերկու, համապատասխանաբար յերեք անգամ. որինակ՝*

$$11^2=11\cdot11=121;\quad \left(-1\frac{1}{2}\right)^2=\left(-1\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)=2\frac{1}{4}$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$a^2=aa;$$

$$4^3=4\cdot4\cdot4=64;\quad (-5)^3=(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)=-125.$$

Այս սահմանումը կիրառենք ամբողջ միանդամները քառակուսի և խորանարդ բարձրացնելու վրա։

1. Դիցուք պետք է a^4-ը քառակուսի կամ խորանարդ բարձրացնել։ Սահմանումի համաձայն՝

$$(a^4)^2=a^4\cdot a^4;\quad (a^4)^3=a^4\cdot a^4\cdot a^4$$

Կիրառելով միանդամների բազմապատկման կանոնը՝ կստանանք.

$$(a^4)^2=a^8;\quad (a^4)^3=a^{12}$$

Նույնպես էլ՝

$$(a^3)^2=a^6;\quad (a^3)^3=a^9$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$(a^m)^2=a^m\cdot a^m=a^{2m};\quad (a^m)^3=a^m\cdot a^m\cdot a^m=a^{3m}$$

Աստիճանը քառակուսի կամ խորանարդ բարձրացնելու համար՝ պետք է աստիճանացույցը բազմապատկել համապատասխանաբար յերկուսով կամ յերեքով։ Այսպես՝

$$(4^2)^2=4^4=256;\quad (2^2)^3=2^6=64$$ *և այլն։*

Ստուգում։ $4^2=16;\quad 16^2=256;\quad 2^2=4;\quad 4^3=64$։

2. Դիցուք պետք է քառակուսի կամ խորանարդ բարձրացնել abc *արտադրյալը։ Սահմանումի համաձայն*

$$(abc)^2=(abc)\cdot(abc);\quad (abc)^3=(abc)\cdot(abc)\cdot(abc)։$$

Կիրառելով բազմապատկման հատկությունները, կստանանք.

$$(abc)^2=abcabc=(aa)\cdot(bb)\cdot(cc)=a^2b^2c^2;$$

$$(abc)^3=abcabcabc=(aaa)\cdot(bbb)\cdot(ccc)=a^3b^3c^3։$$

Արտադրյալը քառակուսի կամ խորանարդ բարձրացնելու համար պետք է ամեն մի արտադրիչն առանձին բարձրացնել այդ աստիճանը յեվ արդյունքները բազմապատկել։ Այսպես՝

$$(2\cdot3\cdot5)^2=2^2\cdot3^2\cdot5^2=4\cdot9\cdot25=900։$$

Ստուգում։ $2\cdot3\cdot5=30;\quad 30^2=900$։

$$(2\cdot3)^3=2^3\cdot3^3=8\cdot27=216։$$

Ստուգում։ $2\cdot3=6;\quad 6^3=216$։

3. Դիցուք այժմ պետք է քառակուսի կամ խորանարդ բարձ-

րացնել $-4a^3bc^4$ *միանդամը։ Կիրառելով հենց նոր արտածած կանոնները, կունենանք՝*

$$(-4a^3bc^4)^2=(-4)^3\cdot(a^3)^2\cdot(b)^2\cdot(c^4)^2=16a^6b^2c^8;$$

$$(4a^3bc^4)^3=(-4)^3\cdot(a^3)^3\cdot(b)^3\cdot(c^4)^3=-64a^9b^3c^{12}։$$

Կ ա ն ո ն ն ե ր. 1. Ամբողջ միանդամը քառակուսի բարձրացնելու համար պետք է միանդամի գործակիցը քառակուսի բարձրացնել, իսկ տառերի ցուցիչները բազմապատկել յերկուսով։

2. Ամբողջ միանդամը խորանարդ բարձրացնելու համար պետք է նրա գործակիցը խորանարդ բարձրացնել, իսկ տառերի ցուցիչները բազմապատկել յերեքով։

47. Բազմանդամի բազմապատկումը միանդամով։ *Դիցուք տված է բազմապատկելու* $a+b-c$ *բազմանդամը վորևե հանրահաշվական արտահայտությամբ, որինակ՝ մի միանդամով, վորը կնշանակենք մի* m *տառով՝*

$$(a+b-c)\cdot m։$$

Կիրառելով բազմապատկման բաշխական օրենքը, կստանանք.

$$(a+b-c)m=am+bm-cm։$$

Կ ա ն ո ն։ Բազմանդամը միանդամով բազմապատկելու համար բավական կլինի այդ միանդամով բազմապատկել բազմանդամի յուրաքանչյուր անդամը յեվ ստացած արտադրյալները գումարել։

Քանի վոր արտադրիչների տեղափոխումից արտադրյալը չի փոխվում, ապա այս կանոնը կիրառելի յե նաև այն դեպքում, յերբ միանդամն ենք բազմապատկում բազմանդամով։ Այսպիսով՝

$$m(a+b-c)=ma+mb-mc։$$

Օրինակներ.

1. $(3x^2-2ax+5a^2)\cdot(-4ax)$։

Այստեղ բազմանդամի անդամների բազմապատկումը տված միանդամով պետք է կատարել միանդամների բազմապատկման կանոնով, նկատի առնելով նաև նշանների կանոնը, ըստ վորի միատեսակ նշանները բազմապատկման ժամանակ տալիս են +, իսկ տարբեր նշանները —։ Բազմանդամի յուրաքանչյուր անդամն առանձին բազմապատկում ենք $-4ax$ միանդամով։

$$(3x^2)(-4ax)=-12ax^3;\ (-2ax)(-4ax)=+8a^2x^2.$$

$$(5a^2)(-4ax)=-20a^3x.$$

Այժմ գումարելով ստացած արդյունքները, ստանում ենք՝

$$(3x^2-2ax+5a^2)\cdot(-4ax)=-12ax^3+8a^2x^2-20a^3x.$$

2. $(a^2-ab+b^2)(3a)=a^2(3a)-(ab)(3a)+b^2(3a)=$
$=3a^3-3a^2b+3ab^2.$

3. $(7x^2+\frac{3}{4}ax-0{,}3)(2{,}1a^2x)=(7x^2)(2{,}1a^2x)+$
$+\left(\frac{3}{4}ax\right)(2{,}1a^2x)-0{,}3(2{,}1a^2x)=14{,}7a^2x^3+1{,}575a^3x^2-$
$-0{,}63a^2x.$

4. $2a(3a-4ax+\frac{1}{2}x^2)=6a^2-8a^2x+ax^2.$

48. Բազմանդամի բազմապատկումը բազմանդամով։ Դիցուք պետք է $a+b-c$ բազմանդամը բազմապատկել $m-n$ բազմանդամով. այդ կարելի է այսպես արտահայտել՝

$$(a+b-c)(m-n).$$

$(m-n)$ բազմապատկիչը դիտելով իբրև մեկ թիվ (իբրև միանդամ), կիրառենք բազմանդամի միանդամով բազմապատկելու կանոնը.

$$(a+b-c)(m-n)=a(m-n)+b(m-n)-c(m-n).$$

Ստացած բազմանդամի յուրաքանչյուր անդամը ներկայացնում է միանդամի և բազմանդամի արտադրյալ։ Նորից կիրառելով նախընթաց կանոնը, կստանանք՝

$$(am-an)+(bm-bn)-(cm-cn).$$

Փակագծերը բանալով գումարման և հանման կանոնների համաձայն, վերջնականորեն կգտնենք՝

$$(a+b-c)(m-n)=am-an+bm-bn-cm+cn.$$

Կանոն։ Բազմանդամը բազմանդամով բազմապատկելու համար պետք է առաջին բազմանդամի յուրաքանչյուր ան-

դամը բազմապատկել երկրորդ բազմանդամի յուրաքանչյուր անդամով և ստացած արտադրյալները գումարել։

Իհարկե, առաջին բազմանդամի անդամները երկրորդ բազմանդամի անդամներով բազմապատկելիս պետք է ղեկավարվել նշանների կանոններով՝ միատեսակ նշանները տալիս են +, տարբեր նշանները —։

Որինակ.

$$(a^2-5ab+b^2-3)(a^3-3ab^2+b^3).$$

Նախ կբազմապատկենք բազմապատկելիի բոլոր անդամները բազմապատկչի առաջին անդամով. կստանանք՝

$$(a^2-5ab+b^2-3)\,a^3=a^5-5a^4b+a^3b^2-3a^3.$$

Այնուհետև բազմապատկելիի բոլոր անդամները կբազմապատկենք բազմապատկչի երկրորդ անդամով՝

$$(a^2-5ab+b^2-3)(-3ab^2)=-3a^3b^2+15a^2b^3-3ab^4+9ab^2.$$

Այնուհետև կբազմապատկենք երրորդ անդամով՝

$$(a^2-5ab+b^2-3)(+b^3)=a^2b^3-5ab^4+b^5-3b^3.$$

Վերջապես, կգումարենք ստացած բոլոր արտադրյալները և նման անդամների միացում կկատարենք. վերջնական արդյունքը կլինի՝

$$a^5-5a^4b-2a^3b^2-3a^3+16a^2b^3-8ab^4+9ab^2+b^5-3b^3$$

Որինակներ.

1. $(a-b)(m-n-p)=am-bm-an+bn-ap+bp,$

2. $(x^2-y^2)(x+y)=x^3-xy^2+x^2y-y^3,$

3. $(3an+2n^2-4a^2)(n^2-5an)=3an^3+2n^4-4a^2n^2-15a^2n^2$
$-10an^3+20a^3n=-7an^3+2n^4-19a^2n^2+20a^3n;$

4. $(2a^2-3)^2=(2a^2-3)(2a^2-3)=(2a^2)^2-3(2a^2)-(2a^2)3+$
$+9=4a^4-6a^2-6a^2+9=4a^4-12a^2+9,$

Վարժություններ

68. $(5a^2b^3)(3ab^4c)$ $\left(\frac{3}{4}ax^3\right)\left(\frac{5}{6}ax^3\right)$

9. $(0{,}3abx)(2{,}7a^2bx^2)$ $\quad$ $(7a^2b^4c)(3ab^3c^2)\left(\frac{1}{21}a^3b\right)$

70. $\left(\frac{3}{7}mx^2y^3\right)^2$ $\quad$ $(2a^3bx^2)^2$

71. $(0{,}1x^my^3)^2$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}m^2ny^3\right)^3$

72. $(3a^2-2b^3+c)2ab$

73. $(5a-4a^2b+3a^3b^2-7a^4b^3)5a^2b$

74. $(a+b-c)(m-n)$ $\quad$ $(2a-b)(3a+b^2)$

75. $\left(a+\frac{1}{2}b\right)(2a-b)$ $\quad$ $(x^2+xy+y^2)(x-y)$

76. $(x^2-xy+y^2)(x+y)$

77. $(2x+3y)(3x-2y)$ $\quad$ $(y-1)(y^3+y^2+y+1)$

49. Դասավորված բազմանդամ։ Բազմանդամը դասավորել որևէ տառի աստիճաններով նշանակում է բազմանդամի անդամներն այնպիսի հաջորդականությամբ գրել, որ այդ տառի ցուցիչներն առաջին անդամից դեպի վերջինը մեծանան կամ փոքրանան։ Օրինակ՝ $1+2x+3x^2-x^3$ բազմանդամը դասավորված է x տառի աճող աստիճաններով։ Այդ նույն բազմանդամը դասավորված կլինի x տառի նվազող աստիճաններով, եթե նրա անդամները հակադարձ կարգով գրենք՝ $-x^3+3x^2+2x+1$։

Այն տառը, ըստ որի դասավորված է բազմանդամը, կոչվում է բազմանդամի գլխավոր տառ։ Այն անդամը, որի մեջ գլխավոր տառն ամենամեծ աստիճանացույցն ունի, կոչվում է բազմանդամի բարձրագույն անդամ. այն անդամը, որի մեջ գլխավոր տառն ամենափոքր ցուցիչն ունի կամ բնավ չի պարունակվում այդ գլխավոր տառը, կոչվում է բազմանդամի ցածրագույն անդամ։

50. Դասավորված բազմանդամների բազմապատկումը։ Ամենից ավելի հարմար է կատարել այնպես, ինչպես հիմա ցույց կտանք մի օրինակով։

$-5+7x^2-x^3$-ը բազմապատկել $2-8x^2+x$-ով։

Երկու բազմանդամներն էլ դասավորելով x տառի նվազող աստիճաններով, բազմապատկիչը գրում են բազմապատկելիի տակ և նրանց տակ գիծ քաշում.

$$
\begin{array}{r}
-x^3+7x^2+3x-5 \\
-8x^2+x+2 \\
\hline
8x^5-56x^4-24x^3+40x^2 \qquad\qquad \\
-x^4+7x^3+3x^2-5x \qquad \\
-2x^3+14x^2+6x-10 \\
\hline
8x^5-57x^4-19x^3+57x^2+x-10
\end{array}
$$

Բազմապատկելիի բոլոր անդամները բազմապատկում են բազմապատկչի առաջին անդամով ($-8x^2$-ով) և ստացած արտադրյալը գրում են գծի տակ։ Այնուհետև բազմապատկելիի բոլոր անդամները բազմապատկում են բազմապատկչի երկրորդ անդամով ($+x$) և ստացած երկրորդ արտադրյալը գրում են առաջինի տակ այնպես, որ նման անդամները նմանների տակ ընկնեն։ Այդպես շարունակում են։ Վերջին արտադրյալի տակ գիծ են քաշում, բոլոր առանձին արտադրյալները գումարում են և այդ գծի տակ գրում լրիվ արտադրյալը։

Կարելի է նաև երկու բազմանդամներն էլ դասավորել աճող աստիճաններով և այնուհետև բազմապատկումը կատարել նույն կարգով, ինչպես նոր ցույց տրվեց։

51. Արտադրյալի բարձրագույն և ցածրագույն անդամները։ Նախընթաց օրինակի դիտարկումից հետևում է՝

Արտադրյալի բարձրագույն անդամը հավասար է բազմապատկելիի բարձրագույն անդամի և բազմապատկչի բարձրագույն անդամի արտադրյալին։

Արտադրյալի ցածրագույն անդամը հավասար է բազմապատկելիի ցածրագույն անդամի և բազմապատկչի ցածրագույն անդամի արտադրյալին։

Քանի որ արտադրյալի բոլոր մնացած անդամների մեջ գլխավոր տառի ցուցիչն ավելի փոքր կլինի քան բարձրագույն անդամի մեջ և միևնույն ժամանակ ավելի մեծ քան ցածրագույն անդամի մեջ, ապա արտադրյալի բարձրագույն և ցածրագույն անդամները չեն կարող նման անդամներ ունենալ։

Արտադրյալի ստացած անդամները կարող են ստացվել մի քանի նման անդամների միացումից։ Կարող է նույնիսկ պատահել, վոր արտադրյալի մեջ, նման անդամների միացում կատարելուց հետո, բոլոր անդամները, բացի բարձրագույնից և ցածրագույնից, վոչնչանան, ինչպես այդ կարելի յե տեսնել հետևյալ որինակից՝

$$
\begin{array}{l}
x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad x-a \\
\hline
x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x \\
\quad -ax^4-a^2x^3-a^3x^2-a^4x-a^5 \\
\hline
x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad -a^5=x^5-a^5
\end{array}
$$

52. Արտադրյալի անդամների թիվը։ *Դիցուք բազմապատկելիի մեջ 5 անդամ կա, իսկ բազմապատկչի մեջ՝ 3 անդամ. բազմապատկելիի յուրաքանչյուր անդամը բազմապատկելով բազմապատկչի առաջին անդամով, արտադրյալում կստանանք 5 անդամ. այնուհետև բազմապատկելով բազմապատկելիի յուրաքանչյուր անդամը բազմապատկչի յերկրորդ անդամով, արտադրյալում կստանանք 5 անդամ ևս և այլն. կնշանակի՝ արտադրյալի բոլոր անդամների թիվը կլինի 5·3, այսինքն 15։ Ընդհանրապես, արտադրյալի անդամների թիվը, նախքան նրա մեջ նման անդամների միացում կատարելը, հավասար է բազմապատկելիի անդամների թվի յեվ բազմապատկչի անդամների թվի արտադրյալին։*

Քանի վոր արտադրյալի բարձրագույն և ցածրագույն անդամներն իրենց նման անդամներ չեն կարող ունենալ, իսկ մյուս բոլոր անդամները կարող են իրար վոչնչացնել, ապա արտադրյալի անդամների թիվը, նրա մեջ նման անդամների միացում կատարելուց հետո, չի կարող յերկուսից պակաս լինել։

Վարժություններ

Հետևյալ բազմանդամները դասավորել x *տառի նվազող աստիճաններով և իրարով բազմապատկել։*

78. $24x+6x^2+x^3+60$ *և* $12x-6x^2+12+x^3$

79. $(x^5-x^3+x-1)\ (x^4+x^2-1)$

80. $(x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5)\ (x+a)$

53. Յերկանդամների բազմապատկման մի քանի բանաձևեր։ *Ոգտակար է հիշել յերկանդամների բազմապատկման հետևյալ բանաձևերը՝*

ա) $\underline{(a+b)^2}=(a+b)\ (a+b)=a^2+ab+ab+b^2=\underline{a^2+2ab+b^2}.$

Որինակ՝

$17^2=(10+7)^2=10^2+2\cdot10\cdot7+7^2=100+140+49=289.$

Այսպիսով՝ յերկու թվերի գումարի քառակուսին հավասար է առաջին թվի քառակուսուն, պլյուս առաջին թվի յեվ յերկրորդի կրկնապատիկ արտադրյալը, պլյուս յերկրորդ թվի քառակուսին։

բ) $\underline{(a-b)^2}=(a-b)\ (a-b)=a^2-ab-ab+b^2=\underline{a^2-2ab+b^2}.$

Որինակ՝

$19^2=(20-1)^2=20^2-2\cdot20\cdot1+1^2=400-40+1=361.$

Այսպիսով՝ յերկու թվերի տարբերության քառակուսին հավասար է առաջին թվի քառակուսուն, մինուս առաջին թվի յեվ յերկրորդի կրկնապատիկ արտադրյալը, պլյուս յերկրորդ թվի քառակուսին։

գ) Քանի վոր յերկու թվերի և ընդհանրապես յերկու հանրահաշվական արտահայտությունների տարբերությունը կարելի յե ներկայացնել իբրև հանրահաշվական գումար, ապա նախընթաց յերկու կանոնները կարելի յե միացնել և այսպես արտահայտել.

Յերկանդամի քառակուսին հավասար է առաջին անդամի քառակուսուն, պլյուս առաջին անդամի յեվ յերկրորդի կրկնապատիկ արտադրյալը, պլյուս յերկրորդի քառակուսին։

Պետք է միայն հիշել, վոր քառակուսի բարձրացվող յերկանդամի ամեն մի անդամը պետք է իր նշանով վերցվի։

Որինակ՝

1. $(2ab-c^2)^2=(2ab)^2+2(2ab)\ (-c^2)+(-c^2)^2=4a^2b^2-$
$-4abc^2+c^4.$

2. $(-m+3n^3)^2=(-m)^2+2(-m)(3n^3)+(3n^3)^2=m^4-$
$-6mn^3+9n^6$։

դ) $\underline{(a+b)(a-b)}=a^2+ab-ab-b^2=\underline{a^2-b^2}$։

Օրինակ՝

$25\cdot15=(20+5)\cdot(20-5)=20^2-5^2=400-25=375$։

Այսպիսով՝ յերկու թվերի գումարի յեվ նրանց տարբերության արտադրյալը հավասար է այդ թվերի քառակուսիների տարբերության։

54. Այս բանաձևերի կիրառումը։ *Նշած բանաձևերի օգնությամբ կարելի յե բազմանդամների բազմապատկումն ավելի կրճատ կատարել, քան սովորական յեղանակով։*

Օրինակներ.

1. $(4a^3-1)^2=(4a^3)^2-2(4a^3)\cdot1+1^2=16a^6-8a^3+1$;

2. $(x+y)(y-x)=(y+x)(y-x)=y^2-x^2$;

3. $(x+y+1)(x-y+1)=[(x+1)+y][(x+1)-y]=(x+1)^2-$
$-y^2=x^2+2x+1-y^2$;

4. $(a-b+c)(a+b-c)=[a-(b-c)][a+(b-c)]=a^2-$
$-(b-c)^2=a^2-(b^2-2bc+c^2)=a^2-b^2+2bc-c^2$։

Վարժություններ

81. $(a+1)^2$ $\qquad(1+2a)^2$ $\qquad\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

82. $(3a^2+1)^2$ $\qquad(0{,}1mx+5x^2)^2$

83. $(5a-2)^2$ $\qquad(3x-2a)^2$ $\qquad\left(3a^2-\frac{1}{2}\right)^2$

84. *Ոգտվելով $(a+b)^2$-ու և $(a-b)^2$-ու համար նշած բանաձևերից, գտնել հետևյալ քառակուսինները.*

101^2 $\quad 997^2$ $\quad 96^2$ $\quad 57^2$ $\quad 72^2$ $\quad 89^2$

85. $(2m-3n)^2$; $(3a^2x-4ay)^2$; $\left[0{,}2x^2-\frac{3}{8}\right]^2$

86. $\left(\frac{1}{2}x^2-3\frac{1}{2}x\right)^2$; $(0{,}25p-0{,}2q)^2$.

87. $(a+1)(a-1)$; $(2a+5)(2a-5)$.

88. $(2x-3)(3+2x)(a^2+1)(1-a^2)$

Կրճատ ձևով գտնել հետևյալ արտադրյալները.

89. $(x^2+1)(x+1)(x-1)$ $\qquad(4x^2+y^2)(2x+y)(2x-y)$

90. $(m+n-p)(m+n+p)$ $\qquad[a+(b+c)][a-(b+c)]$

55. Յերկու թվերի գումարի խորանարդը յեվ տարբերության խորանարդը։ *Յերկանդամների բազմապատկման բանաձևերին ավելացնենք նաև հետևյալ յերկուսը.*

ա) $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+$
$+\underline{2a^2b}+\underline{\underline{ab^2}}+\underline{a^2b}+\underline{\underline{2ab^2}}+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,

այսինքն յերկու թվերի գումարի խորանարդը հավասար է՝ առաջին թվի խորանարդին, պլյուս առաջին թվի քառակուսու յեվ յերկրորդի յեռապատիկ արտադրյալը, պլյուս առաջին թվի յեվ յերկրորդի քառակուսու յեռապատիկ արտադրյալը, պլյուս յերկրորդ թվի խորանարդը։

Օրինակ.

$11^3=(10+1)^3=10^3+3\cdot10^2\cdot1+3\cdot10\cdot1^2+1^3=1000+$
$+300+30+1=1331$,

բ) $(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=$
$=a^3-\underline{2a^2b}+\underline{\underline{ab^2}}-\underline{a^2b}+\underline{\underline{2ab^2}}-b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$,

այսինքն՝

Յերկու թվերի տարբերության խորանարդը հավասար է՝ առաջին թվի խորանարդին, մինուս առաջին թվի քառակուսու յեվ յերկրորդի յեռապատիկ արտադրյալը, պլյուս առաջին թվի յեվ յերկրորդի քառակուսու յեռապատիկ արտադրյալը, մինուս յերկրորդի խորանարդը։

Օրինակ.

$29^3=(30-1)^3=30^3-3\cdot30^2\cdot1+3\cdot30\cdot1^2-1^3=27000-$
$-2700+90-1=24389$.

գ) Եթե խորանարդ բարձրացվող յերկանդամի անդամներն իրենց նշաններով վերցնենք, ապա նախընթաց յերկու կանոնները կարելի յե միացնել և հետևյալ ձևով արտահայտել.

Երկանդամի խորանարդը հավասար է՝ առաջին անդամի խորանարդին, պլյուս առաջին անդամի քառակուսու յեվ յերկրորդի յեռապատիկ արտադրյալը, պլյուս առաջին անդամի յեվ յերկրորդի քառակուսու յեռապատիկ արտադրյալը, պլյուս յերկրորդ անդամի խորանարդը։

Որինակ.

$(2a-3b)^3=(2a)^3+3(2a)^2(-3b)+3(2a)(-3b)^2+(-3b)^3=$
$=8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3.$

Վարժություններ

91. $(a+1)^3$; $(a-1)^3$; $(2x+3)^3$; $(5+3x)^3$.

92. $\left(\frac{1}{2}m-2\right)^3$; $\left(\frac{3}{4}p+\frac{1}{3}q\right)^3$; $(5-3x)^3$

IV. ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԲԱԺԱՆՈՒՄ

56. Միանդամների բաժանումը։ ա) Դիցուք հարկավոր է հետևյալ բաժանումը կատարել՝

$$a^5 : a^2.$$

Բանի վոր բաժանելին պետք է հավասար լինի բաժանարարի և քանորդի արտադրյալին, իսկ բազմապատկման ժամանակ միևնույն տառի ցուցիչները գումարվում են, ապա վորոնելի քանորդի մեջ a տառի աստիճանացույցն այնպիսի թիվ պետք է լինի, վորի և 2-ի գումարը 5 լինի. այդ թիվը հավասար է 5—2 տարբերությանը։ Նշանակի՝

$$a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3.$$

Դրա նման կգտնենք նաև՝

$$x^3 : x^2 = x; \qquad y^4 : y = y^3 \text{ և այլն։}$$

Նշանակի միևնույն թվի աստիճանների քանորդը հավասար է այդ թվի այն աստիճանին, վորի ցուցիչը հավասար է բաժանելիի և բաժանարարի ցուցիչների տարբերության։ Այդ կարճ այսպես են արտահայտում՝ միևնույն թվի աստիճանները բաժանելիս բաժանելիի ցուցիչից հանում են բաժանարարի ցուցիչը։

բ) Դիցուք պետք է բաժանել՝

$$12a^3b^2x : 4a^2b^2.$$

Բաժանման սահմանումի համաձայն քանորդի և բաժանարարի արտադրյալը պետք է տա բաժանելին։ Այդ պատճառով վորոնելի քանորդի գործակիցը պետք է լինի 12 : 4, այսինքն 3. վորպեսզի ստացվի a տառի ցուցիչը, պետք է այդ տառի՝ բաժանելիում ունեցած ցուցիչից հանել բաժանարարում ունեցած ցուցիչը. b տառը քանորդի մեջ բնավ չի լինելու, իսկ x տառը կանցնի քանորդի մեջ իր ցուցիչով։ Այսպիսով՝

$$12a^3b^2x : 4a^2b^2 = 3ax.$$

Ստուգում. $3ax \cdot 4a^2b^2 = 12a^3b^2x.$

Կանոն։ Միանդամը միանդամի վրա բաժանելու համար պետք է բաժանելիի գործակիցը բաժանել բաժանարարի գործակցի վրա, բաժանելիի տառերի ցուցիչներից հանել բաժանարարի նույն տառերի ցուցիչները յեվ առանց ցուցիչները փոփոխելու քանորդ տեղափոխել բաժանելիի այն տառերը, վորոնք բացակայում են բաժանարարի մեջ։

Որինակներ։

1. $3m^3n^4x : 4m^2nx = \frac{3}{4}mn^3$;

2. $-ax^4y^3 : \left(-\frac{5}{6}axy^2\right) = +\frac{6}{5}x^3y$;

3. $0{,}8ax^n : (-0{,}02ax) = -40x^{n-1}.$

57. Զերո ցուցիչ։ Եթե միևնույն թվի աստիճանները բաժանելիս բաժանարարի ցուցիչը հավասար լինի բաժանելիի ցուցչին, ապա քանորդը պետք է հավասար լինի 1-ի. որինակ՝ $a^3 : a^3 = 1$, վորովհետև $a^3 = a^3 \cdot 1$. Պայմանավորվենք այս դեպքում էլ ցուցիչների հանում կատարել. այն ժամանակ քանորդում կստանանք զերո ցուցիչով տառ, մեր օրինակում՝ $a^3 : a^3 = a^{3-3} = a^0$։ Ի հարկե, այս ցուցիչն այն նշանակությունը չունի, ինչ վոր մենք տալիս եյինք առաջ ցուցիչներին, վորովհետև թիվը չի կարելի իբրև արտադրիչ կրկնել 0 անգամ։ Մենք կպայմանավորվենք a^0 տեսքի տակ հասկանալ a տառի միահավասար աստիճանների քանորդը, և վորովհետև այդ քանորդը հավասար ե 1-ի, ապա a^0-ը կընդունենք իբրև 1։

58. Միանդամների բաժանման անհնարինության հայտանիշները։ Յեթե ամբողջ միանդամների քանորդը հնարավոր չի ճշտորեն արտահայտել ամբողջ միանդամով, ապա ասում են, վոր այդպիսի բաժանումն անհնարին ե։ Միանդամների բաժանումն անհնարին ե հետևյալ յերկու դեպքում։

ա) Յերբ բաժանարարի մեջ տառեր կան, վորոնք բաժանելիի մեջ չկան։ Որինակ՝ $4ab^2$-ն $2ax$-ի վրա չենք կարող բաժանել, վորովհետև ինչպիսի ամբողջ միանդամով ել բազմապատկենք $2ax$-ը, արտադրյալն անպայման կպարունակի x տառը, իսկ բաժանելիի մեջ այդ տառը բնավ չկա։

բ) Յերբ բաժանարարի մեջ վորևե տառի ցուցիչն ավելի մեծ ե, քան նույն տառի ցուցիչը բաժանելիում։

Որինակ՝ $10a^3b^2 : 5ab^3$ բաժանումն անհնարին ե, վորովհետև ինչպիսի ամբողջ միանդամ ել գրենք քանորդում, նրա և բաժանարարի արտադրյալն այնպիսի ամբողջ միանդամ կտա, վորի մեջ b տառի ցուցիչն առնվազն 3 ե, մինչդեռ բաժանելիի մեջ այդ տառի ցուցիչը 2 ե։

Յերբ մի միանդամ չի բաժանվում մյուսի վրա, ապա քանորդը կարելի յե միայն նշել բաժանման նշանների միջոցով. այսպես՝ 4a-ի և 5b-ի քանորդը կարելի յե գրել՝

$$4a : 5b \quad \text{կամ} \quad \frac{4a}{5b}.$$

Վարժություններ

93. $8a^5x^3y : 4a^3x^2$ $\qquad 3ax^3 : (-5ax)$

94. $a^8b : \left(-\frac{5}{6}a^5b\right)$ $\qquad 12a^mb^3 : 4ab$

59. Բազմանդամի բաժանումը միանդամի վրա։ Դիցուք պահանջվում ե $a+b-c$ բազմանդամը բաժանել m-ի վրա. այդ կնշանակենք՝

$$(a+b-c) : m \quad \text{կամ} \quad \frac{a+b-c}{m}.$$

$a+b-c$ բազմանդամը հանրահաշվական գումար ե, իսկ հանրահաշվական գումարը վորևե թվի վրա բաժանելու համար՝ կարելի յե այդ թվի վրա բաժանել ամեն մի գումարելին առանձին։ Ուստի՝

$$\frac{a+b-c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}.$$

Ստուգում կատարելով կարող ենք համոզվել, վոր այդ այդպես ե. իրոք, յեթե $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}$ բազմանդամը բազմապատկենք m բաժանարարով, կստանանք $a+b-c$ բաժանելին։

Կ ա ն ո ն։ Բազմանդամը միանդամի վրա բաժանելու համար՝ պետք ե բազմանդամի ամեն մի անդամը բաժանել այդ միանդամի վրա յեվ ստացած քանորդները գումարել։

Որինակներ.

1. $(20a^3 - 8a^2 - a) : 4a = 5a^2 - 2a - \frac{1}{4}$;

2. $(4x^2 - 2x + 10) : 2x = 2x - 1 + \frac{10}{2x}$;

3. $\left(\frac{1}{2}x^3 - 0{,}3x^2 + 1\right) : 2x^2 = \frac{1}{4}x - 0{,}15 + \frac{1}{2x^2}$.

60. Միանդամի բաժանումը բազմանդամի վրա։ Դիցուք պահանջվում ե a միանդամը բաժանել $b+c-d$ բազմանդամի վրա։ Այդպիսի բաժանումից ստացվող քանորդը չի կարող արտահայտվել վոչ ամբողջ միանդամով և վոչ ել ամբողջ բազմանդամով, վորովհետև յեթե ընդունենք, վոր քանորդը հավասար ե վորևե ամբողջ միանդամի, ապա այդ քանորդի և $b+c-d$ բազմանդամի արտադրյալը նույնպես բազմանդամ կլիներ և վոչ թե միանդամ։ a-ի և $b+c-d$ բազմանդամի քանորդը կարելի յե միայն նշանակել բաժանման նշաններով՝

$$a:(b+c-d) \quad \text{կամ} \quad \frac{a}{b+c-d}.$$

Վարժություններ

95. $(4a^2b+6ab^3-12a^3b^5):\frac{3}{4}ab$

96. $(36a^2x^5-24a^3x^4+4a^4x^3):4a^2x^3$

97. $(3a^2y-6a^2y^2+3a^2y^3-3a^2y^4):3a^2y$

61. Բազմանդամի բաժանումը բազմանդամի վրա։ Յերկու բազմանդամների քանորդը միայն բացառիկ դեպքերում կարելի յե արտահայտել ամբողջ բազմանդամի տեսքով։ Օրինակ՝

$$(a^2+2ab+b^2):(a+b)=a+b,$$

վորովհետև

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2.$$

Իսկ ընդհանուր առմամբ այդպիսի քանորդները կարելի յե միայն նշանակել բաժանման նշաններով։ Օրինակ $a-b+c$ և $d-e$ բազմանդամների քանորդն այսպես կարտահայտվի.

$$\frac{a-b+c}{d-e} \quad \text{կամ} \quad (a-b+c):(d-e).$$

62. Դասավորված բազմանդամների բաժանումը։ Յերբեմն հաջողվում ե քանորդն արտահայտել բազմանդամի տեսքով, յեթե յերկու բազմանդամներն էլ կարելի յե լինում դասավորել միևնույն տառի աստիճաններով։ Մի օրինակով ցույց տանք, թե ինչպես պետք ե այդ անել։ Տված ե՝

$$(5x^2-19x^3+17x+6x^4-4):(1-5x+3x^2).$$

Գրենք յերկու բազմանդամներն էլ x տառի նվազող աստիճաններով և բաժանումն այնպես դասավորենք, ինչպես այդ արվում ե ամբողջ թվերի բաժանման ժամանակ։

$$\begin{array}{l r|l}
 & 6x^4-19x^3+5x^2+17x-4 & 3x^2-5x+1 \\
 & -6x^4+10x^3-2x^2 & \hline 2x^2-3x-4 \\ \hline
\text{1-ին մնացորդ} \;\ldots & -9x^3+3x^2+17x-4 & \\
 & +9x^3-15x^2+3x & \\ \hline
\text{2-րդ մնացորդ} \;\ldots\ldots & -12x^2+20x-4 & \\
 & +12x^2-20x+4 & \\ \hline
\text{3-րդ մնացորդ} \;\ldots\ldots\ldots & 0 &
\end{array}$$

Յենթադրենք, վոր վորոնելի քանորդը մի բազմանդամ ե և վոր այս բազմանդամի անդամներն էլ են դասավորված x տառի նվազող աստիճաններով։

Բաժանելին պետք ե հավասար լինի բաժանարարի և քանորդի արտադրյալին։ Դասավորված բազմանդամների բազմապատկումից հայտնի յե, վոր արտադրյալի բարձրագույն անդամը հավասար ե բազմապատկելիի բարձրագույն անդամի և բազմապատկչի բարձրագույն անդամի արտադրյալին։ Բաժանելիի մեջ բարձրագույն անդամն առաջինն ե, բաժանարարի և քանորդի մեջ ես բարձրագույն անդամներն առաջիններն են։ Նշանակի, բաժանելիի առաջին անդամը՝ $6x^4$, պետք ե լինի բաժանարարի 1-ին անդամի՝ $3x^2$-ու, և քանորդի 1-ին անդամի արտադրյալը։ Այստեղից հետևում ե, վոր քանորդի 1-ին անդամը գտնելու համար բավական ե բաժանելիի 1-ին անդամը բաժանել բաժանարարի 1-ին անդամի վրա։ Բաժանումը կատարելով գտնում ենք, վոր քանորդի առաջին անդամն ե x^2, վոր և գրում ենք գծի տակ քանորդում։

Բաժանարարի բոլոր անդամները կբազմապատկենք քանորդի 1-ին անդամով և ստացած արտադրյալը կհանենք բաժանելիից։ Դրա համար այդ արտադրյալը կգրենք բաժանելիի տակ այնպես, վոր նման անդամները տակետակ գան, և հանելիի բոլոր անդամների նշանները կփոխենք։ Հանումից հետո կստանանք 1-ին մնացորդը։ Յեթե այս մնացորդը զերո լիներ, ապա այդ կնշանակեր, վոր քանորդում մեր գտած 1-ին անդամից դատ ուրիշ անդամներ չկան, այսինքն, վոր քանորդը միանդամ ե։ Իսկ յեթե 1-ին մնացորդը զերո չե, ինչպես մեր օրինակում, ապա այսպես կդատենք։

Բաժանելին կստացվի, յեթե բաժանարարի բոլոր անդամները բազմապատկենք քանորդի յուրաքանչյուր անդամով։ Բաժանելիից մենք հանեցինք բաժանարարի բոլոր անդամների և քանորդի 1-ին անդամի արտադրյալը. հետևաբար, 1-ին մնացորդի մեջ պարունակվում է բաժանարարի բոլոր անդամների և քանորդի 2-րդ, 3-րդ և հաջորդ անդամների արտադրյալը։ Մնացորդում բարձրագույն անդամն 1-ինն է. բաժանարարի բարձրագույն անդամն էլ է 1-ինը. քանորդում բարձրագույն անդամը 2-րդն է (չհաշվելով 1-ինը)։ Կնշանակի, մնացորդի 1-ին անդամը՝ $-9x^3$, պետք է հավասար լինի բաժանարարի 1-ին անդամի և քանորդի 2-րդ անդամի արտադրյալին։ Այստեղից եզրակացնում ենք, որ քանորդի 2-րդ անդամը գտնելու համար՝ բավական է առաջին մնացորդի 1-ին անդամը բաժանել բաժանարարի 1-ին անդամի վրա։ Բաժանումը կատարելով, գտնում ենք քանորդի 2-րդ անդամը՝ $-3x$, որ և գրում ենք քանորդում։

Քանորդի 2-րդ անդամով կբազմապատկենք բաժանարարի բոլոր անդամները և ստացած արտադրյալը կհանենք 1-ին մնացորդից։ Կստանանք 2-րդ մնացորդը։ Եթե այդ մնացորդը զերոյի է հավասար, ապա բաժանումն ավարտված է. իսկ եթե 2-րդ մնացորդը զերոյից տարբեր է, ինչպես մեր օրինակում, ապա այսպես կդատենք։

2-րդ մնացորդը ներկայացնում է բաժանարարի բոլոր անդամների և քանորդի 3-րդ, 4-րդ և հաջորդ անդամների արտադրյալը։ Քանի որ քանորդի այդ անդամներից բարձրագույնը 3-րդն է, ապա այս 3-րդ անդամը կգտնենք, եթե 2-րդ մնացորդի 1-ին անդամը բաժանենք բաժանարարի 1-ին անդամի վրա։ Բաժանումը կատարելով՝ ստանում ենք -4, որ և գրում ենք քանորդում։ -4-ով բազմապատկելով բաժանարարի բոլոր անդամները և մնացորդից հանելով ստացած արտադրյալը, կգտնենք 3-րդ մնացորդը։ Մեր օրինակում այդ մնացորդը զերո է. այդ ցույց է տալիս, որ քանորդում այլևս ուրիշ անդամներ չեն կարող լինել։ Եթե 3-րդ մնացորդը 0 չլիներ, ապա պետք էր այդ մնացորդի 1-ին անդամը բաժանել բաժանարարի 1-ին անդամի վրա, որով կստացվեր քանորդի 4-րդ անդամը, և այդպես շարունակել։

Կարելի էր բաժանելին և բաժանարարը դասավորել միևնույն տառի աճող աստիճաններով և այնուհետև այնպես վարվել, ինչպես վերն ասացինք. այս դեպքում պետք կլինի հիմնվել այն բանի վրա, որ արտադրյալի ցածրագույն անդամը հավասար է բազմապատկելիի ցածրագույն անդամի և բազմապատկչի ցածրագույն անդամի արտադրյալին։

Օրինակներ.

ա)
$$
\begin{array}{r|l}
28x^4 - 13ax^3 - 26a^2x^2 + 15a^3x & 7x^2 + 2ax - 5a^2 \\
\text{»} \quad - 8ax^3 + 20a^2x^2 & \overline{4x^2 - 3ax} \\
\hline
-21ax^3 - 6a^2x^2 + 15a^3x & \\
\text{»} \quad + 6a^2x^2 - 15a^3x & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Այստեղ մենք չգրեցինք բաժանարարի 1-ին անդամի և քանորդի 1-ին, 2-րդ և հաջորդ անդամների արտադրյալները, որովհետև այդ արտադրյալները միշտ հավասար են այն անդամներին, որոնց տակ նրանք գրվում են, և հանման ժամանակ միշտ իրար ոչնչացնում են։ Սովորաբար հենց այդպես էլ անում են։

բ)
$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - a^3 & x - a \\
\text{»} + ax^2 & \overline{x^2 + ax + a^2} \\
\hline
ax^2 - a^3 & \\
\text{»} + a^2x & \\
\hline
a^2x - a^3 & \\
\text{»} + a^3 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

գ)
$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - a^4 & x - a \\
\text{»} + ax^3 & \overline{x^3 + ax^2 + a^2x + a^3} \\
\hline
ax^3 - a^4 & \\
\text{»} + a^2x^2 & \\
\hline
a^2x^2 - a^4 & \\
\text{»} + a^3x & \\
\hline
a^3x - a^4 & \\
\text{»} + a^4 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Նմանապես կարելի է համոզվել, որ $x^5 - a^5$, $x^6 - a^6$... և ընդհանրապես $x^m - a^m$ երկանդամներն առանց մնացորդի բաժանվում են $x - a$ տարբերության վրա, այսինքն որ երկու թվերի միահավասար աստիճանների տարբերությունն առանց մնացորդի բաժանվում է այդ թվերի տարբերության վրա։

63. Բազմանդամների բաժանման անհնարինության հայտանիշները։ Բազմանդամի բաժանումը բազմանդամի վրա՝ հնարավոր չէ կատարել հետևյալ դեպքերում։

ա) Եթե բաժանելիի բարձրագույն անդամի մեջ գլխավոր տառի ցուցիչը փոքր է բաժանարարի բարձրագույն անդամի մեջ նույն տառի ցուցիչից, վորովհետև այս դեպքում քանորդի բարձրագույն անդամ ստանալ չի լինի։

բ) Եթե բաժանելիի ցածրագույն անդամի մեջ գլխավոր տառի ցուցիչը փոքր է բաժանարարի ցածրագույն անդամի մեջ նույն տառի ցուցիչից, վորովհետև այս դեպքում քանորդի ցածրագույն անդամ ստանալ չի լինի։

գ) Եթե բաժանելիի բարձրագույն և ցածրագույն անդամների մեջ գլխավոր տառի ցուցիչները համապատասխանաբար փոքր չեն բաժանարարի բարձրագույն և ցածրագույն անդամների մեջ այդ նույն տառի ցուցիչներից, ապա չի կարելի դեռևս ասել, վոր բաժանումը հնարավոր է։ Այս դեպքում վորպեսզի իմանանք՝ բաժանումը հնարավոր է թե վոչ, պետք է ձեռնամուխ լինել հենց գործողությունը կատարելուն (բաժանելին և բաժանարարը դասավորելով գլխավոր տառի նվազող կամ աճող աստիճաններով) և այն շարունակել մինչև վոր վերջնականորեն հավաստիանանք՝ հնարավոր է թե անհնարին քանորդն ստանալ բազմանդամի տեսքով։

Վարժություններ

98. $(x^2-3x-4):(x+1)$; $(y^2-y-2):(y-2)$;

99. $(6x^3+2-3x^2-4x):(2x-1)$;

100. $(3ax^5-15a^2x^4+6a^3x^3):(x^2-5ax+2a^2)$;

101. $(x^6-a^6):(x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x+a^5)$։

V. ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄ ԱՐՏԱԴՐԻՉՆԵՐԻ

64. Նախնական դիտողություն: Հանրահաշվական բաժանման մասին խոսելով՝ մենք նշեցինք, վոր մի քանի դեպքերում քանորդը կարելի յե միայն նշանակել բաժանման նշանով։ Այդպիսով ստացվող արտահայտությունները, ինչպիսիններն են, որինակ՝

$$\frac{a}{b},\ \frac{2x}{3a},\ \frac{x^2-4x+y^2}{x+y} \text{ և այլն,}$$

ընդունված է անվանել հանրահաշվական կոտորակներ։

Մենք շուտով կտեսնենք, վոր հանրահաշվական կոտորակները, թվաբանական կոտորակների նման, յերբեմն կարելի յե պարզեցնել կրճատման միջոցով, այսինքն բաժանելին և բաժանարարը բաժանելով նրանց ընդհանուր բազմապատկիչների վրա, յեթե միայն վերջիններս կան։ Վորպեսզի կարողանանք այդպիսի կրճատումն առանց դժվարության կատարել, պետք է սովորենք հանրահաշվական արտահայտությունները բազմապատկիչների վերլուծել (ինչպես վոր թվաբանության մեջ կոտորակները կրճատելու համար պետք է իմանալ ամբողջ թվերն իրենց բազմապատկիչներին վերլուծելը)։

65. Ամբողջ միանդամների վերլուծումը։ Վերցնենք վորևե ամբողջ միանդամ, որինակ՝ $6a^2b^3$։ Քանի վոր նա արտադրյալ է ներկայացնում, ապա հենց տեսքին նայելով՝ անմիջապես կարելի յե վերլուծել բաղադրիչ բազմապատկիչներին։ Այսպես՝

$$6a^2b^3 = 2\cdot 3(aa)\ (bbb) = 2\cdot 3aabbb.$$

Այս արտադրիչները զանազան ձևերով խմբավորելով (վորի համար կօգտվենք բազմապատկման զուգորդական հատկությունից) մենք կարող ենք այդ միանդամի համար նշել բազմազան վերլուծություններ, որինակ՝

$$6a^2b^3 = (6a)\ (ab^3) = (2a^2b)\ (3b^2) = (3ab^2)\ (2ab), \text{ և այլն։}$$

66. Բազմանդամների վերլուծումը։ Նշենք այն պարզագույն դեպքերը, յերբ բազմանդամը կարելի յե արտադրիչների վերլուծել։

ա) Քանի վոր

$$(a+b-c)\,m = am+bm-cm,$$

ապա նաև ընդհակառակը՝

$$am+bm-cm = (a+b-c)\,m.$$

Այսպիսով՝ յեթե բազմանդամի բոլոր անդամներն ընդհանուր բազմապատկիչ ունեն, ապա այն կարելի յե փակագծերից դուրս բերել։

Որինակի համար՝

1. $x^6-2x^2+3x = x(x^5-2x+3)$;

2. $16a^2 - 4a^3 = 4a^2(4 - a)$;

3. $5m(x - 1) + 3n(x - 1) = (x - 1)(5m + 3n)$։

բ) Քանի որ

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

ապա նաև ընդհակառակը՝

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)։$$

Այսպիսով՝ յեթե յերկանդամը ներկայացնում է յերկու թվերի քառակուսիների տարբերություն, ապա նրա փոխարեն կարելի յե վերցնել այդ յերկու թվերի գումարի յեվ նրանց տարբերության արտադրյալը։

Որինակի համար՝

1. $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2)$;

2. $y^2 - 1 = y^2 - 1^2 = (y + 1)(y - 1)$;

3. $9a^2 - \frac{1}{4} = (3a)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(3a + \frac{1}{2}\right)\left(3a - \frac{1}{2}\right)$;

4. $25x^2 - 0,01 = (5x)^2 - 0,1^2 = (5x + 0,1)(5x - 0,1)$;

5. $m^4 - n^4 = (m^2)^2 - (n^2)^2 = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2) =$
$= (m^2 + n^2)(m + n)(m - n)$;

6. $x^2 - (x - 1)^2 = [x + (x - 1)][x - (x - 1)] =$
$= (x + x - 1)(x - x + 1) = 2x - 1$։

գ) Քանի որ

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ և } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

ապա նաև ընդհակառակը՝

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

և

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)։$$

Նշանակի՝ յեթե յեռանդամը ներկայացնում է վորևէ յերկու թվերի քառակուսիների գումարը, մեծացրած կամ փոքրացրած այդ յերկու թվերի կրկնապատիկ արտադրյալի չափ, ապա այդ յեռանդամը կարելի յե համապատասխանաբար փոխարինել այս յերկու թվերի գումարի կամ տարբերության քառակուսով։

Որինակներ.

1. $a^2 + 2a + 1$։

Քանի որ $1 = 1^2$ *և* $2a = 2 \cdot 1 \cdot a$, *ապա* $a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$։

2. $x^4 + 4 - 4x^2$։ *Այստեղ* $x^4 = (x^2)^2$, $4 = 2^2$ *և* $4x^2 = 2x^2 \cdot 2$, *ուստի*

$$x^4 + 4 - 4x^2 = (x^2 - 2)^2։$$

Կարելի յե նաև գրել, վոր $x^4 + 4 - 4x^2 = (2 - x^2)^2$, *վորովհետև* $x^2 - 2$ *և* $2 - x^2$ *յերկանդամները քառակուսի բարձրացնելուց ստացվում են այնպիսի յեռանդամներ, վորոնք իրարից միայն ևեթ անդամների կարգով են տարբերվում.*

$$(x^2 - 2)^2 = x^4 - 4x^2 + 4; \qquad (2 - x^2)^2 = 4 - 4x^2 + x^4։$$

3. $-x + 25x^2 + 0,01$։ *Այստեղ յերկու քառակուսի կա՝* $25x^2 = (5x)^2$ *և* $0,01 = (0,1)^2$։ *Բացի դրանից,* $5x$ *և* $0,1$ *թվերի կրկնապատիկ արտադրյալը կազմում է* $2 \cdot 5x \cdot 0,1 = x$։

Քանի որ տված յեռանդամի մեջ յերկու քառակուսիներն էլ + *նշանով են, իսկ կրկնապատիկ արտադրյալը (այսինքն* x*-ը)* — *նշանով, ապա*

$$-x + 25x^2 + 0,01 = 25x^2 - x + 0,01 = (5x - 0,1)^2 = (0,1 - 5x)^2։$$

4. $-x^2 - y^2 + 2xy$։ *Այստեղ* — *նշանը փակագծերից դուրս կբերենք. կստանանք* $-(x^2 + y^2 - 2xy)$։ *Փակագծերի մեջ գտնվող յեռանդամն ակներևաբար հավասար է* $(x - y)^2$։

Նշանակի՝

$$-x^2 - y^2 + 2xy = -(x^2 + y^2 - 2xy) = -(x - y)^2 = -(y - x)^2։$$

դ) Բազմանդամը յերբեմն կարելի յե լինում՝ բազմապատկիչների վերլուծել նրա անդամների մեջ խմբավորումներ կատարելու միջոցով։

Որինակի համար՝

1. $ax + ay + bx + by = (ax + ay) + (bx + by) = a(x + y) + b(x + y) =$
$= (x + y)(a + b)$;

2. $12 - 4x - 3x^2 + x^3 = (12 - 4x) - (3x^2 - x^3) = 4(3 - x) - x^2(3 -$
$- x) = (3 - x)(4 - x^2) = (3 - x)(2 + x)(2 - x)$;

3. $m^2 + n^2 - 2mn - p^2 = (m^2 + n^2 - 2mn) - p^2 = (m - n)^2 - p^2 =$
$= (m - n + p)(m - n - p)$;

4. $x^2-y^2+6y-9=x^2-(y^2-6y+9)=x^2-(y-3)^2=[x+(y-3)]\,[x-(y-3)]=(x+y-3)\,(x-y+3)$։

ե) Յերբեմն օգտակար է լինում օժանդակ անդամներ մտցնել կամ վորեվե անդամ յերկու անդամի վերլուծել։

Որինակի համար՝

1. $a^3-b^3=a^3-a^2b+a^2b-b^3=a^2(a-b)+b(a^2-b^2)=a^2(a-b)+b(a+b)\,(a-b)=(a-b)[a^2+b(a+b)]=(a-b)\,(a^2+ab+b^2)$;

2. $a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b+b^3=a^2(a+b)-b(a^2-b^2)=(a+b)\,[a^2-b(a-b)]=(a+b)\,(a^2-ab+b^2)$;

3. $2x^2+3xy+y^2=2x^2+2xy+xy+y^2=2x(x+y)+y(x+y)=(x+y)\,(2x+y)$։

Վարժություններ

102. $2a+2x$ $\quad ax+ay$ $\quad 4y^2-6xy$

103. $4ax-2ay$ $\quad 6x^2y+9xy^2$

104. $12a^2b-9a^2b^2+6ab^3$ $\quad xy^2-7xy+4x^2y$

105. m^2-n^2 $\quad a^2-1$ $\quad 1-a^2$

106. x^2-4 $\quad m^2-9$ $\quad 4x^2-y^2$

107. $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{9}y^6$; $0{,}01a^6-9$; $8a^5-48ab^8$.

108. $(x-y)^2-a^2$; $9(a+2b)^2-1$; $a^2-(b+c)^2$.

109. $(x+y)^2-(x-y)^2$; $16x^2-4(x+y)^2$.

110. $x^2-2xy+y^2$ $\quad m^2+n^2+2mn$

111. $2ab+a^2+b^2$ $\quad a^2-4ab+4b^2$

112. $x^2+8x+16$ $\quad x^2+1+2x$

113. $5a^3-20a^2b+20ab^2$

114. $a^2+2ab+b^2-c^2$ $\quad a^2-b^2-2bc-c^2$

115. $ax+bx+ay+by$ $\quad ac-ad+bd-bc$

116. $a^2+ab-a-b$ $\quad xz-3y-3z+xy$

117. $4mn+xy-2nx-2my$

$8a^3-12a^2-18a+27$ (*վերլուծել 3 բազմապատկչի*)։

VI. ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐ

67. Հանրահաշվական կոտորակի զանազանությունը թվաբանականից։ *Յերկու հանրահաշվական արտահայտությունների քանորդն այն դեպքում, յերբ բաժանումը միայն նշված է, կոչվում է հանրահաշվական կոտորակ։ Հանրահաշվական կոտորակներ են, որինակի համար, հետևյալ արտահայտությունները՝*

$$\frac{a}{b},\ \frac{a+b}{c-d},\ \frac{2x^2-x+5}{x+2}.$$

Դիտարկենք հանրահաշվական կոտորակների մի քանի առանձնահատկությունները։

Վերցնենք $\frac{a}{b}$ կոտորակը, գտնենք նրա թվական մեծությունը, յերբ $a=12$ և $b=4$, այնուհետև յերբ $a=3$ և $b=7$ և վերջապես, յերբ $a=-20$ և $b=30$։ Կստանանք համապատասխանաբար հետևյալ թվերը՝ 3, $\frac{3}{7}$ և $-\frac{2}{3}$։ Այսպիսով՝

Հանրահաշվական կոտորակի թվական մեծությունը կարող է լինել թե՛ ամբողջ թիվ յեվ թե՛ կոտորակային թիվ, թե՛ դրական յեվ թե՛ բացասական։

Քանի վոր a-ն և b-ն, նայած խնդրի պայմաններին, կարող են ամեն տեսակ թվային արժեքներ ընդունել, ապա՝

Հանրահաշվական կոտորակի համարիչն ու հայտարարը, յուրաքանչյուրն առանձին, կարող են լինել թե՛ ամբողջ թիվ յեվ թե՛ կոտորակային թիվ, թե՛ դրական յեվ թե՛ բացասական։

Այսպիսով հանրահաշվական կոտորակի գաղափարն ավելի լայն է քան թվաբանականինը։ Վերջինս կարելի յե դիտել վորպես հանրահաշվական կոտորակի մասնավոր դեպքը։

68. Կոտորակի հիմնական հատկությունը։ *Քանի վոր կոտորակը համարիչի և հայտարարի քանորդն է, իսկ քանորդը չի* փոխվում, յերբ բաժանելին ու բաժանարարը բազմապատկում ենք զերոյից տարբեր միևնույն թվով կամ բաժանում զերոյից տարբեր միևնույն թվի վրա (§ 34 գ), ապա այդ նույն հատկությունը պատկանում է նաև կոտորակին, այսինքն կոտորակի մեծությունը չի փոխվում, յերբ նրա համարիչն ու հայտարարը բազմապատկում ենք կամ բաժանում միևնույն թվով (բացի զերոյից)։ Օրինակի համար, յեթե $\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}}$ կոտորակի համարիչն ու հայտարարը բազմապատկենք $-\frac{4}{9}$-ով, ապա կունենանք հետևյալ նոր կոտորակը՝

$$\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\right]:\left[\frac{7}{5}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\right]=\left(+\frac{8}{27}\right):\left(-\frac{28}{45}\right)=$$

$$=-\frac{8.45}{27.28}=-\frac{10}{21},$$

իսկ տված կոտորակն էր՝

$$-\frac{2}{3}:\frac{7}{5}=-\frac{10}{21},$$

այսպիսով տեսնում ենք, վոր կոտորա՛կի մեծությունն անփոփոխ մնաց։

Օգտվելով կոտորակի այս հատկությունից, մենք կարող ենք հանրահաշվական կոտորակների նկատմամբ նույնպիսի ձևափոխություններ կատարել, ինչպիսիները թվաբանության մեջ նըշվում են թվաբանական կոտորակների համար, այսինքն մենք կարող ենք կոտորակները կրճատել, յեթե հնարավոր է, և բերել մի հայտարարի, յեթե պետք է։

69. Կոտորակի անդամներն ամբողջ տեսքի բերելը։ Յեթե պատահի, վոր կոտորակի անդամներն իրենք կոտորակներ պարունակեն, ապա համարիչն ու հայտարարը բազմապատկելով բոլոր մասնակի հայտարարների ընդհանուր ամենափոքր բազմապատիկով (կամ հանրահաշվական արտահայտություններում ընդհանուր թվով), կարող ենք այդ կոտորակային անդամներն ամբողջ տեսքի բերել։ Օրինակի համար՝

1) $\frac{\frac{3}{4}a}{b}$; յերկու անդամները բազմապատկ. 4-ով, կստանանք $\frac{3a}{4b}$;

2) $\frac{\frac{2}{3}m}{\frac{7}{8}n}$; » » » 24-ով » $\frac{16m}{21n}$;

3) $\frac{ax-1}{1-\frac{1}{x}}$ » » » x-ով » $\frac{ax^2-x}{x-1}$;

Վարժություններ

Կոտորակի անդամներն ամբողջ տեսքի բերել՝

118. $\frac{\frac{5}{7}x}{y}$; $\frac{0,3ab}{m}$; $\frac{a^2}{1\frac{3}{8}b}$; $\frac{m}{2,36n}$;

119. $\frac{\frac{3}{4}ab}{\frac{5}{6}x^2}$; $\frac{3\frac{1}{2}a^3}{3\frac{3}{4}b}$; $\frac{3x-\frac{1}{4}}{a-b}$;

120. $\frac{2\frac{1}{8}(a+b)}{4\frac{1}{4}}$; $\frac{3a-\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{6}a}$;

121. $\frac{ax+b+\frac{c}{x}}{ax+1}$; $\frac{1+\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$.

70. Կոտորակի անդամների նշանները փոխելը։ Կոտորակի համարիչի և հայտարարի առաջ նշանը փոխել՝ այդ միևնույն է, թե համարիչն ու հայտարարը բազմապատկել —1-ով, վորից կոտորակի մեծությունը չի փոխվի։ Այսպես՝

$$\frac{-8}{-4}=2 \text{ և } \frac{+8}{+4}=2; \quad \frac{-10}{+2}=-5 \text{ և } \frac{+10}{-2}=-5.$$

Նկատենք, վոր յեթե նշանը փոխենք կոտորակի վորևե մեկ անդամի առաջ և միաժամանակ նաև հենց կոտորակի առաջ, ապա կոտորակի մեծությունը դարձյալ չի փոխվի. որինակի համար՝

$$\frac{-10}{+2}=-5; \qquad -\frac{-10}{-2}=-5; \qquad -\frac{+10}{+2}=-5.$$

Կոտորակի այս հատկություններով յերբեմն կարելի յե ոգտվել նրա ձևափոխման համար, որինակի համար՝

$$\frac{m^2-n^2}{n-m}=-\frac{m^2-n^2}{-(m-n)}=-\frac{(m-n)(m+n)}{(m-n)}=-(m+n).$$

Վարժություններ

Փոխել համարիչի և հայտարարի նշանները հետևյալ կոտորակների մեջ՝

122. $\frac{1-x}{-x}$; $\frac{-3a^2}{a-b}$; $\frac{1-a}{2-b}$

123. $\frac{-a^2-b^2+2ab}{b-a}$; $\frac{1-m^2}{-m+1}$.

124. Կոտորակների մեծությունները չփոխելով, յուրաքանչյուր կոտորակի առջև — նշան դնել.

$$\frac{-3a}{6} \qquad \frac{5x^2}{-8} \qquad \frac{1-a}{b} \qquad \frac{a}{2-a} \qquad \frac{m^2-n^2}{n-m}$$

71. Կոտորակների կրճատումը։ Հանրահաշվական կոտորակը կարող է ավելի պարզ տեսքի բերվել այն դեպքում, յերբ համարիչն ու հայտարարն ընդհանուր բազմապատկիչներ են պարունակում։

Որինակներ.

$$\frac{48ab}{60ac}=\frac{4b}{5c}; \qquad \frac{3a^2b}{7a^3b}=\frac{3}{7a}; \qquad \frac{160a^5b^2cd^2}{120a^3b^5c}=\frac{4a^2d^2}{3b^3}.$$

Այս որինակներից յերևում է, վոր

Կոտորակների կրճատման ժամանակ համարիչի յեվ հայտարարի գործակիցները կրճատում ենք նրանց ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարով, իսկ ընդհանուր տառային բազմապատկիչները կրճատում ենք այն փոքրագույն աստիճանով, վորով նրանք կան համարիչի յեվ հայտարարի մեջ։

Յեթե կոտորակի համարիչը կամ հայտարարը (կամ յերկուսն էլ) բազմանդամներ են, ապա այդ բազմանդամները պետք է նախապես վերլուծել բազմապատկիչների (այնպես ինչպես նշված է § 66-ում) և ապա կրճատել ընդհանուր բազմապատկիչներով, յեթե այդպիսիները լինեն։

Որինակներ.

$$\frac{6x^2+8xy}{9xy+12y^2}=\frac{2x(3x+4y)}{3y(3x+4y)}=\frac{2x}{3y};$$

$$\frac{x^2-1}{2x+2}=\frac{(x+1)(x-1)}{2(x+1)}=\frac{x-1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)$$

(2-ի վրա բաժանելու փոխարեն բազմապատկված է $\frac{1}{2}$-ով, վորից արդյունքը չի փոխվել)։

Վարժություններ

Կրճատել հետևյալ կոտորակները՝

125. $\frac{7}{7x}$; $\frac{2m}{3m^2}$; $\frac{4a^2b}{6ab^2}$; $\frac{42x^3y^3}{112x^2y^2}$.

126. $\frac{12ab}{8ax}$; $\frac{3a^2bc}{12ab^2}$; $\frac{48a^3x^2y^4}{45a^2xy}$.

127. $\frac{ab}{a^2+ab}$; $\frac{9xy}{3x^2-3xy}$; $\frac{4a+8}{4a-8}$.

128. $\frac{a^2+a}{a^2-a}$; $\frac{x-3}{x^2-9}$; $\frac{a^2+a}{a^2-1}$.

129. $\frac{x(x-1)^2}{2x^2(x-1)(x+1)}$; $\frac{ax+x^2}{3bx-cx^2}$; $\frac{5a^2+5ax}{a^2-x^2}$.

130. $\frac{(a+b)^2(a-b)^2}{a^2-b^2}$; $\frac{p^2-1}{(1+py)^2-(p+y)^2}$.

72. Կոտորակները ընդհանուր հայտարարի բերելը. ա) Վերցնենք այնպիսի կոտորակներ, որոնց հայտարարները տառային միանդամներ են. օրինակի համար՝

$$\frac{a}{2b};\quad \frac{c}{3ab};\quad \frac{d}{5ab^2}.$$

Իբրև ընդհանուր հայտարար պետք է վերցնել, ինչպես ակներև է, $30ab^2$-ն։ Լրացուցիչ բազմապատկիչները կլինեն՝ $15ab$, $10b$, և 6։

$$\overset{15ab}{\frac{a}{2b}}=\frac{15a^2b}{30ab^2};\quad \overset{10b}{\frac{c}{3ab}}=\frac{10bc}{30ab^2};\quad \overset{6}{\frac{d}{5ab^2}}=\frac{6d}{30ab^2}.$$

Վերցնենք մի ուրիշ օրինակ՝

$$\frac{a}{12b^2c},\quad \frac{3b}{8a^3c^4d^2},\quad \frac{5c}{18ab}.$$

Ընդհանուր հայտարարը պետք է բաժանվի բոլոր տված հայտարարների վրա։ Հետևաբար, ընդհանուր հայտարարի մեջ փոքրագույն գործակիցը կլինի տված գործակիցների ընդհանուր ամենափոքր բազմապատիկը։ Տառային գործակիցներից յուրաքանչյուրը պետք է ընդհանուր հայտարարի մեջ այնպիսի աստիճանով մտնի, որ բաժանվի այդ տառային բազմապատկչի այն բոլոր աստիճանների վրա, որոնք կան հայտարարներում։ Նշանակի՝ տված օրինակում իբրև ընդհանուր հայտարարի գործակից մենք պետք է վերցնենք 12, 8 և 18 թվերի ընդհանուր փոքրագույն բազմապատիկը, այսինքն՝ 72-ը։ a բազմապատկիչը պետք է վերցնել 3 ցուցիչով, b բազմապատկիչը՝ 2 ցուցիչով և այլն։ Ընդհանուր հայտարարը կլինի՝

$$72a^3b^2c^4d^2.$$

Լրացուցիչ բազմապատկիչները կլինեն՝ $6a^3c^3d^2$, $9b^2$ և $4a^2bc^4d^2$. Վերջնականորեն կստանանք՝

$$\overset{6a^3c^3d^2}{\frac{a}{12b^2c}}=\frac{6a^4c^3d^2}{72a^3b^2c^4d^2};\quad \overset{9b^2}{\frac{3b}{8a^3c^4d^2}}=\frac{27b^3}{72a^3b^2c^4d^2};\quad \overset{4a^2bc^4d^2}{\frac{5c}{18ab}}=$$
$$=\frac{20a^2bc^5d^2}{72a^3b^2c^4d^2}.$$

Այս օրինակներից երևում է՝

Որպեսզի գտնենք մի քանի հանրահաշվական կոտորակների ընդհանուր հայտարարը, որոնք միանդամ հայտարարներ ունեն, պետք է վերցնել տված կոտորակների հայտարարների գործակիցների ընդհանուր փոքրագույն բազմապատիկը, այնուհետև վերցնել տառային բազմապատկիչները՝ յուրաքանչյուրն այն ամենաբարձր աստիճանով, որով նա առաջ է գալիս տված հայտարարների մեջ. այդ բոլոր բազմապատկիչների արտադրյալն է, որ կլինի տված կոտորակների ընդհանուր հայտարարը։

բ) Այժմ վերցնենք այնպիսի կոտորակներ, որոնց հայտարարները բազմանդամներ են. օրինակի համար՝

$$\frac{x}{a-b};\quad \frac{y}{a+b};\quad \frac{z}{a^2-b^2}.$$

Հայտարարները վերլուծենք բազմապատկիչների։ Առաջին երկուսը չեն վերլուծվում, իսկ երրորդը հավասար է $(a+b)(a-b)$։ Նշանակի՝ ընդհանուր հայտարարը կլինի a^2-b^2. կստանանք՝

$$\overset{a+b}{\frac{x}{a-b}}=\frac{ax+bx}{a^2-b^2};\qquad \overset{a-b}{\frac{y}{a+b}}=\frac{ay-by}{a^2-b^2};\qquad \frac{z}{a^2-b^2}.$$

գ) Կարող է պատահել, որ հայտարարներից ոչ մի զույգն ընդհանուր բազմապատկիչ չունի։ Այդ դեպքում պետք է այնպես վարվել, ինչպես թվաբանության մեջ է արվում, այսինքն պետք է ամեն մի կոտորակի համարիչն ու հայտարարը բազմապատկել բոլոր մնացած կոտորակների հայտարարների արտադրյալով։

Օրինակի համար՝

1. $\frac{a}{3m},\ \frac{2b}{5n},\ \frac{3c}{2p};\ \ldots\ \frac{a\cdot 5n\cdot 2p}{3m\cdot 5n\cdot 2p},\ \frac{2b\cdot 3m\cdot 2p}{5n\cdot 3m\cdot 2p},\ \frac{3c\cdot 3m\cdot 5n}{2p\cdot 3m\cdot 5n},$

այսինքն
$$\frac{10anp}{30mnp},\quad \frac{12bmp}{30mnp},\quad \frac{45cmn}{30mnp}.$$

2. $\frac{a}{a+b},\ \frac{b}{a-b};\ \ldots\ldots,\ \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)},\ \frac{b(a+b)}{(a-b)(a+b)},$

այսինքն
$$\frac{a^2-ab}{a^2-b^2},\quad \frac{ab+b^2}{a^2-b^2}.$$

Վարժություններ

Մի հայտարարի բերել հետևյալ կոտորակները՝

131. $\frac{3}{a},\ \frac{4}{6};\qquad \frac{x}{3y},\ \frac{y}{4x};\qquad \frac{x}{4},\ \frac{4}{x}.$

132. $\frac{2}{a},\ \frac{3}{b},\ \frac{1}{2c};\ \frac{7x}{4a^2},\ \frac{2}{3b^2},\ \frac{4b^2}{5x}.$

133. $\frac{5xy}{3a^2bc},\ \frac{3ab}{4mx^2y};\qquad \frac{x}{4ab},\ \frac{y}{8a^3b^2}.$

134. $\frac{3}{8ab},\ 3x,\ \frac{a}{5x^3}$ (3x-ը ներկայացնել $\frac{3x}{1}$ կոտորակով)

135. $\frac{x+y}{2x-2y},\ \frac{x-y}{3x+3y};\ \frac{1}{m+1},\ \frac{2}{m^2-1},\ \frac{3}{m-1}.$

136. $\frac{2}{x^2-2x+1},\ \frac{3a}{x-1};\qquad \frac{1}{x-1},\ \frac{2}{2x-1},\ \frac{1}{(x-1)(2x-1)}.$

137. $\frac{x}{28a^3b^2},\ \frac{y}{21a^2b};\qquad \frac{a-b}{b},\ \frac{2a}{a-b},\ \frac{1}{a^2-b^2}.$

73. Կոտորակների գումարումն ու հանումը։ *Բազմանդամը միանդամի վրա բաժանելու կանոնով (§ 59) կարող ենք գրել՝*

$$\frac{a+b+c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m};\qquad \frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}.$$

Այս հավասարությունները կարդալով աջից ձախ, գտնում ենք՝

1. Միահավասար հայտարարներ ունեցող կոտորակները գումարելու համար պետք է գումարել նրանց համարիչները յեվ գումարի տակ գրել նույն հայտարարը։

2. Միահավասար հայտարարներ ունեցող կոտորակները հանելու համար պետք է նրանց համարիչները հանել յեվ տարբերության տակ գրել նույն հայտարարը։

Յեթե գումարելու կամ հանելու համար տրված կոտորակները տարբեր հայտարարներ ունեն, ապա պետք է նախապես միևնույն հայտարարին բերել։

Օրինակի համար՝

1) $\frac{\overset{df}{a}}{b}+\frac{\overset{bf}{c}}{d}+\frac{\overset{bd}{e}}{f}=\frac{adf+cbf+ebd}{bdf};$

2) $\frac{\overset{2b}{3m^2}}{10a^2bc}-\frac{\overset{5ac}{5n^2}}{4ab^2}=\frac{6bm^2-25acn^2}{20a^2b^2c};$

3) $\frac{x+1}{2x-2}-\frac{x^2+3}{2x^2-2}.$

$2x-2=2(x-1)$	լր. բազմ. $=x+1$
$2x^2-2=2(x^2-1)=2(x+1)(x-1)$	» » $=1$
Ընդհ. հայտ. $2(x+1)(x-1)$	

Հանման արդյունքը կլինի՝

$$\frac{(x+1)^2-(x^2+3)}{2(x+1)(x-1)}=\frac{x^2+2x+1-x^2-3}{2(x+1)(x-1)}=\frac{2x-2}{2(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x+1}.$$

Վարժություններ

138. $\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c};\qquad \frac{2}{x^2}+\frac{5}{3x};\qquad \frac{a-1}{2}-\frac{2x+3}{4}.$

139. $1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}$ (1-ը պատկերացնել $\frac{1}{1}$ կոտորակով).

140. $1+\frac{x-1}{2};\qquad x-\frac{2(3-x)}{3};\qquad 1-\frac{2(x-1)}{3}.$

141. $\frac{2+x}{1+2x}-\frac{2-x}{1-2x}-\frac{1+6x}{4x^2-1}.$

142. $\frac{2ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{a^2+ab}-\frac{a+b}{a^2-ab}$.

143. $\frac{m-x}{n-1}$ կոտորակի մեջ x-ի փոխարեն դնել $\frac{mn}{m+n}$ և գործողությունը կատարելով գտնել վերջնական արդյունքը։

74. Կոտորակների բազմապատկումը։ Կոտորակը կոտորակով բազմապատկելու համար պետք է համարիչը համարիչով բազմապատկել ու հայտարարը՝ հայտարարով յեվ առաջին արտադրյալը համարիչ դարձնել, իսկ յերկրորդը՝ հայտարար, այսինքն

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}. \qquad (1)$$

Այս կանոնը համընկնում է թվաբանական կոտորակների բազմապատկման կանոնի հետ։ Բայց քանի վոր տառերի տակ կարող են հասկացվել վոչ միայն ամբողջ դրական թվերը, այլ նաև կոտորակայինները և բացասականները, ապա անհրաժեշտ է այդ կանոնն ստուգել նաև հանրահաշվական կոտորակների համար, յերբ a, b, c և d թվերը կարող են լինել ամեն տեսակի թվեր։ Նախ՝ յենթադրենք, վոր այդ բոլոր թվերը դրական են և կոտորակային։ Դիցուք, օրինակ՝

$$a=\frac{2}{3},\ b=\frac{7}{8},\ c=\frac{5}{6} \text{ և } d=\frac{9}{4}.$$

Այս թվերը կտեղադրենք (1) հավասարության մեջ, կհաշվենք առանձին-առանձին նրա ձախ և աջ մասերը և կհամեմատենք ստացվող արդյունքները. կունենանք՝

$$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}:\frac{7}{8}=\frac{2\cdot 8}{3\cdot 7};\quad \frac{c}{d}=\frac{5}{6}:\frac{9}{4}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 9};$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{2\cdot 8}{3\cdot 7}\cdot\frac{5\cdot 4}{6\cdot 9}=\frac{2\cdot 8\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 7\cdot 6\cdot 9}$$

(վերջնական հաշիվը չենք կատարել)։

Այժմ գտնենք (1) հավասարության աջ մասը.

$$ac=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 6};\qquad bd=\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{4}=\frac{7\cdot 9}{8\cdot 4};$$

$$\frac{ac}{bd}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 6}:\frac{7\cdot 9}{8\cdot 4}=\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 4}{3\cdot 6\cdot 7\cdot 9}.$$

Բաղդատելով ստացված արդյունքները, տեսնում ենք, վոր նրանք միահավասար են, վորովհետև (ամբողջ թվերի բազմապատկման տեղափոխական օրենքի համաձայն) $2.8.5.4=2.5.8.4$ և $3.7.6.9=3.6.7.9$։ Հետևաբար, (1) հավասարությունն իրավացի յե մնում նաև այս դեպքում։

Այժմ յենթադրենք, վոր a, b, c և d թվերից մեկնումեկը բացասական է դարձել։ Դիցուք, օրինակի համար, $a=-\frac{2}{3}$ (b, c և d թվերը նախկին արժեքներն ունեն)։ Այն ժամանակ $\frac{a}{b}$ կոտորակը բացասական կդառնա և (1) հավասարության վողջ ձախ մասը նույնպես բացասական թիվ կլինի։ Աջ մասում ac արտադրյալը բացասական կդառնա, ուստի և վողջ աջ մասը նույնպես բացասական թիվ կլինի։ Թե ձախ մասի և թե աջ մասի բացարձակ մեծությունը, սակայն, կմնա նախկինը։ Նշանակի (1) հավասարությունը չի խախտվի։ Նույնպես կհամոզվենք, վոր (1) հավասարությունն իրավացի յե մնում նաև այն դեպքերում, յերբ տված թվերից ուրիշներն էլ են բացասական դառնում։

Այն ամենը, ինչ վոր ասացինք մի մասնավոր օրինակի մասին, կարելի յե կրկնել ամեն մի այլ օրինակի մասին. նշանակի՝ (1) հավասարությունն իրավացի յե a, b, c և d տառերի ամեն տեսակ արժեքների համար։

75. Կոտորակի քառակուսին յեվ խորանարդը։ Կոտորակների բազմապատկման կանոնը կիրառենք՝ կոտորակները քառակուսի և խորանարդ բարձրացնելու նկատմամբ։ Կանոնի համաձայն

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2};\quad \left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a^3}{b^3}.$$

Այստեղից հետևում է.

Հանրահաշվական կոտորակը քառակուսի կամ խորանարդ բարձրացնելու համար պետք է այդպիսի աստիճան բարձրացնել համարիչն առանձին յեվ հայտարարն առանձին։

76. Կոտորակների բաժանումը։ Կոտորակը կոտորակի վրա բաժանելու համար բավական է առաջին կոտորակի համարիչը բազմապատկել երկրորդի հայտարարով և առաջինի հայտարարը՝ երկրորդի համարիչով, ապա առաջին արտադրյալը դարձնել համարիչ և երկրորդ արտադրյալը՝ հայտարար, այսինքն

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Որ այս հավասարությունն իրավացի է a, b, c, d տառերի բոլոր տեսակի արժեքների համար, կարելի է հավաստիանալ բաժանման ստուգումը կատարելով. իրոք, քանորդը բազմապատկելով բաժանարարով, կստանանք բաժանելին, այսինքն

$$\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\overbrace{dc}^{cd}}{bcd}=\frac{a}{b}.$$

77. Դիտողություններ: *1) Քանի որ* $\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$, *ապա բաժանման կանոնը կարելի է նաև այսպես ձևակերպել՝ կոտորակը կոտորակի վրա բաժանելու համար բավական է առաջին կոտորակը բազմապատկել երկրորդի հակադարձով:*

2) Ամեն մի ամբողջ հանրահաշվական արտահայտություն կարելի է դիտել իբրև այնպիսի կոտորակ, որի համարիչն է այդ ամբողջ արտահայտությունը և որի հայտարարն է 1. օրինակի համար՝ $a=\frac{a}{1}$; $3x^2=\frac{3x^2}{1}$ *և այլն: Այս պատճառով այն կանոնները, որ մենք տվինք կոտորակների նկատմամբ կատարվող գործողությունների համար, կարելի է նույնով այնպիսի դեպքերի նկատմամբ կիրառել, երբ տված արտահայտություններից որևէ մեկն ամբողջ է. հարկավոր է միայն այդ ամբողջ արտահայտությունը պատկերացնել իբրև կոտորակ: Օրինակի համար՝*

$$a:\frac{b}{c}=\frac{a}{1}:\frac{b}{c}=\frac{ac}{b}.$$

Վարժություններ

144. $\frac{3x}{5a}\cdot\frac{10ab}{7x^3}$; $\qquad \frac{1-a}{5x^3}\cdot\frac{x^2}{1-a^2}$.

145. $\frac{4x^2y^2}{15n^4a^3}\cdot 45p^2q^2$; $\qquad \frac{x^2-1}{3}\cdot\frac{6a}{x+1}$.

146. $\left(a+\frac{ab}{a+b}\right):\left(b-\frac{ab}{a+b}\right)$; $\qquad \frac{3a^2b^5c^4}{4x^2y^2z^4}:\frac{4a^4b^3c^2}{3x^4y^2z^2}$.

147. $\frac{12a^4b^2}{5mp}:4ab^3$; $\qquad 81a^3b^2:\frac{27ab^2}{5x^2y}$.

148. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}:\frac{5a^2+5b^2}{a+b}$; $\qquad \left(x+\frac{xy}{x-y}\right):\left(x-\frac{xy}{x+y}\right)$.

ՉՈՐՐՈՐԴ ՀԱՏՎԱԾ

ԱՌԱՋԻՆ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

I. ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

78. Հավասարություններ յեվ նրանց հատկությունները։ *Յերկու թվեր կամ յերկու հանրահաշվական արտահայտություններ, վորոնք իրար հետ միացված են = նշանով, կազմում են հավասարություն։ Այդ թվերը կամ արտահայտությունները կոչվում են հավասարության մասեր. հավասարության այն մասը, վոր գտնվում է = նշանից ձախ, կազմում է հավասարության ձախ մասը, իսկ այն մասը, վոր գտնվում է = նշանից աջ, կազմում է հավասարության աջ մասը։ Որինակի համար՝*

$$a+a+a=a\cdot 3$$

հավասարության մեջ ձախ մասն է $a+a+a$ *գումարը, իսկ աջը՝* $a\cdot 3$ *արտադրյալը։*

Հավասարության յուրաքանչյուր մասը նշանակելով մի տառով, մենք կարող ենք հավասարության ամենագլխավոր հատկություններն այսպես արտահայտել՝

ա) Յեթե $a=b$, *ապա նաև* $b=a$, *այսինքն հավասարության մասերը կարելի յե տեղափոխանակել։*

բ) Յեթե $a=b$ *և* $c=b$, *ապա* $a=c$, *այսինքն յեթե յերկու թվեր զատ-զատ հավասար են մի յերրորդ թվի, ապա նրանք իրար հավասար են։*

գ) Յեթե $a=b$ *և* $m=n$, *ապա* $a+m=b+n$ *և* $a-m=b-n$, *այսինքն՝ յեթե միահավասար թվերի ավելացնենք կամ միահավասար թվերից հանենք միահավասար թվեր, ապա հավասարությունը չի խախտվի։*

դ) Յեթե $a=b$ *և* $m=n$, *ապա* $am=bn$ *և* $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$, *այսինքն՝ յեթե միահավասար թվերը բազմապատկենք միահավասար թվերով կամ բաժանենք նրանց վրա, ապա հավասարությունը չի խախտվի։*

Ոգտակար է ուշադրություն դարձնել այն հանգամանքի վրա, վոր հավասարության յերկու մասերը (—1)-ով բազմապատկելը կամ (—1)-ի վրա բաժանելը համազոր է հավասարության մասերի առջեվ նշանները փոխելուն։ Այսպես, յեթե $-x=-5$, *հավասարության յերկու մասերն էլ բազմապատկենք (—1)-ով, ապա կստանանք՝* $x=5$։

79. Նույնություն։ *Յերկու հանրահաշվական արտահայտություններ նույնական են կոչվում, յեթե նրանք շարունակ միահավասար թվային մեծություններ են ունենում, ինչպիսի թվային արժեքներ էլ տրվեն այն տառերին, վորոնք կան այդ արտահայտությունների մեջ։ Այդպիսի արտահայտություններ են, որինակի համար, հետևյալները*

$$ab \text{ և } ba;\quad a+(b+c) \text{ և } a+b+c.$$

Յեթե վորևէ հավասարության մեջ նրա յերկու մասերը նույնական հանրահաշվական արտահայտություններ են, ապա այդպիսի հավասարությունը կոչվում է նույնություն։ Նույնություն է, որինակի համար, այս հավասարությունը՝

$$a+b+c=a+(b+c).$$

Նույնություն է կոչվում նաև այնպիսի հավասարությունը, վորի մեջ մտնում են թվանշաններով արտահայտված թվեր միայն, յեթե այդ հավասարության յերկու մասերը, նշած բոլոր գործողությունները կատարելուց հետո, միևնույն թիվն են տալիս. որինակի համար՝

$$(40\cdot 5):8=5^2.$$

80. Հավասարում։ *Դիցուք կամենում ենք մի այսպիսի խնդիր լուծել՝ հայրը 40 տարեկան է, վորդին 17։ Քանի տարուց հետո հայրը յերկու անգամ մեծ կլինի վորդուց։*

Թվաբանական յեղանակով կարելի յե լուծել այս խնդիրը, բայց ավելի հեշտ կլինի, յեթե տառային նշանակում կիրառենք

Իրոք, տարիների վորոնելի թիվը նշանակենք x տառով։ x տարուց հետո հայրը կլինի $40+x$ տարեկան, իսկ վորդին՝ $17+x$ տարեկան։ Խնդրի պայմանի համաձայն, հայրն այն ժամանակ 2 անգամ մեծ կլինի, քան վորդին, այսինքն հոր տարիքը՝ $(40+x)$, յերկու անգամ մեծ կլինի վորդու տարիքից, վոր է $(17+x)$։ Այդ մենք կարող ենք գրել հետևյալ հավասարության տեսքով՝

$$40+x=2(17+x)։$$

Նշանակի՝ x-ը կարող է միայն այնպիսի թիվ լինել, վորի համար իրավացի յե այդ հավասարությունը։ Ստուգումով համոզվում ենք, վոր այդ տեղի ունի միայն այն դեպքում, յերբ $x=6$։ Իրոք՝

$$40+6=2(17+6); \quad 46=46։$$

Ուրիշ ինչ թիվ էլ դնենք x-ի փոխարեն, հավասարությունը կխախտվի։

Այս հավասարությունը չի կարելի նույնություն անվանել, վորովհետև նա իրավացի չե իր մեջ մտնող տառի վոչ բոլոր արժեքների համար։ x-ի փոխարեն միայն 6 դնելն է, վոր այս հավասարությունը նույնություն է դարձնում, այսինքն՝

$$46=46։$$

Յեթե յերկու կամ մի քանի տառեր պարունակող հավասարության յերկու մասերը միահավասար թվային մեծություններ ունեն այդ տառերի վոչ բոլոր արժեքների համար, ապա այդպիսի հավասարությունը կոչվում է հավասարում, իսկ այդ տառերով նշանակված թվերը կոչվում են հավասարման անհայտներ (անհայտ թվեր)։ Այս թվերը սովորաբար նշանակվում են լատինական այբբենի վերջին տառերով՝ x, y, z,...։

Հավասարումները լինում են մեկ անհայտով, յերկու անհայտով և այլն, և կոչվում են միանհայտ, յերկանհայտ և այլն հավասարումներ։

Հավասարումը լուծել նշանակում է գտնել նրա մեջ յեղած անհայտների այն արժեքները, վորոնք բավարարում են հավասարմանը, այսինքն հավասարումը նույնություն են դարձնում։ Անհայտների այդ արժեքները կոչվում են հավասարման արմատներ կամ լուծումներ։

Միանհայտ հավասարումը կարող է ունենալ մեկ արմատ, յերկու արմատ և ավելի թվով արմատներ. որինակի համար՝ $3x-2=13$ հավասարումը մեկ արմատ ունի, այն է՝ 5, իսկ $x^2+2=3x$ հավասարումը յերկու արմատ ունի, վորոնք են՝ 1 և 2, մինչդեռ $(x-1)(x-2)(x+1)=0$ հավասարումը յերեք արմատ ունի, վորոնք են՝ 1, 2 և -1*) և այլն։

Կարող է նույնիսկ պատահել, վոր հավասարումը բնավ արմատ չունենա։ Այդպիսի հավասարում է, որինակ, $x^2=-4$ հավասարումը. ինչպիսի դրական կամ բացասական թիվ էլ դնենք x-ի փոխարեն, այդ թվի քառակուսին, լինելով դրական, չի կարող բացասական թվի հավասարվել։

Այն հավասարումը, վոր վերն արտածեցինք մեր խնդրի պայմաններից, ունի 6 արմատը։ Հենց սա էլ խնդրում դրված հարցի պատասխանն է։ Իրոք, 6 տարուց հետո հայրը կլինի 46 տարեկան, վորդին՝ 23 տարեկան, այսինքն 2 անգամ փոքր։

Այսպիսով վորոշ խնդիրներ լուծելու համար օգտակար է դիմել հավասարումներ կազմելուն և սովորել այդ հավասարումները լուծել։ Իսկ դրա համար անհրաժեշտ է ծանոթանալ հավասարումների վորոշ ընդհանուր հատկություններին։

Իբրև որինակ, լուծենք վերը բերած հավասարումը՝

$$40+x=2(17+x)։$$

Հավասարման աջ մասում փակագծերը բանանք՝

$$40+x=34+2x։$$

Հավասարման յերկու մասերից էլ հանենք x, կստանանք

$$40=34+x։$$

Վերջապես հավասարման յերկու մասերից էլ հանենք 34։ Կստանանք.

$$6=x \text{ և, ուրեմն, } x=6։$$

Այսպիսով մեր հավասարումը մի շարք ձևափոխումների յենթարկելուց հետո՝ x-ի համար կստանանք 6 արժեքը։

*) Հիշենք, վոր յեթե վորևե արտադրիչ զերոյի յե հավասար, ապա արտադրյալն էլ է զերոյի հավասար և ընդհակառակը։

Հետագայում կտեսնենք, վոր համարյա նույն ձևով լուծվում են նաև ուրիշ հավասարումներ։

Վարժություններ

149. Հետևյալ հավասարություններից վորո՞նք են նույնություններ և վորո՞նք հավասարումներ.

$$x+y=y+x; \qquad (a-b+x)c=ac-bc+xc;$$
$$3a-4=2a+1; \qquad 8x+1=5x+7; \qquad a(bc)=abc;$$
$$2x=x+1; \qquad (xy):y=x; \qquad a:2b=\frac{a}{2}:b.$$

81. Համազոր հավասարումներ։ *Յերկու հավասարումներ համազոր են կոչվում, յեթե նրանցից մեկի բոլոր արմատներն արմատներ են մյուս հավասարման համար և ընդհակառակը, այս յերկրորդ հավասարման բոլոր արմատներն արմատներ են առաջին հավասարման համար։* Օրինակի համար, հետևյալ յերկու հավասարումները՝

$$x^2+2=3x \text{ և } 3x-2=x^2$$

համազոր են, վորովհետև նրանք միևնույն արմատներն ունեն, այն է 1 և 2. իսկ

$$7x=14 \text{ և } x^2+2=3x$$

հավասարումները համազոր չեն, վորովհետև առաջինն ունի միայն մի արմատ, վոր է 2-ը, մինչդեռ յերկրորդն այդ արմատից զատ ունի նաև մի ուրիշ արմատ՝ 1-ը։

Յերբ վորևե հավասարում լուծելիս նրա նկատմամբ վորոշ ձևափոխություններ ենք կատարում, ապա այդ ձևափոխությունների միջոցով մենք տված հավասարումը հաջորդաբար փոխարինում ենք ուրիշ, ավելի պարզ, հավասարումներով, մինչև վոր ստանանք ամենապարզ տեսքի հավասարումը, այն է $x=a$. այն ժամանակ ասում ենք, վոր այդ a թիվը տվյալ հավասարման արմատն է։ Բայց այսպիսի պնդումն անսխալ կլինի միայն այն ժամանակ, յերբ մենք վստահ ենք, վոր ձևափոխումների ընթացքում ստացված բոլոր հավասարումները համազոր են տված հավասարմանը։

Այն ձևափոխությունները, վոր մենք պետք է կատարենք հավասարումների նկատմամբ, հիմնված են հավասարման յերկու հատկությունների վրա, վոր մենք այժմ կդիտարկենք։

82. Հավասարումների առաջին հատկությունը։ Վերցնենք վորևե հավասարում, օրինակի համար հետևյալը՝

$$x^2+2=3x. \qquad (1)$$

Ենթադրենք՝ այս հավասարման յերկու մասին էլ ավելացրել ենք միևնույն m թիվը, ինչպիսին էլ լինի վերջինս (դրական, բացասական կամ զերո). այն ժամանակ կստանանք հետևյալ նոր հավասարումը.

$$x^2+2+m=3x+m. \qquad (2)$$

Ապացուցենք, վոր այս հավասարումը համազոր է տված հավասարմանը։ Դրա համար բավական է համոզվել, վոր (1) հավասարման ամեն մի արմատը բավարարում է նաև (2) հավասարմանը և, ընդհակառակը, վոր (2) հավասարման ամեն մի արմատը բավարարում է նաև (1) հավասարմանը։

ա) Դիցուք գիտենք (1) հավասարման վորևե արմատը, օրինակի համար՝ $x=1$։ Այս նշանակում է, վոր յեթե այդ հավասարման մեջ x-ի փոխարեն 1 դնենք, ապա x^2+2 արտահայտությունը հավասար կդառնա $3x$ արտահայտությանը (այդ արտահայտություններից յուրաքանչյուրը կդառնա 3)։ Բայց յերբ $x=1$, ապա x^2+2+m և $3x+m$ գումարներն էլ իրար հավասար կդառնան, վորովհետև յեթե միահավասար թվերին (3 և 3) ավելացնենք միևնույն թիվը (m), ապա միահավասար թվեր կստանանք ($3+m$ և $3+m$)։ Նշանակի $x=1$ արմատը պետք է արմատ լինի նաև (2) հավասարման համար։ Յեթե (1) հավասարումն ելի վորևե արմատ ունի, ապա նրա մասին կարելի է նույնն ասել, ինչ վոր ասացինք $x=1$ արմատի մասին, այսինքն, վոր նա բավարարում է նաև (2) հավասարմանը։ Այսպիսով (1) հավասարման յուրաքանչյուր արմատը պատկանում է նաև (2) հավասարմանը։

բ) Դիցուք գիտենք (2) հավասարման վորևե արմատը, օրինակի համար՝ $x=2$։ Այս նշանակում է, վոր յեթե այդ հավասարման մեջ x-ի տեղը դնենք 2, ապա x^2+2+m արտահայտությունը հավասար կդառնա $3x+m$ արտահայտությանը (այն է՝ արտահայտություններից յուրաքանչյուրը կդառնա $6+m$)։ Բայց յերբ $x=2$, ապա x^2+2 և $3x$ արտահայտություններն էլ իրար կհավասարվեն, վորովհետև յեթե ($6+m$ և $6+m$) հավասար թվերից հանենք միևնույն (m) թիվը, ապա միահավասար թվեր կստանանք։ Նշանակի $x=2$ արմատն արմատ է նաև (1) հավասարման համար։ Յեթե (2) հավասարումը վորևե ուրիշ արմատ էլ ունի, ապա նրա մասին կարելի յե կրկնել նույնը, ինչ վոր հենց նոր ասացինք $x=2$ արմատի մասին, այսինքն, վոր այդ արմատը ևս պետք է բավարարի (1) հավասարմանը։

Նշանակի՝ (2) հավասարման ամեն մի արմատը պետք է արմատ լինի նաև (1) հավասարման համար։

Բայց յեթե (1) և (2) հավասարումների արմատները միևնույնն են, ապա այդ հավասարումները համազոր են։

Այս հատկությունը վերաբերում է նաև հավասարման յերկու մասերից միևնույն թիվը հանելուն, վորովհետև վորևե թիվ հանելը համազոր է այդ թիվը հակադիր նշանով ավելացնելուն։

Այսպիսով՝ յեթե հավասարման յերկու մասերին ավելացնենք կամ նրանցից հանենք միևնույն թիվը, ապա կստանանք մի նոր հավասարում, վոր համազոր է առաջինին։

83. Հետևանքներ։ Այս հատկությունից կարելի յե հետևյալ հետևանքները բղխեցնել, վորոնցից հաճախ պետք է լինում օգտվել հավասարումներ լուծելիս։

1. Հավասարման անդամները կարելի յե նրա մի մասից մյուսը փոխադրել, փոխելով այդպիսի անդամների նշանները։ Օրինակի համար յեթե

$$8+x^2=7x-2.$$

հավասարման յերկու մասերին էլ ավելացնենք 2, կստանանք

$$8+x^2+2=7x.$$

-2 անդամն աջ մասից անցավ ձախ մասը, փոխելով նշանը $+$-ի։ Վերջին հավասարման յուրաքանչյուր մասից հանելով x^2, կստանանք

$$8+2=7x-x^2.$$

$+x^2$ անդամը ձախ մասից անցավ աջ մասը հակառակ նշանով։

2. Յեթե հավասարման յերկու մասերը պարունակում են յերկու միատեսակ անդամներ միևնույն նշաններով, ապա այդպիսի անդամները կարելի յե վոչնչացնել։ Օրինակի համար՝

$$6x+3=x^2+3.$$

Այս հավասարման յերկու մասերից էլ հանելով 3, կստանանք

$$6x=x^2.$$

84. Հավասարումների յերկրորդ հատկությունը։ Վերցնենք նույն հավասարումը՝

$$x^2+2=3x, \qquad (1)$$

և նրա յերկու մասերն էլ բազմապատկենք վորևե m թվով, վորը կարող է լինել դրական կամ բացասական (բայց վոչ զերո)։ Այն ժամանակ կստանանք հետևյալ նոր հավասարումը.

$$(x^2+2)m=3xm. \qquad (2)$$

Այս յերկու հավասարումների համազորությունը յերևան հանելու համար կդատենք ճիշտ այնպես, ինչպես դատում էինք առաջին հատկության նկատմամբ. այսինքն նախ ցույց կտանք, վոր (1) հավասարման ամեն մի արմատը բավարարում է (2) հավասարմանը և ապա, ընդհակառակը, վոր (2) հավասարման ամեն մի արմատը բավարարում է (1) հավասարմանը։

ա) Դիցուք գիտենք (1) հավասարման մի վորևե արմատը, օրինակի համար, $x=1$։ Այդ նշանակում է, վոր յեթե այդ հավասարման մեջ x-ի փոխարեն 1 դնենք, ապա x^2+2 արտահայտությունը հավասար կդառնա $3x$ արտահայտությանը (այդ արտահայտություններից յուրաքանչյուրը կդառնա 3)։ Բայց $x=1$ արժեքի համար $(x^2+2)m$ և $3xm$ արտադրյալները ևս կհավասարվեն իրար, վորովհետև յեթե (3 և 3) միահավասար թվերը բազմապատկենք միևնույն (m) թվով, ապա հավասար թվեր կստանանք՝ ($3m$ և $3m$)։ Նշանակի $x=1$ արմատը պետք է արմատ լինի նաև (2) հավասարման համար։ Քանի վոր այս ամենը կարելի յե կրկնել (1) հավասարման ամեն մի այլ արմատի մասին ևս, ապա յեզրակացնում ենք, վոր (1) հավասարման ամեն մի արմատը պատկանում է նաև (2) հավասարմանը։

բ) Ընդհակառակը, գիտենք, վոր (2) հավասարումն ունի $x=2$ արմատը։ Այդ նշանակում է, վոր յեթե այդ հավասարման մեջ x-ի փոխարեն դնենք 2, ապա $(x^2+2)m$ և $3xm$ արտադրյալները միահավասար կդառնան (յուրաքանչյուրը հավասար կդառնա $6m$-ի)։ Բայց այն ժամանակ $x=2$ արժեքի համար x^2+2 և $3x$ արտահայտությունները ևս հավասար կդառնան, վորովհետև յեթե ($6m$ և $6m$) հավասար թվերը բաժանենք միևնույն m թվի վրա, վորը զերոյից տարբեր է, ապա կստանանք միահավասար թվեր։ Նշանակի $x=2$ արմատը, ինչպես և (2) հավասարման ամեն մի այլ արմատը, արմատ կլինի նաև (1) հավասարման համար. այս պատճառով այդ հավասարումները համազոր են։

Այժմ յենթադրենք, վոր այն m թիվը, վորով բազմապատկում ենք հավասարման յերկու մասերը, հավասար է զերոյի։ Որինակի համար՝ զերոյով բազմապատկենք

$$x^2+2=3x$$

հավասարման յերկու մասերը, վորը յերկու արմատ ունի՝ 1 և 2. կստանանք հետևյալ նոր հավասարումը՝

$$(x^2+2)\cdot 0=3x\cdot 0.$$

Այս հավասարման բավարարում են վոչ միայն 1 և 2 արմատները, այլև x-ի ամեն մի կամավոր արժեք։ Այսպես, x-ի փոխարեն դնելով 5, 6 և այլն, կստանանք՝

$$(5^2+2)\cdot 0=3\cdot 5\cdot 0;\quad (6^2+2)\cdot 0=3\cdot 6\cdot 0$$

այսինքն

$$27\cdot 0=15\cdot 0;\quad 38\cdot 0=18\cdot 0;$$

կամ

$$0=0;\quad 0=0,$$

վորովհետև վորևէ թվի և զերոյի արտադրյալը զերո է։ Նշանակի՝ զերոյով բազմապատկելուց հավասարումների համազորությունը խախտվում է։

Այսպիսով՝ յեթե հավասարման յերկու մասերը բազմապատկենք զերոյից տարբեր միևնույն թվով, ապա կստանանք մի նոր հավասարում, վորը համազոր է առաջինին։

85. Հետևանքներ։ Հավասարումների այս յերկրորդ հատկությունից, վոր նոր ապացուցեցինք, կարելի յե հետևյալ յերեք հետևանքները բղխեցնել։

1. Յեթե հավասարման բոլոր անդամներն այնպիսի ընդհանուր բազմապատկիչ ունեն, վորը զերոյից տարբեր է յեվ անհայտներ չի պարունակում, ապա հավասարման բոլոր անդամները կարելի յե նրա վրա բաժանել։ Որինակի համար՝

$$60x-160=340-40x.$$

Բոլոր անդամները բաժանելով 20-ի վրա, կստանանք ավելի պարզ հավասարում՝

$$3x-8=17-2x.$$

2. Հավասարումը կարելի յե կոտորակային անդամներից ազատել։ Որինակի համար՝

$$\frac{7x-3}{6}-\frac{x-5}{4}=\frac{43}{6}.$$

Բոլոր անդամները բերենք ընդհանուր հայտարարի՝

$$\frac{14x-6}{12}-\frac{3x-15}{12}=\frac{86}{12} \text{ կամ } \frac{14x-6-(3x-15)}{12}=\frac{86}{12}.$$

Ընդհանուր հայտարարը ջնջելով մենք հավասարման յերկու մասերն այդպիսով բազմապատկած կլինենք զերոյից տարբեր միևնույն թվով, այն է՝ 12-ով. դրանից կստանանք մի հավասարում, վորը համազոր է տվածին՝

$$14x-6-(3x-15)=86 \text{ կամ } 14x-6-3x+15=86.$$

3. Հավասարման բոլոր անդամների առջև կարելի յե նշանները փոխել, վորովհետև այդ միևնույնն է, թե հավասարման յերկու մասերը բազմապատկել -1-ով։ Որինակի համար՝ յեթե -1-ով բազմապատկենք $-8-x^2=-7+2$ հավասարման յերկու մասերը, կստանանք՝ $8+x^2=7-2$։

86. Հավասարման մասերի բազմապատկումը կամ բաժանումը միևնույն հարաբերական արտահայտությամբ։ Յերբեմն հարկավոր է լինում տված հավասարումը ձևափոխելու համար նրա յերկու մասերը բազմապատկել (կամ բաժանել) միևնույն հանրահաշվական արտահայտությամբ (հաջորդ հոդվածում կտեսնենք դրա օրինակը)։ Բազմապատկումից հետո ստացված նոր հավասարումը միայն այն ժամանակ կլինի տված հավասարմանը համազոր, յերբ այն հանրահաշվական արտահայտությունը, վորով բազմապատկում ենք (կամ բաժանում ենք) տված հավասարման յերկու մասերը, հավասար չի զերոյի, վորովհետև զերոյով բազմապատկելուց հավասարումների համազորությունը խախտվում է։

87. Կողմնակի արմատներ։ Հավասարման յերկու մասերն այն ժամանակ է կարիք լինում միևնույն հանրահաշվական արտահայտությամբ բազմապատկելու, յերբ լուծման յենթակա հավասարումը այնպիսի կոտորակներ է պարունակում, վորոնց հայտարարների մեջ անհայտն առաջ է գալիս։ Դիցուք հարկավոր է լուծել հետևյալ հավասարումը՝

$$\frac{x^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{2x+2}{(x-2)^2}. \qquad (1)$$

Բոլոր կոտորակների ընդհանուր հայտարարն է $(x-2)^2$։ Բոլոր անդամները բերենք այդ հայտարարին՝

$$\frac{x^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{x-2}{(x-2)^2}+\frac{2x+2}{(x-2)^2},$$

և դեն գցենք հայտարարը, այսինքն, ուրիշ խոսքով, բոլոր անդամները բազմապատկենք $(x-2)^2$-ով. կստանանք՝

$$x^2+2=x-2+2x+2,$$

այսինքն

$$x^2+2=3x. \qquad (2($$

Այս հավասարումը յերկու արմատ ունի՝ 1 և 2։ Բայց մենք չենք կարող յերաշխավորել, վոր այս յերկու արմատներն էլ պետքական են նաև սկզբնական հավասարման համար, այսինքն սրա համար ևս արմատներ են. չենք կարող յերաշխավորել, քանի վոր այդ հավասարման յերկու մասերը հարկ յեղավ բազմապատկելու $(x-2)^2$-ով, վորը $x=2$ արժեքի համար զերո յե դառնում, իսկ

զերոյով բազմապատկելիս հավասարումների համազորությունը կարող է խախտվել։

Մնում է փորձարկել գտած արմատները՝ 1 և 2, վորոշելու համար՝ պետքակա՞ն են նրանք նաև (1) հավասարման համար։ $x=1$ արմատը բավարարում է (1) հավասարման, վորովհետև

$$\frac{1^2}{(1-2)^2}+\frac{2}{(1-2)^2}=\frac{1}{1-2}+\frac{2\cdot1+2}{(1-2)^2},$$

$$\frac{1}{(-1)^2}+\frac{2}{(-1)^2}=\frac{1}{-1}+\frac{2+2}{(-1)^2},$$

$$1+2=-1+4, \text{ այսինքն } 3=3.$$

Բայց մյուս արմատը՝ $x=2$, պետքական չէ (1) հավասարման համար, վորովհետև $x=2$ արժեքի համար ընդունում է հետևյալ անիմաստ կերպարանքը՝

$$\frac{4}{0}+\frac{2}{0}=\frac{1}{0}+\frac{6}{0}$$

(զերոյի վրա բաժանելը հնարավոր չէ)։

Այսպիսով տեսնում ենք, վոր յեթե տվյալ հավասարման մեջ կոտորակներ կան, վորոնց հայտարարներն անհայտը պարունակում են, և մենք այդ հայտարարներից ազատվել ենք հավասարման յերկու մասերը բազմապատկելով ընդհանուր հայտարարով, ապա ստացած հավասարման արմատները գտնելուց հետո դեռ պետք է տված հավասարման մեջ տեղադրելով փորձարկենք այդ արմատները՝ իմանալու համար, թե նրանց մեջ կողմնակիները չկա՞ն արդյոք։

Ընդհակառակը, հավասարման յերկու մասերը բաժանելով այնպիսի հանրահաշվական արտահայտության վրա, վորն անհայտը պարունակում է, կարող է պատահել, վոր արմատներ կորցնենք։

Օրինակի համար, յեթե

$$(2x+3)(x-3)=(3x-1)(x-3)$$

հավասարման յերկու մասերը բաժանենք $x-3$ յերկանդամի վրա, կստանանք

$$2x+3=3x-1$$

նոր հավասարումը, որը համազոր չի լինիլ տված հավասարմանը, որովհետև միայն մի արմատ ունի՝ $x=4$, մինչդեռ սկզբնական հավասարումը յերկու արմատ ունի՝ $x=4$ և $x=3$։

II. ՄԻԱՆՀԱՅՏ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄ

88. Միանհայտ առաջին աստիճանի հավասարումների լուծումը։ Հետևյալ օրինակների վրա ցույց տանք առաջին աստիճանի միանհայտ հավասարումների լուծման յեղանակը։

1. Լուծել հետևյալ հավասարումը՝

$$3x+2(4x-3)=5(x+2)-4.$$

Փակագծերը բանալով, կստանանք՝

$$3x+8x-6=5x+10-4.$$

Անհայտը պարունակող անդամները հավաքենք ձախ մասում, իսկ հայտնի անդամները՝ աջ մասում (տ. հավասարումների առաջին հատկության առաջին հետևանքը)՝

$$3x+8x-5x=10-4+6.$$

Կատարենք նման անդամների միացում՝

$$6x=12.$$

Վերջապես, հավասարման յերկու մասերը բաժանենք 6-ի վրա (հավասարումների յերկրորդ հատկության հիման վրա)։ Վերջնականորեն ստանում ենք՝

$$x=2.$$

Որպեսզի համոզվենք, որ հավասարումը լուծելիս որևէ սխալ չենք արել, պետք է լուծման ստուգումը կատարենք։ Դրա համար գտած արմատը կտեղադրենք տված հավասարման մեջ x-ի փոխարեն, կկատարենք հավասարման մեջ նշած գործողությունները, և յեթե հավասարությունը նույնություն դառնա, ապա արմատն ուղիղ է գտնված։ Մեր օրինակում կստանանք՝

$$3\cdot 2+2(4\cdot 2-3)=5(2+2)-4$$

կամ

$$16=16.$$

Ուրեմն արմատն ուղիղ է գտնված։

2. Լուծել հետևյալ հավասարումը․

$$\frac{3x-4}{2}+\frac{3x+2}{5}-x=\frac{7x-6}{6}-1.$$

Բոլոր անդամները բերում ենք ընդհանուր հայտարարի, որը հավասար է 30-ի։

$$\frac{15(3x-4)}{30}+\frac{6(3x+2)}{30}-\frac{30x}{30}=\frac{5(7x-6)}{30}-\frac{30}{30}.$$

Հավասարման բոլոր անդամները բազմապատկում ենք 30-ով (կամ, որ նույնն է, դեն ենք գցում ընդհանուր հայտարարը)․ ստանում ենք՝

$$15(3x-4)+6(3x+2)-30x=5(7x-6)-30.$$

Բացում ենք փակագծերը՝

$$45x-60+18x+12-30x=35x-30-30.$$

Անհայտը պարունակող անդամները հավաքում ենք ձախ մասում, իսկ հայտնի անդամներն աջ մասում՝

$$45x+18x-30x-35x=60-12-30-30.$$

Նման անդամները միացնում ենք՝

$$-2x=-12.$$

Յերկու մասերը բաժանում ենք անհայտի գործակցի վրա (կարելի յեր նախապես յերկու մասերը բազմապատկել −1-ով, դրական դարձնելու համար)․

$$x=\frac{-12}{-2}=\frac{12}{2}=6.$$

Ստուգում ենք կատարում՝

$$\frac{3\cdot 6-4}{2}+\frac{3\cdot 6+2}{5}-6=\frac{7\cdot 6-6}{6}-1;\ 7+4-6=6-1;\ 5=5.$$

Ուրեմն արմատն ուղիղ է գտնված։

Բերած օրինակներից գտնում ենք, որ առաջին աստիճանի միանհայտ հավասարումը լուծելու համար պետք է՝

1. Հավասարումն ազատել կոտորակային անդամներից (բերել ամբողջ տեսքի)։
2. Փակագծերը բանալ։
3. Անհայտը պարունակող անդամները հավաքել մի մասում, իսկ հայտնի անդամները մյուս մասում։
4. Կատարել նման անդամների միացում։
5. Հավասարման յերկու մասերը բաժանել անհայտի գործակցի վրա։

Այնուհետև պետք է ստուգել, թե գտած լուծումն ուղիղ է, որի համար այդ լուծումը (արմատը) պետք է տեղադրել անհայտի փոխարեն սկզբնական հավասարման մեջ։

Հասկանալի յե, որ նայած թե ինչպիսի հավասարում է տված, ամեն անգամ կարիք չի լինիլ նշած բոլոր հինգ գործողությունները կատարել։

Դիտողություն։ Հավասարման նկատմամբ առաջին չորս գործողությունները կատարելուց հետո հավասարման յուրաքանչյուր մասում մնում է մեկ անդամ՝ աջ մասում անհայտը պարունակող անդամը, իսկ ձախ մասում՝ հայտնի անդամը։ Այդ հավասարումն ընդհանուր տեսքով կարելի յե հետևյալ ձևով ներկայացնել՝

$$ax = b,$$

որտեղ a և b թվերը կարող են լինել դրական, բացասական և նույնիսկ զերոյի հավասար։ Հավասարման այս տեսքը կոչվում է առաջին աստիճանի միանհայտ հավասարման նորմալ տեսք։

Վարժություններ

Լուծել հետևյալ հավասարումները՝

150. $2x+1=35$; $19=4+3y$; $7y-11=24$.

151. $3x+23=104$; $89=11y-10$; $38=2+3x$.

152. $3x=15-2x$; $4x-3=9-2x$; $5x+\frac{1}{4}=3\frac{1}{2}$.

153. $2{,}5x-0{,}86=4+0{,}7x$; $29+2x=(x-7)\cdot 3$.

154. $x-7=\frac{3x+13}{20}$; $-x=3$; $-2x=8$.

155. $\frac{2x+1}{2}=\frac{7x+5}{8}$; $x+\frac{11-x}{3}=\frac{20-x}{2}$.

156. $x+\frac{3x-9}{5}=11-\frac{15x-12}{3}$.

157. $3x-4-\frac{4(7x-9)}{15}=\frac{4}{5}\left(6+\frac{x-1}{3}\right)$.

158. $2x-\frac{19-2x}{2}=\frac{2x-11}{2}$.

159. $\frac{x-1}{7}+\frac{23-x}{5}=2-\frac{4+x}{4}$.

89. Գաղափար հավասարումներ կազմելու մասին։ Հավասարումների միջոցով կարելի յե համեմատաբար ավելի հեշտ լուծել այնպիսի խնդիրներ, որոնց լուծելը թվաբանության միջոցով դժվար է կամ նույնիսկ անհնարին։ Ամբողջ դժվարությունը նրանում է, թե ինչպես կազմել այնպիսի հավասարում, որի լուծումը տա որոնելի պատասխանը։

Հավասարումներ կազմելու համար մի ընդհանուր յեղանակ չկա, որովհետև խնդիրների պայմանները կարող են շատ բազմազան լինել։ Կարելի յե միայն մի քանի ընդհանուր յեղանակներ (պրյոմներ) նշել, որոնք գործադրվում են խնդրի տվյալներով հավասարումներ կազմելիս։ Իսկ ընդհանրապես ունակությունները այդ ուղղությամբ միայն գործնականով կարելի յե ձեռք բերել։

Մի օրինակի վրա ցույց տանք հավասարումներ կազմելու ընդհանուր յեղանակները։

Խնդիր։ Դպրոցը գնեց հաստ և բարակ տետրեր, ընդամենը 80 հատ։ Հաստ տետրն արժե 35 կոպ. բարակը՝ 4 կոպ.։ Քանի՞ տետր եր գնած մեկ և մյուս տեսակից, յեթե վճարված է 9 ռ. 40 կոպեկ։

1. Վորոշում ենք, թե անհայտ մեծություններից վո՞րը նշանակենք x-ով։

Մեր խնդրում յերկու անհայտ կա՝ հաստ տետրերի թիվը և բարակ տետրերի թիվը։ x-ով նշանակենք, որինակի համար, հաստ տետրերի թիվը։ Քանի վոր բոլոր տետրերն 80 հատ են, ապա բարակները կլինեն 80—x հատ։

Հաստ տետրերի թիվն է	x
Բարակ » » »	80—x։

2. x-ի յեվ խնդրում տված թվերի միջոցով մաթեմատիկորեն արտահայտում ենք խնդրի բոլոր պայմանները։

Մեր խնդրում ասված է, վոր հաստ տետրն արժե 35 կոպ., իսկ բարակը՝ 4 կոպ.։ Հետևաբար, մենք կարող ենք հարցնել՝ ինչքան արժեն գնած բոլոր հաստ և բարակ տետրերը (այս հարցն այն պատճառով ենք դնում, վոր խնդրում տված է բոլոր տետրերի արժեքը)։

Հաստ տետրերի արժեքն է	35x կոպ.
Բարակ » » »	4(80—x) կոպ.
Տետրերի ընդհանուր » »	9 ռ. 40 կոպ.։

3. Հավասարում ենք կազմում։

Քանի վոր խնդրում ասված է, վոր տետրերի ընդհանուր արժեքն 9 ռ. 40 կոպ. է, ապա հաստ տետրերի արժեքի՝ 35x-ի, և բարակ տետրերի արժեքի՝ 4(80—x)-ի, գումարը պետք է կազմի հենց ուղիղ 9 ռ. 40 կոպ.

$$35x+4(80-x)=940։$$

Այս հավասարումը լուծելով, x-ի համար կստանանք 20 թիվը։

x-ով մենք նշանակեցինք հաստ տետրերի թիվը։ Նշանակի հաստ տետրերից գնված է յեղել 20 հատ, իսկ բարակներից՝ 80—20=60 հատ։

Նկատենք, վոր խնդրում սովորաբար ճիշտ այնքան տվյալներ են լինում, վորքան անհրաժեշտ է հավասարում կազմելու համար։ Այս պատճառով հավասարումը կազմելուց հետո օգտա-

կար է նայել՝ արդյո՞ք օգտագործված են խնդրի բոլոր տվյալները՝ այսինքն խնդրում տրված բոլո՞ր թվերն են այս կամ այն ձևով հավասարման մեջ մտել։

Վարժություններ

160. Յերկու թվերի գումարը հավասար է 2548-ի. գտնել այդ թվերը, յեթե հայտնի է, վոր նրանցից մեկը մյուսից փոքր է 148-ով։

161. Յերեք գումարելիների գումարը հավասար է 100-ի. յերկրորդ գումարելին մեծ է առաջինից 10-ով, իսկ յերրորդը յերկրորդից՝ 20-ով։ Գտնել այդ գումարելիները։

162. Ձիավորը հետապնդում է հետևակին, վորը 15 կմ առաջ է ձիավորից։ Քանի՞ ժամից հետո ձիավորը կհասնի հետևակին, յեթե առաջինը 1 ժամում անցնում է 10 կմ, իսկ յերկրորդը միայն 4 կմ։

163. Յերկու տեսակ թեյից խառնուրդ է պատրաստված ընդամենը 32 կգ։ Առաջին տեսակի 1 կգ-ը արժե 8 ռուբլի, իսկ յերկրորդ տեսակինը՝ 6 ռ. 50 կոպ.։ Քանի՞ կիլոգրամ է վերցված մեկ և մյուս տեսակից, յեթե խառնուրդի կիլոգրամը (առանց օգուտի կամ վնասի) արժե 7 ռ. 10 կոպ.։

164. Հեծանվորդը վորոշ տարածություն անցավ ժամը 8 կմ արագությամբ։ Նա ստիպված էր վերադառնալ մի ուրիշ ճանապարհով, վորը 3 կմ-ով յերկար էր առաջինից։ Թեև վերադարձը կատարեց ժամը 9 կմ արագությամբ, բայց վերադարձի վրա $7^1/_2$ րոպե ավելի ժամանակ գնաց։ Ի՞նչ յերկարություն ունեն այդ յերկու ճանապարհները։

90. Տառային հավասարումներ։ Անհրաժեշտ չէ, վոր անհայտը միշտ x տառով նշանակվի. Նա կարող է նաև վորևէ այլ տառով նշանակվել։ Վերցնենք, որինակի համար, հետևյալ բանաձևը՝

$$s=\frac{1}{2}bh,$$

վորը յեռանկյան s մակերեսն արտահայտում է նրա b հիմքի և h բարձրության միջոցով։ Այս բանաձևը մի հավասարում է, վորի մեջ s, b և h թվերից յուրաքանչյուրը կարող է լինել անհայտ ընդունվել։ Դիցուք, օրինակի համար, այսպիսի խնդիր է առաջադրված՝ գտնել այն յեռանկյան հիմքը, վորի բարձրությունը վորևէ տեսակի գծային միավորներով հավասար է h-ի, իսկ մակերեսը համապատասխան քառակուսի միավորներով հավասար է s-ի։ Այս դեպքում մեր բանաձևի մեջ b թիվը պետք է անհայտ համարվի, իսկ s և h թվերը՝ հայտնիներ։ Իհարկե, մենք կարող ենք անհայտ հիմքը նշանակել x տառով և հավասարումն այսպես գրել՝

$$s = \frac{1}{2} hx,$$

վորտեղից

$$x = s : \frac{1}{2} h = 2s : h = \frac{2s}{h}.$$

Բայց կարելի յե, առանց b-ն x-ով փոխարինելու, ուղղակի $s = \frac{1}{2} bh$ հավասարումից վորոշել b-ն s-ի և h-ի միջոցով՝

$$s = \frac{1}{2} bh; \quad 2s = bh; \quad b = \frac{2s}{h}.$$

Ընդհանրապես պետք է վարժվել լուծելու վոչ միայն թվային հավասարումներ, վորոնց մեջ տվյալ թվերն արտահայտված են թվանշաններով, իսկ անհայտը նշանակված է x-ով, այլև տառային հավասարումներ, վորոնց մեջ տվյալ թվերը և անհայտը նշանակված են այս կամ այն տառերով։

Օրինակներ.

1) $a + bx = c;$

$bx = c - a;$

$x = \frac{c - a}{b}.$

2) $a(x - c) = b(x + d);$

$ax - ac = bx + bd;$

$ax - bx = bd + ac;$

$x(a - b) = bd + ac;$

$x = \frac{bd + ac}{a - b}.$

3) $\frac{y}{a} - y = b;$

$y - ay = ab;$

$y(1 - a) = ab;$

$y = \frac{ab}{1 - a};$

4) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1;$

$bx + ax = ab;$

$x(b + a) = ab;$

$x = \frac{ab}{a + b}.$

Վարժություններ

165. $(a + x)(b + x) = (a - x)(b - x)$։

166. $(x - a)(x + b) + c = (x + a)(x - b)$։

167. $a + bx = 4 - 3(a - x)$ հավասարումից գտնել x-ը՝ կախված a-ից և b-ից։

168. Յեթե սեղանի հիմքերն են b_1 և b_2, իսկ բարձրությունը՝ h, ապա նրա q մակերեսը վորոշվում է հետևյալ բանաձևով՝ $q = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$։ Այստեղից գտնել h-ը՝ կախված q, b_1 և b_2 մեծություններից։

III. ԱՌԱՋԻՆ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐ

Յերկու յերկանհայտ հավասարումների սիստեմ

91. Խնդիր։ Փորձով գտան, վոր արծաթից և պղնձից կազմված մի ձույլ, վորի կշիռն է 148 կգ, ջրում կորցնում է իր կշռից $14\frac{2}{3}$ կգ։ Վորոշել ձույլի մեջ յեղած արծաթի և պղնձի քանակները, յեթե հայտնի յե, վոր ջրի մեջ 21 կգ արծաթը կորցնում է 2 կգ, իսկ 9 կգ պղինձը կորցնում է 1 կգ։

Յենթադրենք այդ ձույլի մեջ արծաթն x կգ է, իսկ պղինձը՝ y կգ։ Այդ դեպքում մի հավասարումը կլինի՝ $x + y = 148$։ Մյուս հավասարումը կազմելու համար նկատառենք, վոր յեթե 21 կգ արծաթը ջրում իր կշռից կորցնում է 2 կգ, ապա այդ նշանակում է, վոր 1 կգ արծաթը կորցնում է $\frac{2}{21}$ կգ, իսկ x կգ արծաթը ջրում կկորցնի $\frac{2}{21}x$ կգ։ Նույնպես և յեթե 9 կգ պղինձը ջրում իր կշռից կորցնում է 1 կգ, ապա այդ նշանակում է, վոր 1 կգ պղինձը կորցնում է $\frac{1}{9}$ կգ, իսկ y կգ պղինձը կկորցնի $\frac{1}{9}y$ կգ։ Այս պատճառով յերկրորդ հավասարումը կլինի $\frac{2}{21}x+\frac{1}{9}y=14\frac{2}{3}$։ Այսպիսով մենք ստացանք յերկու հավասարում յերկու անհայտով, վորոնք են՝

$$x+y=148 \text{ և } \frac{2}{21}x+\frac{1}{9}y=14\frac{2}{3}=\frac{44}{3}.$$

Յերկրորդ հավասարումը կարելի յե պարզեցնել, ազատելով նրան կոտորակներից։ Դրա համար բոլոր կոտորակները կբերենք մի հայտարարի՝

$$\frac{6}{63}x+\frac{7}{63}y=\frac{924}{63}.$$

Այժմ հավասարման յերկու մասերը կբազմապատկենք 63-ով, վորից հետո կստանանք հետևյալ համազոր հավասարումը՝

$$6x+7y=924.$$

Այժմ ունենք յերկու հավասարում՝

$$x+y=148 \text{ և } 6x+7y=924.$$

Այս յերկու հավասարումները մենք կարող ենք մի քանի յեղանակներով լուծել։ Որինակի համար՝ առաջին հավասարումից x-ը կորոշենք y-ի միջոցով. կստանանք՝

$$x=148-y.$$

Քանի վոր յերկրորդ հավասարման մեջ x և y տառերը նույն թվերն են նշանակում, ինչ վոր առաջին հավասարման մեջ, ապա մենք կարող ենք յերկրորդ հավասարման մեջ x-ի փոխարեն դնել 148−y տարբերությունը. կստանանք՝

$$6(148-y)+7y=924.$$

Լուծենք այս միանհայտ հավասարումը՝

$$888-6y+7y=924; \quad y=924-888=36.$$

Այն ժամանակ

$$x=148-36=112.$$

Տված ձույլի մեջ այսպիսով պարունակվում է 112 էգ արծաթ և 36 կգ պղինձ։

92. **Առաջին աստիճանի յերկանհայտ հավասարման նորմալ տեսքը։** Վերցնենք յերկանհայտ հավասարման մի այսպիսի որինակ՝

$$2(2x+3y-5)=\frac{5}{8}(x+3)+\frac{3}{4}(y-4).$$

Այս հավասարումը պարզեցնելու նպատակով նրա մեջ նույն ձևափոխությունները կկատարենք, վոր առաջ նշել էյինք միանհայտ հավասարման համար, այն է՝

1. Փակագծերը կբանանք

$$4x+6y-10=\frac{5}{8}x+\frac{15}{8}+\frac{3}{4}y-3.$$

2. Հայտարարներից կազատվենք, վորի համար բոլոր անդամները կբազմապատկենք 8-ով՝

$$32x+48y-80=5x+15+6y-24.$$

3. Անհայտ անդամները կհավաքենք հավասարության մի կողմում, իսկ հայտնիները մյուս կողմում՝

$$32x+48y-5x-6y=15-24+80.$$

4. Կկատարենք նման անդամների միացում՝

$$27x+42y=71.$$

Այսպիսով, նշած ձևափոխումները կատարելուց հետո մեր հավասարումն այնպիսի տեսք է ընդունում, վոր հավասարման ձախ մասում միայն յերկու անդամ են գտնում՝ մեկը x անհայտով, մյուսը՝ y անհայտով (յերկուսն էլ առաջին աստիճանի), իսկ աջ մասում միայն մեկ անդամ կա և նա անհայտ չի պարունակում։ x-ի և y-ի գործակիցները կարող են կամ յերկուսն էլ դրական լինել (ինչպես մեր որինակում), կամ յերկուսն էլ բացատական (այս դեպքը կարելի յե նախորդ դեպքին վերածել, հավասարման բոլոր անդամները բազմապատկելով —1-ով) և կամ մեկը դրական, և մյուսը բացասական. աջ մասում գտնվող անդամը կարող է կամ դրական թիվ լինել (ինչպես մեր օրինակում), կամ բացասական թիվ լինել և կամ նույնիսկ զերո: x-ի և y-ի գործակիցները նշանակելով a և b տառերով և յանհայտ չպարունակող անդամը c տառով, մենք կարող ենք առաջին աստիճանի յերկանհայտ հավասարումն ընդհանուր տեսքով այսպես ներկայացնել՝

$$ax + by = c:$$

Հավասարման այսպիսի տեսքը կոչվում է առաջին աստիճանի յերկանհայտ հավասարման նորմալ տեսք:

93. Մեկ յերկանհայտ հավասարման անորոշությունը: Յերկու անհայտով մեկ հավասարումն ունի անթիվ բազմությամբ արմատներ: Իրոք յեթե անհայտներից վորևե մեկի համար մի կամավոր թիվ վերցնենք և այս թիվը դնենք նրա փոխարեն հավասարման մեջ, այն ժամանակ կստանանք մի հավասարում, վորը միայն մյուս անհայտն է պարունակում, և այս անհայտը կգտնենք այդ հավասարումից: Ընդունելով առաջին անհայտի համար մի ուրիշ թիվ, մենք նույն ձևով յերկրորդ անհայտի համար կստանանք մի նոր թիվ և այլն: Այսպիսով մենք կարող ենք ստանալ այնքան զույգ լուծումներ, ինչքան կամենանք:

Դիցուք, օրինակի համար, տրված է այսպիսի խնդիր. գտնել հավասարասրուն յեռանկյան կողմերը, յեթե նրա պարագիծը հավասար է 40 մ-ի: Նշանակելով այդ յեռանկյան հիմքի յերկարությունը x տառով և նրա սրունքներից յուրաքանչյուրի յերկարությունն y տառով, մենք կարող ենք հետևյալ հավասարումը գրել՝

$$x + 2y = 40.$$

x-ի համար նշանակենք վորևե կամավոր թիվ, օրինակի համար, 10-ը:

Այն ժամանակ կգտնենք՝ $10+2y=40$, $2y=30$, $y=15$: Կնշանակի, յեթե յեռանկյան հիմքը 10 մ լինի, ապա յուրաքանչյուր սրունքը պետք է 15 մ լինի: Այժմ x-ի համար վորևե ուրիշ թիվ

ընտրենք, օրինակի համար, 8: Այն ժամանակ $2y=32$ և $y=16$: Այսպիսով մենք կարող ենք գտնել, ցանկացած թվով լուծումներ և, հետևաբար, հավասարումն ու խնդիրն անորոշ են:

94. Հավասարումների սիստեմ: Ընդունված է ասել, վոր մի քանի հավասարումներ սիստեմ են կազմում, յեթե այդ բոլոր հավասարումների մեջ x, y,... տառերից յուրաքանչյուրը միևնույն թիվն է ներկայացնում բոլոր հավասարումների մեջ:

Յեթե, օրինակի համար, հետևյալ յերկու հավասարումները՝

$$\begin{cases} 2x - 5 = 3y - 2 \\ 8x - y = 2y + 21 \end{cases}$$

դիտարկվում են այն պայմանով, վոր x տառը միևնույն թիվն է ներկայացնում յերկու հավասարումների մեջ, ինչպես և y տառը, ապա այդպիսի հավասարումները մի սիստեմ են կազմում: Այս լինում է ամեն անգամ այն դեպքում, յերբ հավասարումները միևնույն խնդրի պայմաններից են կազմվում:

Նշենք առաջին աստիճանի յերկու յերկանհայտ հավասարումների սիստեմի լուծման յերկու յեղանակ:

95. Տեղադրման յեղանակ: Այս յեղանակն արդեն կիրառել ենք, յերբ լուծում եյինք արծաթից ու պղնձից կազմված ձուլվածքին վերաբերող խնդիրը:

Այժմ վերցնենք մի ավելի բարդ օրինակ՝

$$8x - 5y = -16; \quad 10x + 3y = 17:$$

(Յերկու հավասարումներն էլ բերված են նորմալ տեսքի):

Հավասարումներից մեկից, օրինակի համար առաջինից, կորոշենք անհայտներից մեկն ու մեկը, օրինակի համար y-ը, կախված մյուս անհայտից՝

$$y = \frac{8x + 16}{5}; \text{*)}$$

Քանի վոր յերկրորդ հավասարումը պետք է x-ի և y-ի նույն

*) Այս բանաձևն արտածելու համար մենք $-5y$ անդամը փոխադրեցինք աջ կողմը, իսկ -16 անդամը՝ ձախ կողմը, այնուհետև հավասարման յերկու մասերը բաժանեցինք 5-ի վրա և հավասարման մասերի տեղերը փոխանակեցինք: Պետք է վարժվել այս ձևափոխությունները մտքում կատարելու:

արժեքներով բավարարվի, ինչ վոր առաջինը, ապա մենք կարող ենք նրա մեջ y-ի փոխարեն դնել գտած արտահայտությունը, վորի հետևանքով կստանանք միայն x անհայտը պարունակող հետևյալ հավասարումը.

$$10x+3\cdot\frac{8x+16}{5}=17\text{։}$$

Լուծենք այս հավասարումը՝

$$10x+\frac{24x+48}{5}=17;\quad 50x+24x+48=85;\quad x=\frac{1}{2}\text{։}$$

Այն ժամանակ՝

$$y=\frac{8x+16}{5}=\frac{4+16}{5}=4\text{։}$$

Մենք կարող էյինք մի հավասարումից վորոշել x անհայտը՝ կախված y-ից, և ստացած արտահայտությունը տեղադրել x-ի փոխարեն մյուս հավասարման մեջ. այն ժամանակ մենք կստանայինք միայն y անհայտը պարունակող մի հավասարում։

Այս յեղանակը հատկապես այն դեպքում է հարմար, յերբ վորևէ անհայտի մոտ գործակիցը հավասար է 1-ի։ Այն ժամանակ ամենից ավելի լավ կլինի այդ անհայտը վորոշել՝ կախված մյուս անհայտից (վորովհետև կարիք չի լինի գործակցի վրա բաժանելու)։ Որինակի համար՝

$$\begin{cases}3x-2y=11\\ 4x+y=22\text{։}\end{cases}$$

Յերկրորդ հավասարումից գտնում ենք՝

$$y=22-4x.$$

Այն ժամանակ առաջին հավասարումը տալիս է՝

$$3x-2(22-4x)=11;\quad 3x-44+8x=11;$$

$$11x=44+11=55;\quad x=\frac{55}{11}=5;\quad y=22-4\cdot 5=2\text{։}$$

Կանոն։ Յերկանհայտ յերկու հավասարումների սիստեմը տեղադրման յեղանակով լուծելու համար պետք է մի հավասարումից վորոշել անհայտներից մեկը՝ կախված մյուսից, յեվ ստացած արտահայտությունը տեղադրել մյուս հավասարման մեջ. դրա հետևանքով ստացվում է մեկ միանհայտ հավասարում։ Լուծելով վերջինս՝ գտնում են այդ անհայտը։ Գտած թիվը տեղադրելով այն արտահայտության մեջ, վոր ստացված եր առաջին անհայտի համար, գտնում են նայեվ այս մյուս անհայտը։

96. Հանրահաշվական գումարման յեղանակ։ Նախ յենթադրենք, վոր հավասարումների տվյալ սիստեմի մեջ (հավասարումները նախապես նորմալ տեսքի չեն բերված) գործակիցները վորևէ անհայտի մոտ, որինակի համար y-ի մոտ, միահավասար են։ Դիցուք, որինակի համար, մեզ տրված է հետևյալ սիստեմը՝

$$\begin{cases}7x-2y=27\\ 5x+2y=33,\end{cases}$$

վորի մեջ y անհայտի մոտ գործակիցները թվապես միահավասար են և տարբեր նշաններ ունեն։ Մենք գիտենք, վոր յեթե հավասար թվերի հավասար թվեր ավելացնենք (հանենք), ապա հավասար թվեր կստանանք։ Այս պատճառով, յեթե տվյալ հավասարումների ձախ մասերն իրար հետ գումարենք (իրարից հանենք) և աջ մասերն էլ իրար հետ գումարենք (իրարից հանենք), ապա = նշանը կպահպանվի (այս միտքը կարճ այսպես են արտահայտում՝ հավասարումները կարելի յե անդամ առ անդամ գումարել կամ հանել)։

Այժմ տված հավասարումները գումարենք. $-2y$ և $+2y$ անդամներն իրար կոչնչացնեն, և մենք կստանանք x անհայտով մեկ հավասարում՝

$$+\begin{cases}7x-2y=27\\ \underline{5x+2y=33}\end{cases}$$
$$12x\qquad=60,$$ վորտեղից $x=5$։

Տված հավասարումներից մեկի մեջ տեղադրելով x-ի փոխա-

ըեն նրա համար գտած 5 թիվը, կստանանք մի հավասարում, վորից կգտնենք y-ը՝

$$7 \cdot 5 - 2y = 27; \quad 35 - 2y = 27; \quad 35 - 27 = 2y;$$

$$8 = 2y; \quad y = 4.$$

Յեթե հավասարումների մեջ արտաքսելի անհայտի առաջ միատեսակ լինեյին և՛ գործակիցները, և՛ նշանները, ապա հավասարումներից մեկի բոլոր անդամների առաջ նշանները փոխելով մենք այս դեպքը կվերածեյինք հենց նոր քննած դեպքին։ Որինակի համար, յեթե տված ե հետևյալ սիստեմը՝

$$\begin{cases} 3x - 5y = 8 \\ 3x + 7y = 32, \end{cases}$$

*վորի մեջ x անհայտի առաջ յերկու հավասարումներում ել միատեսակ են թե՛ գործակիցները և թե՛ նշանները, ապա մենք կփոխենք հավասարումներից մեկի, ասենք՝ առաջինի, բոլոր անդամների նշանները (ուրիշ խոսքով, հավասարման յերկու մասերը կբազմապատկենք —1-ով) և ապա կգումարենք հավասարումները *)։*

$$+\begin{cases} -3x + 5y = -8 \\ 3x + 7y = 32 \end{cases}$$

$$12y = 24 \qquad y = 2.$$

$$3x + 7 \cdot 2 = 32; \quad 3x = 32 - 14 = 18; \quad x = 6.$$

Այժմ վերցնենք այնպիսի սիստեմ, վորի մեջ գործակիցները տարբեր են, որինակի համար, հետևյալը՝

$$\begin{cases} 7x + 6y = 29 \\ -5x + 8y = 10. \end{cases}$$

Այս դեպքում մենք կարող ենք անհայտներից մեկն ու մեկի մոտ, որինակ x-ի մոտ, գործակիցները նախապես իրար հավասարեցնել։ Դրա համար կվերցնենք 7 և 5 գործակիցների մի բազ-

*) *Իհարկե, մի հավասարման բոլոր անդամների առաջ նշանները փոխել և ապա այդ հավասարումը գումարել մի ուրիշ հավասարման հետ, այդ միևնույնն ե թե առաջին հավասարումը հանել յերկրորդից։*

մապատիկը (ամենից լավ կլինի վերցնել ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը, վորը տվյալ որինակում կլինի 35) և ամեն մի հավասարման յերկու մասն ել կբազմապատկենք լրացնող բազմապատկչով (ինչպես այդ արվում ե կոտորակներն ընդհանուր հայտարարի բերելիս).

$$\begin{cases} 7x + 6y = 29 \ (\text{բազմապատկել 5-ով}) \\ -5x + 8y = 10 \ (\text{բազմապատկել 7-ով}) \end{cases}$$

կստանանք

$$\begin{cases} 35x + 30y = 145 \\ -35x + 56y = 70, \end{cases}$$

և այն ժամանակ այս դեպքը վերածված կլինի նախորդին։

Կանոն։ Յերկանհայտ յերկու հավասարումների սիստեմը հանրահաշվական գումարման յեղանակով լուծելու համար նախ՝ տվյալ հավասարումների մեջ անհայտներից մեկն ու մեկի առաջ հավասարեցնում են գործակիցները, յեվ այն դեպքում, յերբ այդ անհայտի առաջ յերկու հավասարումների մեջ ել նշանները նույնն են, հավասարումներից մեկի մեջ նշանները փոխում են։ Այնուհետև գումարելով հավասարումները՝ ստանում են մի հավասարում մեկ անհայտով, վորից յեվ վորոշում են այս անհայտը։ Գտած թիվը տեղադրելով տվյալ հավասարումներից մեկն ու մեկի մեջ, գտնում են նայեվ մյուս անհայտը։

97. Տառային գործակիցներով հավասարումների սիստեմներ։ *Յերբեմն հարկ ե լինում հավասարումների այնպիսի սիստեմ լուծելու, վորի մեջ գործակիցները տառերով են արտահայտված։ Դիցուք, որինակի համար, պահանջվում ե լուծել հետևյալ սիստեմը՝*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Մենք կարող ենք այս սիստեմը լուծել թվային գործակիցներ ունեցող սիստեմի լուծման համար նշած յերկու յեղանակներից թե՛ մեկով և թե՛ մյուսով։ Տվյալ դեպքում ամենից ավելի պարզ կլինի կիրառել հանրահաշվական գումարման յեղանակը, այսինքն այսպես վարվել. հավասարումներից մեկի մեջ նշանները փոխել մի անհայտի առաջ, օրինակի համար y-ի առաջ, գործակիցները հավասարեցնել և յերկու հավասարումները գումարել․

$$\begin{array}{rl|c|rl} ax + by = c & & b' & ab'x + bb'y = & b'c \\ -a'x - b'y = -c' & & b & -a'bx - bb'y = & -bc' \\ \hline & & & (ab' - a'b)x = & b'c - bc' \end{array}$$

վորտեղից գտնում ենք՝

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}.$$

Նման ձևով էլ կգտնենք y-ը՝

$$\begin{array}{rl|c|rl} ax + by = c & & a' & aa'x + a'by = & a'c \\ -a'x - b'y = -c' & & a & -aa'x - ab'y = & -ac' \\ \hline & & & (a'b - ab')y = & a'c - ac' \end{array}$$

վորտեղից՝

$$y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}.$$

Վարժություններ

Տեղադրման յեղանակով լուծել հետևյալ հավասարումների սիստեմները՝

169. $\begin{cases} y = 2x - 3; \\ 3x + 2y = 8. \end{cases}$ $\begin{cases} 5x + y = 3; \\ 3x - 2y = 7. \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 5y = 6; \\ x + 4y = -15; \end{cases}$

Հետևյալ սիստեմները լուծել հանրահաշվական գումարման յեղանակով՝

170. $\begin{cases} 4x + 7y = 5; \\ -2x + 5y = 6. \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 5y = 20; \\ 2x - 10y = 0. \end{cases}$ $\begin{cases} 5x - 8y = 19; \\ 2x - 2y = 10. \end{cases}$

Հետևյալ հավասարումները լուծել վորևէ յեղանակով.

171. $(2x - 1)(y + 2) = (x - 2)(2y + 5)$
$5x - 2 = 2y + 15.$

172. $\begin{cases} ax + by = c; \\ y = mx. \end{cases}$ $\begin{cases} x + a = my; \\ y + b = nx. \end{cases}$

173. Գտնել a-ի և b-ի արժեքները $y = ax + b$ յերկանդամի մեջ, իմանալով, վոր $y = -11$, յերբ $x = -2$, և $y = 1$, յերբ $x = 2$։

174. Գնված է 8 կգ. մի տեսակի և 19 կգ. մի ուրիշ տեսակի ապրանք, և բոլորի համար վճարված է 16 ռ. 40 կոպ. յերկրորդ անգամ նույն գներով գնված է 20 կգ. առաջին ապրանքից և 16 կգ. յերկրորդից ու վճարված է այս բոլորի համար 28 ռ. 40 կոպ.։ Իմանալ յուրաքանչյուր ապրանքի կիլոգրամի գինը։

175. Տրեստը վաճառման համար ձեռք բերեց 65 սովորական և շարժիչավոր հեծանիվներ։ Սովորական հեծանիվներից յուրաքանչյուրի համար նա վճարեց 100 ռուբլի, իսկ շարժիչավորներից յուրաքանչյուրի համար 400 ռուբլի։ Այս վողջ ապրանքը ծախելով, տրեստը 2800 ռուբլի շահեց. շահույթը սովորական հեծանիվի համար կազմում եր 12%, իսկ շարժիչավորի համար՝ 25%։ Քանի՞ սովորական և քանի՞ շարժիչավոր հեծանիվ կար։

176. Ճարտարագետը պետք է յերկու տեղերի միջև հեռագրասյուներ գնի։ Նա հաշվեց, վոր յեթե մեկական սյուն կանգնեցնի ծայրակետերում և յուրաքանչյուր 50 մ հեռավորության վրա այդ կետերի միջև, ապա նրան կպակասի 21 սյուն։ Իսկ յեթե սյուները հաստատի մեկը մյուսից 55 մետր հեռավորության վրա, ապա միայն մեկ սյուն կպակասի։ Ընդամենը քանի՞ սյուն կա, և մեկը մյուսից ի՞նչ հեռավորության վրա պետք է դրվեն սյուները։

177. Յերկու ուղղանկյուն յեռանկյունների մեջ ներքնաձիգները հավասար են։ Առաջին յեռանկյան մի էջը 4 մ-ով կարճ է, իսկ մյուսը 8 մ-ով յերկար է մյուս յեռանկյան համապատասխան էջերից։ Հաշվել այս էջերը, յեթե հայտնի յե, վոր առաջինի մակերեսը 34 քառ. մ-ով մեծ է յերկրորդի մակերեսից։

Յերեք յեռանհայտ հավասարումների սիստեմ

98. Առաջին աստիճանի յեռանհայտ հավասարման նորմալ ձևը։ Յեթե առաջին աստիճանի այնպիսի հավասարման մեջ, վորը պարունակում է յերեք անհայտներ՝ x, y և z, կատարենք նույն ձևափոխումները, վոր առաջ նշել էյինք միանհայտ և յերկանհայտ հավասարումների համար, ապա հավասարումը այնպիսի տեսք կստանա, վորի մեջ հավասարման ձախ մասը միայն յերեք անդամ է պարունակում՝ մեկն x-ով, մյուսն՝ y-ով և յերրորդը z-ով, իսկ աջ մասը միայն մեկ անդամ, և այն էլ անհայտ չպարունակող։ Յեռանհայտ հավասարման համար այս տեսքը կոչվում է նորմալ տեսք (բնականոն տեսք)։ Այսպիսի տեսք ունի, որինակի համար, հետևյալ հավասարումը՝

$$5x-3y-4z=-12\text{։}$$

Յեռանհայտ հավասարման ընդհանուր (նորմալ) տեսքը հետևյալն է՝

$$ax+by+cz=d,$$

վորտեղ a, b, c և d տվյալ հարաբերական թվեր են։

99. Յերկու յեվ մեկ յեռանհայտ հավասարումների անորոշությունը։ Դիցուք մեզ տված է յերկու յեռանհայտ հավասարումների մի սիստեմ՝

$$5x-3y+z=2;\qquad 2x+y-z=6\text{։}$$

Անհայտներից մեկին, որինակ z-ին, տանք վորևէ կամավոր արժեք, ասենք 1, և այս արժեքը դնենք հավասարումների մեջ z-ի փոխարեն. կստանանք՝

$$\begin{cases} 5x-3y+1=2 \\ 2x+y-1=6, \end{cases} \quad \text{այսինքն} \quad \begin{cases} 5x-3y=1 \\ 2x+y=7\text{։} \end{cases}$$

Այսպիսով կստանանք յերկու յերկանհայտ հավասարումների մի սիստեմ։ Լուծելով այդ սիստեմը վորևէ յեղանակով, կգտնենք՝ $x=2$, $y=3$. կնշանակի՝ յեռանհայտ հավասարումների տվյալ սիստեմը բավարարվում է, յերբ $x=2$, $y=3$ և $z=1$։ Այժմ z անհայտին տանք վորևէ այլ արժեք, որինակի համար՝ $z=0$ արժեքը, և այս արժեքը տեղադրենք տվյալ հավասարումների մեջ. կստանանք՝

$$5x-3y=2;\qquad 2x+y=6\text{։}$$

Մենք նորից կստանանք յերկու յերկանհայտ հավասարումների մի սիստեմ։ Լուծելով այս սիստեմը վորևէ յեղանակով, գտնում ենք՝

$$x=\frac{20}{11}=1\frac{9}{11};\quad y=2\frac{4}{11}\text{։}$$

Կնշանակի՝ տվյալ սիստեմը բավարարվում է, յերբ $x=1\frac{9}{11}$, $y=2\frac{4}{11}$ և $z=0$։ Յեթե z-ի համար վորևէ նոր արժեք ընտրենք, նորից կստանանք յերկու յերկանհայտ հավասարումների սիստեմ, վորից x-ի և y-ի համար նոր արժեքներ կգտնենք։ Քանի վոր z-ի համար կարող ենք ցանկացած թվով տարբեր արժեքներ ընտրել, ապա x-ի և y-ի համար ևս կարող ենք ցանկացած թվով արժեքներ ստանալ, վորոնք կհամապատասխանեն z-ի համար վերցրած արժեքներին։ Կնշանակի՝ յերկու յեռանհայտ հավասարումներ ունեն անթիվ բազմությամբ լուծումներ. ուրիշ խոսքով՝ այսպիսի սիստեմն անորոշ է։

Էլ ավելի մեծ անորոշություն կլինի, յեթե տրված է միայն մեկ յեռանհայտ հավասարում։ Այն ժամանակ կարելի կլինի վորևէ յերկու անհայտների համար կամավոր թվեր վերցնել, իսկ յերրորդ անհայտը կգտնվի տվյալ հավասարումից, յեթե նրա մեջ տեղադրենք այն արժեքները, վոր կամավորապես վերցրել ենք յերկու անհայտների համար։։

100. Յերեք յեռանհայտ հավասարումների սիստեմ։ Վորպեսզի կարելի լինի վորոշակի թվային արժեքներ գտնել x, y և z յերեք անհայտների համար, անհրաժեշտ է, վոր յերեք հավասարումների սիստեմ տված լինի։ Այդպիսի սիստեմը կարելի յե լուծել թե տեղադրման յեղանակով և թե հավասարումների հանրահաշվական գումարման յեղանակով։ Ցույց տանք այդ յեղանակների կիրառությունը հետևյալ որինակով (հավասարումները նախապես նորմալ տեսքի յեն բերված).

$$\begin{cases} 3x-2y+5z=7; \\ 7x+4y-8z=3; \\ 5x-3y-4z=-12\text{։} \end{cases}$$

101. Տեղադրման յեղանակ։ Վորևէ հավասարումից, որինակի համար առաջինից, կորոշենք անհայտներից մեկը, որինակի համար x-ը, կախված մյուս յերկու անհայտներից․

$$x=\frac{7+2y-5z}{3}.$$

Քանի որ բոլոր հավասարումների մեջ x-ը միևնույն թիվն է նշանակում, ապա կարող ենք x-ի համար գտած արտահայտությունն x-ի փոխարեն դնել մնացած հավասարումների մեջ՝

$$7\cdot\frac{7+2y-5z}{3}+4y-8z=3.$$

$$5\cdot\frac{7+2y-5z}{3}-3y-4z=-12.$$

Այսպիսով կստանանք յերկու յերկանհայտ հավասարումների մի սիստեմ y և z անհայտներով։ Այս սիստեմը լուծելով առաջներում նշած յեղանակներից վորևե մեկով՝ կգտնենք y-ի և z-ի թվային արժեքները։ Մեր որինակում այդ արժեքներն են՝ $y=3$, $z=2$. այս թվերը տեղադրելով x-ի համար գտած արտահայտության մեջ, կգտնենք նաև այս անհայտը՝

$$x=\frac{7+2\cdot 3-5\cdot 2}{3}=1.$$

Այսպիսով գտանք, վոր մեզ տված սիստեմը հետևյալ լուծումն ունի՝ $x=1$, $y=3$, $z=2$ (վորը կարելի յե նաև ստուգումով հաստատել)։

102. Հանրահաշվական գումարման յեղանակ։ Տված յերեք հավասարումներից կվերցնենք վորևե յերկուսը, որինակի համար՝ առաջինը և յերկրորդը, և սրանց մեջ հավասարեցնելով գործակիցները մեկ անհայտի առաջ, որինակի համար՝ z-ի առաջ, նրանցից կարտաքսենք այդ անհայտը հանրահաշվական գումարման միջոցով. դրա հետևանքով կստանանք մի հավասարում՝ x և y յերկու անհայտներով։ Այնուհետև կվերցնենք տված յերեք հավասարումներից վորևե ուրիշ յերկուսը, որինակի համար՝ առաջինը և յերրորդը (կամ յերկրորդը և յերրորդը), և նույն յեղանակով նրանից կարտաքսենք այդ նույն անհայտը,

այսինքն, մեր որինակում z-ը. դրանից կստանանք x-ով և y-ով մի հավասարում ևս՝

$$\begin{array}{lll|l} 1) & 3x-2y+5z=7 & (8\text{-ով}) & 24x-16y+40z=56 \\ 2) & 7x+4y-8z=3 & (5\text{-ով}) & 35x+20y-40z=15 \\ \cline{4-4} & & & 59x+4y=71 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll|l} 1) & 3x-2y+5z=7 & (4\text{-ով}) & 12x-8y+20z=28 \\ 2) & 5x-3y-4z=-12 & (5\text{-ով}) & 25x-15y-20z=-60 \\ \cline{4-4} & & & 37x-23y=-32 \end{array}$$

Լուծենք ստացված յերկու հավասարումները. կունենանք՝ $x=1$, $y=3$։ Այս թվերը կներդրենք տվյալ յերեք հավասարումներից մեկի, որինակի համար՝ առաջինի մեջ. կստանանք՝

$$3\cdot 1-2\cdot 3+5z=7;\quad 5z=7-3+6=10;\quad z=2.$$

Դիտողություն։ Այդ նույն յերկու յեղանակներով մենք կարող ենք չորս քառանհայտ հավասարումների սիստեմը վերածել յերեք յեռանհայտ հավասարումների սիստեմի (իսկ այս սիստեմը՝ յերկու յերկանհայտ հավասարումների սիստեմի և այլն)։ Ընդհանրապես՝ m անհայտներ պարունակող m հավասարումների սիստեմը մենք կարող ենք վերածել $m-1$ անհայտներ պարունակող $m-1$ հավասարումների սիստեմի, այս սիստեմն էլ՝ $m-2$ անհայտներ պարունակող $m-2$ հավասարումների սիստեմի և այլն։

Վարժություններ

178. $\begin{cases} 4x-3y+2z=9; \\ 2x+5y-3z=4; \\ 5x+6y-2z=18. \end{cases}$

179. $\begin{cases} 2x+5y-3z-6\frac{1}{4}=0; \\ 5x-6y+2z=12; \\ 5z=42\frac{1}{4}-7x+y. \end{cases}$

180. $\begin{cases} 3x-y+z=17; \\ 5x+3y-2z=10; \\ 7x+4y-5z=3. \end{cases}$

181. $\begin{cases} \frac{x+2y}{5x+6z}=\frac{7}{9}; \\ \frac{3y+4z}{x+2y}=\frac{8}{7}; \\ x+y+z=128. \end{cases}$

Հավասարումների սիստեմների մի քանի առանձնահատուկ դեպքեր

103. Այն դեպքը, յերբ բոլոր հավասարումները չեն պարունակում բոլոր անհայտները. *օրինակի համար՝*

$$\begin{cases} 10x - y + 3z = 5; \\ 4v - 5x = 6; \\ 2y + 3z = 6; \\ 3y + 2v = 4\text{։} \end{cases}$$

Այս դեպքում սիստեմն ավելի արագ է լուծվում, քան սովորաբար, վորովհետև հավասարումների մի մասի մեջ արդեն իսկ բացակայում են այս կամ այն անհայտները։ Հարկավոր է միայն կշռադատել, թե վոր անհայտները և վոր հավասարումներից պետք է արտաքսել, վորպեսզի ըստ կարելույն շուտ հասնենք մեկ անհայտով մի հավասարման։ Մեր օրինակում, արտաքսելով z*-ն առաջին ու յերրորդ հավասարումներից և* v*-ն յերկրորդից ու չորրորդից, կստանանք* x*-ով և* y*-ով յերկու հավասարումներ՝*

$$\begin{array}{rcl} 10x - y + 3z &=& 5 \\ -2y - 3z &=& -6 \\ \hline 10x - 3y &=& -1; \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 4v - 5x &=& 6 \\ -4v - 6y &=& -8 \\ \hline -5x - 6y &=& -2\text{։} \end{array}$$

Այս հավասարումները լուծելով, կգտնենք՝

$$x = 0; \quad y = \frac{1}{3}\text{։}$$

Այս թվերն այժմ կներդրենք յերկրորդ և յերրորդ հավասարումների մեջ. կստանանք՝

$$v = \frac{3}{2}; \; z = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}\text{։}$$

104. Այն դեպքը, յերբ անհայտները հավասարումների մեջ առաջ են գալիս միայն հետևյալ կոտորակների ձևով՝ $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, ...

Դիցուք տված է հետևյալ սիստեմը՝

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{7}{6}; \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = -\frac{5}{6}; \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{1}{6}\text{։} \end{cases}$$

Այսպիսի սիստեմն ամենից ավելի հեշտ է լուծել օժանդակ անհայտներ մուծելու միջոցով։ Վերցնենք $\frac{1}{x} = x'$; $\frac{1}{y} = y'$ *և* $\frac{1}{z} = z'$։ *Այն ժամանակ կստանանք* x', y' *և* z' *անհայտներով հետևյալ սիստեմը՝*

$$\begin{cases} x' + y' - z' = \frac{7}{6}; \\ x' - y' - z' = -\frac{5}{6}; \\ y' - x' - z' = \frac{1}{6}\text{։} \end{cases}$$

Լուծելով այս սիստեմը, կգտնենք՝

$$x' = \frac{1}{2}, \quad y' = 1 \quad z' = \frac{1}{3},$$

այսինքն

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}, \; \frac{1}{y} = 1, \; \frac{1}{z} = \frac{1}{3}\text{։}$$

Այստեղից վերջնականորեն գտնում ենք՝

$$x = 2, \quad y = 1, \quad z = 3\text{։}$$

Վերցնենք մի ուրիշ օրինակ՝

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} = -13; \\ \frac{6}{x} - \frac{3}{y} - \frac{1}{z} = 5\frac{1}{2}; \\ -\frac{5}{x} + \frac{7}{y} + \frac{2}{z} = 3\frac{1}{2}\text{։} \end{cases}$$

$\frac{3}{x}$, $\frac{2}{y}$ և այլ կոտորակները կարելի յե դիտել իբրև այսպիսի արտադրյալներ՝ $3 \cdot \frac{1}{x}$, $2 \cdot \frac{1}{y}$ և այլն։ Այդ պատճառով յեթե վերցնենք $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=y'$, $\frac{1}{z}=z'$, ապա սիստեմն այսպիսի տեսք կընդունի՝

$$3x'+2y'-4z'=-13;$$

$$6x'-3y'-z'=5\frac{1}{2};$$

$$-5x'+7y'+2z'=3\frac{1}{2}.$$

Այս հավասարումներից գտնում ենք՝

$$x'=2,\quad y'=\frac{1}{2},\quad z'=5;$$

կնշանակի՝

$$\frac{1}{x}=2,\quad \frac{1}{y}=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{z}=5;$$

վորտեղից՝

$$x=\frac{1}{2},\quad y=2,\quad z=\frac{1}{5}.$$

105. **Այն դեպքը, յերբ ոգտակար է տված բոլոր հավասարումները գումարել։** Դիցուք ունենք հետևյալ սիստեմը՝

$$\begin{cases} x+y=a; \\ y+z=b; \\ x+z=c. \end{cases}$$

Բոլոր յերեք հավասարումները գումարելով, կստանանք՝

$$2(x+y+z)=a+b+c;$$

$$x+y+z=\frac{a+b+c}{2}.$$

Վերջին հավասարումից հանելով տված հավասարումներից յուրաքանչյուրը, կստանանք՝

$$z=\frac{a+b+c}{2}-a;\quad x=\frac{a+b+c}{2}-b;\quad y=\frac{a+b+c}{2}-c.$$

Վարժություններ

182. $\begin{cases} 3x+5y=74; \\ 7x+2z=66; \\ 2y+z=25. \end{cases}$

183. $\begin{cases} \frac{6}{x}+\frac{5}{y}=1; \\ \frac{30}{x}+\frac{31}{y}=6. \end{cases}$

184. $\begin{cases} 4x-3z+u=10; \\ 5y+z-4u=1; \\ 3y+u=17; \\ x+2y+3u=25. \end{cases}$

185. $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}-\frac{4}{z}=\frac{1}{12}; \\ \frac{3}{x}-\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=\frac{19}{24}; \\ \frac{4}{x}-\frac{5}{y}+\frac{1}{2}=\frac{6}{z}. \end{cases}$

186. Ի՞նչպես լուծենք ամենից ավելի պարզ կերպով հետևյալ սիստեմը՝

$$\begin{cases} x+y+z=29\frac{1}{4}; \\ x+y-z=18\frac{1}{4}; \\ x-y+z=13\frac{3}{4}. \end{cases}$$

187. Յերեք գնորդներ գնեցին սուրճ, շաքար և թեյ։ Առաջին գնորդը 8 կգ սուրճին, 10 կգ շաքարին և 3 կգ թեյին վճարեց 35 ռուբ., յերկրորդ գնորդը 4 կգ սուրճին, 15 կգ շաքարին և 5 կգ թեյին վճարեց 40 ռուբ., իսկ յերրորդ գնորդն 82 ռ. 50 կոպ. ծախսեց 12 կգ սուրճ, 20 կգ շաքար և 10 կգ թեյ գնելու համար։ Գտնել մեկական կիլոգրամ սուրճի, շաքարի և թեյի գինը։

188. Կա յերեք կտոր համաձուլվածք՝ վոսկուց, արծաթից և պղնձից․ այդ կտորները պարունակում են՝

1) 5 մաս վոսկի, 6 մաս արծաթ, 8 մաս պղինձ
2) 3 » » 5 » » 7 » »
3) 7 » » 13 » » 18 » »

Ամեն մի կտորից քանի՞ կգ պետք է վերցնել, յեթե պետք է այնպիսի համաձուլվածք կազմել, վորի մեջ լինի 79 կգ վոսկի, 118 կգ արծաթ և 162 կգ պղինձ։

Պատմական տեղեկություններ

Հավասարումները պատահում են դեռ շատ հին դարերում, յեգիպտացիների մոտ։ Անմեսը, վոր ապրել է մեր թվականությունից մոտ 2000 տարի առաջ, իր գրած պապիրուսում տալիս է առաջին աստիճանի միանհայտ հավասարումներ, անհայտը նշանակելով «հաու» բառով, վոր նշանակում է կույտ։

Հույն մաթեմատիկոս Դիոֆանտի մոտ (մեր թվականության 4-րդ դարում) մենք գտնում ենք ամենաբազմազան տեսակի հավասարումներ, վորոնց թվում նաև մի քանի անհայտներով հավասարումներ։ Սակայն նա չի տալիս այդ հավասարումների լուծման ընդհանուր յեղանակը։

Նյուտոնն արդեն տալիս է հավասարումների սիստեմի լուծման մի քանի յեղանակներ, դրանց թվում նաև տեղադրման յեղանակը։

Հավասարումներով շատ զբաղվել են արաբ գիտնականները, վորոնք հավասարումների լուծման ժամանակ ոգտվում եյին հավասարումների յերկու մասերին միահավասար անդամներ գումարելու կամ հանելու կանոնից։ Առաջին գործողությունը կոչվում եր «վերականգնում», արաբերեն algebre․ յերկրորդ գործողությունը կոչվում եր հանդիպադրում, արաբերեն almukabalah․ այս բառերից առաջինից (ալջեբր) ել ծագել է «ալգեբրա» անունը։

ՀԻՆԳԵՐՈՐԴ ՀԱՏՎԱԾ

ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ԱՐՄԱՏ ՀԱՆԵԼԸ

I. ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

106. Արմատի սահմանումը․ Յերկրորդ աստիճանի (կամ քառակուսի, կամ պարզապես յերկրորդ) արմատ a թվից կոչվում է այնպիսի թիվը, վորի քառակուսին հավասար է a-ի։ Այսպես, քառակուսի արմատ 49-ից կլինի 7, այլև —7, վորովհետև $7^2=49$ և $(-7)^2=49$։ Յերրորդ աստիճանի (կամ խորանարդ կամ պարզապես յերրորդ) արմատ a թվից կոչվում է այնպիսի թիվը, վորի խորանարդը հավասար է a-ի։ Որինակի համար, —125-ի խորանարդ արմատը կլինի —5, վորովհետև $(-5)^3=(-5)(-5)(-5)=-125$։

Ընդհանրաբար, a թվից n-երորդ աստիճանի արմատ (կամ a թվի n-երորդ արմատ) կոչվում է այնպիսի թիվը, վորի n-երորդ աստիճանը հավասար է a-ի։

n թիվը, վորը ցույց է տալիս թե վորերորդ (վոր աստիճանի) արմատն ենք գտնում, կոչվում է արմատի ցուցիչ կամ արմատացույց։

Արմատը նշանակվում է $\sqrt{\ }$ նշանով, վորը կոչվում է արմատանշան։ Արմատանշանի հորիզոնական գծի տակ գրում են այն թիվը, վորի արմատը վորոնում են, և վորը կոչվում է արմատատակ թիվ, իսկ անկյան բացվածքի վերևը դնում են արմատի ցուցիչը։ Այսպես՝

27-ի խորանարդ արմատը նշանակվում է . . . $\sqrt[3]{27}$։

32-ի հինգերորդ » » . . . $\sqrt[5]{32}$։

Քառակուսի արմատի ցուցիչն ընդունված է չգրել. օրինակի համար, $\sqrt[2]{16}$-ի փոխարեն գրում են $\sqrt{16}$։

Այն գործողությունը, վորի միջոցով վորոնում են արմատը, կոչվում է արմատ հանելու գործողություն. արմատ հանելը հակադարձ է աստիճան բարձրացնելուն, վորովհետև այդ գործողության միջոցով վորոնում ենք այն, ինչ վոր տված է աստիճան բարձրացնելիս (այն է աստիճանի հիմքը), և տված է այն, ինչ վոր վորոնում ենք աստիճան բարձրացնելիս (այն է՝ հենց աստիճանը)։ Այս պատճառով արմատ հանելու շիտակությունը մենք միշտ կարող ենք ստուգել աստիճան բարձրացնելու միջոցով։ Օրինակի համար, վորպեսզի ստուգենք $\sqrt[3]{125}=5$ հավասարությունը, բավական է 5-ը խորանարդ բարձրացնել. քանի վոր 125 արմատատակ թիվն է ստացվում, ապա յեզրակացնում ենք, վոր 125-ի խորանարդ արմատը շիտակ է առնված։

107. Թվաբանական արմատ։ Արմատը թվաբանական է կոչվում, յեթե արմատատակ թիվը դրական է, և ինքն արմատն էլ դրական թիվ է ներկայացնում։ Օրինակի համար, 49-ի թվաբանական արմատը 7 է, մինչդեռ —7 թիվը, վորը նույնպես 49-ի քառակուսի արմատն է, չի կարելի թվաբանական արմատ կոչել։

Նշենք թվաբանական արմատի հետևյալ յերկու հատկությունները։

ա) Դիցուք պահանջվում է գտնել $\sqrt{49}$ արտահայտության թվաբանական արմատը։ Այսպիսի արմատ կլինի 7-ը, վորովհետև $7^2=49$։ Արդյոք չի՞ կարելի մի ուրիշ x դրական թիվ գտնել, վորը նույնպես հավասար լինի $\sqrt{49}$-ի։ Յենթադրենք, վոր այդպիսի թիվ գոյություն ունի։ Այն ժամանակ այդ թիվը պետք է կամ փոքր լինի 7-ից կամ մեծ։ Յեթե ընդունենք, վոր $x<7$, ապա այդ դեպքում նաև $x^2<49$ (վորովհետև բազմապատկելիի և բազմապատկչի փոքրանալուց արտադրյալը փոքրանում է). իսկ յեթե ընդունենք, վոր $x>7$, ապա այս դեպքում նաև $x^2>49$։ Կնշանակի և վոչ մի դրական թիվ,—լինի նա 7-ից փոքր, թե 7-ից մեծ,—չի կարող $\sqrt{49}$-ի հավասարվել։ Այսպիսով՝ տված թվից տված աստիճանի թվաբանական արմատը կարող է միայն մեկ հատ լինել։

Ուրիշ յեզրակացության կհանգեյինք, յեթե խոսքը վերա-

բերեր վոչ թե արմատի դրական արժեքին, այլ վորևէ արժեքին. այսպես, $\sqrt{49}$-ը հավասար է և 7 թվին և —7 թվին [վորովհետև և $7^2=49$ և $(-7)^2=49$]։

բ) Վերցնենք վորևէ յերկու անհավասար դրական թվեր, օրինակի համար 49 և 64։ Նրանից, վոր $49<64$, մենք կարող ենք յեզրակացնել, վոր նաև $\sqrt{49}<\sqrt{64}$ (յեթե միայն $\sqrt{\ }$ նշանի տակ հասկանանք թվաբանական քառակուսի արմատը)։ Իրոք, $7<8$։ Նույնպես էլ նրանից, վոր $64<125$, կարող ենք յեզրակացնել, վոր նաև $\sqrt[8]{64}<\sqrt[3]{125}$։ Իրոք, $\sqrt[3]{64}=4$, $\sqrt[3]{125}=5$ և $4<5$։ Ընդհանրապես՝

Յերկու դրական թվերից փոքրին համապատասխանում է փոքր թվաբանական արմատ (նույն աստիճանի)։

108. Հանրահաշվական արմատ։ Արմատը հանրահաշվական է կոչվում, յեթե չի պահանջվում, վոր արմատատակ թիվը դրական լինի, և վոր ինքն արմատը դրական լինի։ Այսպիսով՝ յեթե $\sqrt[n]{a}$ արտահայտության տակ հասկացվում է n-երորդ աստիճանի հանրահաշվական արմատ, ապա այդ նշանակում է, վոր a թիվը կարող է և՛ դրական լինել, և՛ բացասական, և արմատն ինքն էլ կարող է և՛ դրական լինել, և՛ բացասական։

Նշենք հանրահաշվական արմատի հետևյալ չորս հատկությունները։

ա) Դրական թվի կենտ աստիճանի արմատը դրական թիվ է։

Այսպես, $\sqrt[3]{8}$-ը պետք է դրական թիվ լինի (հավասար է 2-ի), վորովհետև բացասական թվի կենտ աստիճանը բացասական թիվ է տալիս։

բ) Բացասական թվի կենտ աստիճանի արմատը բացասական է։

Այսպես, $\sqrt[3]{-8}$-ը պետք է բացասական լինի (հավասար է —2-ի), վորովհետև դրական թիվն ինչ աստիճան էլ բարձրացնենք, կստացվի դրական թիվ և վոչ բացասական։

գ) Դրական թվի զույգ աստիճանի արմատն ունի յերկու հակադիր արժեքներ (այսինքն յերկու արժեքներ, վորոնց բացարձակ մեծությունը նույնն է, և վորոնց նշանները տարբեր են)։

Այսպես, $\sqrt{+4}=+2$ և $\sqrt{+4}=-2$, վորովհետև $(+2)^2=+4$ և $(-2)^2=+4$. Ճիշտ այդպես էլ $\sqrt[4]{+81}=+3$ և $\sqrt[4]{+81}=-3$, վորովհետև $(+3)^4$ և $(-3)^4$ աստիճանները հավասար են միևնույն $+81$ թվին։

Արմատի կրկնակի արժեքը սովորաբար նշանակում են արմատի բացարձակ մեծության առաջ դնելով և՛ բացասական նշան, և՛ դրական, այսպես, գրում են՝

$$\sqrt{4}=\pm 2;\qquad \sqrt{a^2}=\pm a;\qquad \sqrt{9x^4}=\pm 3x^2։$$

դ) Բացասական թվի զույգ աստիճանի արմատը չի կարող հավասար լինել յեվ վոչ մի թվի, լինի սա դրական թե բացասական, վորովհետև թե՛ դրական թիվը և թե՛ բացասական թիվը զույգ աստիճան բարձրացնելուց հետո տալիս են դրական թիվ և վոչ թե բացասական։ Որինակի համար, $\sqrt{-9}$ հավասար չե վոչ $+3$-ի, վոչ -3-ի և վոչ ել վորևե այլ թվի։

Բացասական թվի զույգ աստիճանի արմատը նոր տեսակի թիվ ե, վոր ընդունված ե անվանել կեղծ թիվ, իսկ հարաբերական թվերը կոչվում են իրական թվեր։

Վ ա ր ժ ո ւ թ յ ո ւ ն ն ե ր

Ինչի՞ յեն հավասար հետևյալ արտահայտությունները՝

189. $\sqrt{100}$; $\sqrt{0{,}01}$; $\sqrt{\frac{1}{4}}$; $\sqrt{\frac{9}{16}}$; $\sqrt{a^2}$; $\sqrt{x^2}$։

190. $\left(\sqrt{5}\right)^2$; $\left(\sqrt[3]{27}\right)^3$; $\left(\sqrt[5]{a}\right)^5$; $\left(\sqrt{1+x}\right)^2$։

191. $\sqrt[3]{+27}$; $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$; $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; $\sqrt[3]{-0{,}001}$։

192. $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$; $\sqrt[4]{81}$; $\sqrt{-4}$; $\sqrt{-a^2}$; $\sqrt[4]{-16}$։

109. Արտադրյալի, աստիճանի յեվ կոտորակի արմատը։

ա) Դիցուք հարկավոր ե քառակուսի արմատ հանել abc արտադրյալից։ Յեթե պահանջվեր արտադրյալը քառակուսի բարձրացնել, ապա, ինչպես տեսել ենք (§ 46), կարելի յե քառակուսի

բարձրացնել ամեն մի արտադրիչն առանձին։ Քանի վոր արմատ հանելն աստիճան բարձրացնելուն հակադարձ մի գործողություն ե, ապա պետք ե սպասել, վոր արտադրյալից արմատ հանելու համար ևս կարելի յե ամեն մի բազմապատկչից առանձին արմատ հանել, այսինքն վոր

$$\sqrt{abc}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}։$$

Համոզվելու համար, վոր այս հավասարությունը ճիշտ ե, նրա աջ մասը բարձրացնենք քառակուսի (ոգտվելով այս թեորեմից՝ արտադրյալն աստիճան բարձրացնելու համար...).

$$(\sqrt{a}\ \sqrt{b}\ \sqrt{c})^2=(\sqrt{a})^2\ (\sqrt{b})^2\ (\sqrt{c})^2։$$

Բայց արմատի սահմանումի համաձայն՝

$$(\sqrt{a})^2=a,\ (\sqrt{b})^2=b,\ (\sqrt{c})^2=c։$$

Հետևաբար՝

$$(\sqrt{a}\ \sqrt{b}\ \sqrt{c})^2=abc։$$

Բայց յեթե $\sqrt{a}\ \sqrt{b}\ \sqrt{c}$ արտադրյալի քառակուսին հավասար ե abc-ի, ապա նշանակում ե, վոր այդ արտադրյալն ինքը հավասար ե abc-ի քառակուսի արմատին։ Դրա նման ել՝

$$\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{a}\ \sqrt[3]{b}\ \sqrt[3]{c}։$$

վորովհետև

$$\left(\sqrt[3]{a}\ \sqrt[3]{b}\ \sqrt[3]{c}\right)^3=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3\left(\sqrt[3]{b}\right)^3\left(\sqrt[3]{c}\right)^3=abc։$$

Նշանակի՝ արտադրյալից արմատ հանելու համար պետք ե ամեն մի արտադրիչից առանձին արմատ հանել։

բ) Հեշտ ե ստուգել, վոր հետևյալ հավասարությունները ճիշտ են՝

$$\sqrt{a^4}=a^2,\ \text{վորովհետև}\ (a^2)^2=a^4,$$

$$\sqrt[3]{x^{12}}=x^4\qquad \text{»}\qquad (x^4)^3=x^{12}\ \text{և այլն։}$$

Կնշանակի՝ աստիճանից արմատ հանելու համար, յերբ աստիճանի ցուցիչը բաժանվում է արմատի ցուցչի վրա, պետք է աստիճանացույցը բաժանել արմատացույցի վրա։

գ) Ճիշտ են նաև հետևյալ հավասարությունները․

$$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}, \text{ վորովհետև } \left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16};$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3} \quad » \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}.$$

Ընդհանրապես՝

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}.$$

Կնշանակի՝ կոտորակից արմատ հանելու համար պետք է համարիչից առանձին արմատ հանել, հայտարարից՝ առանձին։

Նկատենք, վոր այս ճշմարտությունների մեջ յենթադրվում է, վոր խոսքը թվաբանական արմատների մասին է։

Որինակներ․

1. $\sqrt{9a^4b^6}=\sqrt{9}\ \sqrt{a^4}\ \sqrt{b^6}=3a^2b^3;$

2. $\sqrt[3]{125a^6x^9}=\sqrt[3]{125}\ \sqrt[3]{a^6}\ \sqrt[3]{x^9}=5a^2x^3.$

Դիտողություն։ Յեթե վորոնելի արմատը զույգ աստիճանի է և յենթադրվում է հանրահաշվական, ապա գտած արդյունքի առաջ պետք է դնել $\pm$ կրկնակի նշանը։ Այսպես՝

$$\sqrt{9x^4}=\pm 3x^2.$$

Վարժություններ

193. $\sqrt{4\cdot 9}$; $\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 0{,}01\cdot 25}$; $\sqrt{4a^2b^2}$; $\sqrt{9a^2x^2y^4}$.

194. $\sqrt[3]{-27a^3b^3}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{16}a^4x^4}$; $\sqrt[5]{abc}$.

195. $\sqrt{a^4}$; $\sqrt{2^4}$; $\sqrt{x^6}$; $\sqrt{(a+b)^4}$.

196. $\sqrt[3]{2^6}$; $\sqrt[3]{-a^6}$; $\sqrt[3]{x^9}$; $\sqrt[3]{(m+n)^6}$.

197. $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$; $\sqrt[3]{-\frac{27}{1000}}$; $\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^3}}$; $\sqrt[3]{\frac{x}{y^3}}$; $\sqrt{\frac{x}{y}}$.

198. $\sqrt{25a^6b^2c^4}$; $\sqrt{0{,}36x^4y^2}$; $\sqrt{\frac{1}{4}(b+c)^6x^4}$.

II. ԹՎԵՐԻ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ԱՐՄԱՏԸ

110. Նախնական դիտողություններ։ ա) Խոսքը համառոտելու համար այս գլխում «քառակուսի արմատ» ասելու փոխարեն պարզապես կասենք «արմատ»։

բ) Յեթե քառակուսի բարձրացնենք բնական շարքի թվերը՝ 1, 2, 3, 4, 5..., ապա կստանանք քառակուսիների հետևյալ աղյուսակը․

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144...

Ակներև է, վոր բազմաթիվ ամբողջ թվեր կան, վորոնք այս աղյուսակում չեն գտնվում. այդպիսի թվերից արմատ հանելիս, իհարկե, ամբողջ արմատ չի ստացվի։ Այս պատճառով, յեթե պահանջվում է արմատ հանել վորևէ ամբողջ թվից, որինակ՝ պահանջվում է գտնել $\sqrt{4082}$, ապա կպայմանավորվենք այդ պահանջն այսպես հասկանալ՝ 4082-ից ամբողջ արմատ հանել, յեթե այդ հնարավոր է, իսկ յեթե այդ հնարավոր չէ, ապա պետք է գտնենք այն ամենամեծ ամբողջ թիվը, վորի քառակուսին պարունակվում է 4082-ի մեջ (այդ թիվը 63-ն է, վորովհետև $63^2=3969$, իսկ $64^2=4096$)։

գ) Յեթե տված թիվը 100-ից փոքր է, ապա նրա արմատը գտնում ենք բազմապատկման աղյուսակից։

111. Արմատ 10000-ից փոքր յեվ 100-ից մեծ ամբողջ թվից։ Դիցուք պետք է գտնել $\sqrt{4082}$։ Քանի վոր արմատատակ թիվը փոքր է 10000-ից, ապա նրա արմատը փոքր է 100-ից․ Մյուս կողմից արմատատակ թիվը մեծ է 100-ից․ կնշանակի՝ նրա ար-

մատը մեծ է 10-ից (կամ հավասար է 10-ի)։ Բայց ամեն մի
թիվ, վոր մեծ է 10-ից (կամ հավասար է 10-ի) և փոքր է 100-ից,
յերկու թվանշան ունի. կնշանակի՝ վորոնելի արմատը ներկա-
յացնում է այսպիսի գումար՝

$$\text{տասնավորներ} + \text{միավորներ},$$

այս պատճառով նրա քառակուսին պետք է հավասար լինի հե-
տևյալ գումարին՝

$$(\text{տասնավորներ})^2 + 2\cdot(\text{տասն.})\cdot(\text{միավ.}) + (\text{միավորներ})^2$$

Այս գումարը պետք է լինի այն ամենամեծ քառակուսին,
վորը պարունակվում է 4082-ի մեջ։ Քանի վոր (տասնավորներ)^2
տալիս է հարյուրավորներ, ապա տասնավորների քառակուսին
պետք է վորոնել տված թվի հարյուրավորների մեջ։ Տված թվի
մեջ 40 հարյուրավոր կա (հարյուրավորների թիվը գտնելու հա-
մար տված թվի մեջ աջից յերկու թվանշան անջատում ենք
ստորակետով)։ Բայց 40-ի մեջ մի քանի ամբողջ քառակուսիներ
(այսինքն ամբողջ թվերի քակակուսիներ) կան՝ 36, 25, 16...
վերցնենք նրանցից ամենամեծը՝ 36-ը, և յենթադրություն ա-
նենք, վոր արմատի տասնավորների քառակուսին հավասար կլի-
նի հենց այդ ամենամեծ քառակուսուն։ Այդ դեպքում արմատի
տասնավորների թիվը պետք է 6 լինի։ Հիմա ստուգենք, վոր
այդ միշտ պետք է այդպես լինի, վոր արմատի տասնավորների
թիվը միշտ էլ հավասար է արմատատակ թվի հարյուրավոր-
ների ամենամեծ ամբողջ արմատին։ Իրոք, մեր որինակում
արմատի տասնավորների թիվը չի կարող 6-ից մեծ լինել, վո-
րովհետև (7 տասնավոր)^2=49 հարյուրավոր, վոր մեծ է 4082-ից։
Բայց նա չի կարող նաև փոքր լինել 6-ից, վորովհետև 5 տաս-
նավորը (միավորների հետ միասին) փոքր է 6 տասնավորից,
մինչդեռ (6 տասնավոր)^2=36 հարյուրավոր, վորը փոքր է 4082-ից։
Բայց քանի վոր մենք վորոնում ենք ամենամեծ ամբողջ ար-
մատը, ապա արմատի համար չպետք է վերցնենք 5 տասնավո-
րը, յերբ նույնիսկ 6 տասնավորն է փոքր։ Այսպես ուրեմն, մենք
գտանք արմատի տասնավորների թիվը, վոր է 6։ Այս թվանշանը
գրում ենք = նշանից աջ, հիշելով, վոր նա ցույց է տալիս ար-
մատի տասնավորները։ Արմատում ստացած այդ 6 տասնավորը
բարձրացնելով քառակուսի՝ կունենանք 36 հարյուրավոր։ Այս

36 հարյուրավորը հանում ենք արմատատակ թիվ 40 հարյու-
րավորից և մնացորդին կցագրում ենք 82.

$$\begin{array}{l} \sqrt{40'82}=6 \\ \underline{36} \\ \;\;48'2 \end{array}$$

482 թվի մեջ պետք է պարունակվի հետևյալ գումարը՝

$$2\,(6\ \text{տասն.})\cdot(\text{միավորն.})+(\text{միավ.})^2։$$

(6 տասն.)·(միավ.) արտադրյալը պետք է կազմի տասնա-
վորներ. ուստի տասնավորների և միավորների կրկնապատիկ ար-
տադրյալը պետք է վորոնել մնացորդի տասնավորների մեջ, այ-
սինքն 48-ի մեջ (մնացորդի տասնավորների թիվը կստանանք,
յեթե մնացորդ 48'2-ի մեջ մի թվանշան աջից անջատենք)։ Ար-
մատի կրկնապատիկ տասնավորները կազմում են 12։ Կնշանակի՝
յեթե 12-ը բազմապատկենք արմատի միավորներով (վորոնք ա-
ռայժմ անհայտ են), ապա պետք է այնպիսի թիվ ստանանք,
վորը պարունակվի 48-ի մեջ։ Այս պատճառով մենք 48-ը կբա-
ժանենք 12-ի վրա։ Դրա համար մնացորդից դեպի ձախ ուղղա-
ձիգ գիծ ենք տանում և այս գծի ձախ կողմում (մի թվանշանի
տեղ թողնելով գծի մոտ, վորի նպատակը հենց հիմա կպարզվի)
գրում ենք արմատի առաջին թվանշանի կրկնակին, այսինքն
12-ը, այնուհետև 48-ը բաժանում ենք 12-ի վրա։
Քանորդում ստացվում է 4։ Բայց չի կարելի առաջուց վստահ
լինել, վոր 4 թվանշանը կարելի յե ընդունել իբրև արմատի
միավորներ, վորովհետև մենք 12-ի վրա բաժանեցինք մնացոր-
դի բոլոր տասնավորների թիվը, մինչդեռ այդ տասնավորների
մի մասը կարող է և չպատկանել տասնավորների և միավոր-
ների կրկնապատիկ արտադրյալին, այլ կազմել միավորների
քառակուսու մի մասը։ Այս պատճառով 4 թվանշանը կարող է
և մեծ լինել։ Պետք է այդ 4 թվանշանը փորձարկել։ Նա, ինչ-
պես ակներև է, պետքական կլինի այն դեպքում միայն, յեթե
2 (6 տասն). 4 + 4^2 գումարը մեծ չլինի 482 մնացորդից։ Այս
գումարը մենք կարող ենք միանգամից հաշվել հետևյալ պարզ
ձևով՝ ուղղաձիգ գծի ձախ կողմում արմատի թվանշանի կրկնա-
պատիկին (12-ին) աջից կցագրում ենք 4 թվանշանը (այս եր

պատճառը, որ գծի մոտ մի թվանշանի տեղ թողինք) և նրանով բազմապատկում ստացած թիվը (124-ը 4-ով)։

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{40'82} = 6 \\ & 36 \\ 124 & \overline{48'2} \\ 4 & 49\,6 \end{array}$$

Իրոք, այս բազմապատկումը կատարելով՝ մենք 4-ը բազմապատկում ենք 4-ով, կնշանակի՝ գտնում ենք արմատի միավորների քառակուսին. այնուհետև մենք բազմապատկում ենք 12 տասնավորները 4-ով, կնշանակի՝ գտնում ենք արմատի տասնավորների ու միավորների կրկնապատիկ արտադրյալը։ Իբրև արդյունք միանգամից ստանում ենք այդ յերկսի գումարը։ Ստացած արտադրյալը, որ 496-ն է, մեծ է 482 մնացորդից. կնշանակի 4 թվանշանը մեծ է։ Հիմա փորձարկում ենք նույն ձևով հաջորդ փոքր թվանշանը՝ 3-ը։ Դրա համար ջնջում ենք 4 թվանշանը և 496 արտադրյալը և 4 թվանշանի փոխարեն դնում ենք 3 ու 123-ը բազմապատկում ենք 3-ով։

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{40'82} = 63 \\ & 36 \\ 123 & \overline{48'2} \\ 3 & 36\,9 \\ & \overline{11\,3} \end{array}$$

369 արտադրյալը փոքր է 482 մնացորդից. կնշանակի 3 թվանշանը պետքական է (յեթե պատահեր, որ այդ թվանշանն էլ մեծ լիներ, այն ժամանակ կարիք կլիներ հետևյալ փոքր թվանշանը՝ 2-ը փորձարկել). 3 թվանշանը գրում ենք արմատում տասնավորների թվանշանի աջ կողմում։ Վերջին մնացորդը՝ 113-ը, ցույց է տալիս տված թվի հավելորդը՝ իր մեջ պարունակված ամենամեծ ամբողջ քառակուսու նկատմամբ։ Ստուգման համար 63-ը քառակուսի կբարձրացնենք և արդյունքին կգումարենք 113. կունենանք՝

$$\begin{array}{r} 63^2 = 3969 \\ +\;\;113 \\ \hline 4082 \end{array}$$

քանի որ գումարում ստացվեց տված թիվը՝ 4082-ը, ապա գործողությունն ուղիղ է կատարած։

Օրինակներ.

1. $$\begin{array}{rl} & \sqrt{12'25} = 35 \\ & 9 \\ 65 & \overline{32'5} \\ 5 & 32\,5 \\ & \overline{\;\;\;0} \end{array}$$

2) $$\begin{array}{rl} & \sqrt{86'55} = 93 \\ & 81 \\ 183 & \overline{55'5} \\ 3 & 54\,9 \\ & \overline{\;\;\;6} \end{array}$$

3) $$\begin{array}{rl} & \sqrt{16'05} = 40 \\ & 16 \\ 8 & \overline{0'5} \end{array}$$

4) $$\begin{array}{rl} & \sqrt{8'72} = 29 \\ & 4 \\ 49 & \overline{47'2} \\ 9 & 44\,1 \\ & \overline{3\,1} \end{array}$$

5) $$\begin{array}{l} \sqrt{64'00} = 80 \\ 64 \\ \overline{\;\;\;00} \end{array}$$

Չորրորդ օրինակում՝ մնացորդի 47 տասնավորը 4-ի վրա բաժանելիս քանորդում ստանում ենք 11։ Բայց քանի որ արմատի միավորների թվանշանը չի կարող յերկանիշ թիվ լինել, տվյալ դեպքում չի կարող 11 կամ 10 լինել, ապա պետք է ուղղակի փորձարկել 9 թվանշանը։

Հինգերորդ օրինակում՝ 8-ի քառակուսին առաջին դասակից հանելուց հետո մնացորդը լինում է 0, և հետևյալ դասակն էլ զերոներից է կազմված։ Այդ ցույց է տալիս, որ վորոնելի արմատը միայն 8 տասնավորից է բաղկացած, և որ այդ պատճառով միավորների տեղը պետք է զերո դնել։

112. 10000-ից մեծ ամբողջ թվի քառակուսի արմատը. Դիցուք պետք է գտնել $\sqrt{35782}$-ը։ Քանի որ արմատատակ թիվը մեծ է 10 000-ից, ապա նրա քառակուսի արմատը մեծ է $\sqrt{10000}$-ից, այսինքն 100-ից և, հետևապես, բաղկացած է յերեք կամ ավելի թվանշաններից։ Քանի թվանշանից էլ բաղկացած լինի արմատը, մենք կարող ենք այն դիտել իբրև տասնավորների և միավորների գումար։ Յեթե, օրինակի համար, արմատը 482 ստացվելու լինի, ապա մենք կարող ենք այդ արմատը դիտել իբրև այսպիսի գումար՝ 48 տասնավոր + 2 միավոր։ Այն ժամանակ արմատի քառակուսին էլի յերեք գումարելիներից բաղկացած կլինի՝

$(\text{տասնավորներ})^2 + 2\cdot(\text{տասն.})\ (\text{միավոր.}) + (\text{միավոր.})^2$։

Այժմ մենք կարող ենք ճիշտ այնպես դատել, ինչպես $\sqrt{4082}$-ը գտնելիս (նախընթաց հոդվածում)։ Տարբերությունը միայն այն կլինի, որ 4082-ի արմատի տասնավորները գտնելու համար մենք պետք է արմատ հանեյինք 40-ից և այս կարելի յեր անել բազմապատկման աղյուսակով. իսկ այժմ $\sqrt{357\ 82}$-ի տասնավորներն ստանալու համար մենք պետք է արմատ հանենք 357-ից, վորը չի կարելի կատարել բազմապատկման աղյուսակով. բայց մենք կարող ենք $\sqrt{357}$-ը գտնել այն ձևով, վորը նկարագրված է նախընթաց հոդվածում, վորովհետև $357<10000$։ Ամենամեծ ամբողջ արմատը 357-ից լինում է 18-ը։ Նշանակի՝ $\sqrt{3'57'82}$-ի մեջ պետք է 18 տասնավոր լինի։

$$\sqrt{3'57'82}=189$$

```
       1
  28 | 2 5'7
   8 | 2 2 4
 369 |   3 3 8'2
   9 |   3 3 2 1
         -------
             6 1
```

Միավորները գտնելու համար պետք է 3′57′82-ից հանել 18 տասնավորների քառակուսին, վորի համար բավական է 18-ի քառակուսին հանել 357 հարյուրավորից և մնացորդի մոտ իջեցնել արմատատակ թվի վերջին յերկու թվանշանները։ Այն մնացորդը, վոր ստացվում է 18-ի քառակուսին 357-ից հանելուց, արդեն ունենք. այդ մնացորդը 33 է։ Նշանակի՝ վորպեսզի ունենանք այն մնացորդը, վոր ստացվում է 18 տասնավորի քառակուսին 3′57′82-ից հանելուց, բավական է 33-ին աջից կցագրել 82 թվանշանները։

Այնուհետև այնպես ենք վարվում, ինչպես վոր վարվում եյինք $\sqrt{4082}$-ը գտնելիս, այն է՝ 3382 մնացորդի ձախ կողմում ուղղաձիգ գիծ ենք տանում և սրա ձախ կողմում (գծի մոտ մեկ տեղ թողնելով) գրում ենք արմատում գտած տասնավորների կրկնապատիկը, այսինքն 36 (յերկու անգամ 18)։ Մնացորդի մեջ մի թվանշան աջից անջատում ենք և մնացորդի տասնավորների թիվը, այսինքն 338-ը, բաժանում ենք 36-ի վրա։ Քանորդում

ստանում ենք 9։ Այս թվանշանը փորձարկում ենք, վորի համար այն կցագրում ենք 36-ին աջից և հենց նրանով էլ բազմապատկում։ Արտադրյալը լինում է 3321, վորը մնացորդից փոքր է։ Նշանակի 9 թվանշանը պետքական է, ուստի գրում ենք արմատում։

Ընդհանրապես, վորևէ ամբողջ թվից քառակուսի արմատ հանելու համար նախ պետք է արմատ հանել նրա հարյուրավորների թվից. յեթե այս թիվը 100-ից մեծ է, ապա պետք է վորոնել այդ հարյուրավորները ներկայացնող թվի հարյուրավորների, այսինքն տված թվի տասնհազարավորների, արմատը, յեթե այդ թիվն էլ է 100-ից մեծ, ապա պետք է արմատ հանել տասնհազարավորները ներկայացնող թվի հարյուրավորներից, այսինքն տված թվի միլիոնավորներից յեվ այլն։

Որինակներ.

1. $\sqrt{8'72'00'00}=2952$

```
        4
   49 | 47'2
    9 | 44 1
  585 |  310'0
    5 |  292 5
 5902 |   1750'0
    2 |   1180 4
          ------
           569 6
```

2. $\sqrt{3'5\ 0'3\ 2'6\ 0'89}=18717$

```
          1
    28 | 2 5'0
     8 | 2 2 4
   367 |   2 6 3'2
     7 |   2 5 6 9
  3741 |     6 3 6'0
     1 |     3 7 4 1
 37427 |     2 6 1 9 8'9
     7 |     2 6 1 9 8 9
         ---------------
                     0
```

3. $\sqrt{9'51'10'56}=3084$

```
        9
  608 | 5 11'0
    8 | 4 86 4
 6164 |   24 6 5'6
    4 |   24 6 5 6
          --------
             0
```

Վերջին որինակի մեջ, գտնելով առաջին թվանշանը և հանելով նրա քառակուսին, մնացորդում ստանում ենք 0։ Իջեցնում ենք հաջորդ յերկու թվանշանները՝ 51-ը։ Տասնավորներն անջատելով, ստանում ենք 5 տասնավոր, մինչդեռ արմատի գտած թվանշանի կրկնապատիկը 6 է։ Կնշանակի՝ 5-ը 6-ի վրա բաժանելուց 0 յենք ստանում։ Արմատում 0 յենք գրում յերկրորդ տեղում և մնացորդի մոտ ենք իջեցնում հետևյալ 2 թվանշանները. ստանում ենք 5110։ Այնուհետև շարունակում ենք ինչպես սովորաբար։

$$4)\ \sqrt{81'00'00}=900$$
$$\begin{array}{r} 81 \\ \hline 0 \end{array}$$

Այս օրինակի մեջ վորոնելի արմատը բաղկացած է միայն 9 հարյուրավորներից, ուստի արմատի տասնավորների տեղում և միավորների տեղում պետք է զերոներ դնել։

Կանոն։ Տված ամբողջ թվի քառակուսի արմատը գտնելու համար այդ թիվն աջից դեպի ձախ տրոհում են դասակների, յուրաքանչյուրի մեջ յերկուական թվանշան, բացի վերջինից, վորի մեջ կարող է նայեվ մեկ թվանշան լինել։

Արմատի առաջին թվանշանը գտնելու համար քառակուսի արմատ են հանում առաջին դասակից։

Յերկրորդ թվանշանը գտնելու համար առաջին դասակից հանում են արմատի առաջին թվանշանի քառակուսին, մնացորդի մոտ են իջեցնում յերկրորդ դասակը, յեվ ստացած թվի տասնավորների թիվը բաժանում են արմատի առաջին թվանշանի կրկնապատիկի վրա. ստացած ամբողջ թիվը փորձարկում են։

Փորձարկն այսպես է կատարվում. (մնացորդի ձախ կողմում տարած) ուղղաձիգ գծի ձախից գրում են արմատում առաջուց գտած թվի կրկնապատիկը յեվ նրան աջ կողմից կցագրում են փորձարկելի թվանշանը. այդ կցագրումից հետո ստացված թիվը բազմապատկում են փորձարկելի թվանշանով։ Յեթե բազմապատկումից հետո այնպիսի թիվ ստացվի, վորը մնացորդից մեծ լինի, ապա փորձարկելի թվանշանն անպետք է, յեվ պետք է հաջորդ փոքր թվանշանը փորձարկել։

Արմատի մյուս թվանշաններն էլ նույն ձեվով են գտնում։

Յեթե դասակն իջեցնելուց հետո ստացված թվի տասնավորների թիվը փոքր լինի բաժանարարից, այսինքն արմատի գտած մասի կրկնապատկից, ապա արմատում 0 յեն դնում, հաջորդ դասակն են իջեցնում յեվ գործողությունն այսպես շարունակում։

113. Արմատի թվանշանների թիվը։ Արմատը գտնելու պրոցեսի քննությունից հետևում է, վոր արմատում այնքան թվանշան կա, վորքան արմատատակ թվի մեջ յերկուական թվանշան պարունակող դասակներ կան (ձախ դասակի մեջ կարող է նայեվ միայն մեկ թվանշան լինել). ուրիշ խոսքով՝ յեթե արմատատակ թվի մեջ զույգ թվով թվանշաններ կան, ապա արմատում թվանշանների թիվը յերկու անգամ փոքր է այդ զույգ թվից. իսկ յեթե արմատատակ թվի մեջ կենտ թվով թվանշաններ կան, ապա արմատում թվանշանների թիվը յերկու անգամ փոքր է այդ կենտ թվի յեվ մեկի գումարից։

Վարժություններ

Գտնել հետևյալ թվերի քառակուսի արմատը.

199. $\sqrt{289}$; $\sqrt{4225}$; $\sqrt{61009}$; $\sqrt{582169}$։

200. $\sqrt{135424}$; $\sqrt{956484}$; $\sqrt{57198969}$։

201. $\sqrt{68492176}$; $\sqrt{422220304}$; 202. $\sqrt{285970396644}$։

203. Բացատրել, թե ինչու 2, 3, 7 և 8 թվանշաններից վորև մեկով վերջացող ամբողջ թվերը չեն կարող ճշգրիտ քառակուսի լինել։

III. ՄՈՏԱՎՈՐ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ԱՐՄԱՏՆԵՐ ՀԱՆԵԼԸ

114. Յերկու դեպք, յերբ անհնարին է ճշգրիտ արմատ հանելը։ Ճշգրիտ քառակուսի արմատ տված ամբողջ կամ կոտորակային թվից կոչվում է այն թիվը, վորի քառակուսին ճշգրտորեն հավասար է տված թվին։ Նշենք այն հայտանիշները, վորոնցով յերբեմն կարելի յե դատել, վոր տված թվից ճշգրիտ արմատ չի դուրս գալիս։

ա) Յեթե տված ամբողջ թվից ճշգրիտ ամբողջ արմատ չի հանվում (արմատ հանելիս մնացորդ է ստացվում), ապա այդպիռի թվից չի կարելի նաև ճշգրիտ կոտորակային արմատ գտնել, վորովհետև ամեն մի կոտորակ, վորը հավասար չե ամբողջ թվի, ինքն իրենով բազմապատկելով, արտադրյալում դարձյալ կոտորակ ե տալիս և վոչ թե ամբողջ թիվ։

բ) Վորովհետև կոտորակի արմատը հավասար ե համարիչի ու հայտարարի արմատների քանորդին, ապա անկրճատելի կոտորակից ճշգրիտ արմատ չի կարող ստացվել այն դեպքում, յեթե ճշգրիտ արմատ չի հանվում համարիչից և հայտարարից։ Որինակի համար, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{9}$ և $\frac{11}{15}$ կոտորակներից չի կարելի ճշգրիտ արմատ հանել, վորովհետև առաջին կոտորակում հայտարարից չի կարելի ճշգրիտ արմատ հանել, յերկրորդում՝ համարիչից, իսկ յերրորդում՝ վոչ համարիչից և վոչ ել հայտարարից։

Այն թվերից, վորոնցից չի կարելի ճշգրիտ արմատ հանել, կարելի յե միայն մոտավոր արմատներ հանել, վորոնց մասին այժմ կխոսենք։

115. Մոտավոր արմատ մինչև 1 ճշտությամբ։ Տված թվից (ամբողջ թե կոտորակային—այդ միևնույն ե) մոտավոր քառակուսի արմատ մինչև 1 ճշտությամբ կոչվում ե այն ամբողջ թիվը, վորը բավարարում ե հետևյալ յերկու պահանջներին. 1) այդ թվի քառակուսին փոքր ե տված թվից (կամ հավասար ե նրան). 2) այդ թվի և 1-ի գումարի քառակուսին մեծ ե տված թվից։ Ուրիշ խոսքով՝ մոտավոր քառակուսի արմատ մինչև 1 ճշտությամբ կոչվում ե տված թվի ամենամեծ ամբողջ քառակուսի արմատը, այսինքն այն արմատը, վոր մենք գտնում եյինք նախընթաց գլխում։ Այս արմատը կոչվում ե մոտավոր մինչև 1 ճշտությամբ այն պատճառով, վոր ճշգրիտ արմատն ստանալու համար, այդ մոտավոր արմատին պետք կլինի դեռ ավելացնել 1-ից փոքր մի թիվ, այնպես վոր յեթե անհայտ ճշգրիտ արմատի փոխարեն վերցնենք այս մոտավոր արմատը, ապա 1-ից փոքր սխալ արած կլինենք։

Յենթադրենք պահանջվում ե գտնել 395,74-ի մոտավոր քառակուսի արմատը մինչև 1 ճշտությամբ։ Այն ժամանակ առանց կոտորակին ուշադրություն դարձնելու, կհանենք միայն ամբողջ թվի արմատը՝

$$\sqrt{3'95}=19$$

$$\begin{array}{r|r} & 1 \\ \hline 29 & 29'5 \\ 9 & 26\,1 \\ \hline & 34 \end{array}$$

Գտած 19 արմատը կլինի վորոնածը, վորովհետև

$$19^2<395{,}74, \text{ իսկ } 20^2>395{,}74.$$

Կ ա ն ո ն։ Տված թվի մոտավոր քառակուսի արմատը մինչև 1 ճշտությամբ հանելու համար պետք ե հանել նրա ամբողջ մասի ամենամեծ ամբողջ արմատը։

Այս կանոնով գտած թիվը մոտավոր արմատն ե պակասորդով, վորովհետև ճշգրիտ արմատը գտնելու համար նրան պետք ե ավելացնել մի թիվ, վորը փոքր ե 1-ից։ Յեթե այս արմատը 1-ով մեծացնենք, ապա կստանանք մի ուրիշ թիվ, վորը մեծ ե ճշգրիտ արմատից, ուրեմն սրա նկատմամբ մի ավելի մաս ունի, վորը փոքր ե 1-ից։ 1-ով մեծացրած այս արմատը կարելի յե նույնպես կոչել մոտավոր արմատ մինչև 1 ճշտությամբ, բայց հավելորդով (ավելի մասով)։

116. Մոտավոր արմատ մինչև $\frac{1}{10}$ ճշտությամբ. Դիցուք պահանջվում ե գտնել $\sqrt{2{,}35104}$-ը մինչև $\frac{1}{10}$ ճշտությամբ։ Այդ նշանակում ե, վոր պահանջվում ե այնպիսի տասնորդական կոտորակ գտնել, վորը բաղկացած լինի ամբողջ միավորներից և տասնորդական մասերից և վորը բավարարի հետևյալ յերկու պահանջներին. 1) այդ թվի քառակուսին մեծ չե 2,35104-ից, բայց 2) յեթե այդ թիվը $\frac{1}{10}$-ով մեծացնենք, ապա այդ մեծացրած կոտորակի քառակուսին մեծ ե 2,35104-ից։

$$\sqrt{2{,}35'104}=1{,}5$$

$$\begin{array}{r|r} & 1 \\ \hline 25 & 1\,3'5 \\ 5 & 1\,2\,5 \\ \hline & 1\,0 \end{array}$$

Այդպիսի կոտորակը գտնելու համար մենք նախ կգտնենք մոտավոր արմատը մինչև 1 ճշտությամբ, այսինքն արմատը կհանենք միայն ամբողջ թվից՝ 2-ից։ Կստանանք 1 (և մնացորդում 1)։ Արմատում գրում ենք 1 թվանշանը և նրանից հետո ստորակետ ենք դնում։ Այժմ կորոնենք տասնորդների թվանշանը։ Դրա համար մնացորդին կցագրում ենք 35 թվանշանները, որոնք գտնվում են ստորակետից աջ, և շարունակում ենք արմատն այնպես հանել, իբր թե 235 ամբողջ թվից արմատ հանելիս լինեյինք։ Ստացած 5 թվանշանը գրում ենք արմատում տասնորդների տեղում։ Արմատատակ թվի մնացած թվանշանները (104) մեզ պետք չեն։ Որ ստացած 1,5 թիվը իրոք մոտավոր արմատն է մինչև $\frac{1}{10}$ ճշտությամբ, այդ յերևում է հետևյալից՝ յեթե մենք գտնեյինք 235-ի ամենամեծ ամբողջ արմատը մինչև 1 ճշտությամբ, ապա կստանայինք 15։ Նշանակի՝

$$15^2 \leqslant 235, \text{ բայց } 16^2 > 235։$$

Այս բոլոր թվերը բաժանելով 100-ի վրա, կստանանք՝

$$\frac{15^2}{100} \leqslant 2,35; \qquad \frac{16^2}{100} > 2,35$$

այսինքն

$$\left(\frac{15}{10}\right)^2 \leqslant 2,35; \qquad \left(\frac{16}{10}\right)^2 > 2,35,$$

կամ

$$1,5^2 \leqslant 2,35; \qquad 1,6^2 > 2,35։$$

Հետևաբար՝

$$1,5^2 < 2,35104; \qquad 1,6^2 > 2,35104։$$

(0,00104 թիվը ավելացնելուց $\leqslant$ կրկնակի նշանը, ինչպես ակներև է, պետք է փոխվի $<$ նշանի, իսկ $>$ նշանը մնում է, որովհետև $0,00104 < 0,01$)։

Նշանակի՝ 1,5 թիվը այն տասնորդական կոտորակն է, որը մենք անվանեցինք մոտավոր արմատ մինչև $\frac{1}{10}$ ճշտությամբ։

Այս ձևով գտնենք նաև հետևյալ մոտավոր արմատները մինչև 0,1 ճշտությամբ։

$$\sqrt{57,40} = 7,5 \qquad \sqrt{0,30} = 0,5 \qquad \sqrt{0,03'8} = 0,1$$

$$\begin{array}{r|l} & 49 \\ 145 & 84'0 \\ 5 & 72\,5 \\ \hline & 11\,5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -25 \\ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \frac{1}{2} \end{array}$$

117. Մոտավոր արմատ մինչեվ $\frac{1}{100}$, մինչեվ $\frac{1}{1000}$ ճշտությամբ յեվ այլն։ Դիցուք պահանջվում է գտնել $\sqrt{248}$-ը մինչև $\frac{1}{100}$ ճշտությամբ պակասորդով։ Այդ նշանակում է՝ գտնել այնպիսի տասնորդական կոտորակ, որը բաղկացած լինի ամբողջներից, տասնորդ և հարյուրորդ մասերից և որը բավարարի հետևյալ յերկու պահանջներին. 1) նրա քառակուսին մեծ չէ 248-ից, բայց 2) յեթե այդ կոտորակը $\frac{1}{100}$-ով մեծացնենք, ապա այդ մեծացրած կոտորակի քառակուսին 248-ից մեծ կլինի։ Այսպիսի կոտորակը կարելի է հետևյալ հաջորդականությամբ գտնել՝ նախ կգտնենք ամբողջ թիվը, ապա տասնորդների թվանշանը, ապա հարյուրորդների թվանշանը։ Ամբողջ թվի արմատը կլինի 15 ամբողջ։ Տասնորդների թվանշանն ստանալու համար պետք է, ինչպես տեսանք, 23 մնացորդին կցագրել 2 թվանշան ևս, որոնք գտնվում են ստորակետից դեպի աջ։ Մեր որինակում այդ թվանշանները չկան, նրանց տեղերում զերոներ ենք գրում

$$\sqrt{2'48',00'00} = 15,74$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ 25 & 14'8 \\ 5 & 12\,5 \\ \hline 307 & 2\,30'0 \\ 7 & 2\,1\,4\,9 \\ \hline 3144 & 1\,5\,10'0 \\ 4 & 1\,2\,57\,6 \\ \hline & 2\,52\,4 \end{array}$$

Կցագրելով այդ զերոները մնացորդին և շարունակելով գործողությունն այնպես, իբր թե 24800 ամբողջ թվի արմատը գտնելիս լինեյինք, կգտնենք տասնորդների թվանշանը՝ 7։ Մնում է գտնել հարյուրորդների թվանշանը։ Դրա համար 151 մնացորդին կցագրում ենք ևս 2 զերո և շարունակում ենք արմատ հանելը, իբր թե 2480000 ամբողջ թվի արմատը գտնելիս լինեյինք։ Ստանում ենք 15,74։ Այս թիվն իրապես 248-ի մոտավոր արմատն է մինչև $\frac{1}{100}$ ճշտությամբ պակասորդով, որը երևում է հետևյալից։ Եթե մենք գտնեյինք 2480000 ամբողջ թվի ամենամեծ ամբողջ արմատը, կստանայինք 1574. կնշանակի՝

$$1574^2 \leqslant 2480000, \text{ բայց } 1575^2 > 2480000.$$

Բոլոր թվերը բաժանելով 10000-ի (այսինքն 100^2-ու) վրա, կստանանք՝

$$\frac{1574^2}{100^2} \leqslant 248{,}0000; \qquad \frac{1575^2}{100^2} > 248{,}0000,$$

այսինքն

$$\left(\frac{1574}{100}\right)^2 \leqslant 248{,}0000; \qquad \left(\frac{1575}{100}\right)^2 > 248{,}0000,$$

կամ

$$15{,}74^2 \leqslant 248; \qquad 15{,}75^2 > 248.$$

Նշանակի՝ 15,74-ն այն տասնորդական կոտորակն է, որը մենք անվանեցինք 248-ի մոտավոր արմատը պակասորդով մինչև $\frac{1}{100}$ ճշտությամբ։

Կիրառելով այս եղանակը մինչ $\frac{1}{1000}$, մինչև $\frac{1}{10000}$ և այլ ճշտությամբ մոտավոր արմատ հանելու նկատմամբ, կգտնենք հետևյալ կանոնը՝

Կ ա ն ո ն։ Տված ամբողջ թվից կամ տված տասնորդական կոտորակից մինչև $\frac{1}{10}$ մինչև $\frac{1}{100}$ մինչև $\frac{1}{1000}$ և այլ ճշտությամբ պակասորդով մոտավոր արմատ հանելու համար նախ գտնում են պակասորդով մոտավոր արմատը մինչև 1 ճշտությամբ, որի համար արմատ են հանում ամբողջ թվից (եթե ամբողջ չկա, արմատում գրում են 0 ամբողջ)։

Այնուհետև գտնում են տասնորդների թվանշանը։ Դրա համար մնացորդին կցագրում են արմատատակ թվի այն երկու թվանշանները, որոնք ստորակետից անմիջապես աջ են գտնվում (եթե չկան, մնացորդին երկու զերո են կցագրում) և շարունակում են արմատ հանել այնպես, ինչպես այդ անում են ամբողջ թվից արմատ հանելիս։ Ստացած թվանշանը գրում են արմատում տասնորդների տեղում։

Այնուհետև գտնում են հարյուրորդների թվանշանը։ Դրա համար մնացորդին կցագրում են նորից երկու թվանշաններ, որոնք գտնվում են հենց նոր իջեցված երկու թվանշաններից անմիջապես դեպի աջ և այլն։

Այսպիսով, երբ արմատատակ թիվը ամբողջից և տասնորդական կոտորակից է բաղկացած, ապա նրա արմատը գտնելու համար պետք է ստորակետից սկսած թե դեպի ձախ (թվի ամբողջ մասի մեջ) և թե դեպի աջ (կոտորակային մասի մեջ) թիվը տրոհել երկուական թվանշան պարունակող դասակների։

Օրինակներ.

1. Գտնել մինչև $\frac{1}{100}$ ճշտությամբ հետևյալ արմատները՝ ա) $\sqrt{2}$; բ) $\sqrt{0{,}3}$.

ա) $\sqrt{2} = 1{,}41$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 24 & 10'0 \\ 4 & 9\,6 \\ \hline 281 & 40'0 \\ 1 & 28\,1 \\ \hline & 11\,9 \end{array}$$

բ) $\sqrt{0{,}30} = 0{,}54$

$$\begin{array}{r|l} & 25 \\ \hline 104 & 50'0 \\ 4 & 41\,6 \\ \hline & 8\,4 \end{array}$$

2. Արմատ հանել մինչև $\frac{1}{10000}$. ա) $\sqrt{0{,}38472}$; բ) $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

ա) $\sqrt{0{,}38'47'20} = 0{,}6202$;

$$\begin{array}{r|l} & 36 \\ \hline 122 & 2\,4'7 \\ 2 & 2\,4\,4 \\ \hline 12402 & 3200'0 \\ 2 & 2480\,4 \\ \hline & 719\,6 \end{array}$$

ե) $\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{0,42'85'71'42}$

$$\sqrt{0,42'85'71'42}=0,6546$$

```
       36
 125 | 68'5
   5 | 62 5
1304 | 607'1
   4 | 5216
13086| 8554'2
    6| 78516
       7026
```

Վերջին օրինակում $\frac{3}{7}$ կոտորակը մենք դարձրինք տասնորդական, հաշվելով 8 տասնորդանշան, որպեսզի 4 դասակ կազմվի, որ անհրաժեշտ է արմատում 4 տասնորդանշան ունենալու համար։

Դիտողություն։ Գոյություն ունեն հատուկ աղյուսակներ, որոնց մեջ զետեղված են շատ թվերի քառակուսի արմատները (հաշված որոշ ճշտությամբ)։ Այդպիսի աղյուսակներից օգտվելու յեղանակները սովորաբար նշվում են աղյուսակների նախաբանում։

118. Հասարակ կոտորակներից արմատ հանելը։ Անկրճատելի կոտորակից ճշգրիտ քառակուսի արմատ կարելի յե հանել միայն այն դեպքում, յերբ յերկու անդամներն էլ ճշգրիտ քառակուսիներ են (§ 114)։ Այս դեպքում բավական է համարիչից առանձին արմատ հանել և հայտարարից առանձին, օրինակի համար՝

$$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}.$$

Հասարակ կոտորակից որևէ տասնորդական ճշտությամբ մոտավոր արմատ գտնելու համար ամենից ավելի պարզ ձևն այն կլինի, որ հասարակ կոտորակը նախապես տասնորդական դարձնենք, հաշվելով ստորակետից հետո այնքան տասնորդանշաններ, որ նրանց թիվը յերկու անգամ մեծ լինի որոնելի արմատի տասնորդանշանների թվից։ Դիցուք, օրինակի համար, պետք է

գտնել $\sqrt{2\frac{3}{7}}$-ը մինչև 0,01 ճշտությամբ, այսինքն ստորակետից հետո յերկու տասնորդանշանով։ Դրա համար $2\frac{3}{7}$-ը տասնորդական կոտորակ կդարձնենք, հաշվելով մինչև 4-րդ տասնորդանշանը ներառյալ. կստանանք $2\frac{3}{7}=2,4285...$ և մոտավոր արմատ կհանենք 2,4285-ից մինչև 0,01 ճշտությամբ.

$$\sqrt{2,4285}=1,55$$

```
      1
 25 | 14'2
  5 | 12 5
305 | 178'5
  5 | 152 5
       26 0
```

Ի միջի այլոց, կարելի յե ուրիշ կերպ էլ վարվել։ Այս բացատրենք հետևյալ օրինակով՝

Գտնել $\sqrt{\frac{5}{24}}$-ը մոտավորությամբ։

Հայտարարը ճշգրիտ քառակուսի դարձնենք։ Դրա համար բավական կլիներ կոտորակի յերկու անդամներն էլ բազմապատկել 24-ով. բայց այս օրինակում կարելի յե այլ կերպ վարվել։ 24-ը վերլուծենք պարզ բազմապատկիչների՝ $24=2\cdot2\cdot2\cdot3$։ Այս վերլուծությունից յերևում է, որ յեթե 24-ը բազմապատկենք 2-ով և էլի 3-ով, ապա այդ ժամանակ արտադրյալում ամեն մի պարզ բազմապատկիչը զույգ թիվ անգամ կկրկնվի և, հետևաբար, հայտարարը քառակուսի կդառնա՝

$$\sqrt{\frac{5}{24}}=\sqrt{\frac{5}{2\cdot2\cdot2\cdot3}}=\sqrt{\frac{5\cdot2\cdot3}{2^4\cdot3^2}}=\frac{\sqrt{30}}{2^2\cdot3}=\frac{\sqrt{30}}{12}.$$

Մնում է $\sqrt{30}$-ը հաշվել որևէ ճշտությամբ և արդյունքը բաժանել 12-ի վրա։ Ընդամենը պետք է նկատի ունենալ, որ 12-ի վրա բաժանելուց փոքրանում է նաև այն կոտորակը, որը ցույց է տալիս ճշտության սահմանը։ Այսպես, յեթե գտնենք

$\sqrt{30}$-ը մինչև $\frac{1}{10}$ ճշտությամբ և արդյունքը բաժանենք 12-ի, ապա կստանանք $\frac{5}{24}$ կոտորակի մոտավոր արժեքը մինչև $\frac{1}{120}$ ճշտությամբ $\left(\text{այն է՝ } \frac{54}{120} \text{ և } \frac{55}{120}\right)$։

Վարժություններ

204. $\sqrt{13}$ մինչև 1; $\sqrt{13}$ մինչև 0,1; $\sqrt{13}$ մինչև 0,001։

205. $\sqrt{101}$ մինչև $\frac{1}{100}$; $\sqrt{0,8}$ մինչև 0,01։

206. $\sqrt{0,0081}$ մինչև $\frac{1}{100}$; $\sqrt{19,0969}$ մինչև $\frac{1}{100}$։

207. $\sqrt{356}$ մինչև 1, ապա մինչև 0,1 և ապա մինչև 0,01։

208. Հաշվել մինչև 0,01 ճշտությամբ հետևյալ կոտորակների քառակուսի արմատը, նրանցից յուրաքանչյուրը դարձնելով բավարար թվով տասնորդանշաններ ունեցող տասնորդական կոտորակ՝ $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{250}$։

209. Նույնը, կոտորակները տասնորդական չդարձնելով, այլ հայտարարը ճշգրիտ քառակուսի դարձնելով։ Վորոշել սխալի աստիճանը։

210. Հաշվել հետևյալ արմատները՝ $\sqrt{0,3}$; $\sqrt{5,7}$ $\left(\text{յերկուսն էլ մինչև } \frac{1}{10}\right)$. $\sqrt{2,313}$; $\sqrt{0,00246}$ $\left(\text{յերկուսն էլ մինչև } \frac{1}{100}\right)$։

Պատմական տեղեկություններ

$\sqrt{\ }$ նշանն իբրև արմատ հանելու գործողության նշան, մաթեմատիկայի մեջ մտցրել է Ռուդոլֆը 1525 թվին։ Նրանից առաջ գրում եյին «արմատ» (լատիներեն radix) ամբողջ բառը, վորն այնուհետև համառոտվելով վերածվեց միայն առաջին տառին, իսկ վերջինս էլ աստիճանաբար ընդունեց $\sqrt{\ }$ տեսքը։

ՎԵՑԵՐՈՐԴ ՀԱՏՎԱԾ

ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄ

119. *Խնդիր*։ Շարժիչավոր նավակը գետի հոսանքով իջավ 28 կմ և անմիջապես վերադարձավ. դրա համար հարկավորվեց 7 ժամ։ Գտնել նավակի շարժման արագությունը կանգնած ջրում, յեթե հայտնի յե, վոր գետի հոսանքի արագությունն է 3 կմ 1 ժամում։

Դիցուք նավակի շարժման արագությունը կանգնած ջրում x կմ է 1 ժամում. այդ դեպքում գետի հոսանքով նա շարժվել է 1 ժամում $(x+3)$ կմ արագությամբ, իսկ հոսանքի հակառակ՝ 1 ժամում $(x-3)$ կմ արագությամբ։ Հետևաբար, 28 կմ-ը նավակն անցել է $\frac{28}{x+3}$ ժամում, յերբ հոսանքի ուղղությամբ եր շարժվում, և $\frac{28}{x-3}$ ժամում, յերբ հոսանքին հակառակ եր շարժվում, այսինքն վերադառնում եր։

Խնդրի պայմանի համաձայն ստանում ենք հետևյալ հավասարումը.

$$\frac{28}{x+3}+\frac{28}{x-3}=7.$$

Հայտարարներից ազատելով հավասարումը, ստանում ենք՝

$$28(x-3)+28(x+3)=7(x+3)(x-3),$$

այսինքն

$$28x-84+28x+84=7(x^2-9),$$

կամ

$$56x=7x^2-63.$$

Ստացանք մի հավասարում, վորի մեջ անհայտի յերկրորդ աստիճանը պարունակող անդամ կա, բայց անհայտի ավելի բարձր աստիճանները պարունակող անդամներ չկան։ Այդպիսի հավասարումը կոչվում է յերկրորդ աստիճանի հավասարում կամ քառակուսի հավասարում։

Անմիջական տեղադրումով համոզվում ենք, վոր այս հավասարումը 9 և —1 արմատներն ունի, վորոնցից միայն առաջինն է, վոր կարող է խնդրի հարցի պատասխանը լինել։

Այժմ ընդհանուր կանոն արտածենք քառակուսի հավասարումների լուծման համար։

120. Քառակուսի հավասարման նորմալ տեսքը։ Քառակուսի հավասարման մեջ (ինչպես և ավելի բարձր աստիճանների հավասարումների մեջ) ընդունված է, հավասարումը պարզեցնելուց հետո, բոլոր անդամները հավաքել ձախ մասում, այնպես վոր հավասարման աջ մասը հավասար է դառնում զերոյի։

Այսպես, այն հավասարումը, վոր մենք կազմեցինք նախընթաց խնդիրը լուծելու համար, անդամների փոխադրումից հետո տալիս է՝

$$56x - 7x^2 + 63 = 0,$$

կամ, անդամներն x-ի նվազող աստիճաններով դասավորելուց հետո՝

$$-7x^2 + 56x + 63 = 0.$$

—7, +56 և +63 թվերը կոչվում են այս քառակուսի հավասարման գործակիցներ. նրանցից +63-ը կոչվում է ազատ անդամ, իսկ —7 և +56 թվերը՝ առաջին յեվ յերկրորդ գործակիցներ (մենք յենթադրում ենք, վոր հավասարման անդամները միշտ դասավորված են x-ի նվազող աստիճաններով)։ Այս թվերը կարող են լինել թե դրական, թե բացասական և թե զերոներ (միայն առաջին գործակիցը չի կարող զերո լինել, վորովհետև, հակառակ դեպքում, հավասարումը քառակուսի չէր լինի)։ Յեթե յերեք գործակիցներն էլ տարբեր են զերոյից, ապա հավասարումը կոչվում է լրիվ։ Լրիվ քառակուսի հավասարման ընդհանուր տեսքը (նորմալ տեսքը) հետևյալն է.

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Նկատենք, վոր առաջին գործակիցը, a-ն, մենք միշտ կարող ենք դրական դարձնել, հարկ յեղած դեպքում բոլոր անդամների առաջ նշանները փոխելով (ուրիշ խոսքով՝ հավասարման յերկու մասերը բազմապատկելով —1-ով)։ Այսպես, վերի հավասարումը կարող ենք հետևյալ ձևով գրել.

$$7x^2 - 56x - 63 = 0.$$

121. Թերի քառակուսի հավասարումների լուծումը։ Քառակուսի հավասարումը կոչվում է թերի, յեթե նրա մեջ բացակայում է կամ x-ի առաջին աստիճանը պարունակող անդամը և կամ ազատ անդամը. ուրիշ խոսքով՝ կամ յերբ յերկրորդ գործակից b-ն է հավասար զերոյի, և կամ յերբ ազատ անդամ c-ն է հավասար զերոյի։ Առաջին դեպքում հավասարման տեսքն է՝ $ax^2 + c = 0$, իսկ յերկրորդ դեպքում՝ $ax^2 + bx = 0$ (կարող է նույնիսկ պատահել, վոր միաժամանակ և՛ $b = 0$ և՛ $c = 0$. այս դեպքում հավասարման տեսքը կլինի $ax^2 = 0$)։ Դիտարկենք այս բոլոր թերի հավասարումների լուծումը։

1. $ax^2 + c = 0$ տեսքի թերի քառակուսի հավասարում։
Վերցնենք հետևյալ յերեք որինակները.

ա) $3x^2 - 27 = 0$։ Ազատ անդամը տանելով աջ կողմը, կստանանք՝ $3x^2 = 27$ և, հետևաբար, $x^2 = 9$։ Կնշանակի՝ x-ն 9-ի քառակուսի արմատն է, այսինքն հավասար է +3 թվին կամ —3 թվին։ Պայմանավորվենք $\sqrt{\ }$ նշանով նշանակել արմատի թվաբանական արժեքը. այդ դեպքում մենք կարող ենք գրել՝ $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$։ Այսպիսով տվյալ հավասարումը յերկու լուծում ունի։ Նշանակելով նրանցից մեկը x_1 և մյուսը x_2, մենք կարող ենք այդ լուծումներն այսպես գրել՝

$$x_1 = +\sqrt{9} = +3; \qquad x_2 = -\sqrt{9} = -3.$$

բ) $2x^2 - 0,15 = 0$։ Ազատ անդամը փոխադրելով, կստանանք՝

$$2x^2 = 0,15 \text{ և } x^2 = 0,075.$$

Կնշանակի՝

$$x = \pm\sqrt{0,075}.$$

Գտնենք $\sqrt{0,075}$-ը մինչև $\frac{1}{100}$ ճշտությամբ (§ 117)։

$$\sqrt{0,07'50}=0,27$$

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 47 & 35'0 \\ 7 & 32\,9 \\ \hline & 2\,1 \end{array}$$

Հետևաբար, $x_1=0,27...$, $x_2=-0,27...$

գ) $2x^2+50=0$։ Ազատ անդամը փոխադրելով աջ կողմը, կըստանանք՝

$$2x^2=-50;\quad x^2=-\frac{50}{2}=-25;\quad x=\pm\sqrt{-25}.$$

Քանի վոր բացասական թվից չի կարելի քառակուսի արմատ հանել, ապա տված հավասարումը (իրական) լուծումներ չունի։

Այսպիսով $ax^2+c=0$ տեսքի թերի քառակուսի հավասարումն այսպես է լուծվում.

$$ax^2=-c;\quad x^2=-\frac{c}{a};\quad x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Յեթե $-\frac{c}{a}$ արտահայտությունը դրական թիվ է (վոր այն դեպքում կլինի, յերբ a-ն և c-ն տարբեր նշաններ ունեն) ապա նրանից կարելի յե քառակուսի արմատ հանել (ճշգրիտ կամ մոտավոր) և այն ժամանակ x-ի համար ստանում ենք յերկու հակադիր արժեքներ։ Իսկ յեթե $-\frac{c}{a}$ արտահայտությունը բացասական թիվ է (վոր կլինի, յերբ a-ն և c-ն նույն նշանն ունեն), ապա հավասարումը իրական արմատ չունի։

2. $ax^2+bx=0$ տեսքի թերի քառակուսի հավասարում։ Իբրև մասնավոր օրինակ վերցնենք $2x^2-7x=0$ հավասարումը։ Այս հավասարման ձախ մասում x^2-ն առնենք փակագծերից դուրս իբրև բազմապատկիչ՝

$$x(2x-7)=0.$$

Այժմ հավասարման ձախ մասը մի արտադրյալ է, իսկ աջ

մասը հավասար է զերոյի։ Բայց արտադրյալը միայն այն ժամանակ է հավասար զերոյի, յերբ բազմապատկիչներից վորևե մեկը հավասար է զերոյի. այս պատճառով մեր հավասարումը միայն այն ժամանակ է բավարարվում, յերբ առաջին բազմապատկիչ x-ն է հավասար զերոյի, կամ յերկրորդ բազմապատկիչ $2x-7$-ը (և յերբ, հետևաբար, $x=\frac{7}{2}$)։ Նշանակի տված հավասարումը յերկու լուծում ունի՝

$$x_1=0 \text{ և } x_2=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}.$$

Այսպիսով $ax^2+bx=0$ թերի քառակուսի հավասարումն ընդհանրապես այսպես է լուծվում՝

$$ax^2+bx=0;\quad x(ax+b)=0;$$

$$x_1=0;\quad ax_2+b=0;\quad x_2=-\frac{b}{a}.$$

3. $ax^2=0$ տեսքի թերի քառակուսի հավասարում։ Այսպիսի հավասարումն, ինչպես ակներև է, ունի միայն $x=0$ արմատը։

Վարժություններ

211. $3x^2-147=0;\qquad \frac{1}{3}x^2-3=0;\qquad x^2+25=0.$

212. $\frac{3(x^2-11)}{5}-\frac{2(x^2-60)}{7}=36;\qquad \frac{4}{x-3}-\frac{4}{x+3}=\frac{1}{3}.$

213. $2x^2-7x=0;\qquad \frac{3}{7}x^2+x=0;\qquad 0,2x^2-\frac{3}{4}x=0.$

214. $x^2=x;\qquad x^2-16x=0;\qquad 7x^2=0;\qquad 0,7x^2=0.$

215. $(x-2)(x-5)=0;\qquad x(x+4)=0;\qquad 3(y-2)(y+3)=0.$

122. Լրիվ քառակուսի հավասարումների լուծման օրինակներ։ Իբրև առաջին օրինակ վերցնենք այն քառակուսի հավասարումը, վորը կազմեցինք § 119-ի խնդրի համար՝

$$7x^2-56x-63=0.$$

Բոլոր անդամները բաժանենք 7-ի վրա և ազատ անդամը փոխադրենք աջ կողմը. կստանանք՝

$$x^2 - 8x = 9\text{։}$$

Այժմ հարց տանք՝ չէ՞ կարելի արդյոք x^2-8x երկանդամին այնպիսի երրորդ անդամ ավելացնել, որ առաջացած եռանդամը լրիվ քառակուսի ներկայացնի։ Այդ հարցին հեշտ է պատասխանել, եթե երկանդամն այսպես պատկերացնենք՝

$$x^2 - 2x\cdot 4\text{։}$$

Այժմ պարզ է, որ եթե այս երկանդամը լրացնենք 4^2 անդամով, ապա կստանանք

$$x^2 - 2x\cdot 4 + 4^2$$

եռանդամը, որը հավասար է $x-4$ տարբերության քառակուսուն։ Բայց եթե հավասարման ձախ մասին ավելացնում ենք 4^2-ն (այսինքն 16), ապա աջ մասին էլ պետք է ավելացնենք այդ նույն թիվը։ Այդ անելով՝ կստանանք.

$$x^2 - 8x + 16 = 9 + 16,\ \text{այսինքն}\ (x-4)^2 = 25\text{։}$$

Այսպիսով $x-4$ տարբերությունն այնպիսի թիվ է, որի քառակուսին հավասար է 25-ի. կնշանակի՝ այդ տարբերությունը պետք է հավասար լինի 25-ի քառակուսի արմատին, այսինքն 5-ի կամ −5-ի.

$$x - 4 = +\sqrt{25} = +5,\ \text{կամ}\ x - 4 = -\sqrt{25} = -5\text{։}$$

Այժմ −4 անդամը փոխադրելով աջ մասը, կգտնենք երկու լուծում՝

$$x_1 = 4 + 5 = 9\ \text{և}\ x_2 = 4 - 5 = -1\text{։}$$

Այս երկու լուծումներն էլ բավարարում են տված հավասարման (որ կարելի է ցույց տալ ստուգումով), բայց այն խնդրի համար, որից ստացված է այս հավասարումը, −1 լուծումն անպետք է, որովհետև խնդրում պահանջվում է գտնել արագության բացարձակ մեծությունը և ոչ թե նրա ուղղությունը։

Իբրև երկրորդ օրինակ վերցնենք հետևյալ հավասարումը՝

$$3x^2 + 15x - 7 = 0\text{։}$$

Բոլոր անդամները բաժանենք 3-ի վրա և ազատ անդամը փոխադրենք աջ կողմը՝

$$x^2 + 5x = \frac{7}{3}$$

x^2+5x երկանդամը կարելի է գումարի քառակուսի դարձնել, եթե նրան ավելացնենք $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ անդամը։ Ավելացնելով այս անդամը հավասարման երկու մասերին, կստանանք՝

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{3},$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{7}{3} = \frac{75+28}{12} = \frac{103}{12}\text{։}$$

Այստեղից երևում է, որ $x + \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{103}{12}}$. հետևաբար

$$x_1 = -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{103}{12}};\qquad x_2 = -\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{103}{12}}\text{։}$$

Հաշվենք $\frac{103}{12}$-ը մինչև $\frac{1}{10}$ ճշտությամբ՝

$$\sqrt{\frac{103}{12}} = \sqrt{8{,}58\ldots} = 2{,}9\ldots$$

Հետևաբար

$$x_1 = -2{,}5 + 2{,}9\ldots = 0{,}4\ldots;$$

$$x_2 = -2{,}5 - 2{,}9\ldots = -5{,}4\ldots$$

123. Վերածված քառակուսի հավասարման արմատների բանաձևը։ Այն քառակուսի հավասարումը, որի առաջին գործակիցը +1 է, կոչվում է վերածված հավասարում։

Յեթե հավասարումը վերածված տեսքի չե, այսինքն առաջին գործակիցը տարբեր ե 1-ից, ապա մենք կարող ենք այդ հավասարումը վերածված տեսքի բերել. հարկավոր ե միայն, վոր հավասարման բոլոր անդամները բաժանենք այդ գործակցի վրա։ Վերածված հավասարումն ընդհանուր տեսքով սովորաբար այսպես ե պատկերացվում՝

$$x^2+px+q=0.$$

Լուծենք այս տառային հավասարումը, նրա նկատմամբ կատարելով նույն ձևափոխությունները, վորոնք ցույց յեին տված մասնավոր որինակների վրա։

Ազատ անդամը փոխադրենք աջ մասը.

$$x^2+px=-q.$$

Քանի վոր $px=2x\cdot\frac{p}{2}$, ապա x^2+px յերկանդամը լրիվ քառակուսի դարձնելու նպատակով հավասարման յերկու մասերին ել ավելացնենք $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ կստանանք՝

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Այս հավասարումը կարելի յե այսպես ներկայացնել.

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q,$$

վորտեղից գտնում ենք՝

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \quad և \quad x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Այս բանաձևը կարելի յե այսպես կարդալ.

Վերածված քառակուսի հավասարման անհայտը հավասար ե յերկրորդ գործակցի կեսին հակադիր նշանով, պլյուս-մինուս քառակուսի արմատ այդ կեսի քառակուսու յեվ ազատ անդամի տարբերությունից։

Այս բանաձևը պետք ե հիշել թե՛ տառային և թե՛ բառային արտահայտությամբ։

Որինակներ.

1. $x^2-x-6=0$։ Այս հավասարումը, $x^2+px+q=0$ տառային հավասարման նմանեցնելու համար, գրենք այսպես՝ $x^2+(-1)x+(-6)=0$։ Այժմ յերևում ե, վոր այս որինակի մեջ $p=-1$ և $q=-6$. այս պատճառով՝

$$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2};$$

$$x_1=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3; \quad x_2=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-2.$$

Ստուգում. $3^2-3-6=0$; $(-2)^2-(-2)-6=0$.

2. $x^2-18x+81=0$; այստեղ $p=-18$, $q=+81$. ուստի

$$x=9\pm\sqrt{81-81}=9\pm0=9.$$

Հավասարումը միայն մեկ արմատ ունի։

3. $x^2-2x+5=0$; $x=1\pm\sqrt{1-5}=1\pm\sqrt{-4}$։ Արմատները կեղծ են։

Վարժություններ

216. $x^2+10x+5=2x^2-6x+53$.

217. $x^2+6x=27$.

218. $x^2-5\frac{3}{4}x=18$.

219. $12x-\frac{6}{x}=21$.

220. $\frac{x}{7}+\frac{21}{x+5}=6\frac{5}{7}$.

221. $x+2=\frac{9}{x+2}$.

222. $\frac{x-5}{4}-\frac{4}{5-x}=\frac{3x-1}{4}$.

223. $x+\frac{1}{x-3}=5$.

224. $\frac{2x}{x-d}=\frac{x-d}{d}$.

225. t-ի վո՞ր արժեքի համար $(2t-5)(t-4)$ արտադրյալը հավասար կլինի $t+8$ գումարին։

226. $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$.

124. Քառակուսի հավասարման արմատների ընդհանուր

բանաձևը։ $ax^2+bx+c=0$ հավասարումը, բոլոր անդամներն a-ի վրա բաժանելուց հետո, բերվում է հետևյալ վերածված հավասարման՝

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Լուծելով այս հավասարումը վերածված հավասարման բանաձևով, կստանանք՝

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}.$$

Այս արտահայտությունը կարելի է այսպես պարզել՝

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=$$

$$=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Օգտակար է այս պարզեցրած տեսքով հիշել բանաձևը, որը կարելի է այսպես կարդալ.

Լրիվ քառակուսի հավասարման անհայտը հավասար է մի կոտորակի, որի համարիչն է երկրորդ գործակիցը հակադիր նշանով, պլյուս-մինուս քառակուսի արմատ այն տարբերությունից, որ ստացվում է այդ գործակցի քառակուսուց հանելով առաջին գործակցի ու ազատ անդամի քառապատիկ արտադրյալը, իսկ հայտարարն է առաջին գործակցի կրկնապատիկը։

Այս բանաձևը կարելի է ընդհանուր բանաձև կոչել, որովհետև նա պիտանի է և՛ վերածված հավասարման համար (եթե վերցնենք $a=1$) և թերի քառակուսի հավասարումների համար (եթե վերցնենք $b=0$ կամ $c=0$)։

125. Ընդհանուր բանաձևի պարզեցումը, երբ b գործակիցը զույգ թիվ է։ Ընդհանուր բանաձևը պարզանում է, եթե b-ն զույգ թիվ է։ Այսպես վերցնելով $b=2k$, կստանանք՝

$$x=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a}=\frac{-2k\pm\sqrt{4(k^2-ac)}}{2a}=$$

$$=\frac{-2k\pm2\sqrt{k^2-ac}}{2a}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Այս բանաձևն ընդհանուրից նրանով է տարբերվում, որ նրա մեջ 4 և 2 բազմապատկիչները բացակայում են։

126. Քառակուսի հավասարման արմատների թիվը։ Մենք տեսանք, որ քառակուսի հավասարումը երբեմն երկու արմատ ունի, երբեմն մեկ արմատ, երբեմն էլ ոչ մի արմատ (կեղծ արմատների դեպքը)։ Սակայն համաձայնություն են կնքել քառակուսի հավասարումներին բոլոր դեպքերում երկու արմատ վերագրել և այդ ժամանակ նկատի ունենալ, որ արմատները կարող են երբեմն միահավասար լինել, երբեմն՝ կեղծ։ Այսպիսի համաձայնության պատճառն այն է, որ կեղծ արմատներն արտահայտող բանաձևերը նույն հատկությունները ունեն, ինչ որ պատկանում են իրական արմատներին. միայն պետք է կեղծ թվերի հետ գործողություններ կատարելիս ղեկավարվել այն կանոններով, որոնք ստացված են իրական թվերի համար և այդ ժամանակ ընդունել, որ $(\sqrt{-a})^2=-a$։ Ճիշտ այդպես էլ, երբ հավասարումը մեկ արմատ ունի, կարող ենք այդ արմատն իբրև երկու միահավասար արմատներ նկատել և նրանց վերագրել նույն հատկությունները, ինչ որ պատկանում են հավասարման տարբեր արմատներին։

Վարժություններ

227. $2x^2-3x-5=0$։ 228. $(2x-3)^2=8x$։

229. $5x^2-8x+0{,}24=0$։ 230. $65x^2+118x-55=0$։

231. $(x-3)(x-4)=12$։

232. $\frac{x}{x+60}=\frac{7}{3x-5}$։ 233. $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$։

234. Գտնել երեք հաջորդական զույգ թվեր, որոնց քառակուսիների գումարը հավասար լինի 776-ի։

235. Ուղղանկյան մակերեսը հավասար է 48 քառ. սմ-ի, իսկ պարագիծը՝ 28 սմ-ի։ Գտնել կողմերը։

236. Գտնել ուղղանկյուն եռանկյան կողմերը, իմանալով, որ նրանք արտահայտվում են երեք հաջորդական ամբողջ թվերով։

237. *Եթե բազմանկյունն* n *կողմ ունի, ապա նրա բոլոր անկյունագծերի թիվը հավասար է* $\frac{1}{2}n(n-3)$։ *Վորոշել, թե քանի՞ կողմ պետք է ունենա բազմանկյունը, վորպեսզի նրա բոլոր անկյունագծերի թիվը 54 լինի։*

238. *Սավառնակը քամու ուղղությամբ ուղիղ գծով թռիչք կատարեց 150 կմ, անմիջապես վերադարձավ դարձյալ ուղիղ գծով քամուն հակառակ ուղղությամբ և թռիչքի սկզբից 4 ժամ անց հասավ այնտեղ, վորտեղից նախապես մեկնել էր։ Ի՞նչ արագություն ուներ քամին, յեթե սավառնակի արագությունը խաղաղ օդում հավասար է 80 կմ 1 ժամում։*

239. *Գնել են մի քանի թաշկինակ 60 ռուբլով. յեթե այդ նույն գումարով յերեք թաշկինակ ավելի գնած լինեյին, ապա յուրաքանչյուր թաշկինակը 1 ռուբլով եժան կլիներ։ Քանի՞ թաշկինակ են գնել։*

240. *Դպրոցի առաջին դասարանում բաժանեցին 180 թերթ թուղթ, յուրաքանչյուրին հավասարապես։ Յերկրորդ դասարանում նույնքան թերթ բաժանեցին և էլի հավասարապես։ Այս դասարանի ամեն մի աշակերտը 6 թերթ ավելի ստացավ, քան առաջին դասարանինը։ Քանի՞ թերթ ստացավ առաջին դասարանի յուրաքանչյուր աշակերտը, յեթե յերկրորդ դասարանում առաջինից 40-ով պակաս աշակերտ կար։*

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐԸ

1. $4a$; a^2, 2. $6m^2$; m^3. 3. $x(x-d)$. 4. $10x+y$. 5. $100a+10b+c$. 6. $\frac{ma+nb}{a+b}$. 7. x^2+y^2; $(x+y)^2$; x^2y^2;$(xy)^2$; $(a+b)(a-b)$; $\frac{m+n}{m-n}$ *կամ* $(m+n):(m-n)$. 8. 84; 44; 552; 336; $9\frac{1}{3}$; $5\frac{3}{5}$. 9. $3(x+y)(x-y)$. 10. $3a+2b$; $13+12=25$. 11. $5+ab-4a$; $a+2x$. 12. n; $5a^3b^2x^3$. 13. $6xyz$; $2ax$. 14. $5x+15$; $7x+7y+7z$. 15. $\frac{a}{2}+2b-c$; $5a^2b$. 16. $8x-2y$; $4ax$. 17. $\frac{a}{b}$;$3x$. 18. $+10$; -10; $+3$. 19. -3; $+8$; -2. 20. 0; -3 $+1$; 21. -1; -2; $+2$. 22. $+2$. 23. 0. 24. $b-a$; -5 *(ձախ)*. 25. $m-n$; -10 *(պարտք)*. 26. 14; 10; 18; 2. 27. $a+b$; $m+n$; $5x$. 28. 12. 29. $-1\frac{3}{4}$. 30. $+5$. 31. $10+(-2)+(-3)+7$. 32. $10-(-8)$. 33. $+6$; -14; $+80$. 34. $-23\frac{3}{8}$; 0,054. 35. $+1$; -1; $+1$; -1. 36. 27. 37. -27. 38. 0; 0; 0; 0; 0. 39. $3\frac{1}{16}$. 40. $+5$; -5; -5; $+5$. 41. $-a$; -5; x^2. 42. 0; 0; 0; 0. 43, 44, 45 *պատասխան չեն պահանջում.* 46. $10a^3x^3$: $-10a^2bx^2$; $-\frac{3}{8}a^2bx^2$; $-20m^2x^2y^3$. 47. $a+a$; $ax+ax+ax$; $a^2b+a^2b+a^2b+a^2b+a^2b$; $(a+1)+(a+1)+(a+1)+(a+1)$. 48. 90; $\frac{13}{15}$; $2\frac{25}{48}$; -28; -936. 49 0; 31; -4. 50. $+1$ *և* -1. 51. $a^3x^2+4\frac{1}{2}a^2x^3$. 52. $2x-16{,}3xy$. 53. $a+3\frac{1}{2}mxy^2$. 54. $a-3\frac{1}{2}mxy^2$. 55. $4a^3-3a^2b-13ab^2$. 56. $x^5-7a^2x^3$. 57. $2z$. 58. $4x^3+x^2+3x+1$. 59. $8a^3-11a^2b+14ab^2-3b^3$. 60. p^2+p+15. 61. $4x^2+$

$+3y^2-y-1$. **62.** $\frac{1}{4}x^2-x+\frac{4}{5}$. **63.** $4a^2+4b^2-c^2$. **64.** $x+y$; $2m-2n$. **65.** $b-2c$. **66.** $4x^2$. **67.** $a-(b+c-d)$; $a-b+(-c+d)$; $a-(b+c)+d$. **68.** $15a^3b^7c$; $\frac{5}{8}a^2x^6$. **69.** $0,81a^3b^2x^3$; $a^6b^8c^3$. **70.** $\frac{9}{49}m^2x^4y^6$; $8a^9b^3x^6$. **71.** $0,01x^{2m}y^6$; $\frac{1}{8}m^6n^3y^9$. **72.** $6a^3b-4ab^4+2abc$. **73.** $25a^3b-20a^4b^2+15a^5b^3-35a^6b^4$. **74.** $am+bm-cm-an-bn+cn$; $6a^2-3ab+2ab^2-b^3$. **75.** $2a^2-\frac{1}{2}b^2$; x^3-y^3. **76.** x^3+y^3. **77.** $6x^2+5xy-6y^2$; y^4-1. **78.** $x^6+1008x+720$. **79.** $x^9-x^5-x^4+2x^3-x^2-x+1$. **80.** x^6-a^6. **81.** a^2+2a+1; $1+4a+4a^2$; $x^2+x+\frac{1}{4}$. **82.** $9a^4+6a^2+1$; $0,01m^2x^2+mx^3+25x^4$. **83.** $25a^2-20a+4$; $9x^2-12ax+4a^2$; $9a^4-3a^2+\frac{1}{4}$ **84.** $101^2=(100+1)^2=100^2+2.100.1+1^2=10201$; $997^2=(1000-3)^2=\ldots=994\ 009$ և այլն. **85.** $4m^2-12mn+9n^2$; $9a^4x^2-24a^3xy+16a^2y^2$; $0,04x^6-0,15x^3+\frac{9}{64}$. **86.** $\frac{1}{4}x^4-3\frac{1}{2}x^3+\frac{49}{4}x^2$; $0,0625p^2-0,1pq+0,04q^2$. **87.** a^2-1; $4a^2-25$. **88.** $4x^2-9$; $1-a^4$. **89.** $(x^2+1)(x^2-1)=x^4-1$; $(4x^2+y^2)(4x^2-y^2)=16x^4-y^4$. **90.** $[(m+n)-p][(m+n)+p]=(m+n)^2-p^2$; $a^2-(b+c)^2=a^2-b^2-2bc-c^2$ **91.** a^3+3a^2+3a+1; a^3-3a^2+3a-1; $8x^3+36x^2+54x+27$; $125+225x+135x^2+27x^3$ **92.** $\frac{1}{8}m^3-\frac{3}{2}m^2+6m-8$; $\frac{27}{64}p^3+\frac{9}{16}p^2q+\frac{1}{4}pq^2+\frac{1}{27}q^3$; $125-225x+135x^2-27x^3$. **93.** $2a^2xy$; $-\frac{3}{5}x^2$. **94.** $-\frac{6}{5}a^3$; $3a^{m-1}b^4$. **95.** $\frac{16}{3}a+8b-16a^2b^4$. **96.** $9x^2-6ax+a^2$. **97.** $1-2y+y^2-y^3$. **98.** $x-4$; $y+1$. **99.** $3x^2-2$. **100.** $3ax^3$. **101.** $x-a$. **102.** $2(a+x)$; $a(x+y)$; $2y(2y-3x)$. **103.** $2a(2x-y)$; $3xy(2x+3y)$. **104.** $3ab(4a-3ab+2b^2)$; $xy(y-7+4x)$. **105.** $(m+n)(m-n)$; $(a+1)(a-1)$; $(1+a)(1-a)$. **106.** $(x+2)(x-2)$; $(m+3)(m-3)$; $(2x+y)(2x-y)$. **107.** $\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3\right)\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^3\right)$; $(0,1a^3+3)(0,1a^3-3)$; $3a(a^2+4b^4)(a+2b^2)(a-2b^2)$. **108.** $(x-y+a)(x-y-a)$; $[3(a+2b)+1][3(a+2b)-1]$; $(a+b+c)(a-b-c)$. **109.** $(x+y+x-y)(x+y-x+y)=2x.2y=4xy$. **110.** $(x-y)^2$; $(m+n)^2$. **111.** $(a+b)^2$; $(a-2b)^2$. **112.** $(x+4)^2$; $(x+1)^2$. **113.** $5a(a-2b)^2$. **114.** $(a+b)^2-c^2=(a+b+c)(a+b-c)$; $a^2-(b^2+2bc+c^2)=a^2-(b+c)^2=(a+b+c)(a-b-c)$. **115.** $(a+b)x+(a+b)y=(a+b)(x+y)$; $a(c-d)+b(d-c)=a(c-d)-b(c-d)=(c-d)(a-b)$. **116.** $a(a+b)-(a+b)=(a+b)(a-1)$; $xz+xy-3y-3z=x(y+z)-3(y+z)=(y+z)(x-3)$. **117.** $4mn-2nx+xy-2my=2n(2m-x)+y(x-2m)=2n(2m-x)-y(2m-x)=(2m-x)(2n-y)$; $(2a-3)(2a-3)(2a+3)$. **118.** $\frac{5x}{7y}$; $\frac{3ab}{10m}$; $\frac{8a^2}{11b}$; $\frac{25m}{59n}$. **119.** $\frac{9ab}{10x^2}$; $\frac{14a^3}{15b}$; $\frac{12x-1}{4a-4b}$. **120.** $\frac{17(a+b)}{34}=\frac{a+b}{2}$; $\frac{2(9a-7)}{6-a}$. **121.** $\frac{ax^2+bx+c}{ax^2+x}$; $\frac{x^2+ax-b}{x^2-x}$. **122.** $\frac{x-1}{x}$; $\frac{3a^2}{b-a}$; $\frac{a-1}{b-2}$. **123.** $\frac{a^2+b^2-2ab}{a-b}$; $\frac{m^2-1}{m-1}$. **124.** $-\frac{3a}{6}$; $-\frac{5x^2}{3}$; $-\frac{a-1}{b}$; $-\frac{a}{x-2}$; $-\frac{m^2-n^3}{m-n}$. **125.** $\frac{1}{x}$; $\frac{2}{3m}$; $\frac{2a}{3b}$; $\frac{3xy}{8}$. **126.** $\frac{3b}{2x}$; $\frac{ac}{4b}$; $\frac{16axy^3}{15}$. **127.** $\frac{b}{a+b}$; $\frac{3y}{x-y}$; $\frac{a+2}{a-2}$. **128.** $\frac{a+1}{a-1}$; $\frac{1}{x+3}$; $\frac{a}{a-1}$. **129.** $\frac{x-1}{2x(x+1)}$; $\frac{a+x}{3b-cx}$; $\frac{5a}{a-x}$. **130.** $(a+b)(a-b)$; $\frac{1}{y^2-1}$. **131.** $\frac{18;4a}{6a}$; $\frac{4x^2;3y^2}{12xy}$; $\frac{x^2;16}{4x}$. **132.** $\frac{4bc;6ac;ab}{2abc}$; $\frac{105b^2x^2;40a^2x;48a^2b^4}{60a^2b^2x}$. **133.** $\frac{20mx^3y^2;9a^3b^2c}{12a^2bcmx^2y}$; $\frac{2a^2bx;y}{8a^2b^2}$. **134.** $\frac{15x^3;120abx^4;8a^2b}{40abx^3}$. **135.** $\frac{3(x+y)^2;2(x-y)^2}{6(x^2-y^2)}$; $\frac{m-1;2;3(m+1)}{m^2-1}$. **136.** $\frac{2;3a(x-1)}{(x-1)^2}$; $\frac{2x-1;2(x-1);1}{(x-1)(2x-1)}$. **137.** $\frac{3x;4aby}{84a^3b^2}$; $\frac{(a-b)(a^2-b^2);2ab(a+b);b}{b(a^2-b^2)}$. **138.** $\frac{6bc+3ac+2ab}{6abc}$; $\frac{6+5x}{3x^2}$; $\frac{2a-2x-5}{4}$. **139.** $\frac{x^2-5x+2}{x^2}$. **140.** $\frac{1+x}{2}$; $\frac{5x-6}{3}$; $\frac{5-2x}{3}$. **141.** $\frac{1}{1-4x^2}$. **142.** $\frac{2a^2b-ab-2b^2-a^2}{a(a+b)(a-b)}$. **143.** $\frac{m^2}{(m+n)(n-1)}$. **144.** $-\frac{6b}{7x^2}$; $\frac{1}{5(1+a)x}$. **145.** $\frac{12p^2q^2x^2y^2}{n^4a^3}$; $2a(x-1)$. **146.** $\frac{(a+2b^2)a}{b^2}$; $\frac{9b^2c^2x^2}{16a^2z}$. **147.** $\frac{5a^3}{5mp}$; $15a^2x^2y$. **148.** $\frac{1}{5(a-b)}$; $\frac{x+y}{x-y}$. **149.** 3-րդ, 4-րդ և 6-րդ հավասարությունները հավասարումներ են, մնացածները՝ նույնություններ։ **150.** 17,5; 5. **151.** 27; 9; 12. **152.** 3; $2\frac{13}{20}$. **153.** 2,7; 50. **154.** 9; -3; -4. **155.** 1; $5\frac{3}{7}$. **156.** $2\frac{6}{11}$. **157.** $7\frac{1}{13}$. **158.** 2. **159.** $-17\frac{25}{27}$. **160.** 1348 և 1200.

161. 20, 30, 50. **162.** $2\frac{1}{2}$. **163.** 12,8 *կգ* և 19,2 *կգ*. **164.** 15 *կմ* և 18 *կմ*. **165.** 0. **166.** $\frac{c}{2(a-b)}$. **167.** $\frac{4-4a}{b-3}$. **168.** $h=\frac{2q}{b_1+b_2}$. **169.** $x=2,\ y=1;\ x=1,\ y=-2;\ x=-3,\ y=-3$. **170.** $x=-\frac{1}{2}$, $y=1;\ x=5,\ y=1;\ x=7,\ y=2$. **171.** $x=\frac{35}{13}$, $y=-\frac{23}{13}$. **172.** $x=\frac{c}{a+bm}$, $y=\frac{mc}{a+bm}$; $x=\frac{a+bm}{mn-1}$; $y=\frac{an+b}{mn-1}$. **173.** $a=3$, $b=-5$. **174.** 1 *ռ.* 10 *կ.* և 40 *կ.* **175.** 40 և 25. **176.** 200; 11 *կմ.* **177.** $1\frac{2}{3}$ *մ*, $13\frac{1}{3}$ *մ* և $9\frac{2}{3}$ *մ*, $9\frac{1}{3}$ *մ*. **178.** $x=2,\ y=3;\ z=5$. **179.** $x=3\frac{1}{2}$, $y=2\frac{1}{4}$, $z=4$. **180.** $x=4,\ y=0,\ z=5$. **181.** $x=51,\ y=76,\ z=1$. **182.** $x=8,\ y=10,\ z=5$. **183.** $x=36,\ y=6$. **184.** $x=2,\ y=4,\ z=1,\ u=5$. **185.** $x=6,\ y=12,\ z=8$. **186.** *Գումարելով 2-րդ հավասարումը 3-րդին, կստանանք՝* $2x=32$, $x=16$. *Հանելով 1-ին հավասարումից 2-րդը՝ կստանանք՝* $2z=11$, $z=5\frac{1}{2}$*։ Վերջապես, հանելով 1-ին հավասարումից 3-րդը, կգտնենք՝* $2y=15\frac{1}{2}$, $y=7\frac{3}{4}$. **187.** $1\frac{7}{8}$ *ռ.* $\frac{1}{2}$ *ռ.* 5 *ռ.* **188.** 133; 150; 76. **189.** $\pm10;\ \pm0{,}1;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{3}{4};\ \pm a;\ \pm x$. **190.** 5; 27; a; $1+x$. **191.** $+3;\ -3;\ +\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ -0{,}1$. **192.** $\pm2;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm3$; *կեղծ թվեր։* **193.** $\pm6;\ \pm0{,}25;\ \pm2ab;\ \pm3axy^2$. **194.** $-3ab;\ \pm\frac{1}{2}ax$; $\sqrt[5]{a}\ \sqrt{b}\ \sqrt{c}$. **195.** $\pm a^2;\ \pm2^2;\ \pm x^3;\ \pm(a+b)^2$. **196.** $2^2;\ -a^2;\ x^3;\ (m+n)^2$. **197.** $\frac{2}{5};\ -\frac{3}{10};\ \frac{a^2}{b};\ \frac{\sqrt[3]{x}}{y};\ \pm\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$. **198.** $\pm5a^3bc^2;\ \pm0{,}6x^2y;\ \pm\frac{1}{2}(b+c)^3x^2$. **199.** 17; 65; 247; 763. **200.** 368, 978, 7563. **201.** 8276; 20548. **202.** 534762. **203.** *Ամբողջ թվի քառակուսու վերջին թվանշանը պետք է լինի այն թվանշաններից մեկը, որոնցով վերջանում են առաջին 10 թվերի՝ 0, 1, 2, 3...9, քառակուսիները։ Բայց այս քառակուսիներից ոչ մեկը չի վերջանում ոչ 2-ով, ոչ 3-ով, ոչ 7-ով և ոչ 8-ով։* **204**

3; 3,6; 3,606. **205.** 10,05; 0,89. **206.** 0,09; 4,37. **207.** 19; 18,9; 18,89. **208.** 0,77; 0,65; 0,79; 0,65; 0,17. **209.** $\frac{1}{5}\sqrt{15}=\frac{387}{500}$ (*մինչև* $\frac{1}{500}$ *ճշտ.*); $\frac{1}{7}\sqrt{21}=\frac{458}{700}$ (*մինչև* $\frac{1}{700}$ *ճշտ.*); $\frac{1}{11}\sqrt{77}=\frac{877}{1100}$ (*մինչև* $\frac{1}{1100}$ *ճշտ.*); $\frac{1}{12}\sqrt{60}=\frac{774}{1200}$ (*մինչև* $\frac{1}{1200}$ *ճշտ.*); $\frac{1}{250}\sqrt{1750}=\frac{4183}{25000}$ (*մինչև* $\frac{1}{25000}$ *ճշտ.*). **210.** 0,5; 2,4; 1,52; 0,05. **211.** $\pm7;\ \pm3;\ \pm\sqrt{-25}$. **212.** $\pm9;\ \pm9$. **213.** 0 և $3\frac{1}{2}$; 0 և $-2\frac{1}{3}$; 0 և 3,75. **214.** 0 և 1; 0 և 16; 0; 0. **215.** 2 և 5; 0 և -4; 2 և -3. **216.** 12 և 4. **217.** 3 և -9. **218.** 8 և $-2\frac{1}{4}$. **219.** 2 և $-\frac{1}{4}$. **220.** 44 և -2. **221.** 1 և -5. **222.** 6 և -3. **223.** 4. **224.** $d(2\pm\sqrt{3})$. **225.** $t_1=6;\ t_2=1$. **226.** $\frac{a}{b}$ և $\frac{b}{a}$. **227.** $2\frac{1}{2}$ և -1. **228.** $4\frac{1}{2}$ և $\frac{1}{2}$. **229.** $\approx1{,}5694$ և $\approx0{,}0306$. **230.** $\frac{5}{13}$ և $-\frac{11}{5}$. **231.** 7 և 0. **232.** 14 և -10. **233.** a և $\frac{1}{a}$. **234.** 14, 16, 18 և -18, -16, -14. **235.** 6 և 8. **236.** 3, 4, 5. **237.** 12. **238.** *ժամը* 20 *կմ.* **239.** 12. **240.** *Առաջին դասարանում կար 60 աշակերտ, յուրաքանչյուրին տալով 3 թերթ։*

ՑԱՆԿ

I. հատված

IV. հատված

ԱՌԱՋԻՆ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

V. հատված.

ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ԱՐՄԱՏ ՀԱՆԵԼԸ

VI. հատված.

ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄ

Տեխ. խմբագիր՝ Մ. Մարտիրոսյան
Սրբագրիչներ՝ Հ. Մանուկյան, Հ. Դոլուխանյան

30

Գլավլիտի լիազոր Ա—3093 Պատվեր 460. Հրատ. 4632. Տիրաժ 40000

Տրված արտադրության 11 մայիսի 1938 թ.
Ստորագր[illegible] [illegible]րի 1938 թ.
Թղթի չափը 62×94. տպագրական մամուլ 12. մեկ տպ. մամուլում 36480
Նիշ. հեղինակային 9 3/4 մամ.

Պետհրատի I տպարան, Երևան, Լենինի 65

ԳԻՆԸ 2 Ռ. 50 Կ.

А. КИСЕЛЕВ

АЛГЕБРА

Учебник

для неполной средней и средней школы

Часть первая

Арм. Гиз ССР, Ереван, 1938