Ա. ԿԻՍԵԼՅՈՎ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

ՄԻՋՆԱԿԱՐԳ ԴՊՐՈՑԻ ԴԱՍԱԳԻՐՔ

ԱՌԱՋԻՆ ՄԱՍ

ՈՒՍՄԱՆ 6-ՐԴ ԵՎ 7-ՐԴ ՏԱՐԻՆԵՐ

ՊԵՏՀՐԱՏ — ՈՒՍՄԱՆԿՀՐԱՏԲԱԺԻՆ
1933 ԵՐԵՎԱՆ

Բնագիրը հաստատված է ՌՍՖՍՀ ԼԺԿ կոլեգիայի կողմից

Ա. ԿԻՍԵԼՅՈՎ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

ՄԻՋՆԱԿԱՐԳ ԴՊՐՈՑԻ ԴԱՍԱԳԻՐՔ

ԱՌԱՋԻՆ ՄԱՍ

ՈՒՍՄԱՆ 6-ՐԴ ԵՎ 7-ՐԴ ՏԱՐԻՆԵՐ

Բնագրի 10-րդ հրատարակությունից խմբագրական փոփոխումներով թարգմանեց՝ ԱՐՇԱԿ ՏՈՆՅԱՆ

ՊԵՏՀՐԱՏ — ՈՒՍՄԱՆԿՀՐԱՏՐԱԺԻՆ
1933 ԵՐԵՎԱՆ

Պատ. խմբագիր՝ Արա Խանջյան
Տեխ. խմբագիր՝ Գ. Ջենյան
Լեզվ. խմբագիր՝ Ա. Տոնյան
Սրբագրիչ՝ Բ. Բաղդասարյան
Պետհրատի տպարան Գլավլիտ 8166 (բ), Պատվեր № 1367, Հրատ. № 2595, Տիրաժ 8000

Հանձնված է արտադրության 1 հունիսի 1933 թ.
Ստորագրված է տպագրելու 30 հունիսի 1933 թ.

ԱՌԱՋԻՆ ՀԱՏՎԱԾ

ՆԱԽՆԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐ

I. ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ՆՇԱՆԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆ

1. *Տառերի գործածությունը.* — *ա)* Թվերի ընդհանուր հատկությունները արտահայտելու համար: *Դիցուք մենք կամենում ենք գրավոր կերպ արտահայտել, վոր երկու թվերի արտադրյալը չի փոխվի, յեթե բազմապատկելիի և բազմապատկիչի տեղերը փոխանակենք: Այդ դեպքում մի թիվը նշանակելով* a *տառով, իսկ մյուսը՝* b *տառով, կարող ենք գրել հետևյալ հավասարումը՝*

$a \times b = b \times a$, *կամ ավելի կարճ* $ab = ba$,

յեթե մի անգամ ընդմիշտ պայմանավորվենք, վոր յերբ իրար կողքի գրված յերկու տառերի միջև վոչ մի նշան չկա, ապա այդ նշանակում է, վոր նրանց միջև բազմապատկման նշան է յենթադրվում:

Այդպես են վարվում ամեն անգամ, յեթե կամենում են արտահայտել, վոր մի հատկություն պատկանում է վոչ թե ինչվոր առանձին թվերի, այլ ամեն տեսակ թվերի:

Թվերի նշանակման համար տառերը սովորաբար վերցնում են լատինական (կամ ֆրանսական) այբբենից:

բ) Կրճատ արտահայտելու համար այն կանոնը, վորի միջոցով կարելի յե լուծել նման պայմաններ ունեցող խնդիրները, *վորոնք իրարից տարբերվում են տվյալ թվերի մեծությամբ միայն:*

Դիցուք, որինակ՝ լուծում ենք հետևյալ խնդիրը.

Գտնել 520-ի 3%-ը:

Այդ դեպքում այսպես ենք դատում.

վորևէ թվի 1%-ը կազմում է այդ թվի $\frac{1}{100}$ *մասը. կնշանակի՝*

$$520\text{-ի } 1\%\text{-ը կազմում է } \frac{520}{100} = 5,2;$$

$$» \quad 3\%\text{-ը} \quad » \quad \frac{520}{100} \times 3 = 15,6.$$

Մի քանի այսպիսի խնդիրներ լուծելով մենք նկատում ենք, վոր վորևէ թվի տոկոսները գտնելու համար բավական է այդ թիվը բաժանել 100-ի վրա և ստացած քանորդը բազմապատկել տոկոսների թվով: Այս դիտելիորեն արտահայտելու համար՝ խնդիրը կառաջարկենք հետևյալ ընդհանուր տեսքով.

Գտնել a *թվի* p%*-ը:*

Խնդիրն այսպես կլուծենք.

$$a \text{ թվի } 1\%\text{-ը կազմում ե } \frac{a}{100};$$

$$\text{» » } p\%\text{-ը » } \frac{a}{100}\times p.$$

Վորոնելի թիվը նշանակելով x տառով՝ մենք կարող ենք գրել հետևյալ հավասարությունը.

$$x=\frac{a}{100}\times p,$$

վորից անմիջապես յերևում ե, թե ինչպես կարելի յե գտնել տված վորևե թվի տոկոսները:

Վերցնենք մի ուրիշ որինակ: Թվաբանության մեջ կոտորակների բազմապատկման կանոնը բառերով այսպես ենք արտահայտում. կոտորակը կոտորակով բազմապատկելու համար պետք ե համարիչների արտադրյալը բաժանել հայտարարների արտադրյալի վրա: Տառային նշանակումների ոգնությամբ այս կանոնը կարող ենք շատ կարճ բանաձևել: Իրոք, առաջին կոտորակի համարիչը նշանակելով a և հայտարարը b, իսկ յերկրորդ կոտորակինը համապատասխանաբար c և d, կարող ենք գրել.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

Դժվար չե տեսնել, վոր այս գրությունը բազմապատկման ընդհանուր կանոն ե տալիս ամեն տեսակ կոտորակների համար, վորովհետև տառերի տակ մենք կարող ենք հասկանալ ամեն տեսակ թվեր:

Այդպես ել կոտորակների բաժանման կանոնի համար կունենանք հետևյալ գրությունը.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc},$$

Նկատենք հետևյալը.

Ամեն մի հավասարություն, վորը տառերի յեվ գործողությունների նշանների միջոցով վորեվե կապակցություն ե արտահայտում թվերի միջեվ, կոչվում ե բանաձեվ *(կամ ֆորմուլ):*

Բերենք մի քանի բանաձևեր ևս:

Յեթե ուղղանկյան հիմքը և բարձրությունը չափենք միևնույն գծային միավորով և հիմքի համար ստանանք b թիվը, իսկ բարձրության համար h թիվը, ապա այդ ուղղանկյան s մակերեսը, արտահայտած համապատասխան քառակուսի միավորներով, կարտահայտվի այսպիսի բանաձևով.

$$s=\frac{1}{2}bh,$$

Ֆիզիկայից հայտնի յե, վոր վորևե նյութի **տեսակարար կշիռ** *վորոշելու համար պետք ե այդ նյութի տվյալ քանակի կշիռը բաժանել նրա ծավալի վրա: Յեթե մարմնի կշիռը (գրամներով) նշանակենք p, նրա ծավալը (խորանարդ սանտիմետրերով) v և տեսակարար կշիռը d, ապա կարող ենք տեսակարար կշիռը վորոշելու այդ կանոնը կարճ արտահայտել հետևյալ բանաձևով՝*

$$d=\frac{p}{v},$$

2. Հանրահաշվական արտահայտություն։ Յեթե տառերով (կամ տառերով և թվերով) նշանակված մի քանի թվեր իրար հետ միացված են այնպիսի նշաններով, վորոնք նշում են, թե թվերի նկատմամբ ինչ գործողություններ և ինչ հաջորդականությամբ պետք է կատարել, ապա այդպիսի նշանակումը կոչվում է **հանրահաշվական արտահայտություն**։

Հանրահաշվական արտահայտության օրինակներ՝

$$\frac{a}{100}\times p, \qquad ab, \qquad 2x+1.$$

Կարճության համար հաճախ «հանրահաշվական արտահայտություն» անվան փոխարեն կասենք «արտահայտություն»։

Վորևե արտահայտություն հաշվել տառերի տվյալ թվային արժեքների համար՝ նշանակում է այդ արտահայտության մեջ տառերի փոխարեն դնել այդ թվային արժեքները և կատարել արտահայտության մեջ նշած բոլոր գործողությունները. այդպիսով ստացված թիվը կոչվում է հանրահաշվական արտահայտության **թվական** (թվային) **մեծություն** տառերի տվյալ թվային արժեքների համար։

Այսպես, օրինակ՝ $\frac{a}{100}\times p$ արտահայտության թվային արժեքը, յերբ $p=3$ և $a=520$, հավասար է.

$$\frac{520}{100}\times 3=5,2\times 3=15,6.$$

3. Հանրահաշվի մեջ դիտվող գործողությունները հետևյալներն են. գումարում, հանում, բազմապատկում, բաժանում, աստիճանում (աստիճան բարձրացնելը) և արմատում (արմատ հանելը)։ Թե ինչ են առաջին չորս գործողությունները, այդ հայտնի յե թվաբանությունից։ Հինգերորդ գործողությունը՝ աստիճանումը, բազմապատկման մասնավոր դեպքն է, յերբ իրարով բազմապատկվում են մի քանի հավասար արտադրիչներ։ Այդպիսի արտադրիչների արտադրյալը կոչվում է **աստիճան**, իսկ նրանց թիվը՝ **աստիճանի ցուցիչ** (կամ աստիճանացույց)։ Աստիճան բարձրացվող թիվը կոչվում է **աստիճանի հիմք**։ Յեթե վորևե թիվ իբրև արտադրիչ 2 անգամ է վերցվում, ապա արտադրյալը կոչվում է **յերկրորդ աստիճան**. յեթե վորևե թիվ իբրև արտադրիչ 3 անգամ է վերցվում, ապա արտադրյալը կոչվում է **յերրորդ աստիճան** և այլն։ Այսպես օրինակ՝ 5-ի 2-րդ աստիճանը 5×5 արտադրյալն է, այսինքն 25-ը. $\frac{1}{2}$-ի յերրորդ աստիճանն է՝ $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ արտադրյալը, այսինքն $\frac{1}{8}$-ը։ Թվի **առաջին աստիճան** կոչվում է հենց ինքը թիվը։

Յերկրորդ աստիճանն այլ կերպ կոչվում է **քառակուսի**, իսկ յերրորդ աստիճանը՝ **խորանարդ**։ Այդպիսի անուններ այն պատճառով են տրված, վոր $a\times a$ արտադրյալն արտահայտում է (քառակուսի միավորներով) այն քառակուսու մակերեսը, վորի կողմն a գծային միավոր յերկարություն ունի, իսկ $a\times a\times a$ արտադրյալն արտահայտում է (խորանարդ միավորներով) այն խորանարդի ծավալը, վորի կողմն a գծային միավոր յերկարություն ունի։

Արմատման մասին առայժմ չենք խոսի, վորովհետև այդ գործողությունը հանրահաշվի սկզբում քննության չի առնվում։

4. Հանրահաշվում գործածվող նշաններ։ Առաջին չորս գործողությունների նշանակման համար հանրահաշվի մեջ միևնույն նշաններն են գործածվում, ինչ վոր թվաբանության մեջ. միայն բազմապատկման նշանը, ինչպես արդեն ասացինք, սովորաբար չի գրվում, յեթե յերկու արտադրիչներն էլ, կամ նրանցից մեկը, նշանակված են տառերով։ Օրինակ՝ $a \times b$ (կամ $a \cdot b$) գրելու փոխարեն՝ գրում են ab, $3 \times a$ գրելու փոխարեն՝ $3a$։ Իբրև բաժանման նշան գործածվում է, անխտիր, կամ կրկնակետ (:), կամ հորիզոնական գիծ. այսպես՝ $a:b$ և $\frac{a}{b}$ արտահայտությունները միևնույն են նշանակում, այսինքն, վոր a թիվը բաժանված է b թվի վրա։

Աստիճանումն ընդունված է կրճատ այսպես արտահայտել. գրում են այն թիվը, վորը վերցվում է իբրև արտադրիչ (աստիճանի հիմքը), և նրա վերևը աջ կողմից դնում են մյուս թիվը (աստիճանի ցուցիչը), վոր ցույց է տալիս, թե բարձրացվող թիվը քանի՞ անգամ պետք է կրկնվի իբրև արտադրիչ։ Այսպես օրինակ՝ 3^4-ը (կարդացվում է 3-ի չորրորդ աստիճանը) փոխարինում է հետևյալ մանրամասն նշանակմանը՝ $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$։ Յեթե թվի մոտ աստիճանացույց չկա, ապա նրա աստիճանացույցը հասկացվում է 1. օրինակ՝ a նշանակում է նույնը, ինչ վոր a^1։

Վորևէ յերկու արտահայտությունների հավասարությունը նշանակվում է = նշանով, իսկ անհավասարությունը > (մեծ է) նշանով և < (փոքր է) նշանով։ Օրինակ՝ յեթե գրված է.

$$5+2=7; \qquad 5+2>6; \qquad 5+2<10,$$

ապա այդ նշանակում է $5+2$ հավասար է 7-ի, $5+2$ մեծ է 6-ից, $5+2$ փոքր է 10-ից։

5. Գործողությունների կարգը։ Թե ինչ կարգով պետք է կատարել հանրահաշվական արտահայտության մեջ նշված գործողությունները, այդ մասին պայմանավորվել են հետևյալը—նախ կատարել աստիճանումն ու արմատումը, ապա բազմապատկումն ու բաժանումը յեվ վերջապես գումարումն ու հանումը:

Այսպես, յեթե գրված է $3a^2b-\frac{b^3}{c}+d$ արտահայտությունը, ապա նրա հաշվելու ժամանակ նախ պետք է կատարենք աստիճանումը (a թիվը քառակուսի բարձրացնել և b թիվը խորանարդ), ապա բազմապատկումն ու բաժանումը (3-ը բազմապատկել a^2-ով և ստացած արդյունքը b-ով. b^3-ը բաժանել c-ի վրա) և վերջապես հանումն ու գումարումը ($3a^2b$-ից հանել $\frac{b^3}{c}$ և արդյունքին գումարել d)։

Յերբ խնդրի պայմաններն այնպես են, վոր կարիք է լինում շեղվել գործողությունների այս կարգից, ապա փակագծեր են գործածում։ Փակագծերը ցույց են տալիս, վոր նրանց մեջ առնված թվերի նկատմամբ գործողությունները պետք է մյուսներից շուտ կատարել։

Այսպես, թվաբանությունից գիտենք, վոր

$$5+7 \cdot 2 \quad \text{և} \quad (5+7)2$$

արտահայտությունները նույնը չեն նշանակում։ Առաջին դեպքում պետք է 7-ը բազմապատկել 2-ով և արդյունքը գումարել 5-ին (ստանում ենք 19)։

Յերկրորդ դեպքում նախ պետք է 5-ը և 7-ը գումարել և ապա արդյունքը բազմապատկել 2-ով (ստանում ենք 24)։

Նույնպես և յեթե գրված է՝

$$(a+b)c-d,$$

ապա այդ նշանակում է, վոր նախ պետք է գումարել a-*ն և* b-*ն, ապա ստացած թիվը բազմապատկել* c-*ով և ապա ստացածից հանել* d։

Յեթե կարիք է լինում փակագծերի մեջ առնել մի այնպիսի արտահայտություն, վորն արդեն փակագծեր ունի, ապա նոր փակագծերին սովորաբար վորեվե ուրիշ ձև են տալիս։ Որինակ այս արտահայտությունը՝

$$a\{b-[c+(d-e)]\},$$

նշանակում է, վոր d-*ից հանված է* e, *ստացած տարբերությունը գումարված է* c-*ին, ստացած գումարը հանված է* b-*ից և այդ տարբերությամբ բազմապատկված է* a-*ն։*

Փակագծերին սովորաբար այսպիսի անուն են տալիս՝ կլոր կամ փոքր փակագծեր՝ ( ), քառակուսի կամ միջակ փակագծեր՝ [ ], ձևավոր կամ մեծ փակագծեր՝ { }։

Յերբ արտահայտության մեջ մի քանի տեսակ փակագծեր կան, ապա գործողությունները սովորաբար նախ կատարում են փոքր փակագծերի մեջ առնված թվերի նկատմամբ, ապա միջակ փակագծերի մեջ դրվածների և ապա մեծ փակագծերի մեջ դրվածների նկատմամբ։

Փակագծերի մեջ նշված գործողությունները կատարելով մենք վոչնչացնում ենք/կամ, ինչպես ասում են, «բացում ենք» *փակագծերը։*

Այսպես,

$$5\{24-2[10+2(6-2)-3(5-2)]\}$$

արտահայտության մեջ նախ բացում ենք փոքր փակագծերը.

$$5\{24-2[10+2\cdot4-3\cdot3]\}$$

Այնուհետև բացում ենք միջակ փակագծերը.

$$5\{24-2\cdot9\}$$

Վերջապես բացում ենք մեծ փակագծերը.

$$5\cdot6=30.$$

Վարժություններ

1. *Քառակուսու կողմը հավասար է* a *մ-ի. Արտահայտել նրա պարագիծը և նրա մակերեսը։*
2. *Յեթե խորանարդի կողը հավասար է* c *սմ-ի, ինչպես կարտահայտվեն նրա մակերևույթը և նրա ծավալը։*
3. *Ուղղանկյան հիմքը* x *մ է, իսկ բարձրությունը* d *մ-ով կարճ է հիմքից։ Արտահայտել նրա մակերեսը։*

4. *Մի յերկնիշ թիվ բաղկացած է x տասնավորներից և y պարզ միավորներից. ընդամենը քանի՞ միավորներ կան այդ թվի մեջ։*

5. *Ցեռանիշ թվի մեջ կա* a *հարյուրավոր,* b *տասնավոր և* c *պարզ միավոր։ Ի՞նչ բանաձևով կարելի յե արտահայտել այդ թվի մեջ յեղած բոլոր միավորների թիվը։*

6. *Իրար հետ խառնել են 2 տեսակի թեյ. առաջին տեսակից վերցրած է* a *կգ, յերկրորդից* b *կգ։ Առաջին տեսակի թեյի կիլոգրամն արժե* m *ռուբլի, յերկրորդինը* n *ռուբլի։ Արտահայտել խառնուրդի մի կիլոգրամի գինը։*

7. *Հանրահաշվում ընդունված նշանների միջոցով գրել.*

ա) x *և* y *թվերի քառակուսիների գումարը.*

բ) x *և* y *թվերի գումարի քառակուսին.*

գ) x *և* y *թվերի քառակուսիների արտադրյալը.*

դ) x *և* y *թվերի արտադրյալի քառակուսին.*

ե) a *և* b *թվերի գումարի և նրանց տարբերության արտադրյալը.*

զ) m *և* n *թվերի գումարի և նրանց տարբերության քանորդը (վերջինս արտահայտել յերկու ձևով, այսինքն թե : նշանի և թե գծի միջոցով)։*

8. *Հաշվել հետևյալ արտահայտությունները, յերբ* $a=20$, $b=8$ *և* $c=3$.

ա) $(a+b)c$ *բ)* $a+bc$ *գ)* $(a+b)a-b$

դ) $(a+b)(a-b)$ *ե)* $(a+b):c$ *զ)* $\frac{a+b}{b-c}$

Պատմական տեղեկություններ

«Հանրահաշիվ» անվան ոտար ձևն է «ալգեբրա». այս բառն արաբական ծագում ունի։ Այս բառով եր սկսվում այն մաթեմատիկական աշխատանքի վերնագիրը, վոր գրել է արաբ գիտնական Ալխվարիզմին *(820 թ.)։*

Յեվրոպայում այս բառն առաջին անգամ գործածեց, իբրև իր մաթեմատիկական աշխատանքի վերնագիր, իտալացի մաթեմատիկոս Բոմբելլին *572 թվին, վորից հետո հետզհետե սկսեցին գործածել բոլոր մաթեմատիկոսները։*

Այս բառի նշանակությունը հասկանալի կլինի հավասարումների գլուխն անցնելուց հետո։

Թվերի նշանակման համար տառերի գործածությունն առաջին անգամ մտցրել է ֆրանսացի մաթեմատիկոս Վիետը *1591 թվին։ Նրանից հետո տառային նշանակումները հատկապես լայն չափերով գործածել է ֆրանսացի հռչակավոր փիլիսոփա և մաթեմատիկոս* Ռենե Դեկարտը *(1596—1650)։*

Ներկայումս հանրահաշվի մեջ գործածվող նշանները մտցված են տարբեր մաթեմատիկոսների կողմից տարբեր ժամանակներում։ Առաջները գործողությունների նշանակման համար գործ եյին ածում ամբողջ բառ և նույնիսկ նախադասություն։

Ավելի արագ հաշվումներ կատարելու գործնական պահանջը փորձեր եր առաջացնում առանձին, ամենից ավելի գործածական, բառերը կրճատելու, մինչև վոր, վերջապես, այդ բառերը կամ նրանց կրճատումները փոխարինվեցին հատուկ նշաններով։ Նշենք ամենից ավելի գործածական նշանների առաջացման ժամանակը։

Գումարման և հանման նշանները՝ «+» և «—», մտցրել է գերմա-

նացի մաթեմատիկոս Վիդմանը 1489 թվին։ Դեռ նրանից էլ առաջ պատահում են իտալացի մեծ նկարիչ Լեոնարդո-դա-Վինչիի ձեռագրերում։

Հավասարության նշանակման համար անգլիացի հանրահաշվական Ռեկորդը մտցրեց (1557 թվին) «=» նշանը, «վորովհետև,—ինչպես նա գրում է,—վորևէ յերկու առարկաներ չեն կարող ավելի հավասար լինել, քան միևնույն յերկարություն ունեցող յերկու զուգահեռ ուղիղները»։ Անգլիացի մի ուրիշ մաթեմատիկոս՝ Հերրիոտը մտցրեց «<» և «>» նշանները (1631 թվին) և կետն իբրև բազմապատկման նշան։

Գերմանացի մեծ մաթեմատիկոս Լայբնիցն առաջինը յեղավ, վոր մտցրեց (1694 թ.) «:» նշանը բաժանման նշանակման համար, վորը նախքան այդ գծով եր նշանակվում։

Փակագծերը՝ ( ), [] և { }, առաջին անգամ պատահում են ֆլամանդացի մաթեմատիկոս Ժիրարի գործերում (1629 թվին)։

Այս բոլոր նշանները միանգամից չեն գործածության մեջ մտել։ Մաթեմատիկոսներից վոմանք դեռևս շարունակում եյին ոգտվել մասամբ հին նշանակումներով։ Հանրահաշվական նշանների ամբողջությունն իր ներկա տեսքով կարելի յե վերջնականորեն կայունացած համարել միայն 18-րդ դարի վերջերին։ Այդ տեսակետից հսկայական ազդեցություն են արել անգլիացի մեծ գիտնական Իսահակ Նյուտոնի (1642—1727) աշխատությունները։

II. ԱՌԱՋԻՆ ՉՈՐՍ ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Վերհիշենք գումարման, հանման, բազմապատկման և բաժանման գործողությունների ամենագլխավոր հատկությունները, վորոնք արդեն հայտնի յեն թվաբանությունից, և վորոնք մեզ հանրահաշվի մեջ էլ շատ հաճախ պետք են գալու։

6. *Գումարում։* ա) Գումարը չի փոխվում գումարելիների տեղափոխումից (*գումարման տեղափոխական որենք*)։ Այսպես՝

$$3+8=8+3; \qquad 5+2+4=2+5+4=4+2+5$$

Ընդհանուր ձևով

$$a+b=b+a; \qquad a+b+c+\dots=c+a+b+\dots$$

Այստեղ բազմակետը ցույց է տալիս, վոր գումարելիների թիվը կարող է յերեքից ավելի լինել։

բ) Մի քանի գումարելիների գումարը չի փոխվի, յերբ նրանցից մի քանիսը փոխարինենք իրենց գումարով (*գումարման զուգորդական որենք*)։ Այսպես՝

$$3+5+7=3+(5+7)=3+12=15;$$

$$4+7+11+6+5=7+(4+5)+(11+6)=7+9+17=33$$

Ընդհանուր ձևով

$$a+b+c=a+(b+c)=b+(a+c) \text{ և այլն։}$$

Այս օրենքը յերբեմն այսպես են արտահայտում. գումարելիները կարելի յե ցանկացած ձևով խմբավորել:

գ) Վորպեսզի վորևե թվի ավելացնենք մի քանի թվերի գումարը, կարող ենք այդ թվին ավելացնել մեկը մյուսի յետևից ամեն մի գումարելին առանձին: *Այսպես՝*

$$5+(7+3)=(5+7)+3=12+3=15$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$a+(b+c+d+\ldots)=a+b+c+d+\ldots$$

7. *Հանում. ա)* Վորպեսզի վորևե թվից հանենք մի քանի թվերի գումարը, կարող ենք հանել մեկը մյուսի յետևից ամեն մի գումարելին առանձին: *Այսպես՝*

$$20-(5+8)=(20-5)-8=15-8=7$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$a-(b+c+d+\ldots)=a-b-c-d-\ldots$$

բ) Յերկու թվերի տարբերությունը գումարելու համար կարելի յե ավելացնել նվազելին յեվ հանել հանելին: *Այսպես՝*

$$8+(11-5)=8+11-5=14$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$a+(b-c)=a+b-c.$$

գ) Յերկու թվերի տարբերությունը հանելու համար կարելի յե հանել նվազելին յեվ ավելացնել հանելին, կամ նախ գումարել հանելին յեվ ապա հանել նվազելին: *Այսպես՝*

$$18-(9-5)=18-9+5=14$$

կամ

$$18-(9-5)=18+5-9=14$$

$$12-(17-8)=12+8-17=3$$

Վերջին օրինակի մեջ, ինչպես տեսնում ենք չի կարելի նախ նվազելին հանել և ապա հանելին գումարել, վորովհետև նվազելին մեծ ե այն թվից, վորից պետք ե հանենք.

Ընդհանուր ձևով՝

$$a-(b-c)=a-b+c$$

կամ

$$a-(b-c)=a+c-b$$

Վերջին յեղանակով պետք ե վարվել անպայման այն դեպքում, յերբ $a>b$.

8. *Բազմապատկում. ա)* Արտադրյալն արտադրիչների տեղափոխությունից չի փոխվում *(բազմապատկման տեղափոխականության օրենք): Այսպես՝*

$$4 \cdot 5=5 \cdot 4; \quad 3 \cdot 2 \cdot 5=2 \cdot 3 \cdot 5=5 \cdot 3 \cdot 2$$

Ընդհանուր ձեւով՝

$$ab=ba; \quad abc\ldots=bac\ldots=cba\ldots$$

բ) Մի քանի արտադրիչների արտադրյալը չի փոխվում, յերբ նրանցից միքանիսը փոխարինում ենք նրանց արտադրյալով *(բազմապատկման զուգորդական օրենք)*։ *Այսպես՝*

$$7 \cdot 3 \cdot 5=5 \cdot (3 \cdot 7)=5 \cdot 21=105.$$

Ընդհանուր ձեւով՝

$$abc=a(bc)=b(ac) \text{ և այլն.}$$

գ) Մի թիվ մի քանի թվերի արտադրյալով բազմապատկելու համար կարելի յե այդ թիվը բազմապատկել առաջին արտադրիչով, ստացած արդյունքը բազմապատկել յերկրորդ արտադրիչով յեվ այսպես շարունակել: *Այսպես՝*

$$3 \cdot (5 \cdot 4)=(3 \cdot 5) \cdot 4=15 \cdot 4=60;$$

Ընդհանուր ձեւով՝

$$a(bcd\ldots)=abcd\ldots$$

դ) Մի քանի թվերի արտադրյալը վորեվե թվով բազմապատկելու համար կարելի յե այդ թվով բազմապատկել արտադրիչներից մեկը, թողնելով մյուսները անփոփոխ: *Այսպես՝*

$$(3 \cdot 2 \cdot 5) \cdot 3=(3 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 5=3 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5=3 \cdot 2(5 \cdot 3).$$

Ընդհանուր ձեւով՝

$$(abc\ldots)m=(am)bc\ldots=a(bm)c\ldots=ab(cm)\ldots \text{ և այլն.}$$

ե) Յերկու կամ մի քանի թվերի գումարը վորեվե թվով բազմապատկելու համար կարելի յե ամեն մի գումարելին այդ թվով բազմապատկել յեվ արդյունքները գումարել: *Այսպես՝*

$$(5+3)7=5 \cdot 7+3 \cdot 7$$

Ընդհանուր ձեւով՝

$$(a+b+c+\ldots)m=am+bm+cm+\ldots$$

Նկատի ունենալով բազմապատկման տեղափոխական օրենքը՝ այս հատկությունը կարելի է այսպես արտահայտել. վորեվե թիվ մի քանի թվերի գումարով բազմապատկելու համար՝ կարելի յե այդ թիվը բազմապատկել ամեն մի գումարելիով առանձին յեվ ստացած արդյունքները գումարել: *Այսպես՝*

$$5 \cdot (4+6)=5 \cdot 4+5 \cdot 6$$

Ընդհանուր ձեւով՝

$$m(a+b+c+\ldots)=ma+mb+mc+\ldots$$

Այս հատկությունը կոչվում է բազմապատկման բաշխական *օրենք՝*

վորովհետև գումարի նկատմամբ կատարվող բազմապատկումը բաշխվում ե առանձին գումարելիների վրա։

գ) Բաշխական որենքը կարելի յե կիրառել նաև տարբերության վրա։ Այսպես՝

$$(8-5)\cdot 4=8\cdot 4-5\cdot 4;\qquad 7(9-6)=7\cdot 9-7\cdot 6.$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$(a-b)c=ac-bc;\qquad a(b-c)=ab-ac,$$

այսինքն տարբերությունը վորեվե թվով բազմապատկելու համար կարելի յե զատ-զատ բազմապատկել նվազելին յեվ հանելին յեվ ապա առաջին արդյունքից հանել յերկրորդը. վորեվե թիվ մի տարբերությամբ բազմապատկելու համար կարելի յե այդ թիվը բազմապատկել նվազելիով առանձին յեվ հանելիով առանձին յեվ առաջին արդյունքից հանել յերկրորդը։

9. *Բաժանում. ա)* Գումարը վորեվե թվի վրա բաժանելու համար կարելի յե այդ թվի վրա ամեն մի գումարելին առանձին բաժանել յեվ ստացած արդյունքները գումարել։ *Այսպես՝*

$$(30+12+5):3=\frac{30}{3}+\frac{12}{3}+\frac{5}{3}=10+4+1\frac{2}{3}.$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$(a+b+c+\ldots):m=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\ldots$$

բ) Տարբերությունը վորեվե թվի վրա բաժանելու համար կարելի յե նվազելին առանձին յեվ հանելին առանձին բաժանել այդ թվի վրա յեվ ապա առաջին արդյունքից յերկրորդը հանել։

$$(20-8):5=\frac{20}{5}-\frac{8}{5}=4-1\frac{3}{5}.$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$(a-b):m=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}.$$

գ) Արտադրյալը վորեվե թվի վրա բաժանելու համար կարելի յե արտադրիչներից մեկը բաժանել այդ թվի վրա, թողնելով մյուսներն անփոփոխ։

$$(40\cdot 12\cdot 8):4=10\cdot 12\cdot 8=40\cdot 3\cdot 8=40\cdot 12\cdot 2.$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$(abc\ldots):m=(a:m)bc\ldots=a(b:m)c\ldots \text{ և այլն.}$$

դ) Վորեվե թիվ մի քանի թվերի արտադրյալի վրա բաժանելու համար կարելի յե այդ թիվը բաժանել առաջին արտադրիչի վրա, ստացած քանորդը բաժանել յերկրորդ արտադրիչի վրա, յեվ այսպես շարունակել։

$$120:(2\cdot 5\cdot 3)=60:(5\cdot 3)=12:3=4.$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$a:(bc)=(a:b):c.$$

ե) Նշենք բաժանման հետևյալ կարևոր հատկությունն ևս.

Յեթե բաժանելին յեվ բաժանարարը բազմապատկենք (կամ բաժանենք) միևնույն թվով, ապա քանորդը չի փոխվի:

Վերցնենք որինակ՝

$$8:3=\frac{8}{3}$$

և բաժանելին ու բաժանարարը բազմապատկենք, ասենք թե, 5-ով. կստանանք՝

$$(8\cdot5):(3\cdot5)=\frac{8\cdot5}{3\cdot5},$$

վորը 5-ով կրճատելուց հետո կտա նախկին քանորդը՝ $\frac{8}{3}$։

Վերցնենք կոտորակների բաժանման մի որինակ՝

$$\frac{3}{4}:\frac{5}{6}=\frac{3\cdot6}{4\cdot5}.$$

Բաժանելին և բաժանարարը բազմապատկենք, որինակ՝ $\frac{2}{7}$*-ով. Նոր քանորդը կլինի՝*

$$\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}\right):\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{7}\right),$$

վորը կոտորակների բազմապատկման և բաժանման կանոնների համաձայն հավասար է՝

$$\frac{3\cdot2}{4\cdot7}:\frac{5\cdot2}{6\cdot7}=\frac{3\cdot2\cdot(6\cdot7)}{4\cdot7\cdot(5\cdot2)}=\frac{3\cdot2\cdot6\cdot7}{4\cdot7\cdot5\cdot2},$$

վորը 2-ով և 7-ով կրճատելուց հետո տալիս է նախկին քանորդը՝ $\frac{3\cdot6}{4\cdot5}$։

Ընդհանրապես, ինչպիսի թվեր էլ վոր լինեն a, b *և* m *թվերը, միշտ կունենանք* $(am):(bm)=a:b$, *վոր կարելի յե նաև այսպես գրել.*

$$\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}\,։$$

Յեթե քանորդը չի փոխվում, յերբ բաժանելին և բաժանարարը բազմապատկում ենք միևնույն թվով, ապա նա չի փոխվում նաև այն դեպքում, յերբ բաժանելին և բաժանարարը բաժանում ենք միևնույն թվի վրա, վորովհետև վորևէ թվի վրա բաժանելը համազոր է նրա հակադարձ թվով բազմապատկելուն։

10. *Գործողությունների հատկությունների կիրառումը։* *Գործողությունների այն հատկություններից, վոր նշեցինք, կարելի յե ոգտվել հանրահաշվական արտահայտությունների ձևափոխման համար. որինակ՝*

ա) $a+b+a+2+b+a+8$։ *Ոգտվելով գումարման զուգորդական հատկությունից՝ գումարելիներն այսպես կխմբավորենք՝* $(a+a+a)+(b+b)+(2+8)$։ *Այս գումարն ավելի կարճ կարելի յե այսպես գրել՝* $(a\cdot3)+(b\cdot2)+10$, *վորն ոգտվելով բազմապատկման տեղափոխական հատկությունից, կարելի յե այսպես գրել՝* $3a+2b+10$։

բ) $a+(b+a)$։ Վորպեսզի a թվին ավելացնենք $(a+b)$ գումարը, կարելի է a-ին գումարել b և ապա a. կստանանք $a+b+a$։ Գումարելիներն այսպես խմբավորենք. $(a+a)+b$։ Այս գումարն ավելի կարճ կարելի է այսպես գրել. $a \cdot 2+b$ և էլ ավելի կարճ՝ $2a+b$։

գ) $a \cdot (3x^2a)$։ Վորպեսզի a թիվը բազմապատկենք $3x^2a$ արտադրյալով, կարելի է a-ն բազմապատկել 3-ով, ստացած արդյունքը բազմապատկել x^2-ով և նոր ստացած արդյունքն էլ a-ով։ Կստանանք՝ $a \cdot 3x^2a$։ Այս արտադրյալը կարելի է գրել՝ $3a^2x^2$, յեթե տառերը գրենք այբբենական կարգով և թվային արտադրիչն սկզբում։

դ) $\left(\frac{1}{5}ax\right) \cdot 10$։ Արտադրյալը 10-ով բազմապատկելու համար կարելի է 10-ով բազմապատկել վորևե արտադրիչը։ Բազմապատկենք $\frac{1}{5}$-ը 10-ով կստանանք $2ax$։

ե) $(a+x+1) \cdot 3$։ Բազմապատկման բաշխական օրենքի համաձայն կունենանք՝ $(a \cdot 3)+(x \cdot 3)+(1 \cdot 3)$, վոր կարելի է այսպես գրել՝ $3a+3x+3$։

զ) $\frac{9ab}{3}$։ Արտադրյալը վորևե թվի վրա բաժանելու համար կարելի է մի արտադրիչը բաժանել այդ թվի վրա. այստեղ $9ab$ արտադրյալի 9 արտադրիչը կբաժանենք 3-ի վրա և կստանանք $3ab$։

Վարժություններ

Պարզեցնել հետևյալ արտահայտությունները, ամեն անգամ բացատրելով, թե գործողությունների ինչ հատկություններից ենք օգտվում յուրաքանչյուր օրինակում։

9.	$a+b+a+b+a$	$x+10+(12-x)+3$
10.	$5+a(b-5)+a$	$x+(a+x)$
11.	$m+(n-m)$	$5aabxabxx$
12.	$(3xy) \cdot (2z)$	$\left(\frac{2}{3}ax\right) \cdot 3$
13.	$(x+3) \cdot 5$	$7(x+y+z)$

ՅԵՐԿՐՈՐԴ ՀԱՏՎԱԾ

ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԸ ՅԵՎ ՆՐԱՆՑ ՆԿԱՏՄԱՄԲ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

I. ԳԱՂԱՓԱՐ ԱՅՆՊԻՍԻ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ, ՎՈՐՈՆՔ ԿԱՐՈՂ ԵՆ ԴԻՏՎԵԼ ՅԵՐԿՈՒ ՀԱԿԱԴԻՐ ԻՄԱՍՏՆԵՐՈՎ

11. *Խնդիր 1. Ջերմաչափը կեսգիշերին ցույց էր տալիս 2 աստիճան, իսկ կեսօրին 5 աստիճան։ Քանի՞ աստիճանով է փոփոխվել ջերմաստիճանը կեսգիշերից մինչև կեսօր։*

Այս խնդրում պայմանները բավականաչափ պարզ չեն արտահայտված. պետք է նաև նշել՝ ջերմաչափը կեսգիշերին տաքությո՞ւն 2 աստիճան էր ցույց տալիս, թե ցրտություն 2 աստիճան, այսինքն՝ սնդիկային սյան գագաթը ջերմաչափի մեջ կեսգիշերին 2 բաժանմունք բարձր էր, թե 2 բաժանմունք ցած այն գծից, վորի մոտ նշանակված է 0°. Նման ցուցմունքներ պետք է անել նաև կեսօրվա ջերմաստիճանի նկատմամբ։ Յեթե և՛ կեսգիշերին և՛ կեսօրին ջերմաչափը տաքություն էր ցույց տալիս, ապա ջերմաստիճանն այդ ժամանակամիջոցում տաքություն 2 աստիճանից բարձրացել է մինչև տաքություն 5 աստիճանը, կնշանակի փոփոխվել է 3 աստիճանով. սակայն յեթե կեսգիշերին ջերմաչափը ցույց էր տալիս ցրտություն 2 աստիճան (0°-ից ցած), իսկ կեսօրին տաքություն 5 աստիճան (0°-ից բարձր), ապա ջերմաստիճանը բարձրացել է 2+5-ով, այսինքն 7 աստիճանով։ Կարող էր նաև պատահել, վոր ջերմաստիճանը կեսգիշերին ցրտություն 2° լիներ, իսկ կեսօրին նույնպես ցրտություն 5° (այդ դեպքում ջերմաստիճանը վոչ թե բարձրացած կլիներ, այլ 3 աստիճան իջած), կամ կարող էր պատահել, վոր ջերմաստիճանը կեսգիշերին տաքություն 2° լիներ, իսկ կեսօրին ցրտություն 5° (այդ դեպքում ջերմաստիճանն իջած կլիներ 7 աստիճանով)։

Այս խնդրում մենք խոսեցինք այնպիսի մեծության մասին, վորն ուղղությունն *ունի՝ ջերմաստիճանի աստիճանների թիվը կարող է ջերմաչափի զրոյագծից թե՛ դեպի վերև և թե՛ դեպի ներքև վերցվել։ Ընդունված է 0°-ից բարձր ջերմաստիճանը (տաքությունը) դրական համարել և այդ նշանակել աստիճանների թվի առաջ + նշան դնելով, իսկ 0°-ից ցած ջերմաստիճանը (ցրտությունը) բացասական համարել և այդ նշանակել աստիճանների թվի առաջ — նշան դնելով (թյուրիմացություն չի առաջանա, յեթե առաջին թիվը բոլորովին առանց նշանի վերցնենք)։*

Այժմ մեր խնդիրն այսպես արտահայտենք. Ջերմաչափը կեսգիշերին ցույց էր տալիս —2°, իսկ կեսօրին +5°։ Քանի՞ աստիճանով է փոփոխվել ջերմաստիճանը կեսգիշերից մինչև կեսօր։ Այս տեսքով խնդիրը միանգա-

մայն վորոշ պատասխան է ստանում, այն է՝ ջերմաստիճանը բարձրացավ 2+5, այսինքն 7 աստիճանով:

Խ ն դ ի ր 2. Երբ Բաքու-Թիֆլիս յերկաթգծի արագընթաց գնացքը 100 կիլոմետր հեռավորության վրա յեր գտնվում Գանձակից (այս կայարանը գտնվում է Թիֆլիսի և Բաքվի միջև), այն ժամանակ այդ գծի մարդատար գնացքը գտնվում եր Գանձակից 50 կիլոմետրի վրա: Ի՞նչ հեռավորության վրա եյին գտնվում այդ գնացքներն իրարից այդ ժամանակ:

Այս տեսքով խնդիրը լիովին վորոշ չէ. ինչպես նրա մեջ չի ասված՝ յերկու գնացքներն եյ Գանձակից դեպի մի՞ կողմ եյին գտնվում, որինակ դեպի Բաքու, թե մեկը դեպի մի կողմ, իսկ մյուսը դեպի մյուս կողմ: Յեթե յերկուսն եյ դեպի մի կողմ եյին գտնվում, ապա նրանց հեռավորությունը յեղել է 100—50, այսինքն 50 կիլոմետր. իսկ յեթե Գանձակից դեպի տարբեր կողմեր եյին գտնվում, ապա նրանց հեռավորությունը յեղել է 100+50, այսինքն 150 կիլոմետր: Ուրեմն վորպեսզի այս խնդիրը վորոշ լինի, բավական չէ միայն իմանալ գնացքների հեռավորությունը Գանձակից, այլ պետք է նաև նշել, թե այդ հեռավորություններն ինչ ուղղություններով պետք է վերցնենք Գանձակից:

Այստեղ դարձյալ ունենք այնպիսի մեծության որինակ, վորի մեջ, բացի չափից, դիտում ենք նաև ուղղությունը: Ուրեմն մի վորևէ գծի (որինակ յերկաթգծի) վրա նրա վորոշ տեղից (որինակ Գանձակ կայարանից) մի վորոշ հեռավորություն կարող ենք վերցնել թե մի ուղղությամբ (որինակ դեպի Բաքու) և թե մյուս, հակադիր ուղղությամբ (որինակ դեպի Թիֆլիս):

Սովորական (թվաբանական) թվերը բավական չեն, վորպեսզի արտահայտեն հեռավորությունների թե՛ չափը և թե՛ ուղղությունը: Պայմանավորվենք այսպիսի դեպքերում հետևյալ կերպ վարվել:

Բաքու-Թիֆլիս գծի յերկու ուղղություններից վորևէ մեկը (որինակ Թիֆլիսից դեպի Բաքու) անվանենք դրական, իսկ հակադիր ուղղությունը (Բաքվից դեպի Թիֆլիս) բացասական. դրա համեմատ եյ այն հեռավորությունները, վորոնք դրական ուղղությամբ են վերցվում, կանվանենք դրական հեռավորություններ, իսկ այն հեռավորությունները, վորոնք բացասական ուղղությամբ են վերցվում, կանվանենք բացասական հեռավորություններ: Դրական հեռավորությունները կարտահայտենք + նշանով (կամ բոլորովին առանց նշանի) վերցրած թվերով, իսկ բացասական հեռավորությունները՝ — նշանով վերցրած թվերով: Այսպես որինակ, յեթե գնացքը գտնվում է մի տեղում, վորը 100 կիլոմետր հեռու է Գանձակից Բաքվի ուղղությամբ, ապա մենք կասենք, վոր նրա հեռավորությունը Գանձակից հավասար է +100 կիլոմետրի (կամ պարզապես 100 կիլոմետրի). իսկ յեթե գնացքը գտնվում է Գանձակից, ասենք, 50 կիլոմետր հեռու Թիֆլիսի ուղղությամբ, ապա կասենք, վոր նրա հեռավորությունը Գանձակից հավասար է —50 կիլոմետրի: Այստեղ + և — նշանները, իհարկե, գումարման և հանման գործողություն չեն նշանակում, այլ միայն գործ են ածվում ուղղությունների պայմանական նշանակման համար:

Այժմ մեր խնդիրն այսպես արտահայտենք. յերբ Բաքու-Թիֆլիս գծի արագընթաց գնացքը Գանձակից +100 կմ (կամ պարզապես 100 կմ) հեռավորության վրա յեր գտնվում, այն ժամանակ այդ գծի մարդատար գնացքը Գանձակից —50 կմ հեռավորության վրա յեր գտնվում: Այդ ժամանակ գնացքներն ինչ հեռավորություն ունեյին իրարից:

Այժմ խնդիրը միանգամայն ճշգրտորեն է արտահայտված, և միանգամայն վորոշ էլ պատասխան է ստացվում (տ. գծ. 1, վորի վրա սլաքը ցույց

Գծ. 1.

է տալիս գծի դրական ուղղությունը). գնացքները գտնվում եյին 100+50, այսինքն 150 կիլոմետր հեռավորության վրա։

12. Ուրիշ մեծություններ, վորոնք կարող են դիտվել յերկու հակադիր իմաստներով։ Բացի նախընթաց խնդիրներում նշած մեծություններից կան և́լի ուրիշ շատերը, վորոնք նույնպես ուղղություն ունեն, այսինքն կարող են յերկու հակադիր իմաստներով դիտվել։ Այդպիսի մեծություններ են օրինակ՝

մուտքը, վորը հակադիր իմաստով կլինի ծախս (ելք)
շահումը, » » » » կորուստ,
ոգուտը, » » » » վնաս,
ունեցվածքը, » » » » պարտք

և այլն։

Յեթե պայմանավորվենք մուտքը, շահումը, ոգուտը, ունեցվածքը... համարել դրական մեծություններ և նրանք արտահայտել + նշանով (կամ առանց նշանի) վերցրած թվերով, ապա ծախքը, կորուստը, վնասը, պարտքը... պետք է համարել նույն տեսակի, բայց բացասական, մեծություններ և նրանք արտահայտել — նշանով վերցրած թվերով. այդ դեպքում կարելի յե ասել, վոր ծախքը բացասական մուտք է, կորուստը բացասական շահում է և այլն։ Այսպիսի պայմանավորումից հետո հասկանալի կլինեն, օրինակ, այսպիսի խոսքերը՝ բնակարանային ընկերությունը բնակարաններից մուտք ունեցավ հունվարին +200 ռուբլի, փետրվարին +150 ռուբլի, մարտին —50 ռուբլի (կնշանակի՝ մարտին ծախք ունեցավ 50 ռուբլի). կամ այսպիսի խոսքերը՝ մեծ յեղբոր ունեցվածքը 5000 ռուբլու յեր, միջնակինը 3000 ռուբլու, փոքրինը —500 ռուբլու (կնշանակի փոքր յեղբայրն ունեցվածք չուներ, այլ պարտք ուներ 500 ռուբլի)։

Պետք է, սակայն ասել, վոր գոյություն ունեն բազմաթիվ մեծություններ, վորոնք չեն կարող յերկու հակադիր իմաստներով վերցվել, վորոնց մեջ չի կարելի «ուղղություն» նշել. այդպիսի մեծություններ են օրինակ՝ ծավալը, խտությունը, կշիռը և այլն։

13. Հարաբերական թվեր։ Թվաբանության մեջ քննության առնվող թվերի միջոցով այնպիսի մեծություններն ենք արտահայտում, վորոնց ուղղությունը նկատի չի ունեցվում (յերբ, օրինակ՝ հետաքրքրվում են իմանալու վորևե հեռավորության չափը միայն, բայց վոչ այն ուղղությունը, վորով պետք է այն վերցնել)։ Մինչդեռ հանրահաշվի մեջ քննու-

թյան առնվող թվերի միջոցով մենք արտահայտում ենք մեծությունների և՛ չափը և՛ ուղղությունը։ Դրա համար մեծությունը, վերցնելով որևէ մեկ իմաստով, նշանակում ենք՝ առջևը + նշան դրած թվով. իսկ նույն մեծությունը, վերցնելով հակադիր իմաստով, նշանակում ենք՝ առջևը — նշան դրած թվով։

Առջևը + նշան ունեցող թիվը (+ նշանը կարելի է և չդն -վում է դրական թիվ. առջևը — նշան ունեցող թիվը կոչվում է բացասական թիվ։ Այսպես՝ $+10$, $+\frac{1}{2}$, $+0,3$ (կամ 10, $\frac{1}{2}$, $0,3$) դրական թվեր են, իսկ -8, $-\frac{5}{7}$, $-3,25$ բացասական թվեր են։ Թվերին միացնում են նաև 0-ն (զերոն), չդնելով այն ո՛չ դրական և ո՛չ էլ բացասական թվերի մեջ։ $+0$, -0 և պարզապես 0 նշանակումները հավասարազոր են միմյանց։

Դրական ու բացասական թվերը և զերոն կոչվում են հարաբերական թվեր, որպեսզի տարբերվեն սովորական (կամ թվաբանական կամ բացարձակ) թվերից, որոնք իրենց առջև ո՛չ մի նշան չունեն։

Հարաբերական թվի բացարձակ մեծություն կոչվում է այդ թիվը, վերցրած առանց նշանի. այսպես՝ -10 թվի բացարձակ մեծությունը 10 է, $+5$ թվի բացարձակ մեծությունը 5 է։

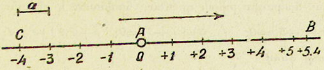
Երկու հարաբերական թվեր հավասար են համարվում, չեթե նրանց բացարձակ մեծությունները և նշանները նույնն են։

14. Թվերի պատկերացումը ուղիղի հատվածների միջոցով։ Ուղիղի հատված (գծ. 2) կոչվում է որևէ ուղիղ գծի մի մասը, որ սահմանափակված է յերկու կողմից, օրինակ՝ մի կողմից A կետով և մյուս կողմից B կետով։ Ամեն մի հատվածի մեջ կարելի յե տարբերել առաջին՝ նրա յերկարությունը, յերկրորդ՝ ուղղությունը, որն ամեն մի տվյալ հատվածի համար կարող է յերկուսը լինել։ Օրինակ՝ մեր հատվածի մեջ ուղղությունը կարելի յե վերցնել կամ A կետից դեպի B կետը կամ ընդհակառակը, B կետից դեպի A կետը։ Յեթե այդ հատվածը քննության ենք առնում A-ից դեպի B տանող ուղղությամբ, ապա A կետը կոչում ենք հատվածի սկիզբը, իսկ B կետը՝ հատվածի վերջ։

Գծ. 2.

Այդպիսի հատվածների միջոցով մենք կարող ենք հարաբերական թվերը դիտելիորեն արտահայտել հետևյալ ձևով։ Կվերցնենք որևէ ուղիղ (օրինակ՝ հորիզոնական ուղիղ) և կպայմանավորվենք, թե այդ ուղիղի յերկու ուղղություններից վո՛ր մեկն ենք համարում դրական (գծ. 3)։ Ընդունենք, օրինակ՝ ձախից դեպի աջ ուղղությունը (որը ցույց է տված սլաքով) իբրև դրական ուղղություն, այդ դեպքում հակադիր ուղղությունը՝ աջից դեպի ձախ, կլինի բացասական ուղղությունը։ Այնուհետև որևէ ab յերկարություն (որը պատկերացված է գծագրում) կընդունենք իբրև յերկարության միավոր։ Դիցուք հիմա տված է որևէ դրական թիվ, օրինակ՝ $+5,4$։

Կվերցնենք մեր ուղիղի վրա մի որևէ A կետ և նրանից սկսած դեպի աջ կդնենք յերկարության ab միավորը 5,4 անգամ։ Կստանանք AB հատվածը, վորի յերկարությունը հավասար ե 5,4 միավորի և վորի ուղղությունը դրական ե։ Հենց այդ հատվածն ել դիտելիորեն կարտահայտի +5,4 թիվը։ Այժմ վերցնենք վորևե բացասական թիվ, որինակ՝ —4։ Այս թիվը դիտելիորեն պատկերացնելու համար՝ նույն A կետից դեպի ձախ կդնենք յերկարության 4 միավոր։ Կստանանք AC հատվածը, վորի յերկարությունը հավասար ե 4 միավորի, իսկ ուղղությունը բացասական ե. կնշանակի այդ հատվածն արտահայտում ե —4 թիվը։



Գծ. 3.

Կարելի յե յերևակայել, վոր բոլոր հարաբերական թվերը արտահայտված են ուղղություն ունեցող (ուղղյալ) հատվածներով, վորոնք վերցված են միևնույն ուղիղի վրա միևնույն A կետից, վոր ընդունված ե վորպես հատվածների սկիզբ։ Այդ դեպքում ուղիղի այն մասի վրա, վորը գտնվում ե A-ից դեպի աջ, պատկերացված կլինեն դրական թվերը, իսկ ուղիղի այն մասի վրա, վորը գտնվում ե A-ից դեպի ձախ, պատկերացված կլինեն բացասական թվերը։ Զերո թիվը այդ ուղիղի վրա արտահայտվում ե վոչ թե հատվածով, այլ մի կետով՝ հենց A կետով։ Այդպիսի ուղիղը հաճախ կոչվում ե թվային ուղիղ կամ թվային առանցք:

Քանի վոր այն հատվածների ուղղությունը, վորոնք արտահայտում են + նշանով թվերը, հակադիր ե այն հատվածների ուղղությանը, վորոնք արտահայտում են — նշանով թվերը, ապա հենց այդ նշաններն ել ընդունված ե անվանել հակադիր նշաններ։ Ամեն յերկու թվեր, վորոնց նշանները հակադիր են, իսկ բացարձակ մեծությունները հավասար, ինչպես որինակ՝ +3 և —3, $+\frac{1}{2}$ և $-\frac{1}{2}$ և այլն, կոչվում են հակադիր թվեր:

Այժմ տեսնենք, թե ինչպես են կատարվում գործողությունները հարաբերական թվերի նկատմամբ։

Ո. ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ

15. Խնդիր. Կոոպերատիվ ընկերությունն ոգուտ ստացավ հունվարին a ռուբլի և փետրվարին b ռուբլի։ Ինչքան ոգուտ ստացավ ընկերությունը 2 ամսվա ընթացքում։

Գրենք այդ խնդրի լուծման բանաձևը։ Պարզ ե, վոր յերկու ամսում ստացած ոգուտը հավասար ե այն ոգուտների գումարին, վորոնք ստացված են ամեն մեկ ամսում առանձին։ Վորոնելի գումարը նշանակելով x, կստանանք հետևյալ բանաձևը.

$$x=a+b.$$

Բայց կոոպերատիվը կարող ե այդ ամիսներից մեկում կամ նույնիսկ յերկուսումն ել վոչ թե ոգուտ, այլ վնաս ունենալ։ Վորպեսզի մեր բանա-

ձևը կարելի լինի նաև այդպիսի դեպքերում կիրառել, մենք պետք է a և b թվերի տակ հասկանանք հարաբերական թվեր, այսինքն դրական կամ բացասական թվեր, նայած թե տվյալ ամսում օգուտ է ստացվել թե վնաս։ Այսպիսով մենք պետք է գիտենանք հարաբերական թվերն իրար հետ գումարելը։

16. ***Երկու թվերի գումարումը։*** *Նախ քննության առնենք հարաբերական թվերի գումարման երկու մասնավոր դեպքեր։*

ա) Երկու հակադիր թվերի գումարը հավասար է զերոյի։ *Այսպես՝*

$$(+5)+(-5)=0; \quad (-3)+(+3)=0; \quad (+4{,}7)+(-4{,}7)=0$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$(+a)+(-a)=0.$$

Իրոք, եթե կոոպերատիվը մի ամսում օգուտ է ստացել, իսկ մյուս ամսում ճիշտ նույնքան վնաս, ապա հետևանքն այն է լինում, որ ոչ օգուտ է ստացած լինում, ոչ էլ վնաս։

Ճիշտ այդպես էլ եթե գնացքը կայարանից որևէ ուղղությամբ անցել է 5 կմ, հետո էլ հակառակ ուղղությամբ նույնպես 5 կմ, ապա արդյունքն այն է, որ նա բոլորովին չի հեռացել կայարանից։

բ) Որևէ թվի զերո գումարել կամ զերոյին որևէ թիվ ավելացնել նշանակում է այդ թիվը թողնել անփոփոխ։ *Այսպես՝*

$$(+75)+0=+75; \quad (-75)+0=-75;$$

$$0+(+3{,}5)=+3{,}5; \quad 0+(-3{,}5)=-3{,}5.$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$(+a)+0=+a; \quad (-a)+0=-a.$$

Իրոք, եթե կոոպերատիվն առաջին ամսում ստացել է 75 ռուբլի օգուտ կամ վնաս, իսկ երկրորդ ամսում ոչ օգուտ է ստացել և ոչ էլ վնաս, ապա երկու ամիսը լրանալուց հետո նրա օգուտը կամ վնասը նույնն է մնացել, ինչ որ առաջին ամսի վերջում։

Այժմ վերադառնանք § 15-ի խնդրին։ Նրա լուծման ընդհանուր բանաձևն էր՝

$$x=a+b.$$

Քննենք այն տարբեր դեպքերը, որոնք կարող են տեղի ունենալ, եթե a և b տառերը փոխարինենք տվյալ թվերով։

1-ին դեպք. *Թե առաջին և թե երկրորդ ամսում օգուտ է ստացված։*

Օրինակ՝ առաջին ամսում ստացված է 200 ռուբլի օգուտ, իսկ երկրորդ ամսում 150 ռուբլի օգուտ։ Այս դեպքում $a=200$; $b=150$։ Ակնհայտ է, որ

$$x=(+200)+(+150)=+350,$$

այսինքն կոոպերատիվը յերկու ամսում ստացավ 350 ռուբլի ոգուտ։

2-րդ դեպք. *Թե առաջին և թե յերկրորդ ամսում վնաս է ստացվել։*

Որինակ՝ առաջին ամսում վնաս է յեղել 200 ռուբլի, իսկ յերկրորդ ամսում 150 ռուբլի։ Այս դեպքում a=—200; b=—150։ *Ակնհայտ է, վոր*

$$x=(-200)+(-150)=-350,$$

այսինքն կոոպերատիվը յերկու ամսում վնաս է ունեցել 350 ռուբլի։

Այս որինակներից կարելի յե հետևյալ յեզրակացությունն անել.

Յերկու նույնանշան թվեր գումարելու համար պետք է նրանց բացարձակ մեծությունները գումարել յեվ դնել նույն նշանը։

3-րդ դեպք. *մի ամսում ոգուտ է ստացվել, մյուս ամսում վնաս, և ոգուտն ավելի մեծ է քան վնասը։*

Որինակ՝ առաջին ամսում 200 ռուբլի ոգուտ է ստացվել, իսկ յերկրորդ ամսում 150 ռուբլի վնաս։

Այս դեպքում a=+200; b=—150։ *Ակնհայտ է, վոր կոոպերատիվը վերջին հաշվով 50 ռուբլի ոգուտ ստացավ, այսինքն*

$$x=(+200)+(-150)=+50.$$

4-րդ դեպք. *մի ամսում ոգուտ է ստացվել, մյուս ամսում վնաս, և ոգուտն ավելի քիչ է, քան վնասը։*

Որինակ՝ առաջին ամսում ստացվել է 200 ռուբլի վնաս, իսկ յերկրորդ ամսում 150 ռուբլի ոգուտ։

Այս դեպքում a=—200; b=+150։ *Ակնհայտ է, վոր վերջին հաշվով կոոպերատիվը յերկու ամսում 50 ռուբլի վնաս ստացավ, այսինքն*

$$x=(-200)+(+150)=-50.$$

Վերջին յերկու որինակներից կարելի յե հետևյալ յեզրակացության հանել.

Յերկու տարանշան թվեր գումարելու համար պետք է գտնել նրանց բացարձակ մեծությունների տարբերությունը յեվ վերջինիս առաջ դնել այն թվի նշանը, վորի բացարձակ մեծությունն ավելի մեծ է։

Յեթե + նշանը հապավենք դրական թվի առաջ, ապա վերի հավասարությունները կարող ենք ավելի կարճ գրել հետևյալ ձևով՝

$$200+(-150)=50; \quad -200+150=-50.$$

17. *Գումարման կանոնների ուրիշ արտահայտությունը։ Գումարման այն յերկու կանոնները, վոր մենք նշեցինք, կարելի յե ուրիշ յերկու կանոններով փոխարինել, վորոնք շատ հարմար են կիրառման համար.*

ա) Գումարել դրական թիվը նշանակում է գումարել նրա բացարձակ մեծությունը։ *Այսպես՝*

$$(+7)+(+3)=+10 \text{ և } (+7)+3=7+3=10.$$
$$(-7)+(+3)=-4 \text{ և } (-7)+3=-7+3=-4.$$

բ) Գումարել բացասական թիվը նշանակում է հանել նրա բացարձակ մեծությունը: *Այսպես՝*

$$(+7)+(-10)=-3 \text{ և } (+7)-10=7-10=-3;$$
$$(-7)+(-10)=-17 \text{ և } (-7)-10=-7-10=-17.$$

Այս յերկու կանոնները կարելի յե կրճատ արտահայտել կրկնակի նշաններ *հետևյալ* բանաձևերով.

$$+(+a)=+a; \qquad +(-a)=-a.$$

18. *Յերեք և ավելի թվերի գումարումը։ Նախ գտնում են առաջին յերկու գումարելիների գումարը, նրան ավելացնում են յերրորդ գումարելին և այլն։ Դիցուք պահանջվում է գտնել հետևյալ գումարը՝* $(+8)+(-5)+(-4)+(+3)$, *վորը կարելի յե ավելի կարճ գրել՝* $8+(-5)+(-4)+3$։ *Գումարումը կատարում ենք այս կարգով՝* $8+(-5)=3$; $3+(-4)=-1$; $(-1)+3=2$։

Վարժություններ

14. $(+7)+(+3)$ $\qquad (-7)+(-3)$ $\qquad \left(+\frac{1}{2}\right)+\left(+2\frac{1}{2}\right)$
15. $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-2\frac{1}{2}\right)$ $\qquad (+10)+(-2)$ $\qquad (+10)+(-12)$
16. $(-5)+(+5)$ $\qquad (-5)+(+2)$ $\qquad 4+(-3)$
17. $(-4)+3$ $\qquad 8+(-10)$ $\qquad (-8)+10$
18. $(+8)+(-5)+(-3)+(+2)$
19. $(-7)+(-3)+(-1)+(+11)$

III. ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՀԱՆՈՒՄԸ

19. *Խնդիր։ Գործարանի օգուտը յերկու ամսվա՝ հունվարի և փետրվարի, ընթացքում կազմում էր* a *ռուբլի։ Ի՞նչքան էր միայն փետրվարին ստացած օգուտը, յեթե գործարանը հունվարին* b *ռուբլի օգուտ է տվել։*

Նախորդ խնդրից արդեն գիտենք, վոր յերկու ամսում ստացած օգուտը կազմում է առանձին ամիսներում ստացած օգուտների գումարը. Թե a*-ն և թե* b*-ն հարաբերական թվեր են, այսինքն դրական և բացասական թվեր են և բացասական օգուտը նշանակում է վնաս։ Այսպես, յեթե հունվարին ստացած օգուտը յեղել է* $+2000$ *ռուբլի, իսկ փետրվարին* -500 *ռուբլի, ապա այս յերկու ամիսներում միասին օգուտը յեղել է նրանց գումարի չափ, այսինքն* $(+2000)+(-500)=+1500$ *ռուբլի։ Մի ուրիշ որինակ. յեթե օգուտը հունվարին յեղել է* $+1000$ *ռուբլի, իսկ փետրվարին* -1500 *ռուբլի, ապա օգուտը յերկու ամսում կլինի* $(+1000)+(-1500)=-500$ *ռուբլի։*

Այս պատճառով փետրվար ամսվա ընթացքում ստացած օգուտը, վոր վորոնում ենք, պետք է այնպիսի դրական կամ բացասական թիվ լինի, վորը յեթե հարաբերական թվերի գումարման կանոնների համաձայն գու-

մարենք հունվար ամսում ստացած օգուտի հետ, գումարում տա յերկու ամսվա օգուտը։

Այսպիսով մեր խնդրում տրված է գումարը՝ a, և մի գումարելին՝ b, և պահանջվում է գտնել մյուս գումարելին։

Այն գործողությունը, վորի միջոցով գտնում ենք գումարելիներից մեկը, յերբ տված են գումարը յեվ մյուս գումարելին, կոչվում է հանում, *անկախ նրանից՝ տված թվերը թվաբանականն են, թե հարաբերական. տված գումարն այս դեպքում կոչվում է* նվազելի, *տված գումարելին՝* հանելի, *իսկ վորոնելի թիվը՝* տարբերություն *(կամ* մնացորդ*)։ Այստեղից հետևում է, վոր հանման շիտակությունը մենք միշտ կարող ենք ստուգել գումարման միջոցով. դրա համար վորոնելի տարբերությունը գտնելով՝ կգումարենք հանելիի հետ, յեթե գումարը տա նվազելին, ապա հանումը շիտակ է կատարված։*

20. *Տարբերության, վորպես յերկու գումարելիներից մեկի, գտնել։ Վորոնելի տարբերությունը նշանակելով մեր խնդրում կարող ենք գրել.*

$$x=a-b.$$

Գտնենք a—b *տարբերության մեծությունը հետևյալ մասնավոր դեպքերում.*

ա) Դիցուք $a=+1000$; $b=+400$։ *Այս նշանակում է, վոր գործարանը հունվարին օգուտ է տվել 400 ռուբլի, իսկ յերկու ամսում օգուտ է ստացվել 1000 ռուբլի. պարզ է, վոր փետրվարն էլ է օգուտ տվել և այն էլ 600 ռուբլի։ Նշանակի՝*

$$x=(+1000)-(+400)=+600$$

կամ ավելի պարզ՝

$$1000-400=600.$$

Արդյունքն ստուգենք գումարումով.

$$(+600)+(+400)=+1000.$$

բ) Դիցուք $a=+1000$ *և* $b=+1000$։ *Այդ նշանակում է, վոր գործարանը հունվարին օգուտ է տվել 1000 ռուբլի և յերկու ամսվա օգուտն էլ դարձյալ նույնն է մնացել, այսինքն 1000 ռուբլի։ Պարզ է, վոր փետրվարին գործարանը վոչ օգուտ է տվել և վոչ էլ վնաս։ Նշանակի՝*

$$x=(+1000)-(+1000)=0.$$

Ստուգենք գումարումով.

$$(+1000)+0=+1000.$$

Հանումը շիտակ է կատարված։

Նույնպիսի դատողությամբ կգտնենք, վոր

$$(-1000)-(-1000)=0$$

գ) $a=+1000$; $b=+1200$։ *Այս նշանակում է, վոր գործարանը միայն հունվարին 1200 ռուբլի օգուտ է տվել, իսկ յերկու ամսում ընդամենը* օգուտ է ստացվել միայն 1000 ռուբլի։ Պարզ է, որ հունվարյան օգուտի մի մասը՝ 200 ռուբլի, գործադրվել է փետրվարյան վնասը ծածկելու համար։ Այստեղից՝

$$(+1000)-(+1200)=-200,$$

կամ ավելի պարզ՝

$$1000-1200=-200.$$

դ) $a=+1000$; $b=-200$. Այդ նշանակում է, որ գործարանը հունվարին վնաս է տվել 200 ռուբլի, բայց յերկու ամսվա ընթացքում 1000 ռուբլի օգուտ է ստացվել։ Պարզ է, որ օգուտը փետրվարին է ստացվել և այն էլ այնքան, որ թե ծածկել է հունվարյան 200 ռուբլի վնասը և թե մնացել է 1000 ռուբլի օգուտ, այսինքն փետրվարին ստացվել է 1200 ռուբլի օգուտ։ Այստեղից՝

$$+1000-(-200)=+1200,$$

կամ

$$1000-(-200)=1200։$$

Ստուգենք գումարումով.

$$+1200+(-200)=+1000.$$

ե) $a=-100$; $b=+800$։ Այս նշանակում է, որ հունվարին օգուտ է ստացվել 800 ռուբլի, մինչդեռ յերկու ամսում, միասին առած, առաջ է յեկել 100 ռուբլի վնաս։ Պարզ է, որ փետրվարին վնաս է ստացվել և այնքան, որ նա վոչնչացրել է հունվարյան վողջ օգուտը՝ 800 ռուբլին, և դեռ վնաս է մնացել 100 ռուբլի, այսինքն փետրվարյան վողջ վնասը հավասար է 900 ռուբլու։ Այստեղից՝

$$(-100)-(+800)=-900,$$

կամ

$$-100-800=-900։$$

Ստուգենք գումարումով.

$$(-900)+(+800)=-100։$$

զ) $a=-100$; $b=-150$, այսինքն հունվարին վնաս է յեղել 150 ռուբլի, իսկ յերկու ամսում ընդամենը վնաս է յեղել 100 ռուբլի։ Նշանակի հունվարյան վնասի մի մասը՝ 50 ռուբլի, ծածկված է փետրվարին ստացած 50 ռուբլի օգուտով։ Այստեղից՝

$$(-100)-(-150)=+50.$$

Ստուգենք գումարումով.

$$50+(-150)=-100։$$

21. Հանման կանոնը։ Ուշադրությամբ դիտելով նախորդ հաշ-

վածի խնդիրները՝ կարող ենք նկատել, վոր մեր քննած դեպքերից յուրաքանչյուրի մեջ մենք կարող եյինք մեզ տված թվի հանումը փոխարինել նրան հակադիր թվի գումարումով։ Իրոք, վերցնենք, օրինակ՝ ա) դեպքը.

(+1000)—(+400)=+600։

+400 թիվը հանելու փոխարեն գումարենք նրան հակադիր —400 թիվը՝

(+1000)—(—400)=+600։

Ստացվեց նույն արդյունքը։

Վերցնենք դ) դեպքը.

(+1000)—(—200)=+1200

Հանումը փոխարինենք հակադիր թվի գումարումով.

+1000+(+200)=+1200

Արդյունքը նույնն է։

Վերցնենք, վերջապես, ե) դեպքը.

(—100)—(+800)=—900։

Հանման փոխարեն գումարում կատարելով՝ կստանանք.

—100+(—800)=—900,

այսինքն նույն արդյունքը։

Նույնը կարելի յե ցույց տալ նաև մնացած բոլոր դեպքերի նկատմամբ։ Այսպիսով մենք կարող ենք բոլոր դեպքերում տվյալ թիվը հանելու փոխարեն նվազելուն ավելացնել հանելիի հակադիր թիվը։ Ուրիշ խոսքով, հանման գործողությունը մենք կարող ենք փոխարինել գումարման գործողությամբ, վորը կատարելն արդեն գիտենք։ Այստեղից բղխում է հետևյալ կանոնը.

Որևէ թիվ հանելու համար բավական է նվազելիին ավելացնել հանելիին հակադիր թիվը:

22. *Կրկնակի նշանների բանաձևերը։* Այսպիսով, տված կանոնի համաձայն, +a դրական թվի հանումը կարելի յե փոխարինել —a բացասական թվի ավելացումով, իսկ —a բացասական թվի հանումը՝ +a դրական թվի ավելացումով. այդ կարելի յե կրկնակի նշանների հետևյալ բանաձևերով արտահայտել.

—(+a)=—a; —(—a)=+a

23. *Հանրահաշվական գումար և տարբերություն։* Հարաբերական թվերը հնարավորություն են տալիս ամեն մի տարբերություն ներկայացնել իբրև գումար, և ընդհակառակը, ամեն մի գումար ներկայացնել իբրև տարբերություն։ Օրինակ 7—3 տարբերությունը կարելի յե գրել այսպես. (+7)+(—3), կամ ավելի պարզ՝ 7+(—3), իսկ 4+2 գումարը կարելի յե պատկերացնել այսպես. (+4)—(—2), կամ ավելի պարզ՝ 4—(—2)։

Այսպես էլ ամեն մի արտահայտություն, որը ներկայացնում է հաջորդական գումարումների և հանումների մի շարք, կարող է ներկայացվել իբրև գումար։ Օրինակ՝

$$20-5+3-7=20+(-5)+3+(-7)\text{։}$$

Այս պատճառով հանրահաշվի մեջ հարաբերական թվերի գումարման և հանման բոլոր դեպքերը կարելի յե միավորել մի գործողության մեջ, որը կոչվում է հանրահաշվական գումարում:

Այն գումարը, որի մեջ գումարելիները կարող են լինել թե դրական, թե բացասական թվեր և թե զերո, կոչվում է հանրահաշվական գումար ի տարբերություն թվաբանական գումարից, որի մեջ բոլոր գումարելիները սովորական (թվաբանական) թվեր են։ Նմանապես տարբերությունը հանրահաշվական է կոչվում, յեթե նրա մեջ նվազելին ու հանելին հարաբերական թվեր են։

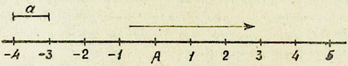
24. Հարաբերական թվերի բաղդատումն ըստ մեծության։ Յերբ ասում ենք՝ 10-ը մեծ է 7-ից, այդ նշանակում է, որ $10-7$ տարբերությունը դրական թիվ է, մինչդեռ $7-10$ տարբերությունը բացասական թիվ է։ Պայմանավորվենք ավելի մեծի և ավելի փոքրի այս գաղափարը տարածել հարաբերական թվերի վրա. դրա համար a հարաբերական թիվը b հարաբերական թվից ավելի մեծ կհամարենք այն դեպքում, յերբ $a-b$ տարբերությունը դրական թիվ է յեվ a-ն ավելի փոքր կհամարենք b-ից այն դեպքում, յերբ $a-b$ տարբերությունը բացասական թիվ է:

Այս պայմաններից բխում է, որ

1. Ամեն մի դրական թիվ մեծ է զերոյից յեվ մեծ է ամեն մի բացասական թվից. օրինակ՝ $8>0$ և $8>-10$, որովհետև $8-0$ և $8-(-10)$ տարբերությունները յերկուսն էլ դրական թվեր են։

2. Ամեն մի բացասական թիվ փոքր է զերոյից յեվ փոքր ամեն մի դրական թվից. օրինակ $-5<0$ և $-5<+2$, որովհետև $-5-0$ և $-5-(+2)$ տարբերությունները բացասական թվեր են։

3. Յերկու բացասական թվերից մեծն այն է, որի բացարձակ մեծությունն ավելի փոքր է. օրինակ՝ $-5>-12$, որովհետև $-5-(-12)$ տարբերությունը հավասար է $(+7)$ դրական թվին։



Գծ. 4.

Հանրահաշվական թվերի բաղդատական մեծությունները հստակորեն պատկերացնելու համար ամենից ավելի լավ կլինի դիմել թվային առանցքի օգնության։ Ընտրելով յերկարության որևե միավոր (a-ն, 4-րդ գծ.) յերեվակայենք, որ անսահմանափակ ուղղիղի վրա նրա որևե A կետից, որը ընդունված է իբրև սկիզբ, դեպի աջ վերցված են այնպիսի հատվածներ, որոնք պատկերացնում են դրական թվերը՝ $+1, +2, +3, +4,\ldots,$

իսկ այդ նույն կետից դեպի ձախ վերցված են այնպիսի հատվածներ, վորոնք պատկերացնում են բացասական թվերը՝ —1, —2, —3, —4,... Այն ժամանակ, այդ ուղիղի վրա շարժվելով ձախից դեպի աջ (ինչպես սլաքն է ցույց տալիս գծագրում), մենք շարունակ փոքր թվերից կանցնենք մեծ թվերի, մինչդեռ հակառակ ուղղությամբ, այսինքն աջից դեպի ձախ շարժվելով՝ շարունակ մեծ թվերից կանցնենք փոքր թվերի։ Ուրիշ խոսքով՝ վորևէ յերկու թվերից այն է մեծ, վորը թվային առանցքի վրա ավելի աջ է գտնվում։ Թվային առանցքի վրա հեշտ է ստուգել քիչ առաջ ավանդած յերեք դրույթների իրավացիությունը։

Դիտողություն: *Յեթե կամենում են կարճ արտահայտել, վոր a-ն դրական թիվ է, ապա գրում են՝* $a>0$, *իսկ յեթե պետք է նշել, վոր a-ն բացասական թիվ է, գրում են՝* $a<0$։

Վարժություններ

20. *Մի ապրանք գնել են* a *ռուբլով և վաճառել* b *ռուբլով։ Ո՞րքան օգուտ են ստացել։ Հաշվել այդ օգուտը, յեթե* $a=40$ *և* $b=35$։ *Ի՞նչ է ցույց տալիս այստեղ բացասական պատասխանը։*

21. *Մեկն ամսական* m *ռուբլի յեկամուտ ունի և* n *ռուբլի ծախք։ Նրա մոտ ամսական ի՞նչքան է մնում։ Հաշվել պատասխանը, յերբ* $m=120$ *և* $n=130$։ *Ի՞նչ է ցույց տալիս բացասական պատասխանը։*

Հետևյալ օրինակներում կատարել նշած գործողությունները.

22. $12-(-2)$ $\quad 5-(-5)$ $\quad (+8)-(-10)$ $\quad (+1)-(-1)$

23. $a-(-b)$ $\quad (+m)-(-n)$ $\quad (+2x)-(-3x)$

24. $10+(+2)-(-4)-(+2)+(-2)$

25. *Հաշվել* $a+b+c+d$ *գումարը, յեթե* $a=2$, $b=-3$, $c=-\frac{1}{2}$, *և* $d=-\frac{1}{4}$

26. *Հաշվել* $m-n$ *տարբերությունը, յեթե* $m=-10$ *և* $n=-15$.

27. *Ներկայացնել* $10-2-3+7$ *արտահայտությունն իբրև հարաբերական թվերի գումար։*

28. *Ներկայացնել* $10+8$ *արտահայտությունն իբրև հարաբերական թվերի տարբերություն։*

IV. ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ՅԵՎ ՀԱՆՄԱՆ ԳԼԽԱՎՈՐԱԳՈՒՅՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

25. *Համոզվենք օրինակներով, վոր թվաբանական թվերի գումարման և հանման այն հատկությունները, վոր մենք նշեցինք թվաբանական թվերի համար (§§ 6, 7), պահպանվում են նաև հարաբերական թվերի դեպքում։*

ա) Տեղափոխական օրենք՝ գումարը չի փոխվում գումարելիների տեղափոխումից: *Օրինակ՝*

$(+20)+(-5)=+15$ *և* $(-5)+(+20)=+15$;

$(-10)+(-2)+(+40)=+28$;

$(+40)+(-10)+(-2)=+28$;

$(-2)+(+40)+(-10)=+28$ *և այլն։*

բ) *Զուգորդական օրենք՝* գումարը չի փոխվի, յեթե վորեվե գումարելիներ փոխարինենք նրանց գումարով:

Այսպես, յերբ պետք է հաշվել հետևյալ գումարը՝

$$(-4)+(+3)+(-1)+(+5)=+3,$$

մենք կարող ենք վորևե գումարելիներ, օրինակ՝ յերկրորդը և յերրորդը, փոխարինել նրանց գումարով, նախապես հաշվելով այդ գումարը. $(+3)+(-1)=+2$. այն ժամանակ կունենանք՝

$$(-4)+(+2)+(+5)=3,$$

այսինքն կստանանք այն գումարը, ինչ վոր առաջ:

գ) Վորպեսզի վորեվե թվի ավելացնենք միքանի գումարելիների գումարը, կարելի յե այդ թվին ավելացնել մեկը մյուսի յետեվից յուրաքանչյուր գումարելին:

Դիցուք, օրինակ՝ պահանջվում է 40-ին ավելացնել $20+(-5)+(+7)$ գումարը. այդ կարելի յե այսպես արտահայտել.

$$40+[20+(-5)+(+7)],$$

Մենք կարող ենք նախ հաշվել ավելացվող գումարը՝

$$20+(-5)=20-5=15; \quad 15+(+7)=15+7=+22,$$

և հետո ստացած թիվը՝ $+22$, գումարել 40-ին՝

$$40+(+22)=+62.$$

Բայց, դրա փոխարեն, մենք կարող ենք 40-ին նախ գումարել առաջին գումարելին՝ 20-ը, ապա յերկրորդը՝ -5-ը և, վերջապես, յերրորդը՝ $+7$-ը. կստանանք՝

$$40+20=60; \quad 60+(-5)=55; \quad 55+(+7)=62:$$

Վերջնական գումարը նույնն է ստացվում:

դ) Վորպեսզի վորեվե թվից հանենք միքանի գումարելիների գումարը, կարելի յե այդ թվից հանել մեկը մյուսի յետեվից յուրաքանչյուր գումարելին առանձին:

Դիցուք, օրինակ՝ հարկավոր է 20-ից հանել այս գումարը՝ $10+(-4)+(-3)$. այդ կարող ենք այսպես արտահայտել՝

$$20-[10+(-4)+(-3)],$$

Մենք կարող ենք նախ հաշվել այն գումարը, վորը պետք է հանենք,

$$10+(-4)=10-4=6; \quad 6+(-3)=6-3=3,$$

այնուհետև ստացած թիվը հանել 20-ից՝

$$20-3=17.$$

Բայց դրա փոխարեն մենք կարող ենք 20-ից հանել նախ առաջին գումարելին՝ 10, ապա յերկրորդ գումարելին՝ (-4), և ապա յերրորդ գումարելին՝ (-3). կստացվի՝

$$20-10=10;\quad 10-(-4)=10+4=14;$$
$$14-(-3)=14+3=17.$$

Մնացանք նույն թիվը, ինչ որ առաջ։

Նույն ձևով կարելի յէ ցույց տալ գումարման և հանման նաև մյուս հատկությունների իրավացիությունը հարաբերական թվերի համար։

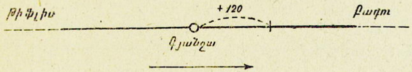
V. ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ

26. *Խնդիր։ Թիֆլիս-Բաքու երկաթգծով գնացքն ընթանում է 1 ժամում* v *կիլոմետր միջին արագությամբ*[1]*։ Կեսօրին գնացքը գտնվում է Գանձակ կայարանում։ Որտեղ կգտնվի գնացքը* t *ժամից հետո։*

Արտածենք այս խնդրի լուծման բանաձևը։ Եթե գնացքը 1 ժամում անցնում է v *կիլոմետր, ապա* t *ժամում նա կանցնի* t *անգամ մեծ հեռավորություն։ Նշանակելի որոնելի* x *հեռավորությունը հավասար է* v*-ի և -ի արտադրյալին՝*

$$x=vt.$$

Եթե, օրինակ՝ $v=40$ *և* $t=3$*, ապա գնացքը գտնվում է Գանձակից* $40\,.\,3=120$ *կմ հեռավորության վրա։*



Գծ. 5.

Այս լուծումը դեռևս չի տալիս խնդրում դրված հարցի ճշտորոշ պատասխանը։ Իրոք, մենք չգիտենք, թե ինչ ուղղությամբ պետք է վերցնենք այդ 120 կմ-ը՝ դեպի Թիֆլիս թե դեպի Բաքու։ Հարաբերական թվերի մուծումը մեզ հնարավորություն է տալիս վորոշակի պատասխանելու դրված հարցին։

Պայմանավորվենք դրական համարել Թիֆլիսից դեպի Բաքու տանող ուղղությունը։ Այս դեպքում այն բոլոր հեռավորությունները, վոր մենք կվերցնենք Գանձակից դեպի Բաքու տանող ուղղությամբ, դրական կլինեն, իսկ դեպի Թիֆլիս տանող ուղղությամբ՝ բացասական։ Դրա համեմատ էլ արագությունը, այսինքն գնացքի 1 ժամվա ճանապարհը, դրական կլինի, յեթե գնացքը դեպի Բաքու է շարժվում, և բացասական, յեթե գնացքը դեպի Թիֆլիս է գնում։

Այժմ կարող ենք ավելի ճշտորոշ պատասխան տալ խնդրի հարցին։ Յեթե գնացքը դեպի Բաքու է գնում, կնշանակի նրա արագությունը $+40$ *կմ է 1 ժամում և 3 ժամից հետո նա Գանձակից կգտնվի* $x=(+40)\,.\,3=$

[1] *Հաշվումների պարզության համար մենք յենթադրում ենք, վոր գնացքը շարունակ միատեսակ արագությամբ է շարժվում և ուշադրության չենք առնում կայարաններում կանգ առնելը։*

=+120 կմ հեռավորության վրա, այսինքն 120 կմ գնացած կլինի Բաքվի ուղղությամբ (գծ. 5)։

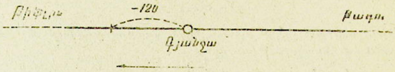
Յեթե գնացքը դեպի Թիֆլիս է գնում, ապա նրա արագությունը —40 կմ է և 3 ժամից հետո նա Գանձակից կգտնվի (—40)+(—40)+(—40)= =—120 կմ հեռավորության վրա, այսինքն նա Թիֆլիսի ուղղությամբ գնացած կլինի 120 կմ (գծ. 6)։ Այստեղից յեզրակացնում ենք, վոր

$$x=(-40)\cdot 3=-120.$$

Այժմ մեր բանաձևը՝

$$x=vt,$$

մեզ ճշտորոշ պատասխան է տալիս այն հարցին, թե վորտեղ կգտնվի գնացքը, միայն թե v-ն դրական արժեքներ ընդունի կամ բացասական, նայած թե ինչ ուղղությամբ է գնացքը շարժվում։



Գծ. 6.

Յեթե, որինակ՝ $v=+50$ և $t=+4$, ապա բանաձևը տալիս է՝

$$x=(+50)\cdot(+4)=+200,$$

այսինքն գնացքը կգտնվի Գանձակից 200 կմ հեռավորության վրա դեպի Բաքու տանող ուղղությամբ։

Յեթե $v=-30$ և $t=+2$, ապա

$$x=(-30)\cdot(+2)=-60,$$

այսինքն գնացքը կգտնվի 60 կմ-ի վրա դեպի Թիֆլիս տանող ուղղությամբ։

Ինչպես թվաբանությունից հայտնի է, ամբողջ թվով բազմապատկելը մի գործողություն է, վորի միջոցով մի թիվ (բազմապատկելին) իբրև գումարելի այնքան անգամ է կրկնվում, վորքան միավոր կա մյուս թվի (բազմապատկիչի) մեջ: Կոտորակով բազմապատկելը մի գործողություն է, վորի միջոցով գտնում ենք բազմապատկելիի նույն կոտորակը (մասը), միավորի ինչ կոտորակը վոր կազմում է բազմապատկիչը:

Նախընթաց խնդրից յերևում է, վոր այս սահմանումները կիրառելի յեն նաև հարաբերական թվերի բազմապատկման դեպքում, յերբ բազմապատկիչը դրական թիվ է։ Որինակ՝ —5-ը բազմապատկել +3-ով (կամ պարզապես 3-ով) նշանակում է —5-ն իբրև գումարելի կրկնել 3 անգամ (կստանանք —15). բազմապատկել 0-ն 5-ով նշանակում է 0-ն իբրև գումարելի կրկնել 5 անգամ (կստանանք 0). բազմապատկել —12-ը $+\frac{3}{4}$ -ով (կամ պարզապես $\frac{3}{4}$-ով) կնշանակի գտնել —12-ի $\frac{3}{4}$-ը (կստանանք —9)։

27. Բազմապատկում բացասական թվով։ Նախընթաց խընդիրն այսպես ձևափոխենք. կեսօրին գնացքը գտնվում է Գանձակում. վՃրտեղ էր գտնվում նա 3 ժամ առաջ։ Այս խնդիրը լուծելու համար մենք դարձյալ պետք է գնացքի շարժման արագությունը բազմապատկենք շարժման ժամանակով։ Յերկու խնդիրն էլ նման պայմաններ ունեն և լուծման միատեսակ յեղանակ, բայց պատասխանը տարբեր կլինի, նայած թե խոսքը նախկեսօրյա ժամանակի մասին է, թե հետկեսօրյա։

Յեթե մենք ցանկանում ենք, վոր մեր բանաձևը՝

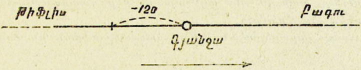
$$x=vt,$$

մեզ ճշտորոշ պատասխան տա բոլոր դեպքերում, հետևյալ ձևով կվարվենք։

Հետկեսօրյա ժամանակը կընդունենք դրական, իսկ նախկեսօրյա ժամանակը բացասական. դրա համեմատ էլ t թիվը դրական կլինի կամ բացասական, նայած թե վոր ժամանակի մասին է խոսքը։ Այսպիսով յերկու բազմապատկիչներն էլ՝ v և t, այժմ կարող են ընդունել դրական և բացասական արժեքներ։

Դիտենք այն բոլոր դեպքերը, վորոնք հնարավոր են մեր խնդիրը լուծելիս, և բոլոր դեպքերումն էլ ընդունենք, վոր գնացքը կեսօրին Գանձակում է գտնվում և ժամը 40 կմ արագությամբ է գնում։

1-ին դեպք: Գնացքը դեպի Բաքու է գնում. վՃրտեղ կլինի 3 ժամից հետո.



Գծ. 7.

Այս դեպքում արագությունը դրական է՝ v=+40. ժամանակը նույնպես դրական է՝ t=+3։ Այս դեպքն արդեն քննության է առնված, և պատասխանն էր՝

$$x=(+40)\cdot(+3)=+120.$$

2-րդ դեպք: Գնացքը գնում է դեպի Թիֆլիս վՃրտեղ կլինի 3 ժամից հետո։

Այստեղ արագությունը բացասական է՝ v=—40. ժամանակը դրական է՝ t=+3։ Այս դեպքն էլ է քննության առնված։ Լուծումն էր՝

$$x=(-40)\cdot(+3)=-120.$$

3-րդ դեպք: Գնացքը գնում է դեպի Բաքու. վՃրտեղ էր 3 ժամ առաջ։

Այս դեպքում արագությունը դրական է՝ v=+40, իսկ ժամանակը բացասական է՝ t=—3։

Ակնհայտ ե, վոր 3 ժամ առաջ գնացքը գտնվում եր Թիֆլիսի և Գանձակի միջև, վերջինից 120 կմ-ի վրա (գծ. 7)։

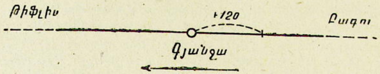
120 կմ հեռավորությունը Գանձակից դեպի ձախ ե գտնվում, հետևաբար բացասական ե։ Այսպիսով՝

$$x=(+40)\cdot(-3)=-120։$$

4-րդ դեպք: Գնացքը գնում ե դեպի Թիֆլիս. վորտեղ եր 3 ժամ առաջ։

Այստեղ թե արագությունը և թե ժամանակը բացասական են՝ $v=-40$ և $t=-3$։

Ակնհայտ ե, վոր 3 ժամ առաջ գնացքը գտնվում եր Բաքվի և Գանձակի միջև, վերջինից 120 կմ հեռավորության վրա (գծ. 8)։



Գծ. 8.

Գանձակից դեպի Բաքու վերցրած հեռավորությունը դրական ե, հետևաբար՝

$$x=(-40)\cdot(-3)=+120։$$

28. *Բազմապատկման կանոնը*։ Յեթե նախորդ խնդրի մեջ 40 և 3 թվերի փոխարեն վորևե այլ թվեր (վորոնց թվում նաև կոտորակային թվեր) վերցնենք, ապա ինչպես ակնհայտ ե, մեր դատողությունների ընթացքը դրանից չեր փոխվի։

Այժմ տանք հարաբերական թվերի բազմապատկման ընդհանուր կանոնը։

Գրենք այն բոլոր դեպքերը, վորոնք առաջ յեկան բազմապատկման ժամանակ, և ընդհանրացնենք, տարածելով այդ դեպքերը ամեն տեսակ թվերի վրա։

$(+40)\cdot(+3)=+120$ կամ ընդհանուր ձևով $(+a)\cdot(+b)=+ab$;
$(-40)\cdot(+3)=-120$ » » » $(-a)\cdot(+b)=-ab$;
$(+40)\cdot(-3)=-120$ » » » $(+a)\cdot(-b)=-ab$;
$(-40)\cdot(-3)=+120$ » » » $(-a)\cdot(-b)=+ab$;

Բաղդատելով այս բոլոր դեպքերը մեկը մյուսի հետ՝ մենք նկատում ենք, վոր

1. Յեթե յերկու արտադրիչներն ել նույն նշանն ունեն, ապա արտադրյալը դրական ե։

2. Յեթե յերկու արտադրիչները տարբեր նշաններ ունեն, ապա արտադրյալը բացասական ե։

3. Արտադրյալի բացարձակ մեծությունը հավասար ե արտադրիչների բացարձակ մեծությունների արտադրյալին։

Այստեղից ստանում ենք հետևյալ ընդհանուր կանոնը.

Յերկու հարաբերական թվերի արտադրյալը գտնելու համար պետք է նրանց բացարձակ մեծությունները բազմապատկել յեվ արտադրյալը վերցնել + նշանով, յերբ յերկու արտադրիչներն էլ միեվնույն նշանն ունեն, յեվ — նշանով, յերբ նրանք հակադիր նշաններ ունեն:

Այս կանոնի այն մասը, վոր նշաններին է վերաբերում, կոչվում է նշանների կանոն: *Վերջինս սովորաբար այսպես են արտահայտում.*

յերկու թվեր բազմապատկելիս միատեսակ նշանները տալիս են +, իսկ տարբերները՝ —,

Դիտելով բերած որինակները՝ կարելի յե նաև հետևյալ կանոնը գտնել, վորը հետագայում յերբեմն ոգտագործելու յենք. դրական թվով բազմապատկելիս բազմապատկելիի նշանը չի փոխվում *(այսինքն արտադրյալը նույն նշանն է ունենում, ինչ վոր բազմապատկելին).* բացասական թվով բազմապատկելիս բազմապատկելիի նշանը փոխվում է:

Նկատենք նաև, վոր արտադրյալը միշտ հավասար է զերոյի, յեթե արտադրիչներից գոնե մեկը հավասար է զերոյի:

29. *Յերեք և ավելի թվերի արտադրյալը: Արտադրյալի նշանը: Դիցուք հարկավոր է հաշվել հետևյալ արտադրյալը.*

$$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-10)\cdot(-4)\cdot(-5)$$

Դրա համար առաջին թիվը կբազմապատկենք յերկրորդով, ստացած արտադրյալը կբազմապատկենք յերրորդ թվով, նոր ստացած արտադրյալը կբազմապատկենք չորրորդ թվով և այսպես կշարունակենք.

$$(+2)\cdot(-1)=-2,$$
$$(-2)\cdot(+3)=-6,$$
$$(-6)\cdot(-10)=+60,$$
$$(+60)\cdot(-4)=-240,$$
$$(-240)\cdot(-5)=+1200.$$

Յեթե միայն դրական թվեր բազմապատկվեին, ապա վերջնական արտադրյալի նշանը պետք է լիներ, իհարկե, +: Բայց, յերբ միքանի արտադրիչներ կամ բոլոր արտադրիչները բացասական են, ապա արտադրյալը + նշան կունենա, յերբ բացասական արտադրիչների թիվը զույգ է, յեվ — նշան կունենա, յերբ բացասական արտադրիչների թիվը կենտ է: *Այսպես՝*

$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)=-6$, *այստեղ կա 1 բացասական արտադրիչ*
$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-10)=+60$, » » 2 » »
$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-10)\cdot(-4)=-240$, » 3 » »
և այլն:

30. *Բացասական թվի աստիճանը: Նախորդ հոդվածի կանոնը կիրառենք հավասար արտադրիչների բազմապատկման, այսինքն աստիճան բարձրացնելու վրա: Մենք գիտենք, վոր դրական թվի վորևէ աստիճանը դարձյալ դրական թիվ է տալիս: Ինչ նշան կունենա աստիճանը, յեթե հիմքը բացասական է:*

Գտնենք բացասական թվի քառակուսին՝

$$(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=+9;\quad (-7)^2=(-7)\cdot(-7)=+49.$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$(-a)^2=(-a)\cdot(-a)=+a^2.$$

Բացասական թվի քառակուսին դրական թիվ է:

Այժմ գտնենք բացասական թվի խորանարդը։

$$(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-8;\quad (-6)^3=(-6)\cdot(-6)\cdot(-6)=-216.$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$(-a)^3=(-a)\cdot(-a)\cdot(-a)=-a^3.$$

Բացասական թվի խորանարդը բացասական թիվ է:

Դժվար չէ նկատել, *որ* բացասական թիվը վորեվե զույգ աստիճան բարձրացնելիս դրական թիվ է ստացվում, *որովհետև բացասական արտադրիչների թիվը այս դեպքում զույգ է (տ. § 29)։*

Այսպես՝

$$(-3)^4=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=+81.$$

$$(-2)^6=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=+64.$$

և այլն։

Նույն պատճառով բացասական թվի ամեն մի կենտ աստիճանը միշտ տալիս է բացասական թիվ: *Այսպես,*

$$(-3)^5=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=-243;$$

$$(-2)^7=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-128;$$

և այլն։

Այսպիսով՝

Բացասական թվի զույգ աստիճանը զույգ թիվ է, իսկ կենտ աստիճանը կենտ թիվ:

Մասնավորապես նկատենք, որ

$$(-1)^2=(-1)^4=(-1)^6=\dots=+1;$$

$$(-1)^3=(-1)^5=(-1)^7=\dots=-1.$$

Վարժություններ

29. $(-2)(-3)$ $\quad (+7)(-2)$ $\quad (-8)(-10)$

30. $\left(-8\frac{1}{2}\right)\left(+2\frac{3}{4}\right)$ $\quad \left(+0{,}36\right)\left(-\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)$

31. $(-1)^2$ $\quad (-1)^3$ $\quad (-1)^4$ $\quad (-1)^5$

32. *Հաշվել* ax^2+bx+c *արտահայտությունը, յեթե* $a=3$, $b=-4$, $c=-5$ *և* $x=4$։

33. $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(+3{,}5\right)\left(+2\right)\left(-\frac{7}{8}\right)$

VI. ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ

31. *Սահմանում։* Հարաբերական թվերի *(ինչպես և թվաբանական թվերի)* բաժանումը մի գործողություն է, վորի միջոցով գտնում ենք յերկու արտադրիչներից մեկը, յերբ տված են նրանց արտադրյալը յեվ մյուս արտադրիչը։ *Այսպես՝ +10-ը բաժանել —2-ի վրա, նշանակում է գտնել այնպիսի x թիվ, վոր (—2)x արտադրյալը հավասարվի +10-ի. այդ թիվը —5-ն է, վորովհետև —2-ի և —5-ի արտադրյալը հավասար է +10-ի։*

Այս սահմանումից հետևում է, վոր բաժանման շիտակությունը կարելի է բազմապատկումով ստուգել. յեթե քանորդը բազմապատկենք բաժանարարով և ստացվի բաժանելին, ապա գործողությունն ուղիղ է կատարած։

32. *Բաժանման կանոնի ստացումը։ Դիտենք հարաբերական թվերի բաժանման հետևյալ օրինակները.*

$(+10):(+2)=+5$, *վորովհետև* $(+2)\cdot(+5)=+10$;
$(-10):(-2)=+5$, » $(-2)\cdot(-5)=+10$;
$(-10):(+2)=-5$, » $(+2)\cdot(-5)=-10$;
$(+10):(-2)=-5$, » $(-2)\cdot(-5)=+10$.

Այս օրինակներից հետևյալ կանոնն ենք ստանում.

Մի թիվ (բաժանելին) մի ուրիշ թվի (բաժանարարի) վրա բաժանելու համար պետք է բաժանելիի բացարձակ մեծությունը բաժանել բաժանարարի բացարձակ մեծության վրա յեվ արդյունքը վերցնել + նշանով, յերբ տված յերկու թվերն էլ միևնույն նշանն ունեն, յեվ — նշանով, յերբ նրանք տարբեր նշաններ ունեն:

Այսպիսով բաժանման ժամանակ նշանների կանոնը նույնն է, ինչ վոր բազմապատկման ժամանակ։

33. *Դեպքեր, յերբ բաժանելին կամ բաժանարարը հավասար են զերոյի։ ա) Դիցուք պահանջվում է վորևէ թիվ, որինակ 10-ը, բաժանել զերոյի վրա։ Այդ նշանակում է՝ պետք է գտնել այնպիսի թիվ, վորը յեթե +10-ով բազմապատկենք, ստացվի 0։ Այդ թիվը 0-ն է և միայն 0-ն, վորովհետև 0 · (+10)=0, իսկ զերոյից տարբեր վորևէ թվի և +10-ի արտադրյալն, ինչպես ակնհայտ է, չի կարող 0-ի հավասարվել։ Նմանապես գտնում ենք*

$0 : (-2)=0$, *վորովհետև* $(-2)\cdot 0=0$;
$0 : \left(+\frac{3}{4}\right)=0$, » $\left(+\frac{3}{4}\right)\cdot 0=0$ *և այլն.*

Նշանակի՝ յերբ բաժանելին հավասար է զերոյի, իսկ բաժանարարը հավասար չէ զերոյի, ապա քանորդը պետք է զերո լինի:

բ) Այժմ յենթադրենք, վոր բաժանարարը 0 է, իսկ բաժանելին վորևէ ուրիշ թիվ է, որինակ՝ 5։ Ուրեմն տված է (+5) : 0։ Այդ նշանակում է՝ գտնել այնպիսի թիվ, վորը յեթե բազմապատկենք 0-ով, ստացվի +5։ Բայց ինչ թիվ էլ 0-ով բազմապատկենք, միշտ էլ կստանանք 0 և վոչ թե +5. կնշանակի (+5) : 0 քանորդը չի կարող հավասարվել վոչ մի թվի։ Դրա նման անհնարին են նաև հետևյալ բաժանումները.

$(-5) : 0$; $(+0{,}3) : 0$; $(-7{,}26) : 0$ *և այլն։*

Ընդհանրապես՝ եթե բաժանարարը հավասար է զերոյի, իսկ բաժանելին հավասար չէ զերոյի, ապա բաժանումն անհնարին է:

գ) Վերցնենք, վերջապես, այն դեպքը, երբ թե՛ բաժանելին է հավասար զերոյի և թե՛ բաժանարարը.

$$0 : 0 = ?$$

Այս դեպքում քանորդը կարող է ամեն թվի հավասարվել, որովհետև ինչ թիվ էլ զերոյով բազմապատկենք, արտադրյալը զերո կլինի:

Օրինակ՝ կարելի է գրել.

$$0 : 0 = 5;\quad 0 : 0 = 7;\quad 0 : 0 = -100 \text{ և այլն,}$$

որովհետև

$$5 \cdot 0 = 0,\quad 7 \cdot 0 = 0,\quad -100 \cdot 0 = 0 \text{ և այլն:}$$

Վարժություններ

34. $(+20) : (+4)$ $(+20) : (-4)$ $(-20) : (+4)$ $(-20) : (-4)$
35. $(+2a) : -2$ $(-5x) : x$ $(-7x^2) : -7$

VII. ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ԵՎ ԲԱԺԱՆՄԱՆ ԳԼԽԱՎՈՐ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

34. *Մի քանի օրինակներով ցույց տանք, որ բազմապատկման և բաժանման այն հատկությունները, որ մենք նշեցինք թվաբանական թվերի համար (§§ 8 և 9), պահպանում են իրենց ուժը նաև հարաբերական թվերի համար:*

ա) Տեղափոխական օրենք՝ արտադրիչների տեղափոխությունից արտադրյալը չի փոխվում:

Նախ վերցնենք միայն երկու թվերի բազմապատկման դեպքեր.

$$(+5) \cdot (+2) = +10 \text{ և } (+2) \cdot (+5) = +10;$$
$$(-5) \cdot (+2) = -10 \text{ և } (+2) \cdot (-5) = -10;$$
$$\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = +\frac{9}{20} \text{ և } \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = +\frac{9}{20} \text{ և այլն:}$$

Այժմ վերցնենք այնպիսի արտադրյալ, որը կազմված է երկուսից ավել արտադրիչներից, օրինակ՝ $(-2) \cdot (-5) \cdot (+3)$: Այս արտադրյալի բացարձակ մեծությունը հավասար է $2 \cdot 5 \cdot 3$, իսկ նշանը $+$ կլինի, որովհետև բացասական արտադրիչների թիվը տվյալ օրինակում զույգ է: Եթե արտադրիչները տեղափոխենք, օրինակ՝ վերցնենք $(+3) \cdot (-5) \cdot (-2)$, ապա նոր արտադրյալի բացարձակ մեծությունը կլինի $3 \cdot 5 \cdot 2$, իսկ նշանի $+$ կամ $-$ լինելը կախված կլինի բացասական արտադրիչների թվից: Բայց $3 \cdot 5 \cdot 2 = 2 \cdot 5 \cdot 3$ համաձայն թվաբանական թվերի բազմապատկման տեղափոխական օրենքի, և բացասական արտադրիչների թիվը նույնն է մնում, ինչ որ առաջ: Կնշանակի երկու արտադրյալներն էլ կունենան միևնույն բացարձակ մեծությունը և միևնույն նշանը: Այդ պատճառով

$$(-2) \cdot (-5) \cdot (+3) = (+3) \cdot (-5) \cdot (-2),$$

բ) Զուգորդական օրենք՝ արտադրյալը չի փոխվի, յերբ մի քանի արտադրիչների փոխարեն դնենք նրանց արտադրյալը:

Այսպես, փոխանակ

$$(-5)\cdot(+3)\cdot(-2)$$

բազմապատկումն այն կարգով կատարելու, վորով գրված են արտադրիչները, այսինքն փոխանակ վերցնելու

$$(-5)\cdot(+3)=-15,\quad (-15)\cdot(-2)=+30,$$

մենք կարող ենք վորևե յերկու արտադրիչ, որինակ՝ +3 և −2, փոխարինել նրանց արտադրյալով, այսինքն տվյալ որինակում −6-ով, և այնուհետև այդ թվով բազմապատկել յերրորդ արտադրիչը, մեր որինակում՝

$(-5)\cdot(-6)=+30$։ *Այսպիսով՝*

$$(-5)\cdot(+3)\cdot(-2)=(-5)\cdot[(+3)\cdot(-2)]։$$

գ) Վորևե թիվ մի քանի թվերի արտադրյալով բազմապատկելու համար կարելի յե այդ թիվը բազմապատկել առաջին արտադրիչով, ստացած արտադրյալը բազմապատկել յերկրորդ արտադրիչով *և այլն*։

Այսպես, +10-ը $(-2)\cdot(+3)$ արտադրյալով բազմապատկելու համար, մենք կարող ենք նախ հաշվել այդ արտադրյալը, վոր կանի −6, և ապա նրանով բազմապատկել +10-ը (կստանանք −60). բայց կարող ենք +10-ը նախ բազմապատկել −2-ով (կստանանք −20) և ապա ստացած արտադրյալը բազմապատկել +3-ով (կստանանք −60)։ Այսպիսով՝

$$(+10)\cdot[(-2)\cdot(+3)]=(+10)\cdot(-2)\cdot(+3)։$$

ընդհանրապես (զուգորդական օրենքի համաձայն)

$$a(bc)=abc։$$

դ) Ցույց տանք նաև, վոր յերբ բաժանելին յեվ բաժանարարը բազմապատկենք (*կամ* բաժանենք) միևնույն թվով, ապա քանորդը չի փոխվի:

Ինչպես առաջ տեսանք (§ 9, ե), $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$ *հավասարությունն ուղիղ է ամեն թվաբանական թվերի համար, լինեն նրանք ամբողջ, թե կոտորակային։ Այժմ կտեսնենք, վոր այդ հավասարությունը ճիշտ է նաև այն դեպքում, յերբ* a, b *և* m *թվերը բոլորն էլ կամ նրանց մի մասը* հարաբերական *թվեր են նշանակում։*

Վերցնենք բաժանման վորևե որինակ, ասենք թե՝ 5:0,8, և բաժանելին ու բաժանարարը բազմապատկենք, դիցուք, 3-ով։ Դրանից քանորդը չի փոխվի, վորովհետև բոլոր թվերն էլ թվաբանական են. այդ պատճառով կարող ենք հետևյալ հավասարությունը գրել.

$$\frac{5}{0,8}=\frac{5.3}{0,8.3}$$

Այժմ յենթադրենք, թե այս հավասարության մեջ թվերից վորևե մեկը բացասական է դառնում, որինակ 5-ի փոխարեն −5. կստացվի՝

$$\frac{-5}{0,8}=\frac{-5.3}{0,8.3}$$

Համասարությունը պահպանվեց, վորովհետև յերկու քանորդների բացարձակ մեծությունները եղ անփոփոխ մնացին և յերկուսն եղ բացասական թվեր են։

Հեշտ է նույնպես ստուգել, վոր համասարությունը պահպանվում է նաև այն ժամանակ, յերբ մյուս թվերից վորևե մեկն ենք դարձնում բացասական։ Կնշանակի՝ ինչպիսի դրական և բացասական թվեր եղ նշանակեն a, b և m թվերը, $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$ համասարությունը միշտ եղ պահպանվում է։

Քանորդը չի փոխվիլ նաև բաժանելիի ու բաժանարարի միևնույն թվի վրա բաժանելուց, վորովհետև բաժանումը համազոր է հակադարձ թվով բազմապատկելուն։

Նկատենք, սակայն, վոր այն թիվը, վորով բազմապատկում ենք (կամ բաժանում ենք) բաժանելին և բաժանարարը, չպետք է զերո լինի, վորովհետև այդ դեպքում, § 33-ի գ. կետի համաձայն, քանորդն անորոշ է դառնում։

ԵՐՐՈՐԴ ՀԱՏՎԱԾ

ԱՄԲՈՂՋ ՄԻԱՆԴԱՄ ԵՎ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ. ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐ

I. ՆԱԽՆԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐ

35. *Միանդամ և բազմանդամ։ Հանրահաշվական արտահայտությունները երկու խմբի են բաժանվում, նայած թե նրանց մեջ վերջին հանրահաշվական գործողությունն ինչպիսին է։*

Այն հանրահաշվական արտահայտությունը, որի մեջ ըստ կարգի վերջին գործողությունը գումարում կամ հանում չէ, կոչվում է միանդամ։

Օրինակ՝ միանդամը կամ մի առանձին թիվ է, որն արտահայտված է տառով կամ թվանշանով, օրինակ՝ $-a$, $+10$, *կամ մի արտադրյալ է, օրինակ՝* ab, $(a+b)c$, *կամ մի քանորդ է, օրինակ՝* $\frac{a-b}{c}$, *կամ մի աստիճան է, օրինակ՝* b^2. *բայց* միանդամը չպետք է գումար կամ տարբերություն լինի։

Եթե միանդամը քանորդ է ներկայացնում, նա կոչվում է կոտորակային *միանդամ. բոլոր մյուս միանդամները կոչվում են* ամբողջ միանդամներ։ *Այսպես, օրինակ՝* $\frac{a-b}{c}$ *միանդամը կոտորակային է, մինչդեռ* $(x-y)\cdot ab$, $a(x+b)^2$ *միանդամներն ամբողջ են։ Վորովհետև հանրահաշվի սկզբում մենք խոսելու ենք միայն ամբողջ միանդամների մասին, ապա կարճության համար նրանց պարզապես «միանդամներ» կկոչենք։*

Հանրահաշվական այն արտահայտությունը, որը բաղկացած է իրար հետ + կամ — նշաններով միացված մի քանի միանդամներից, կոչվում է բազմանդամ։ *Այսպես, օրինակ՝ բազմանդամ է հետևյալ արտահայտությունը.*

$$ab-a+b^2-10+\frac{a-b}{c}.$$

Այն առանձին արտահայտությունները, որոնց + կամ — նշաններով միացնելուց ստացվում է բազմանդամը, կոչվում են նրա անդամներ։ *Սովորաբար բազմանդամի անդամները դիտվում են այն նշանների հետ միասին, որոնք դրված են նրանց առաջ. օրինակ ասում են՝* $-a$ *անդամը,* $+b^2$ *անդամը և այլն։ Առաջին անդամի առաջ, եթե նրա առաջ վոչ մի նշան չկա, կարելի է հասկանալ + նշանը. այսպես, մեր օրինակում առաջին անդամն է* ab *կամ* $+ab$։

Երկու անդամից բաղկացած արտահայտությունը կոչվում է երկանդամ, *երեք անդամից բաղկացածը՝* եռանդամ *և այլն։*

Եթե բազմանդամի բոլոր անդամներն ամբողջ են, ապա նա էլ կոչվում է ամբողջ։

36. *Գործակից*։ Դիցուք տրված է՝

$$a3ab(-2),$$

արտադրյալը, որի մեջ միքանի արտադրիչներ թվանշաններով են արտահայտված, մի քանիսն էլ տառերով։ Այսպիսի արտադրյալները կարելի է ձևափոխել (օգտվելով բազմապատկման զուգորդական հատկությունից), մի խմբի մեջ միացնելով a տառով արտահայտված բոլոր արտադրիչները և այլն. կստանանք՝

$$3\cdot(-2)\,(aa)b,$$

որ կարելի է ավելի կարճ գրել՝

$$-6a^2b.$$

Թվանշաններով արտահայտած արտադրիչը, որը դրված է տառային արտադրիչներից առաջ, կոչվում է միանդամի գործակից (կոեֆիցենտ)։ Այսպես, $-6a^2b$ միանդամի մեջ -6 թիվը գործակից է։

Նկատենք, որ եթե գործակիցն ամբողջ դրական թիվ է, ապա նա ցույց է տալիս, թե քանի անգամ է իբրև գումարելի կրկնվում այն տառային արտահայտությունը, որին նա վերաբերում է. այսպես, $3ab$-ն նույնն է նշանակում, ինչ որ $(ab)\cdot 3$-ը, այսինքն $ab+ab+ab$։ Եթե գործակիցն ամբողջ բացասական թիվ է, ապա նա ցույց է տալիս, թե քանի անգամ է իբրև հանելի կրկնվում այն տառային արտահայտությունը, որին նա վերաբերում է. այսպես $-3x$-ը նշանակում է՝ $-x-x-x$։ Եթե գործակիցը կոտորակ է, ապա նա արտահայտում է, թե տառային արտահայտության թվային մեծության որ կոտորակն է վերցվում։ Այսպես, $\frac{2}{3}ax$-ը նույնն է նշանակում, ինչ որ $ax\cdot\frac{2}{3}$-ը, իսկ բազմապատկել ax-ը $\frac{2}{3}$-ով նշանակում է վերցնել այդ թվի $\frac{2}{3}$-ը։

37. *Բազմանդամի հատկությունները*։ Ամեն մի բազմանդամ կարելի է դիտել որպես նրա անդամների հանրահաշվական գումարը։ Օրինակ՝

$$2a-b+c$$

բազմանդամը ներկայացնում է $2a+(-b)+(+c)$ գումարը, որովհետև $+(-b)$ արտահայտությունը համազոր է $-b$ արտահայտության և $+(+c)$ արտահայտությունը նույնն է նշանակում, ինչ որ $+c$-ն։ Դրա հետևանքով հարաբերական թվերի գումարի բոլոր հատկությունները (§ 25) պատկանում են նաև բազմանդամին։ Հիշեցնենք այդ հատկություններից երկուսը։

ա) Տեղափոխական օրենք՝ բազմանդամի թվային մեծությունը չի փոխվում նրա անդամների տեղափոխությունից (անդամները պետք է տեղափոխել իրենց նշանների հետ միասին)։

բ) Զուգորդական օրենք՝ բազմանդամի թվային մեծությունը չի փոխվում, յերբ նրա վորևէ անդամները փոխարինենք նրանց գումարով։

Նշենք բազմանդամի հետևյալ կարևոր հատկությունը ևս՝

դ) Երբ բազմանդամի յուրաքանչյուր անդամի առաջ նշանը փոխենք, ապա բազմանդամի թվային մեծությունը նույնպես կփոխի նշանը, իսկ նրա բացարձակ մեծությունը չի փոխվի:

Օրինակ՝ $2a^2-ab+b^2-\frac{1}{2}a$ *բազմանդամի թվային մեծությունը, երբ* $a=-4$ *և* $b=-3$, *հավասար է 31-ի, իսկ* $-2a^2+ab-b^2+\frac{1}{2}a$ *բազմանդամի թվային մեծությունը, երբ տառերը նախկին արժեքներն ունեն, հավասար է —31-ի։*

Վարժություններ

36. *Պարզել հետևյալ արտադրյալները.*

$$ax10xaax \qquad aa(-5)bxx(+2)$$

$$ab\cdot\frac{3}{4}\cdot axx\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad 5mxy(-4)mxyy$$

37. *Իբրև գումարներ ներկայացնել հետևյալ արտահայտությունները.*

$$2a \qquad 3ax \qquad 5a^2b \qquad 4(a+1)$$

38. *Հաշվել հետևյալ միանդամները.*

$7a^2bc$ *երբ* $a=3,\ b=2,\ c=\frac{5}{7}$

$0{,}8a(b+c)$ *երբ* $a=1,\ b=\frac{5}{6},\ c=0{,}25$

$3(a+b)^2c$ *երբ* $a=1,\ b=\frac{5}{6},\ c=0{,}25$

$-7x^2y^3$ *երբ* $x=-2,\ y=1$

$0{,}52ax^2y$ *երբ* $a=100,\ x=-3,\ y=-2$

39. *Հաշվել հետևյալ բազմանդամները.*

$2x^4-x^3+5x^2-7x+1$ *երբ* $x=1$, *երբ* $x=2$

ax^2+bx+c, *երբ* $a=3,\ b=-2,\ c=-5,\ x=1$

40. *Ստուգելով հավաստիանալ, որ*

$$x^3-2x^2+3x-5 \quad \text{և} \quad -x^3+2x^2-3x+5$$

երկու բազմանդամները $x=2$ *արժեքի համար այնպիսի թվեր են տալիս, որոնք բացարձակ մեծությամբ հավասար են, բայց տարբեր նշաններ ունեն։*

38. *Նման անդամների միացում։* Բազմանդամի այն անդամները, որոնք իրարից միայն գործակիցներով կամ նշաններով են տարբերվում, կամ բնավ չեն էլ տարբերվում, կոչվում են նման անդամներ:

Օրինակ՝

$$\underline{4a}-\underline{\underline{3x}}+\underline{0{,}5a}+\underline{\underline{8x}}+3ax-\underline{\underline{2x}}$$

բազմանդամի մեջ առաջին անդամը նման է չերրորդին (նրանք ընդգծված են մի գծիկով), յերկրորդ անդամը չորրորդին և վեցերորդին (ընդգծված են յերկու գծիկով), իսկ հինգերորդ անդամն իրեն նման անդամ չունի։

Յեթե բազմանդամի մեջ իրար նման անդամներ կան, նրանց կարելի յե միացնել և մի անդամ դարձնել բազմանդամի զուգորդական հատկության հիման վրա։ Այսպես, մեր բերած օրինակում անդամները կարող ենք այսպես խմբավորել.

$$(4a+0,5a)+(-3x+8x-2x)+3ax.$$

Բայց ակնհայտ է, վոր վորևե թվի 4-պատիկը և նույն թվի 0,5-ը միասին կազմում են այդ թվից 4,5 անգամ մեծ թիվ։ Նշանակի՝ $4a+0,5a=4,5a$*։ Նմանապես* $-3x+8x=5x$ *և* $5x-2x=3x$*։ Նշանակի՝ բազմանդամը կարելի յե այսպես պատկերացնել.*

$$4,5a+3x+3ax.$$

Բազմանդամի բոլոր նման անդամների միավորումը մի անդամի մեջ՝ կոչվում է բազմանդամի նման անդամների միացում:

Դիտողություն: *Յերկու նման անդամներ, վորոնց գործակիցները հավասար են, իսկ նշանները տարբեր, իրար վոչնչացնում են. այդպես են, օրինակ՝ հետևյալ անդամները.* $+2a$ *և* $-2a$*, կամ* $-\frac{1}{2}x^2$ *և* $+\frac{1}{2}x^2$*,*

Օրինակներ.

1. $a+\underline{5mx}-\underline{2mx}+\underline{7mx}-\underline{8mx}=a+2mx;$
2. $\underline{4ax}+b^2-\underline{7ax}-\underline{3ax}+\underline{2ax}=-4ax+b^2=b^2-4ax;$
3. $\underline{4a^2b^3}-\underline{\underline{3ab}}+\underline{0,5a^2b^3}+3a^2c+\underline{\underline{8ab}}=4,5a^2b^3+5ab+3a^2c.$

Վարժություններ

41. $a^3x^2+3a^2x^3+\frac{1}{2}a^2x^3+a^2x^3$
42. $2x-5xy-8xy-3,1xy-0,2xy$
43. $a+8mxy^2-4\frac{1}{2}mxy^2$
44. $a-8mxy^3+4\frac{1}{2}mxy^2$
45. $5a^3-7a^2b+7ab^2+a^2b-2a^3-8ab^2+a^3-12ab^2+3a^2b$
46. $x^5-4ax^4-2ax^4+2a^2x^3+5ax^4-2a^2x^3+ax^4-7a^2x^3$

Պատմական տեղեկություններ

Բացասական թվերը պատահում են դեռ հույն մաթեմատիկոս Դիոֆանտի *մոտ (IV դ.)։ Նա այդպիսի թվերը կոչում է «անթույլատրելի» և խնդիրներ լուծելիս նրանց կարևորություն չի տալիս։ Բայց վորտեղ հարկավոր է լինում յերկու այնպիսի թվեր բազմապատկել, վորոնք — նշան* ունեն, նա գործ է ածում մի կանոն, վորը նման է մեր կանոնին։ Նա ասում է. «Հանվող թիվը բազմապատկելով հանվող թվով՝ տալիս է ավելացվող թիվ»։ Այսպես նա ստանում է.

$$(7-3)\cdot(5-2)=7\cdot5-7\cdot2-3\cdot5+3\cdot2=12$$ ։

Հնդկական մաթեմատիկոս Բրահմագուպտան (620 թ.) տալիս է արդեն հարաբերական թվերի գումարման և հանման կանոնների մանրամասն ցուցակը։ Բերենք նրանցից մի քանիսը.

«Յերկու ունեցվածքների գումարն ունեցվածք է» (այսինքն, որինակ՝

$$(+2)+(+3)=+5)$$ ։

«Յերկու պարտքերի գումարը պարտք է» (այսինքն, որինակ՝

$$(-2)+(-3)=-5)$$ ։

«Ունեցվածքի և պարտքի գումարը հավասար է նրանց տարբերության» (այսինքն $(+5)+(-7)=-2$)։

«Զերոյից հանվող պարտքը դառնում է ունեցվածք, իսկ ունեցվածքը պարտք» ($0-(-3)=+3$; $0-(+3)=-3$) և այլն։

Յեվրոպայում դեռ 1544 թվին մաթեմատիկոս Շտիֆելը բացասական թվերը կոչում է «անհեթեթ թվեր»։ Ժիրարն իր աշխատության մեջ արդեն օգտվում է բացասական թվերից (1629 թ.), բայց նրանք վերջնականորեն մուծվեցին մաթեմատիկայի մեջ Դեկարտի կողմից (1637 թ.), վորը և դրեց բացասական թվերն իբրև ուղղված մեծություններ, և գիտնական արվեստագետ Լեոնարդո-դա-Վինչիի կողմից (1452—1519)։ Առաջներում գումարման և հանման գործողությունների նշանակման համար գործ եյին ածում լատիներեն plus և minus բառերն առանց կրճատման, բայց հետագայում նրանք կրճատվեցին այնպես, վոր գրում եյին միայն p և m, վերը գիծ դնելով։

Պ. ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄ ՅԵՎ ՀԱՆՈՒՄ

39. Միանդամների գումարումը։ Դիցուք պահանջվում է գումարել մի քանի միանդամներ՝ $3a$, $-5b$, $+0,2a$, $-7b$ և c։

Նրանց գումարն այսպես կարտահայտվի.

$$3a+(-5b)+(+0,2a)+(-7b)+c$$ ։

Բայց $+(-5b)$, $+(+0,2a)$ և $+(-7b)$ արտահայտությունները համազոր են $-5b$, $+0,2a$ և $-7b$ արտահայտություններին. ուստի տված միանդամների գումարը կարելի յե ավելի պարզ այսպես գրել.

$$\underline{3a}-\underline{\underline{5b}}+\underline{0,2a}-\underline{\underline{7b}}+c,$$

վորը նման անդամների միացումից հետո, տալիս է՝

$$3,2a-12b+c$$ ։

Կանոն։ Մի քանի միանդամներ գումարելու համար պետք ե այդ միանդամները մեկը մյուսի յետեվից գրել իրենց նշաններով յեվ նման անդամների միացում կատարել:

40. *Բազմանդամների գումարումը։ Դիցուք պետք ե վորեվե հանրահաշվական արտահայտություն* m-*ին ավելացնել* $a-b+c$ *բազմանդամը։ Վորոնելի գումարը կարելի յե այսպես արտահայտել.*

$$m+(a-b+c).$$

Այս արտահայտությունը ձևափոխելու համար նկատի առնենք, վոր $a-b+c$ *բազմանդամը ներկայացնում ե* $a+(-b)+c$ *գումարը. բայց գումարն ավելացնելու համար կարելի յե նրա ամեն մի գումարելին առանձին գումարել մեկը մյուսի յետեվից։ Ուստի.*

$$m+(a-b+c)=m+a+(-b)+c.$$

Բայց ավելացնել $-b$ *այդ միևնույնն ե, թե հանել* b*. ուստի՝*

$$m+(a-b+c)=m+a-b+c.$$

Կանոն։ Վորեվե հանրահաշվական արտահայտության մի բազմանդամ ավելացնելու համար պետք ե այդ արտահայտությունը կցել մեկը մյուսի յետեվից բազմանդամի բոլոր անդամներն իրենց նշաններով յեվ ապա նման անդամների միացում կատարել:

Յեթե առաջին անդամի առաջև նշան չկա, ապա հասկացվում ե + նշանը։

Օրինակ՝

$$3a^2-5ab+b^2+(4ab-b^2+7a^2).$$

Հանրահաշվական արտահայտությունն այս օրինակում տրված ե $3a^2-5ab+b^2$ *բազմանդամի տեսքով։ Կիրառելով նշած կանոնը, կգտնենք.*

$$3a^2-5ab+b^2+(4ab-b^2+7a^2)=$$
$$=3a^2-5ab+b^2+4ab-b^2+7a^2=10a^2-ab.$$

Դիտողություն: *Յեթե գումարելու համար տրված բազմանդամները* նման անդամներ *են պարունակում (ինչպես մեր օրինակում), ապա օգտակար ե գումարելիներն այնպես գրել մեկը մյուսի տակ, վոր նման անդամները նման անդամների տակ գան՝*

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 3a^2-5ab+b^2 \\ 7a^2+4ab-b^2 \end{array} \\ \hline 10a^2-ab \end{array}$$

Վարժություններ

Գումարել հետևյալ բազմանդամները գրելով տակետակ (նման անդամները նմանների տակ).

47. $(2x-y-z)+(2y+z-x)+(2z-x-y)$

48. $(3x^3-4x^2+2x-1)+(2x^2-3x+4)+(x^3-2+4x+3x^2)$

49. $(4a^3-5a^2b+7ab^2-9b^3)+(-2a^3+4a^2b-ab^2-4ab^3)+(8ab^2-$
$-10a^2b+6a^3+10b^3)$.

41. *Միանդամների հանումը։* *Դիցուք պետք է* $10ax$ *միանդամից հանել* $-3ax$ *միանդամը։ Վորոնելի տարբերությունն այսպես կարտահայտվի.*

$$10ax-(-3ax)։$$

$-3ax$ *թվի հանումը կարելի յէ, այդ գործողության կանոնի համաձայն, փոխարինել այդ թվին հակադիր թվի ավելացումով։ Այդ հակադիր թիվն է* $+3ax$, *ուստի.*

$$10ax-(-3ax)=10ax+(+3ax)=10ax+3ax=13ax.$$

Կանոն։ Միանդամը հանելու համար պետք է այդ միանդամը գրել նվազելիի կողքին հակադիր նշանով (յետ նման անդամների միացում կատարել, եթե այդպիսիները կան):

42. *Բազմանդամի հանումը։* *Դիցուք պահանջվում է վորևէ* m *արտահայտությունից հանել* $a-b+c$ *բազմանդամը, այդ կարելի յէ այսպես նշանակել.*

$$m-(a-b+c).$$

Դրա համար, հանման կանոնի համաձայն, բավական է m*-ին ավելացնել* $a-b+c$ *թվին հակադիր թիվը։ Այդ հակադիր թիվն է* $-a+b-c$. *կունենանք՝*

$$m-(a-b+c)=m+(-a+b-c).$$

Այժմ կիրառելով բազմանդամների գումարման կանոնը՝ կստանանք.

$$m-(a-b+c)=m-a+b-c.$$

Կանոն։ Վորեվե հանրահաշվական արտահայտությունից մի բազմանդամ հանելու համար պետք է այդ արտահայտության կողքին գրել հանելի բազմանդամի բոլոր անդամները հակադիր նշաններով:

Յեթե պահանջվում է մի բազմանդամից մի այլ բազմանդամ հանել և այդ բազմանդամների մեջ նման անդամներ *կան, ապա օգտակար կլինի հանելի բազմանդամը փոխած նշաններով գրել նվազելի բազմանդամի տակ այնպես, վոր նման անդամները նմանների տակ գան և ապա միացում կատարել։ Օրինակ՝* $(7a^2-2ab+b^2)-(5a^2+4ab-2b^2)$ *հանումն ամենից ավելի լավ է այսպես կատարել.*

$$\begin{array}{r} 7a^2-2ab+\ b^2 \\ -\quad 5a^2-4ab+2b^2 \\ \hline 2a^2-6ab+3b^2 \end{array}$$

Վարժություններ

50. $(2p^2-4p+8)-(p^2-5p-7)$

51. $4x^2+y^2+5$ *բազմանդամից հանել* $-2y^2+y+6$ *բազմանդամը։*

52. $\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}$*-ը հանել* $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+1$*-ից։*

53. *Պարզել հետևյալ արտահայտությունը.*

$$x=(2a^2-2b^2+c^2)-(a^2-2b^2-c^2)+(3a^2+4b^2-3c^2)$$

43. *Փակագծերի բացումը, որոնց առջև + կամ — նշան կա։ Դիցուք պահանջվում է*

$$2a+(a-3b+c)-(2a-b+2c)$$

արտահայտության մեջ փակագծերը բանալ։ Այդ պետք է այսպես հասկանալ, որ պահանջվում է փակագծերի ներսը գտնվող բազմանդամների նկատմամբ այն գործողությունները կատարել, որոնք նշված են փակագծերի առջև դրված նշաններով։ Մեր օրինակում առաջին փակագծերի առջև դրված է + նշանը, իսկ երկրորդների առջև՝ — նշանը։ Կատարելով գումարումը և հանումը տված կանոնների համաձայն, կստանանք առանց փակագծերի արտահայտություն՝

$$2a+a-3b+c-2a+b-2c=a-2b-c.$$

Այսպիսով՝ **երբ այնպիսի փակագծեր ենք բացում, որոնց առջև + նշան է դրված, ապա փակագծերի ներսը գրված անդամների նշանները պետք է անփոփոխ մնան, իսկ երբ այնպիսի փակագծեր ենք բացում, որոնց առջև — նշան է դրված, ապա պետք է փակագծերի ներսը գտնվող բոլոր անդամների նշանները փոխել։**

Դիցուք պահանջվում է փակագծերը բանալ հետևյալ արտահայտության մեջ.

$$10p-[3p+(5p-10)-4].$$

Ամենից ավելի հարմար է նախ փոքր փակագծերը բանալ և ապա միջակները.

$$10p-[3p+5p-10-4]=10p-3p-5p+10+4=2p+14.$$

44. *Բազմանդամի մի մասը փակագծերի մեջ առնելը։ Բազմանդամի ձևափոխման համար երբեմն օգտակար է լինում նրա մի քանի անդամները միասին փակագծերի մեջ առնելը և այդ ժամանակ երբեմն ցանկալի է լինում փակագծերի առջև + նշան դնել, այսինքն բազմանդամը պատկերացնել իբրև գումար, երբեմն էլ ցանկալի է լինում փակագծերի առջև — նշան դնել, այսինքն բազմանդամը պատկերացնել իբրև տարբերություն։ Դիցուք, օրինակ՝* $a+b\ \ c$ *բազմանդամի մեջ մենք ցանկանում ենք փակագծերի մեջ առնել վերջին երկու անդամները, փակագծերի առջև դնելով + նշանը։ Այդ դեպքում գրում ենք.*

$$a+b\ \ c=a+(b-c),$$

այսինքն փակագծերի ներսը թողնում ենք նույն նշանները, ինչ որ կա-

յին տված բազմանդամի մեջ։ Որ այդպիսի ձևափոխումն իրավացի է, կարելի է նկատել, փակագծերը բանալով հանման կանոնի համաձայն. այն ժամանակ նորից կստանանք տված բազմանդամը։

Կարելի է նաև վողջ բազմանդամն առնել փակագծերի մեջ, փակագծերի առջև դնելով + նշանը կամ — նշանը։ Օրինակ՝ a+b—c բազմանդամը կարելի է այսպես գրել.

$$+(a+b-c) \text{ կամ } -(-a-b+c)\text{։}$$

Վարժություններ

Փակագծերը բանալ և պարզել.

54. $x+[x-(x-y)]$ $\quad m-\{n-[m+(m-n)]+m\}$

55. $a+b-c-[a-(b-c)]-[a+(b-c)-(a-c)]$

56. $(3x^2-4y^2)-(x^2-2xy-y^2)+[2x^2+2xy+(-4xy)+3y^2]$

57. $a-b-c+d$ բազմանդամի մեջ, առանց նրա թվական մեծությունը փոխելու փակագծերի մեջ առնել ա) վերջին յերեք անդամները, փակագծերի առջև դնելով — նշան. բ) վերջին յերկու անդամները, փակագծերի առջև դնելով + նշան. գ) միջին յերկու անդամները, փակագծերի առջև դնելով — նշան։

III. ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄ

45. Միանդամների բազմապատկումը։ ա) Դիցուք պետք է a^3-ը բազմապատկել a^2. այդ կարելի է նշանակել այսպես՝ a^3a^2 կամ, ավելի մանրամասն՝ $(aaa)(aa)$։ Այստեղ aaa արտադրյալը բազմապատկված է aa արտադրյալով։ Բայց վորևե թիվ մի արտադրյալով բազմապատկելու համար կարելի է այդ թիվը բազմապատկել առաջին արտադրիչով, ստացած արդյունքը բազմապատկել յերկրորդ արտադրիչով և այլն։ Այս պատճառով՝

$$a^3a^2=(aaa)aa,$$

վոր կարելի է նաև առանց փակագծերի գրել, վորովհետև գործողությունների կարգն առանց փակագծերի նույնն է մնում, ինչ վոր ցույց է տված փակագծերով.

$$a^3a^2=aaaaa=a^5\text{։}$$

Մենք տեսնում ենք, վոր արտադրյալի աստիճանացույցը հավասար է արտադրիչների աստիճանացույցերի գումարին։

Վերցնենք մի ուրիշ օրինակ՝ x^3-ը բազմապատկենք x^4-ով։ Դատելով այնպես, ինչպես և նախորդ դեպքում, կստանանք.

$$x^3\cdot x^4=(xxx)(xxxx)=xxxxxxx=x^7\text{։}$$

Ընդհանրապես, a^m-ի և a^n-ի արտադրյալը կլինի՝

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}\text{։}$$

Նշանակի միևնույն թվի աստիճանների արտադրյալը հավասար է այդ թվի այնպիսի աստիճանին, որի ցուցիչը ներկայացնում է բազմապատկվող աստիճանների ցուցիչների գումարը։ Այդ կարճ այսպես են արտահայտում.

Միևնույն թվի աստիճանները բազմապատկելիս նրանց ցուցիչները գումարվում են:

Այսպիսով՝

$$m^2m^3=m^5;\ x^3x=x^4;\ y^2yy^3=y^6.$$

բ) Դիցուք պետք է բազմապատկել

$$3ax^2(-5abx).$$

Քանի որ $-5abx$ *միանդամն արտադրյալ է, ապա բավական է բազմապատկելին բազմապատկել առաջին բազմապատկչով, այսինքն* -5*-ով, արդյունքը բազմապատկել յերկրորդ բազմապատկչով, որ է* a, *և այլն. Նշանակի՝*

$$3ax^2(-5abx)=3ax^2(-5)abx.$$

Այս արտադրյալի մեջ, օգտվելով բազմապատկման զուգորդական հատկությունից բազմապատկիչները կխմբավորենք այսպես.

$$(+3)\cdot(-5)\cdot(aa)\cdot b\cdot(x^2x).$$

Կատարելով բազմապատկումը յուրաքանչյուր խմբի մեջ՝ կստանանք $-15a^2bx^3$.

Կանոն. Միանդամը միանդամով բազմապատկելու համար պետք է նրանց գործակիցները բազմապատկել, միատեսակ տառերի ցուցիչները գումարել, իսկ այն տառերը, որոնք կան միայն բազմապատկելիի կամ բազմապատկչի մեջ, փոխադրել արտադրյալի մեջ իրենց ցուցիչներով:

Օրինակներ՝

1. $0{,}7a^3x(3a^4x^2y^2)=2{,}1a^7x^3y^2$; 2. $-3{,}5x^2y\left(\frac{3}{4}x^3\right)=-\frac{21}{8}x^5y$.

46. *Միանդամի քառակուսին և խորանարդը։* *Մենք գիտենք, որ որևէ թիվ քառակուսի կամ խորանարդ բարձրացնել նշանակում է այդ թիվը իբրև արտադրիչ կրկնել յերկու, համապատասխանաբար յերեք, անգամ. օրինակ՝*

$$11^2=11\cdot 11=121;\quad \left(-1\frac{1}{2}\right)^2=\left(-1\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)=2\frac{1}{4}$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$a^2=aa;$$

$$4^3=4\cdot 4\cdot 4=64;\quad (-5)^3=(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)=-125.$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$a^3=aaa.$$

Այս սահմանումը կիրառենք ամբողջ միանդամները քառակուսի և խորանարդ բարձրացնելու վրա։

1. Դիցուք պետք է a^4-ը քառակուսի կամ խորանարդ բարձրացնել։ Սահմանումի համաձայն՝

$$(a^4)^2=a^4 \cdot a^4; \quad (a^4)^3=a^4 \cdot a^4 \cdot a^4.$$

Կիրառելով միանդամների բազմապատկման կանոնը՝ կստանանք.

$$(a^4)^2=a^8; \quad (a^4)^3=a^{12}$$

Նույնպես և՝

$$(a^3)^2=a^6; \quad (a^3)^3=a^9$$

Ընդհանուր ձևով՝

$$(a^m)^2=a^m a^m=a^{2m}; \quad (a^m)^3=a^m a^m a^m=a^{3m}$$

Աստիճանը քառակուսի կամ խորանարդ բարձրացնելու համար պետք է աստիճանացույցը բազմապատկել համապատասխանաբար յերկուսով կամ յերեքով: *Այսպես՝*

$$(4^2)^2=4^4=256; \quad (2^2)^3=2^6=64 \text{ և այլն։}$$

Ստուգում: $4^2=16$; $16^2=256$; $2^2=4$; $4^3=64$։

2. Դիցուք պետք է քառակուսի կամ խորանարդ բարձրացնել abc *արտադրյալը։ Սահմանումի համաձայն*

$$(abc)^2=(abc)(abc); \quad (abc)^3=(abc)(abc)(abc).$$

Կիրառելով բազմապատկման հատկությունները՝ կստանանք.

$$(abc)^2=abcabc=(aa)(bb)(cc)=a^2b^2c^2;$$

$$(abc)^3=abcabcabc=(aaa)(bbb)(ccc)=a^3b^3c^3.$$

Արտադրյալը քառակուսի կամ խորանարդ բարձրացնելու համար պետք է ամեն մի արտադրիչն առանձին բարձրացնել այդ աստիճանը *(և արդյունքները բազմապատկել)։ Այսպես՝*

$$(2 \cdot 3 \cdot 5)^2=2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2=4 \cdot 9 \cdot 25=900.$$

Ստուգում. $2 \cdot 3 \cdot 5=30$; $30^2=900$։

$$(2 \cdot 3)^3=2^3 \cdot 3^3=8 \cdot 27=216.$$

Ստուգում. $2 \cdot 3=6$; $6^3=216$։

3. Դիցուք այժմ պետք է քառակուսի կամ խորանարդ բարձրացնել $-4a^3bc^4$ *միանդամը։ Կիրառելով հենց նոր արտածած կանոնները՝ կունենանք.*

$$(-4a^3bc^4)^2=(-4)^2 \cdot (a^3)^2 \cdot (b)^2 \cdot (c^4)^2=16a^6b^2c^8;$$

$$(-4a^3bc^4)^3=(-4)^3 \cdot (a^3)^3 \cdot (b)^3 \cdot (c^4)^3=-64a^9b^3c^{12}.$$

Կանոններ. 1. Ամբողջ միանդամը քառակուսի բարձրացնելու համար պէտք է միանդամի գործակիցը քառակուսի բարձրացնել, իսկ տառերի ցուցիչները բազմապատկել յերկուսով:

2. Ամբողջ միանդամը խորանարդ բարձրացնելու համար պէտք է նրա գործակիցը խորանարդ բարձրացնել, իսկ տառերի ցուցիչները բազմապատկել յերեքով:

47. *Բազմանդամի բազմապատկումը միանդամով:* *Դիցուք տված է բազմապատկելու* $a+b-c$ *բազմանդամը վորեւէ հանրահաշվական արտահայտությամբ, օրինակ՝ մի միանդամով, վորը կնշանակենք մի* m *տառով՝*

$$(a+b-c)\cdot m.$$

Կիրառելով բազմապատկման բաշխական օրենքը՝ կստանանք.

$$(a+b-c)m=am+bm-cm.$$

Կանոն: Բազմանդամը միանդամով բազմապատկելու համար բավական է այդ միանդամով բազմապատկել բազմանդամի յուրաքանչյուր անդամը յեվ ստացած արտադրյալները գումարել:

Քանի վոր արտադրյալն արտադրիչների փոխադրությունից չի փոխվում, ապա այս կանոնը կիրառելի յե նաեւ այն դեպքում, յերբ միանդամն ենք բազմապատկում բազմանդամով: Այսպիսով՝

$$m(a+b-c)=ma+mb-mc.$$

Օրինակներ.

1. $(3x^2-2ax+5a^2)\cdot(-4ax).$

Այստեղ բազմանդամի անդամների բազմապատկումը տված միանդամով պետք է կատարել միանդամների բազմապատկման կանոնով, նկատի առնելով նաեւ նշանների կանոնը, ըստ վորի միատեսակ նշանները բազմապատկման ժամանակ տալիս են $+$, *իսկ տարբեր նշանները* $-$: *Բազմանդամի յուրաքանչյուր անդամն առանձին բազմապատկում ենք* $-4ax$ *միանդամով.*

$$(3x^2)(-4ax)=-12ax^3;\quad (-2ax)(-4ax)=+8a^2x^2,$$
$$(5a^2)(-4ax)=-20a^3x.$$

Այժմ գումարենք ստացած արդյունքները.

$$-12ax^3+8a^2x^2-20a^3x.$$

2. $(a^2-ab+b^2)(3a)=a^2(3a)-(ab)(3a)+b^2(3a)=$
$=3a^3-3a^2b+3ab^2.$

3. $\left(7x^2+\frac{3}{4}ax-0{,}3\right)(2{,}1a^2x)=(7x^2)(2{,}1a^2x)+\left(\frac{3}{4}ax\right)(2{,}1a^2x)-$
$-0{,}3(2{,}1a^2x)=14{,}7a^2x^3+1{,}575a^3x^2-0{,}63a^2x.$

4. $2a\left(3a-4ax+\frac{1}{2}x^2\right)=6a^2-8a^2x+ax^2.$

48. *Բազմանդամի բազմապատկումը բազմանդամով։* Դիցուք պետք է $a+b-c$ բազմանդամը բազմապատկել $m-n$ բազմանդամով. այդ կարելի յե այսպես արտահայտել.

$$(a+b-c)(m-n).$$

$(m-n)$ բազմապատկիչը դիտելով իբրև մեկ թիվ (իբրև միանդամ), կիրառենք բազմանդամի միանդամով բազմապատկելու կանոնը.

$$(a+b-c)(m-n)=a(m-n)+b(m-n)-c(m-n).$$

Ստացած բազմանդամի յուրաքանչյուր անդամը ներկայացնում է միանդամի և բազմանդամի արտադրյալը։ Նորից կիրառելով նախընթաց կանոնը՝ կստանանք.

$$(am-an)+(bm-bn)-(cm-cn).$$

Փակագծերը բանալով գումարման և հանման կանոնների համաձայն, վերջնականապես կգտնենք.

$$(a+b-c)(m-n)=am-an+bm-bn-cm+cn.$$

Կանոն։ Բազմանդամը բազմանդամով բազմապատկելու համար պետք է առաջին բազմանդամի յուրաքանչյուր անդամը բազմապատկել յերկրորդ բազմանդամի յուրաքանչյուր անդամով և ստացած արտադրյալները գումարել:

Ի հարկե, առաջին բազմանդամի անդամները յերկրորդ բազմանդամի անդամներով բազմապատկելիս պետք է ղեկավարվել նշանների կանոններով. միատեսակ նշանները տալիս են $+$, տարբեր նշանները $-$։

Օրինակ.

$$(a^2-5ab+b^2-3)(a^3-3ab^2+b^3)$$

Նախ կբազմապատկենք բազմապատկելիի բոլոր անդամները բազմապատկիչի առաջին անդամով. կստանանք.

$$(a^2-5ab+b^2-3)a^3=a^5-5a^4b+a^3b^2-3a^3.$$

Այնուհետև բազմապատկելիի բոլոր անդամները կբազմապատկենք բազմապատկիչի յերկրորդ անդամով.

$$(a^2-5ab+b^2-3)(-3ab^2)=-3a^3b^2+15a^2b^3-3ab^4+9ab^2.$$

Այնուհետև կբազմապատկենք յերրորդ անդամով.

$$(a^2-5ab+b^2-3)(+b^3)=a^2b^3-5ab^4+b^6-3b^3.$$

Վերջապես, կգումարենք ստացած բոլոր արտադրյալները և նման անդամների միացում կկատարենք. վերջնական արդյունքը կլինի.

$$a^5\quad 5a^4b\quad 2a^3b^2-3a^3+16a^2b^3-8ab^4+9ab^2+b^5-3b^3.$$

Օրինակներ.

1. $(a-b)(m-n-p)=am\quad bm-an+bn-ap+bp;$
2. $(x^2-y^2)(x+y)=x^3-xy^2+x^2y-y^3;$

3. $(3an+2n^2-4a^2)\ (n^2-5an)=3an^3+2n^4-4a^2n^2-15a^2n^2-10an^3+$ $+20a^3n=-7an^3+2n^4-19a^2n^2+20a^3n;$

4. $(2a^2-3)^2=(2a^2-3)\ (2a^2-3)=(2a^2)^2-3(2a^2)-(2a^2)3+9=4a^4-$ $-6a^2-6a^2+9=4a^4-12a^2+9.$

Վարժություններ

58. $(5a^2b^3)\ (3ab^4c)$ $\left(\frac{3}{4}ax^3\right)\left(\frac{5}{6}ax^3\right)$

59. $(0,3abx)\ (2,7a^2bx^2)$ $(7a^2b^4c)\ (3ab^3c^2)\left(\frac{1}{21}a^3b\right)$

60. $\left(\frac{3}{7}mx^2y^3\right)^2$ $(2a^3bx^2)^3$

61. $(0,1x^my^3)^2$ $\left(\frac{1}{2}m^2ny^3\right)^3$

62. $(3a^2-2b^3+c)2ab$

63. $(5a-4a^2b+3a^3b^2-7a^4b^3)5a^2b$

64. $(a+b-c)\ (m-n)$ $(2a-b)\ (3a+b^2)$

65. $\left(a+\frac{1}{2}b\right)(2a-b)$ $(x^2+xy+y^2)\ (x-y)$

66. $(x^2-xy+y^2)\ (x+y)$

67. $(2x+3y)\ (3x-2y)$ $(y-1)\ (y^3+y^2+y+1)$

49. *Դասավորված բազմանդամ։* Բազմանդամը դասավորել որևէ տառի աստիճաններով՝ նշանակում է բազմանդամի անդամներն այնպիսի հաջորդականությամբ գրել, որ այդ տառի ցուցիչներն առաջին անդամից դեպի վերջինը մեծանան կամ փոքրանան։ Օրինակ՝ $1+2x+3x^2-x^3$ բազմանդամը դասավորված է x տառի **աճող աստիճաններով**։ Այդ նույն բազմանդամը դասավորված կլինի x տառի **նվազող աստիճաններով**, եթե նրա անդամները հակադարձ կարգով գրենք. $-x^3+3x^2+2x+1$։

Այն տառը, ըստ որի դասավորված է բազմանդամը, կոչվում է բազմանդամի **գլխավոր տառ**։ Այն անդամը, որի մեջ գլխավոր տառն ամենամեծ աստիճանացույցն ունի, կոչվում է բազմանդամի **բարձրագույն անդամ**. այն անդամը, որի մեջ գլխավոր տառն ամենափոքր ցուցիչն ունի կամ բնավ չի պարունակում այդ գլխավոր տառը, կոչվում է բազմանդամի **ցածրագույն անդամ**։

50. *Դասավորված բազմանդամների բազմապատկումն* ամենից ավելի հարմար է կատարել այնպես, ինչպես հիմա ցույց կտանք մի օրինակով։

$3x-5+7x^2-x^3$-ը բազմապատկել $2-8x^2+x$-ով։

Երկու բազմանդամներն էլ դասավորելով x տառի նվազող աստիճաններով՝ բազմապատկիչը գրում են բազմապատկելիի տակ և նրանց տակ գիծ քաշում.

$$
\begin{array}{r}
-x^3+7x^2+3x-5 \\
-8x^2+x+2 \\
\hline
8x^5-56x^4-24x^3+40x^2 \\
-x^4+7x^3+3x^2-5x \\
-2x^3+14x^2+6x-10 \\
\hline
8x^5-57x^4-19x^3+57x^2+x-10
\end{array}
$$

Բազմապատկելիի բոլոր անդամները բազմապատկում են բազմապատկչի առաջին անդամով ($-8x^2$-ով) և ստացած արտադրյալը գրում են գծի տակ։ Այնուհետև բազմապատկելիի բոլոր անդամները բազմապատկում են բազմապատկչի յերկրորդ անդամով ($+x$) և ստացած յերկրորդ արտադրյալը գրում են առաջինի տակ այնպես, որ նման անդամները նմանների տակ գտնվեն։ Այդպես շարունակում են։ Վերջին արտադրյալի տակ գիծ են քաշում, բոլոր առանձին արտադրյալները գումարում են և այդ գծի տակ գրում լրիվ արտադրյալը։

Կարելի յե նաև յերկու բազմանդամներն էլ դասավորել աճող աստիճաններով և այնուհետև բազմապատկումը կատարել նույն կարգով, ինչպես նոր ցույց տրվեց։

51. *Արտադրյալի բարձրագույն և ցածրագույն անդամները։ Նախընթաց օրինակի քննությունից հետևում է.*

Արտադրյալի բարձրագույն անդամը հավասար է բազմապատկելիի բարձրագույն անդամի յեվ բազմապատկչի բարձրագույն անդամի արտադրյալին.

Արտադրյալի ցածրագույն անդամը հավասար է բազմապատկելիի ցածրագույն անդամի յեվ բազմապատկչի ցածրագույն անդամի արտադրյալին:

Քանի որ արտադրյալի բոլոր մնացած անդամների մեջ գլխավոր տառի ցուցիչն ավելի փոքր կլինի քան բարձրագույն անդամի մեջ և միևնույն ժամանակ ավելի մեծ քան ցածրագուն անդամի մեջ, ապա արտադրյալի բարձրագույն և ցածրագույն անդամները չեն կարող նման անդամներ ունենալ։

Արտադրյալի մնացած անդամները կարող են ստացվել մի քանի նման անդամների միացումից։ Կարող է նույնիսկ պատահել, որ արտադրյալի մեջ, նման անդամների միացում կատարելուց հետո, բոլոր անդամները, բացի բարձրագույնից և ցածրագույնից, վոչնչանան, ինչպես այդ կարելի յե տեսնել հետևյալ օրինակից.

$$
\begin{array}{r}
x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4 \\
x-a \\
\hline
x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x \qquad \\
-ax^4-a^2x^3-a^3x^2-a^4x-a^5 \\
\hline
x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad -a^5=x^5-a^5
\end{array}
$$

52. *Արտադրյալի անդամների թիվը։ Դիցուք բազմապատկելիի մեջ 5 անդամ կա, իսկ բազմապատկչի մեջ 3 անդամ, Բազմապատկելիի յուրաքանչյուր անդամը բազմապատկելով բազմապատկչի առաջին անդամով, արտադրյալում կստանանք 5 անդամ. այնուհետև բազմապատկելով բազմապատկելիի յուրաքանչյուր անդամը բազմապատկչի յերկրորդ*

անդամով՝ արտադրյալում կստանանք 5 անդամ ևս և այլն. կնշանակի՝ արտադրյալի բոլոր անդամների թիվը կլինի 5 . 3, այսինքն 15։ Ընդհանրապես, արտադրյալի անդամների թիվը, նախքան նրա մեջ նման անդամների միացում կատարելը, հավասար է բազմապատկելիի անդամների թվի յեվ բազմապատկչի անդամների թվի արտադրյալին։

Քանի վոր արտադրյալի բարձրագույն և ցածրագույն անդամներն իրենց նման անդամներ չեն կարող ունենալ, իսկ մյուս բոլոր անդամները կարող են իրար վոչնչացնել, ապա արտադրյալի անդամների թիվը, նրա մեջ նման անդամների միացում կատարելուց հետո, չի կարող յերկուսից պակաս լինել։

Վարժություններ

Հետևյալ բազմանդամները դասավորել x *տառի նվազող աստիճաններով և իրարով բազմապատկել.*

68. $24x+6x^2+x^3+60$ *և* $12x-6x^2+12+x^3$

69. $(x^5-x^3+x-1)(x^4+x^2-1)$

70. $(x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5)(x+a)$

53. *Յերկանդամների բազմապատկման մի քանի բանաձևեր։ Օգտակար է հիշել յերկանդամների բազմապատկման հետևյալ բանաձևերը.*

ա) $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2.$

Օրինակ՝

$$17^2=(10+7)^2=10^2+2\cdot10\cdot7+7^2=100+140+49=289.$$

Այսպիսով՝ յերկու թվերի գումարի քառակուսին հավասար է առաջին թվի քառակուսուն, գումարած առաջին թվի յեվ յերկրորդի կրկնապատիկ արտադրյալը, գումարած յերկրորդ թվի քառակուսին։

բ) $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2.$

Օրինակ՝

$$19^2=(20-1)^2=20^2-2\cdot20\cdot1+1^2=400-40+1=361.$$

Այսպիսով՝ յերկու թվերի տարբերության քառակուսին հավասար է առաջին թվի քառակուսուն, հանած առաջին թվի յեվ յերկրորդի կրկնապատիկ արտադրյալը, գումարած յերկրորդ թվի քառակուսին։

գ) Քանի վոր յերկու թվերի և ընդհանրապես յերկու հանրահաշվական արտահայտությունների տարբերությունը կարելի յե ներկայացնել իբրև հանրահաշվական գումար, ապա նախընթաց յերկու կանոնները կարելի յե միացնել և այսպես արտահայտել.

Յերկանդամի քառակուսին հավասար է առաջին անդամի քառակուսուն, գումարած առաջին անդամի յեվ յերկրորդի կրկնապատիկ արտադրյալը, գումարած յերկրորդի քառակուսին։

Պետք է միայն հիշել, վոր քառակուսի բարձրացվող յերկանդամի ամեն մի անդամը պետք է իր նշանով վերցվի։

Օրինակ՝

1. $(2ab-c^2)^2=(2ab)^2+2(2ab)(-c^2)+(-c^2)^2=4a^2b^2-4abc^2+c^4$.
2. $(-m+3n^3)^2=(-m)^2+2(-m)(3n^3)+(3n^3)^2=m^4-6mn^3+9n^6$.

գ) $(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab+b^2=a^2-b^2$.

Օրինակ՝

$$25\cdot15=(20+5)\cdot(20-5)=20^2-5^2=400-25=375.$$

Այսպիսով՝ յերկու թվերի գումարի յեվ նրանց տարբերության արտադրյալը հավասար է այդ թվերի քառակուսիների տարբերության:

54. *Այս բանաձևերի կիրառումը։ Նշած բանաձևերի օգնությամբ կարելի յե բազմանդամների բազմապատկումն ավելի կրճատ կատարել՝ քան սովորական յեղանակով։*

Օրինակներ.

1. $(4a^3-1)^2=(4a^3)^2-2(4a^3)\cdot1+1^2=16a^6-8a^3+1$;
2. $(x+y)(y-x)=(y+x)(y-x)=y^2-x^2$;
3. $(x+y+1)(x-y+1)=[(x+1)+y][(x+1)-y]=(x+1)^2-y^2=$ $=x^2+2x+1-y^2$;
4. $(a-b+c)(a+b-c)=[a-(b-c)][a+(b-c)]=a^2-(b-c)^2=$ $=a^2-(b^2-2bc+c^2)=a^2-b^2+2bc-c^2$.

Վարժություններ

ա) 71. $(a+1)^2$	$(1+2a)^2$	$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$
72. $(3a^2+1)^2$	$(0{,}1mx+5x^2)^2$	
բ) 73. $(5a-2)^2$	$(3x-2a)^2$	$\left(3a^2-\frac{1}{2}\right)^2$

74. *Օգտվելով $(a+b)^2$-ու և $(a-b)^2$-ու համար նշած բանաձևերից գտնել հետևյալ քառակուսիները.*

101^2 997^2 96^2 57^2 72^2 89^2

Կրճատ ձևով գտնել հետևյալ արտադրյալները.

75. $(x^2+1)(x+1)(x-1)$ $(4x^2+y^2)(2x+y)(2x-y)$
76. $(m+n-p)(m+n+p)$ $[a+(b+c)][a-(b+c)]$

55. *Յերկու թվերի գումարի խորանարդը և տարբերության խորանարդը։ Յերկանդամների բազմապատկման բանաձևերին ավելացնենք նաև հետևյալ յերկուսը.*

ա) $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+\underline{2a^2b}+\underline{\underline{ab^2}}+$ $+\underline{a^2b}+\underline{\underline{2ab^2}}+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, *այսինքն* յերկու թվերի գումարի խորանարդը հավասար է՝ առաջին թվի խորանարդին, գումարած առաջին թվի քառակուսու յեվ յերկրորդի յեռապատիկ արտադրյալը, գումարած առաջին թվի յեվ յերկրորդի քառակուսու յեռապատիկ արտադրյալը, գումարած յերկրորդ թվի խորանարդը:

Օրինակ.

$11^3=(10+1)^3=10^3+3\cdot10^2\cdot1+3\cdot10\cdot1^2+1^3=1000+300+$
$+30+1=1331.$

բ) $(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=a^3-\underline{2a^2b}+$
$+\underline{\underline{ab^2}}-\underline{a^2b}+\underline{\underline{2ab^2}}-b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$

այսինքն՝

Յերկու թվերի տարբերության խորանարդը հավասար է՝ առաջին թվի խորանարդին, հանած առաջին թվի քառակուսու յեվ յերկրորդի յեռապատիկ արտադրյալը, գումարած առաջին թվի յեվ յերկրորդի քառակուսու յեռապատիկ արտադրյալը, հանած յերկրորդի խորանարդը:

Օրինակ.

$29^3=(30-1)^3=30^3-3\cdot30^2\cdot1+3\cdot30\cdot1^2-1^3=27000-2700+90-$
$-1=24389.$

գ) Յեթե խորանարդ բարձրացվող յերկանդամի անդամներն իրենց նշաններով վերցնենք, ապա նախընթաց յերկու կանոնները կարելի է միացնել և հետևյալ ձևով արտահայտել.

Յերկանդամի խորանարդը հավասար է՝ առաջին անդամի խորանարդին, գումարած առաջին անդամի քառակուսու յեվ յերկրորդի յեռապատիկ արտադրյալը, գումարած առաջին անդամի յեվ յերկրորդի քառակուսու յեռապատիկ արտադրյալը, գումարած յերկրորդ անդամի խորանարդը:

Օրինակ.

$(2a-3b)^3=(2a)^3+3(2a)^2(-3b)+3(2a)(-3b)^2+(-3b)^3=8a^3-$
$-36a^2b+54ab^2-27b^3.$

Վարժություններ

77. $(a+1)^3$ $(a-1)^3$ $(2x+3)^3$ $(5-3x)^3.$

IV. ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԲԱԺԱՆՈՒՄ

56. *Միանդամների բաժանումը. ա) Դիցուք հարկավոր է հետևյալ բաժանումը կատարել.*

$$a^5 : a^2.$$

Քանի որ բաժանելին պետք է հավասար լինի բաժանարարի և քանորդի արտադրյալին, իսկ բազմապատկման ժամանակ միևնույն տառի *ցուցիչները գումարվում են, ապա վորոնելի քանորդի մեջ* a *տառի աստիճանացույցն այնպիսի թիվ պետք է լինի, վորի և 2-ի գումարը 5 լինի, այդ թիվը հավասար է 5—2 տարբերությանը։ Նշանակի՝*

$$a^5:a^2=a^{5-2}=a^3.$$

Դրա նման կգտնենք նաև՝

$$x^3:x^2=x; \qquad y^4:y=y^3 \text{ և այլն։}$$

Նշանակի միևնույն թվի աստիճանների քանորդը հավասար է այդ թվի այն աստիճանին, վորի ցուցիչը հավասար է բաժանելիի և բաժանարարի ցուցիչների տարբերության։ Այդ կարճ այսպես են արտահայտում. միևնույն թվի աստիճանները բաժանելիս բաժանելիի ցուցիչից հանում են բաժանարարի ցուցիչը։

բ) Դիցուք պետք է բաժանել՝

$$12a^3b^2x:4a^2b^2.$$

Բաժանման սահմանումի համաձայն քանորդի և բաժանարարի արտադրյալը պետք է տա բաժանելին։ Այդ պատճառով վորոնելի քանորդի գործակիցը պետք է լինի 12:4, այսինքն 3. վորպեսզի ստացվի a *տառի ցուցիչը, պետք է այդ տառի՝ բաժանելիում ունեցած ցուցիչից հանել բաժանարարում ունեցած ցուցիչը.* b *տառը քանորդի մեջ բնավ չի լինիլ, իսկ* x *տառը կանցնի քանորդի մեջ իր ցուցիչով։ Այսպիսով՝*

$$12a^3b^2x:4a^2b^2=3ax.$$

Ստուգում. $3ax \cdot 4a^2b^2=12a^3b^2x.$

Կանոն։ Միանդամը միանդամով բաժանելու համար պետք է բաժանելիի գործակիցը բաժանել բաժանարարի գործակցի վրա, բաժանելիի տառերի ցուցիչներից հանել բաժանարարի նույն տառերի ցուցիչները յեվ առանց ցուցիչները փոփոխելու քանորդ տեղափոխել բաժանելիի այն տառերը, վորոնք բացակայում են բաժանարարի մեջ։

Որինակներ.

1. $3m^3n^4x:4m^2nx=\frac{3}{4}mn^3;$

2. $-ax^4y^3:-\frac{5}{6}axy^2=+\frac{6}{5}x^3y;$

3. $0{,}8ax^n:-0{,}02ax=-40x^{n-1}.$

57. *Զերո ցուցիչ։ Յեթե միևնույն թվի աստիճանները բաժանելիս բաժանարարի ցուցիչը հավասար լինի բաժանելիի ցուցչին, ապա քանորդը պետք է հավասար լինի 1-ի. որինակ՝* $a^3:a^3=1$, *վորովհետև* $a^3=a^3\cdot 1$. *Պայմանավորվենք այս դեպքում էլ ցուցիչների հանում կատարել. այն ժամանակ քանորդում կստանանք* զերո *ցուցիչով տառ, մեր որինակում՝* $a^3:a^3=a^{3-3}=a^0$. *Ի հարկե, այս ցուցիչն այն նշանակությունը չունի, ինչ վոր մենք տալիս եյինք առաջ ցուցիչներին, վորովհետև թիվը չի կարելի իբրև արտադրիչ կրկնել 0 անգամ։ Մենք կպայմանավորվենք* a^0 ձեվի տակ հաս-

կանայ a տառի միանավասար աստիճանների քանորդը, *և որովհետև այդ քանորդը հավասար է 1-ի, ապա a^0-ն կընդունենք իբրև 1։*

58. ***Միանդամների բաժանման անհնարինության հատկանիշները։*** *Եթե ամբողջ միանդամների քանորդը հնարավոր չի ճշտորեն արտահայտել ամբողջ միանդամով, ապա ասում են, որ այդպիսի բաժա-* նումն անհնարին է: *Միանդամների բաժանումն անհնարին է հետևյալ յերկու դեպքում.*

ա) Երբ բաժանարարի մեջ տառեր կան, որոնք բաժանելիի մեջ չկան: *Օրինակ՝ $4ab^2$-ն $2ax$-ի վրա չենք կարող բաժանել, որովհետև ինչպիսի ամբողջ միանդամով էլ բազմապատկենք $2ax$-ը, արտադրյալն անպայման կպարունակի x տառը, իսկ բաժանելիի մեջ այդ տառը բնավ չկա։*

բ) Երբ բաժանարարի մեջ որևէ տառի ցուցիչն ավելի մեծ է, քան նույն տառի ցուցիչը բաժանելիում:

Օրինակ՝ $10a^3b^2:5ab^3$ բաժանումն անհնարին է, որովհետև ինչպիսի ամբողջ միանդամ էլ գրենք քանորդում, նրա և բաժանարարի արտադրյալն այնպիսի ամբողջ միանդամ կտա, որի մեջ b տառի ցուցիչն առնվազն 3 է, մինչդեռ բաժանելիի մեջ այդ տառի ցուցիչը 2 է։

Երբ մի միանդամ չի բաժանվում մյուսի վրա, ապա քանորդը կարելի յե միայն նշել բաժանման նշանների միջոցով. այսպես՝ $4a$-ի և $5b$-ի քանորդը կարելի յե գրել՝

$$4a:5b \quad \text{կամ} \quad \frac{4a}{5b}\text{։}$$

Վարժություններ

78. $17a^3:(-a^2)$ $\quad 4a^8:2a^3$ $\quad 10a^3b^2:2ab$

79. $8a^5x^3y:4a^3x^2$ $\quad 3ax^3:(-5ax)$

80. $a^8b:\left(-\frac{5}{6}a^5b\right)$ $\quad 12a^mb^3:4ab$

59. ***Բազմանդամի բաժանումը միանդամի վրա։*** *Դիցուք պահանջվում է $a+b-c$ բազմանդամը բաժանել m-ի վրա. այդ կնշանակենք՝*

$$(a+b-c):m \quad \text{կամ} \quad \frac{a+b-c}{m}\text{։}$$

$a+b-c$ *բազմանդամը հանրահաշվական գումար է, իսկ հանրահաշվական գումարը որևէ թվի վրա բաժանելու համար՝ կարելի յե այդ թվի վրա բաժանել ամեն մի գումարելին առանձին։ Ուստի՝*

$$\frac{a+b-c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}\text{։}$$

Ստուգում կատարելով էլ կարող ենք համոզվել, որ այդ այդպես է. իրոք, յեթե $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}$ բազմանդամը բազմապատկենք m բաժանարարով, կստանանք $a+b-c$ բաժանելին։

Կանոն։ Բազմանդամը միանդամի վրա բաժանելու համար՝ պետք է բազմանդամի ամեն մի անդամը բաժանել այդ միանդամի վրա յեվ ստացած քանորդները գումարել:

Որինակներ.

1. $(20a^3-8a^2-a):4a=5a^2-2a-\frac{1}{4}$;

2. $(4x^2-2x+10):2x=2x-1+\frac{10}{2x}$;

3. $\left(\frac{1}{2}x^3-0{,}3x^2+1\right):2x^2=\frac{1}{4}x-0{,}15+\frac{1}{2x^2}$.

60. *Միանդամի բաժանումը բազմանդամի վրա։* Դիցուք պահանջվում է a միանդամը բաժանել b+c—d բազմանդամի վրա։ Այսպիսի բաժանումից ստացվող քանորդը չի կարող արտահայտվել վոչ ամբողջ միանդամով և վոչ էլ ամբողջ բազմանդամով, վորովհետև յեթե ընդունենք, վոր քանորդը հավասար է վորևէ ամբողջ միանդամի կամ ամբողջ բազմանդամի, ապա այդ քանորդի և b+c—d բազմանդամի արտադրյալը նույնպես բազմանդամ կլիներ և վոչ թե միանդամ։ a-ի և b+c—d բազմանդամի քանորդը կարելի յե միայն նշանակել բաժանման նշաններով՝

$$a:(b+c-d) \quad \text{կամ} \quad \frac{a}{b+c-d}.$$

Վարժություններ

81. $(4a^2b+6ab^2-12a^3b^5):\frac{3}{4}ab$

82. $(36a^2x^5-24a^3x^4+4a^4x^3):4a^2x^3$

83. $(3a^2y-6a^2y^2+3a^2y^3-3a^2y^4):3a^2y$

61. *Բազմանդամի բաժանումը բազմանդամի վրա։* Յերկու բազմանդամների քանորդը միայն բացառիկ դեպքերում կարելի յե արտահայտել ամբողջ բազմանդամի տեսքով։ Որինակ՝

$$(a^2+2ab+b^2):(a+b)=a+b,$$

վորովհետև

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2.$$

Իսկ ընդհանուր առմամբ այդպիսի քանորդները կարելի յե միայն նշանակել բաժանման նշաններով։ Որինակ a—b+c և d—e բազմանդամների քանորդն այսպես կարտահայտվի.

$$\frac{a-b+c}{d-e} \quad \text{կամ} \quad (a-b+c):(d-e).$$

62. *Դասավորված բազմանդամների բաժանումը։* Յերբեմն հաջողվում է քանորդն արտահայտել ամբողջ բազմանդամի տեսքով, եթե յերկու բազմանդամներն էլ կարելի յե լինում դասավորել միևնույն

տառի աստիճաններով։ Մի օրինակով ցույց տանք, թե ինչպես պետք է այդ անել։ Տրված է.

$$(5x^2-19x^3+17x+6x^4-4):(1-5x+3x^2)։$$

Գրենք երկու բազմանդամներն էլ x տառի նվազող աստիճաններով և բաժանումն այնպես դասավորենք, ինչպես այդ արվում է ամբողջ թվերի բաժանման ժամանակ.

$$\begin{array}{lr|l}
 & 6x^4-19x^3+5x^2+17x-4 & 3x^2-5x+1 \\
 & -6x^4+10x^3-2x^2\quad\quad\quad & \overline{2x^2-3x-4} \\
\text{1-ին մնացորդ} \ldots & \overline{-9x^3+3x^2+17x-4} & \\
 & +9x^3-15x^2+3x\quad & \\
\text{2-րդ մնացորդ} \ldots\ldots & \overline{-12x^2+20x-4} & \\
 & +12x^2-20x+4 & \\
\text{3-րդ մնացորդ} \ldots\ldots\ldots & \overline{0\quad\quad\quad\quad} &
\end{array}$$

Ենթադրենք, որ փնտրելի քանորդը մի բազմանդամ է և որ այս բազմանդամի անդամներն էլ են դասավորված x տառի նվազող աստիճաններով։

Բաժանելին պետք է հավասար լինի բաժանարարի և քանորդի արտադրյալին։ Դասավորված բազմանդամների բազմապատկումից հայտնի է, որ արտադրյալի բարձրագույն անդամը հավասար է բազմապատկելիի և բազմապատկիչի բարձրագույն անդամների արտադրյալին։ Բաժանելիի մեջ բարձրագույն անդամն առաջինն է, բաժանարարի և քանորդի մեջ էլ բարձրագույն անդամներն առաջիններն են։ Նշանակի, բաժանելիի առաջին անդամը՝ $6x^4$, պետք է լինի բաժանարարի 1-ին անդամի՝ $3x^2$-ու և քանորդի առաջին անդամի արտադրյալը։ Այստեղից հետևում է, որ քանորդի 1-ին անդամը գտնելու համար բավական է բաժանելիի 1-ին անդամը բաժանել բաժանարարի 1-ին անդամի վրա։ Բաժանումը կատարելով գտնում ենք, որ քանորդի առաջին անդամն է $2x^2$, որը և գրում ենք գծի տակ քանորդում։

Բաժանարարի բոլոր անդամները կբազմապատկենք քանորդի 1-ին անդամով և ստացած արտադրյալը կհանենք բաժանելիից։ Դրա համար այդ արտադրյալը կգրենք բաժանելիի տակ այնպես, որ նման անդամները տակետակ գան, և հանելիի բոլոր անդամների նշանները կփոխենք։ Հանումից հետո կստանանք 1-ին մնացորդը։ Եթե այդ մնացորդը զերո լիներ, ապա այդ կնշանակեր, որ քանորդում այդ գտած 1-ին անդամից զատ ուրիշ անդամներ չկան, այսինքն որ քանորդը միանդամ է։ Իսկ եթե 1-ին մնացորդը զերո չէ, ինչպես մեր օրինակում, ապա այսպես կդատենք։

Բաժանելին կստացվի, եթե բաժանարարի բոլոր անդամները բազմապատկենք քանորդի յուրաքանչյուր անդամով։ Բաժանելիից մենք հանեցինք բաժանարարի բոլոր անդամների և քանորդի 1-ին անդամի արտադրյալը. հետևաբար, 1-ին մնացորդի մեջ պարունակվում է բաժանարարի բոլոր անդամների և քանորդի 2-րդ, 3-րդ և հաջորդ անդամների արտադրյալը։ Մնացորդում բարձրագույն անդամն 1-ինն է. բաժանարարի բարձրագույն անդամն էլ է 1-ինը. քանորդում բարձրագույն անդամը 2-րդն է (չհաշվելով

1-ինը)։ Նշանակի, մնացորդի 1-ին անդամը՝ $-9x^3$, պէտք է հավասար լինի բաժանարարի 1-ին անդամի և քանորդի 2-րդ անդամի արտադրյալին։ Այստեղից եզրակացնում ենք, որ քանորդի 2-րդ անդամը գտնելու համար՝ բավական է առաջին մնացորդի 1-ին անդամը բաժանել բաժանարարի 1-ին անդամի վրա։ Բաժանումը կատարելով գտնում ենք քանորդի 2-րդ անդամը՝ $-3x$, որ և գրում ենք քանորդում։

Քանորդի 2-րդ անդամով կբազմապատկենք բաժանարարի բոլոր անդամները և ստացած արտադրյալը կհանենք 1-ին մնացորդից։ Կստանանք 2-րդ մնացորդը։ Եթե այդ մնացորդը զերոյի է հավասար, ապա բաժանումն ավարտված է. իսկ եթե 2-րդ մնացորդը զերոյից տարբեր է, ինչպես մեր օրինակում, ապա այսպես կվարվենք։

2-րդ մնացորդը ներկայացնում է բաժանարարի բոլոր անդամների և քանորդի 3-րդ, 4-րդ և հաջորդ անդամների արտադրյալը։ Քանի որ քանորդի այդ անդամներից բարձրագույնը 3-րդն է, ապա այս 3-րդ անդամը կգտնենք, եթե 2-րդ մնացորդի 1-ին անդամը բաժանենք բաժանարարի 1-ին անդամի վրա։ Բաժանումը կատարելով՝ ստանում ենք -4, որ և գրում ենք քանորդում։ -4-ով բազմապատկելով բաժանարարի բոլոր անդամները և մնացորդից հանելով ստացած արտադրյալը՝ կգտնենք 3-րդ մնացորդը։ Մեր օրինակում այդ մնացորդը զերո է. այդ ցույց է տալիս, որ քանորդում այլևս ուրիշ անդամներ չեն կարող լինել։ Եթե 3-րդ մնացորդը 0 չլիներ, ապա պէտք էր այդ մնացորդի 1-ին անդամը բաժանել բաժանարարի 1-ին անդամի վրա, որով կստացվեր քանորդի 4-րդ անդամը, և այդպես շարունակել։

Կարելի էր բաժանելին և բաժանարարը դասավորել միևնույն տառի աճող աստիճաններով և այնուհետև այնպես վարվել, ինչպես վերն ասացինք. այս դեպքում պէտք կլիներ հիմնվել այն բանի վրա, որ արտադրյալի ցածրագույն անդամը հավասար է բազմապատկելիի ցածրագույն անդամի և բազմապատկչի ցածրագույն անդամի արտադրյալին։

Օրինակներ.

$$
\text{ա)}\quad
\begin{array}{r|l}
28x^4-13ax^3-26a^2x^2+15a^3x & 7x^2+2ax-5a^2 \\ \cline{2-2}
\text{»}\quad -8ax^3+20a^2x^2 & 4x^2-3ax \\ \cline{1-1}
-21ax^3-6a^2x^2+15a^3x & \\
\text{»}\quad +6a^2x^2-15a^3x & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Այստեղ մենք չգրեցինք բաժանարարի 1-ին անդամի և քանորդի 1-ին, 2-րդ և հաջորդ անդամների արտադրյալները, որովհետև այդ արտադրյալները միշտ հավասար են այն անդամներին, որոնց տակ նրանք գրվում են, և հանման ժամանակ միշտ իրար վոչնչացնում են։ Սովորաբար հենց այդպես էլ անում են։

բ)
$$
\begin{array}{l|l}
x^3-a^3 & x-a \\
\hline
»+ax^2 & x^2+ax+a^2 \\
ax^2-a^3 & \\
»\ +a^2x & \\
a^2x-a^3 & \\
»\ +a^3 & \\
0 &
\end{array}
$$

գ)
$$
\begin{array}{l|l}
x^4-a^4 & x-a \\
\hline
»+ax^3 & x^3+ax^2+a^2x+a^3 \\
ax^3-a^4 & \\
»\ +a^2x^2 & \\
a^2x^2-a^4 & \\
»\ +a^3x & \\
a^3x-a^4 & \\
»\ +a^4 & \\
0 &
\end{array}
$$

Նմանապես կարելի յե համոզվել, վոր x^5-a^5, $x^6\ a^6$... *և ընդհանրապես* x^m-a^m *յերկանդամներն առանց մնացորդի բաժանվում են* $x-a$ *տարբերության վրա, այսինքն վոր* յերկու թվերի միանման աստիճանների տարբերությունն առանց մնացորդի բաժանվում է այդ թվերի տարբերության վրա:

63. *Բազմանդամների բաժանման անհնարինության հատկանիշները: Բազմանդամի բաժանումը բազմանդամի վրա՝ հնարավոր չե կատարել հետևյալ դեպքերում:*

ա) Յերբ բաժանելիի բարձրագույն անդամի մեջ գլխավոր տառի ցուցիչը փոքր է բաժանարարի բարձրագույն անդամի մեջ նույն տառի ցուցիչից, *վորովհետև այս դեպքում քանորդի բարձրագույն անդամ ստանալ չի լինի:*

բ) Յերբ բաժանելիի ցածրագույն անդամի մեջ գլխավոր տառի ցուցիչը փոքր է բաժանարարի ցածրագույն անդամի մեջ նույն տառի ցուցիչից, *վորովհետև այս դեպքում քանորդի ցածրագույն անդամ ստանալ չի լինի:*

գ) Յեթե բաժանելիի բարձրագույն և ցածրագույն անդամների մեջ գլխավոր տառի ցուցիչները համապատասխանաբար փոքր չեն բաժանարարի բարձրագույն և ցածրագույն անդամների մեջ այդ նույն տառի ցուցիչներից, ապա չի կարելի դեռևս ասել, վոր բաժանումը հնարավոր է: Այս դեպքում վորպեսզի իմանանք՝ բաժանումը հնարավոր է թե վոչ, պետք է ձեռնամուխ լինել հենց գործողությունը կատարելուն (բաժանելին և բաժանարարը դասավորելով գլխավոր տառի նվազող կամ աճող աստիճաններով) և այն շարունակել մինչև վոր վերջնականորեն համոզվենք՝ հնարավոր է թե անհնարին քանորդն ստանալ բազմանդամի տեսքով:

Վարժություններ

84. $(x^2-3x-4):(x+1)$ $\quad$ $(y^2-y-2):(y-2)$

85. $(6x^3+2-3x^2-4x):(2x-1)$

86. $(3ax^5-15a^2x^4+6a^3x^3):(x^2-5ax+2a^2)$

87. $(x^6-a^6):(x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x+a^5)$

V. ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄ ԱՐՏԱԴՐԻՉՆԵՐԻ

64. *Նախնական դիտողություն: Հանրահաշվական բաժանման մասին խոսելով՝ մենք նշեցինք, վոր մի քանի դեպքերում քանորդը կարելի չե միայն նշանակել բաժանման նշանով: Այդպիսով ստացվող արտահայտությունները, ինչպիսիններն են, օրինակ՝*

$$\frac{a}{b},\quad \frac{2x}{3a},\quad \frac{x^2-4x+y^2}{x+y}\ \text{և այլն,}$$

ընդունված է անվանել հանրահաշվական կոտորակներ:

Մենք շուտով կտեսնենք, որ հանրահաշվական կոտորակները, թվաբանական կոտորակների նման, յերբեմն կարելի յե պարզեցնել կրճատման միջոցով, այսինքն բաժանելին և բաժանարարը բաժանելով նրանց ընդհանուր բազմապատկիչների վրա, յեթե միայն վերջինները կան: Վորպեսզի կարողանանք այդպիսի կրճատումն առանց դժվարության կատարել, պետք է սովորենք հանրահաշվական արտահայտությունները բազմապատկիչների վերլուծել (ինչպես վոր թվաբանության մեջ կոտորակները կրճատելու համար պետք է իմանալ ամբողջ թվերն իրենց բազմապատկիչներին վերլուծելը):

65. *Ամբողջ միանդամների վերլուծումը:* Վերցնենք վորևէ ամբողջ միանդամ, որինակ՝ $6a^2b^3$: Բանի վոր նա արտադրյալ է ներկայացնում, ապա հենց տեսքին նայելով՝ անմիջապես կարելի յե վերլուծել բաղադրիչ բազմապատկիչներին: Այսպես.

$$6a^2b^3=2\cdot 3(aa)(bbb)=2\cdot 3aabbb:$$

Այս արտադրիչները զանազան ձևերով խմբավորելով (վորի համար կոգտվենք բազմապատկման զուգորդական հատկությունից) մենք կարող ենք այդ միանդամի համար նշել բազմազան վերլուծություններ, որինակ՝

$$6a^2b^3=(6a)(ab^3)=(2a^2b)(3b^2)=(3ab^2)(2ab),\ \text{և այլն:}$$

66. *Բազմանդամների վերլուծումը:* Նշենք այն պարզագույն դեպքերը, յերբ բազմանդամը կարելի յե արտադրիչների վերածել:

ա) Բանի վոր

$$(a+b-c)m=am+bm-cm,$$

ապա նաև ընդհակառակը՝

$$am+bm-cm=(a+b-c)m:$$

Այսպիսով՝ յեթե բազմանդամի բոլոր անդամները ընդհանուր բազմապատկիչ ունեն, ապա այն կարելի յե փակագծերից դուրս բերել:

Որինակի համար՝

1. $x^6-2x^2+3x=x(x^5-2x+3)$;
2. $16a^3-4a^3=4a^2(4-a)$;
3. $5m(x-1)+3n(x-1)=(x-1)(5m+3n)$:

բ) Բանի վոր

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$

ապա նաև ընդհակառակը՝

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b):$$

Այսպիսով՝ յերբ յերկանդամը ներկայացնում է յերկու թվերի քառակուսիների տարբերություն, *ապա նրա* փոխարեն կարելի յե վերցնել այդ յերկու թվերի գումարի յեվ նրանց տարբերության արտադրյալը:

Օրինակի համար՝

1. $x^2-4=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$;

2. $y^2-1=y^2-1^2=(y+1)(y-1)$;

3. $9a^2-\frac{1}{4}=(3a)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(3a+\frac{1}{2}\right)\left(3a-\frac{1}{2}\right)$;

4. $25x^2-0,01=(5x)^2-0,1^2=(5x+0,1)(5x-0,1)$;

5. $m^4-n^4=(m^2)^2-(n^2)^2=(m^2+n^2)(m^2-n^2)=$
$=(m^2+n^2)(m+n)(m-n)$;

6. $x^2-(x-1)^2=[x+(x-1)][x-(x-1)]=$
$=(x+x-1)(x-x+1)=2x-1$։

դ) Բանի վոր

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \text{ և } (a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$

ապա նաև ընդհակառակը՝

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(a+b)(a+b)$$

և

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=(a-b)(a-b)։$$

Նշանակի՝ յերբ յեռանդամը ներկայացնում է վորեվե յերկու թվերի քառակուսիների գումարը, մեծացրած կամ փոքրացրած այդ յերկու թվերի կրկնապատիկ արտադրյալի չափի, ապա այդ յեռանդամը կարելի յե համապատասխանաբար փոխարինել այս յերկու թվերի գումարի կամ տարբերության քառակուսով:

Օրինակներ.

1. a^2+2a+1։

Բանի վոր $1=1^2$ *և* $2a=2\cdot1\cdot a$, *ապա* $a^2+2a+1=(a+1)^2$։

2. x^4+4-4x^2։ *Այստեղ* $x^4=(x^2)^2$, $4=2^2$ *և* $4x^2=2x^2\cdot2$. *ուստի* $x^4+4-4x^2=(x^2-2)^2$։ *Կարելի յե նաև գրել, վոր* $x^4+4-4x^2=(2-x^2)^2$, *վորովհետև* x^2-2 *և* $2-x^2$ *յերկանդամները քառակուսի բարձրացնելուց ստացվում են այնպիսի յեռանդամներ, վորոնք իրարից միայն և յեթ անդամների հերթով են տարբերվում.*

$$(x^2-2)^2=x^4-4x^2+4; \qquad (2-x^2)^2=4-4x^2+x^4։$$

3. $-x+25x^2+0,01$։ *Այստեղ յերկու քառակուսի կա՝* $25x^2=(5x)^2$ *և* $0,01=(0,1)^2$։ *Բայց դրանից* $5x$ *և* $0,1$ *թվերի կրկնապատիկ արտադրյալը կազմում է* $2\cdot5x\cdot0,1=x$։

Բանի որ տված յեռանդամի մեջ յերկու քառակուսիներն էլ + նշանով են, իսկ կրկնապատիկ արտադրյալն (այսինքն x-ը) — նշանով, ապա

$$-x+25x^2+0{,}01=25x^2-x+0{,}01=(5x-0{,}1)^2=(0{,}1-5x)^2.$$

4. $-x^2-y^2+2xy$։ Այստեղ — նշանը փակագծերից դուրս կբերենք. կստանանք $-(x^2+y^2-2xy)$։ Փակագծերի մեջ գտնվող յեռանդամն ակներևաբար հավասար է $(x-y)^2$։

Կնշանակի՝

$$-x^2-y^2+2xy=-(x^2+y^2-2xy)=-(x-y)^2=-(y-x)^2.$$

դ) Բազմանդամը յերբեմն կարելի չէ լինում բազմապատկիչների վերլուծել նրա անդամների մեջ խմբավորումներ կատարելու միջոցով։

Օրինակի համար՝

1. $ax+ay+bx+by=(ax+ay)+(bx+by)=a(x+y)+b(x+y)=$
$=(x+y)(a+b)$;
2. $12-4x-3x^2+x^3=(12-4x)-(3x^2-x^3)=4(3-x)-x^2(3-x)=(3-$
$-x)(4-x^2)=(3-x)(2+x)(2-x)$;
3. $m^2+n^2-2mn-p^2=(m^2+n^2-2mn)-p^2=(m-n)^2-p^2=(m-n+$
$+p)(m-n-p)$;
4. $x^2-y^2+6y-9=x^2-(y^2-6y+9)=x^2-(y-3)^2=[x+(y-3)][x-(y-$
$-3)]=(x+y-3)(x-y+3)$.

ե) Յերբեմն օգտակար է լինում օժանդակ անդամներ մտցնել կամ մը-րևէ անդամ յերկու անդամի վերլուծել։

Օրինակի համար՝

1. $a^3-b^3=a^3-a^2b+a^2b-b^3=a^2(a-b)+b(a^2-b^2)=a^2(a-b)+b(a+$
$+b)(a-b)=(a-b)[a^2+b(a+b)]=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;
2. $a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b+b^3=a^2(a+b)-b(a^2-b^2)=(a+b)[a^2-b(a-$
$-b)]=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;
3. $2x^2+3xy+y^2=2x^2+2xy+xy+y^2=2x(x+y)+y(x+y)=(x+$
$+y)(2x+y)$.

Վարժություններ

88.	$2a+2x$	$ax+ay$	$4y^2-6xy$
89.	$4ax-2ay$	$6x^2y+9xy^2$	
90.	$12a^2b-9a^2b^2+6ab^3$		$xy^2-7xy+4x^2y$
91.	m^2-n^2	a^2-1	$1-a^2$

92. x^2-4 m^2-9 $4x^2-y^2$
93. $x^2-2xy+y^2$ m^2+n^2+2mn
94. $2ab+a^2+b^2$ $a^2-4ab+4b^2$
95. $x^2+8x+16$ x^2+1+2x
96. $5a^3-20a^2b+20ab^2$
97. $a+2ab+b^2-c^2$ $a^2-b^2+2bc-c^2$
98. $ax+bx+ay+by$ $ac-ad+bd-bc$
99. $a^2+ab-a-b$ $xz-3y-3z+xy$
$8a^3-12a^2-18a+27$ *(վերլուծել 3 բազմապատկչի)*
100. $4mn+xy-2nx-2my$

VI. ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐ

67. *Հանրահաշվական կոտորակի դանազանությունը թվաբանականից։* Երկու հանրահաշվական արտահայտությունների քանորդը այն դեպքում, երբ բաժանումը միայն նշված է, կոչվում է հանրահաշվական կոտորակ։ Հանրահաշվական կոտորակներ են, օրինակի համար, հետևյալ արտահայտությունները.

$$\frac{a}{b},\ \frac{a+b}{c-d},\ \frac{2x^2-x+5}{x+2},$$

Քննության առնենք հանրահաշվական կոտորակների մի քանի առանձնահատկությունները։

Վերցնենք $\frac{b}{a}$ կոտորակը, գտնենք նրա թվական մեծությունը, երբ $a=12$ և $b=4$, այնուհետև երբ $a=3$ և $b=7$ և, վերջապես, երբ $a=-20$ և $b=30$։ Կստանանք համապատասխանաբար հետևյալ թվերը՝ 3, $\frac{3}{7}$ և $-\frac{2}{3}$։

Այսպիսով

Հանրահաշվական կոտորակի թվային մեծությունը կարող է լինել թե՛ ամբողջ թիվ յեվ թե՛ կոտորակային թիվ, թե՛ դրական յեվ թե՛ բացասական։

Քանի որ a-ն և b-ն, նայած խնդրի պայմաններին, կարող են ամեն տեսակ թվային արժեքներ ընդունել, ապա՝

Հանրահաշվական կոտորակի համարիչն ու հայտարարը, յուրաքանչյուրն առանձին, կարող են լինել թե՛ ամբողջ թիվ յեվ թե՛ կոտորակային թիվ, թե՛ դրական յեվ թե՛ բացասական։

Այսպիսով հանրահաշվական կոտորակի գաղափարն ավելի լայն է, քան թվաբանականինը։ Վերջինս կարելի է դիտել որպես հանրահաշվական կոտորակի մասնավոր դեպքը։

68. *Կոտորակի հիմնական հատկությունը։* Քանի որ կոտորակը համարիչի և հայտարարի քանորդն է, իսկ քանորդը չի փոխվում, երբ բաժանելին ու բաժանարարը բազմապատկում ենք զերոյից տարբեր միևնույն թվով կամ բաժանում զերոյից տարբեր միևնույն թվի վրա (§ 34),

ապա այդ նույն հատկությունը պատկանում է նաև կոտորակին, այսինքն կոտորակի մեծությունը չի փոխվում, յերբ նրա համարիչն ու հայտարարը բազմապատկում ենք կամ բաժանում միյեվնույն թվով (բացի զերոյից): Որինակի համար, յեթե $\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}}$ կոտորակի համարիչն ու հայտարարը բազմապատկենք $-\frac{4}{9}$-ով, ապա կունենանք հետևյալ նոր կոտորակը

$$\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\right]:\left[\frac{7}{5}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\right]=\left(+\frac{8}{27}\right):\left(-\frac{28}{45}\right)=-\frac{8\cdot45}{27\cdot28}=-\frac{10}{21},$$

իսկ տված կոտորակն եր

$$-\frac{2}{3}:\frac{7}{5}=-\frac{10}{21}.$$

այսպիսով տեսնում ենք, վոր կոտորակի մեծությունն անփոփոխ մնաց:

Օգտվելով կոտորակի այդ հատկությունից՝ մենք կարող ենք հանրահաշվական կոտորակների նկատմամբ նույնպիսի ձևափոխություններ կատարել, ինչպիսիները թվաբանության մեջ նշվում են թվաբանական կոտորակների համար, այսինքն մենք կարող ենք կոտորակները կրճատել, յեթե հնարավոր է, և բերել մի հայտարարի, յեթե պետք է:

69. *Կոտորակի անդամներն ամբողջ տեսքի բերելը:* Յեթե պատահի, վոր կոտորակի անդամներն իրենք կոտորակներ պարունակեն, ապա համարիչն ու հայտարարը բազմապատկելով պատշաճորեն ընտրած թվով կամ հանրահաշվական արտահայտությամբ՝ մենք կարող ենք այդ կոտորակային անդամներն ամբողջ տեսքի բերել: Որինակի համար՝

1) $\frac{\frac{3}{4}a}{b}$; յերկու անդամները բազմապատկ. 4-ով կստանանք $\frac{3a}{4b}$;

2) $\frac{7a}{2\frac{3}{5}b}=\frac{7a}{\frac{13}{5}b}$; » » » 5-ով » $\frac{35a}{13b}$;

3) $\frac{\frac{2}{3}m}{\frac{7}{8}n}$; » » » 24-ով » $\frac{16m}{21n}$;

4) $\frac{ax-1}{1-\frac{1}{x}}$; » » » x-ով » $\frac{ax^2-x}{x-1}$.

Վարժություններ

101. $\frac{\frac{5}{7}x}{y}$ $\qquad \frac{0{,}3ab}{m}$ $\qquad \frac{a^2}{1\frac{3}{8}b}$ $\qquad \frac{m}{2{,}36n}$

102. $\dfrac{\frac{3}{4}ab}{\frac{5}{6}x^2}$ $\dfrac{3\frac{1}{2}a^3}{3\frac{3}{4}b}$ $\dfrac{3x-\frac{1}{4}}{a-b}$

103. $\dfrac{2\frac{1}{8}(a+b)}{4\frac{1}{4}}$ $\dfrac{3a-\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{6}a}$

104. $\dfrac{ax+b+\frac{c}{x}}{ax+1}$ $\dfrac{1+\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$

70. *Կոտորակի անդամների մոտ նշանների փոխումը։* Կոտորակի համարիչի և հայտարարի առաջ նշանը փոխել՝ այդ միևնույնն է, թե համարիչն ու հայտարարը բազմապատկել —1-ով, որից կոտորակի մեծությունը չի փոխվիլ։ Այսպես՝

$$\frac{-8}{-4}=2 \text{ և } \frac{+8}{+4}=2; \quad \frac{-10}{+2}=-5 \text{ և } \frac{+10}{-2}=-5.$$

Նկատենք, որ եթե նշանը փոխենք կոտորակի որևէ մեկ անդամի առաջ և միաժամանակ նաև հենց կոտորակի առաջ, ապա կոտորակի մեծությունը դարձյալ չի փոխվիլ. օրինակի համար՝

$$\frac{-10}{+2}=-5; \quad -\frac{-10}{-2}=-5; \quad -\frac{+10}{+2}=-5.$$

Կոտորակի այս հատկություններով երբեմն կարելի է օգտվել նրա ձևափոխման համար, օրինակի համար՝

$$\frac{m^2-n^2}{n-m}=\frac{m^2-n^3}{-(m-n)}=-\frac{(m-n)(m+n)}{m-n}=-(m+n).$$

Վարժություններ

Փոխել հետևյալ կոտորակների համարիչի և հայտարարի նշանները.

105. $\dfrac{1-x}{-x}$ $\dfrac{-3a^3}{a-b}$ $\dfrac{1-a}{2-b}$

106. $\dfrac{-a^2-b^2+2ab}{b-a}$ $\dfrac{1-m^2}{-m+1}$

107. Կոտորակների մեծությունները չփոփոխելով՝ յուրաքանչյուր կոտորակի առջև — նշան դնել.

$$\frac{-3a}{6} \quad \frac{5x^2}{-3} \quad \frac{1-a}{b} \quad \frac{a}{2-x} \quad \frac{m^2-n^2}{n-m}$$

71. *Կոտորակների կրճատումը։* Հանրահաշվական կոտորակը կարող է ավելի պարզ տեսքի բերվել այն դեպքում, երբ համարիչն ու հայտարարն ընդհանուր բազմապատկիչներ են պարունակում։

Որինակներ.

$$\frac{48ab}{60ac}=\frac{4b}{5c};\qquad \frac{3a^2b}{7a^3b}=\frac{3}{7a};\qquad \frac{160a^5b^3cd^3}{120a^3b^5c}=\frac{4a^2d^3}{3b^3}.$$

Այս որինակներից յերևում է, վոր

Կոտորակների կրճատման ժամանակ համարիչի՝ յեվ հայտարարի գործակիցները կրճատում ենք նրանց ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարով, իսկ ընդհանուր տառային բազմապատկիչները կրճատում ենք այն փոքրագույն աստիճանով, վորով նրանք կան համարիչի յեվ հայտարարի մեջ:

*Յեթե կոտորակի համարիչը կամ հայտարարը (կամ յերկուսն էլ) բազ*մանդամներ *են, ապա այդ բազմանդամները պետք է նախապես վերլուծել բազմապատկիչների (այնպես, ինչպես նշված է § 66-ում) և ապա կրճատել ընդհանուր բազմապատկիչներով, յեթե այդպիսիները լինեն։*

Որինակներ.

$$\frac{6x^2+8xy}{9xy+12y^2}=\frac{2x(3x+4y)}{3y(3x+4y)}=\frac{2x}{3y};$$

$$\frac{x^2-1}{2x+2}=\frac{(x+1)(x-1)}{2(x+1)}=\frac{x-1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)$$

(2-ի վրա բաժանելու փոխարեն բազմապատկված է $\frac{1}{2}$-ով, վորից ար-դյունքը չի փոխվիլ)։

Վարժություններ

108. $\frac{7}{7x}$ $\qquad \frac{2m}{3m^2}$ $\qquad \frac{4a^2b}{6ab^2}$ $\qquad \frac{42x^3y^2}{112x^2y}$

109. $\frac{12ab}{8ax}$ $\qquad \frac{3a^2bc}{12ab^2}$ $\qquad \frac{48a^3x^2y^4}{45a^2xy}$

110. $\frac{ab}{a^2+ab}$ $\qquad \frac{9xy}{3x^2-3xy}$ $\qquad \frac{4a+8}{4a-8}$

111. $\frac{a^2+a}{a^2-a}$ $\qquad \frac{x-3x}{x^2-9}$ $\qquad \frac{a^2+a}{a^2-1}$

112. $\frac{x(x-1)^2}{2x^2(x-1)(x+1)}$ $\qquad \frac{ax+x^2}{3bx-cx^2}$ $\qquad \frac{5a^2+5ax}{a^2-x^2}$

113. $\frac{(a+b)^2(a-b)^2}{a^2-b^2}$ $\qquad \frac{p^2-1}{(1+py)^2-(p+y)^2}$

72. *Կոտորակների ընդհանուր հայտարարի բերելը։*
ա) Վերցնենք այնպիսի կոտորակներ, վորոնց հայտարարները տառային միանդամներ են. *որինակի համար՝*

$$\frac{a}{2b},\quad \frac{c}{3ab},\quad \frac{d}{5ab^2}.$$

Իբրև ընդհանուր հայտարար պետք է վերցնել, ինչպես ակներև է, $30ab^2$*-ն։ Լրացուցիչ բազմապատկիչները կլինեն՝* $15ab$, $10b$, *և 6։*

$$\frac{a}{2b}\overset{15ab}{=}\frac{15a^2b}{30ab^2};\quad \frac{c}{3ab}\overset{10b}{=}\frac{10bc}{30ab^2};\quad \frac{d}{5ab^2}\overset{6}{=}\frac{6d}{30ab^2}.$$

Վերցնենք մի ուրիշ օրինակ՝

$$\frac{a}{12b^2c},\quad \frac{3b}{8a^3c^4d^2},\quad \frac{5c}{18ab}.$$

Ընդհանուր հայտարարը պետք է բաժանվի բոլոր տված հայտարարների վրա։ Հետևաբար, ընդհանուր հայտարարի մեջ փոքրագույն գործակիցը կլինի տված գործակիցների ընդհանուր ամենափոքր բազմապատիկը։ Տառային բազմապատկիչներից յուրաքանչյուրը պետք է ընդհանուր հայտարարի մեջ այնպիսի աստիճանով մտնի, որը բաժանվի այդ տառային բազմապատկչի այն բոլոր աստիճանների վրա, որոնք կան հայտարարներում։ Կնշանակի՝ տված օրինակում իբրև ընդհանուր հայտարարի գործակից մենք պետք է վերցնենք 12, 8 և 18 թվերի ընդհանուր փոքրագույն բազմապատիկը, այսինքն 72-ը։ a բազմապատկիչը պետք է վերցնել 3 ցուցիչով, b բազմապատկիչը 2 ցուցիչով և այլն։ Ընդհանուր հայտարարը կլինի՝

$$72a^3b^2c^4d^2.$$

Լրացուցիչ բազմապատկիչները կլինեն՝ $6a^3c^3d^2$, $9b^2$ և $4a^2bc^4d^2$։ Վերջնականորեն կստանանք՝

$$\frac{a}{12b^2c}\overset{6a^3c^3d^2}{=}\frac{6a^4c^3d^2}{72a^3b^2c^4d^2};\quad \frac{3b}{8a^3c^4d^2}\overset{9b^2}{=}\frac{27b^3}{72a^3b^2c^4d^2};\quad \frac{5c}{18ab}\overset{4a^2bc^4d^2}{=}\frac{20a^2bc^5d^2}{72a^3b^2c^4d^2}.$$

Այս օրինակներից յերևում է՝

Վորպեսզի գտնենք մի քանի հանրահաշվական կոտորակների ընդհանուր հայտարարը, վորոնք միանդամ հայտարարներ ունեն, պետք է վերցնել տված կոտորակների հայտարարների գործակիցների ընդհանուր փոքրագույն բազմապատիկը, այնուհետև վերցնել տառային բազմապատկիչները, յուրաքանչյուրն այն ամենաբարձր աստիճանով, վորով նա առաջ է գալիս տված հայտարարների մեջ. այդ բոլոր բազմապատկիչների արտադրյալն է, վոր կլինի տված կոտորակների ընդհանուր հայտարարը:

բ) Այժմ վերցնենք այնպիսի կոտորակներ, վորոնց հայտարարները բազմանդամներ են. օրինակի համար՝

$$\frac{x}{a-b},\quad \frac{y}{a+b},\quad \frac{z}{a^2-b^2}.$$

Հայտարարները վերլուծենք բազմապատկիչների։ Առաջին յերկուսը չեն վերլուծվում, իսկ յերրորդը հավասար է $(a+b)(a-b)$։ Կնշանակի՝ ընդհանուր հայտարարը կլինի a^2-b^2. կստանանք.

$$\frac{x}{a-b}\overset{a+b}{=}\frac{ax+bx}{a^2-b^2};\quad \frac{y}{a+b}\overset{a-b}{=}\frac{ay-by}{a^2-b^2};\quad \frac{z}{a^2-b^2}.$$

գ) Կարող է պատահել, վոր հայտարարներից վոչ մի զույգն ընդհանուր բազմապատկիչներ չունի։ Այդ դեպքում պետք է այնպես վարվել, ինչպես

Թվաբանության մեջ է արվում, այսինքն պետք է ամեն մի կոտորակի համարիչն ու հայտարարը բազմապատկել բոլոր մնացած կոտորակների հայտարարների արտադրյալով։

Օրինակի համար՝

1. $\frac{a}{3m}, \frac{2b}{5n}, \frac{3c}{2p}; \ldots\ldots \frac{a\cdot5n\cdot2p}{3m\cdot5n\cdot2p}, \frac{2b\cdot3m\cdot2p}{5n\cdot3m\cdot2p}, \frac{3c\cdot3m\cdot5n}{2p\cdot3m\cdot5n},$

այսինքն $\frac{10anp}{30mnp}, \frac{12bmp}{30mnp}, \frac{45cmn}{30mnp},$

2. $\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a-b}; \ldots\ldots \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)}, \frac{b(a+b)}{(a+b)(a-b)},$

այսինքն $\frac{a^2-ab}{a^2-b^2}, \frac{ab+b^2}{a^2-b^2},$

Վարժություններ

114. $\frac{3}{a}, \frac{4}{6}$ $\frac{x}{3y}, \frac{y}{4x}$ $\frac{x}{4}, \frac{4}{x}$

115. $\frac{2}{a}, \frac{3}{b}, \frac{1}{2c}$ $\frac{7x}{4a^3}, \frac{2}{3b^2}, \frac{4b^2}{5x}$

116. $\frac{5xy}{3a^2bc}, \frac{3ab}{4mx^2y}, \frac{x}{4ab}, \frac{y}{8a^3b^3}$

117. $\frac{3}{8ab}$, $3x$ $\frac{a}{5x^3}$ (*$3x$-ը ներկայացնել $\frac{3x}{1}$ կոտորակով*)

118. $\frac{x+y}{2x-2y}, \frac{x-y}{3x+3y}$ $\frac{1}{m+1}, \frac{2}{m^2-1}, \frac{3}{m-1}$

119. $\frac{2}{x^2-2x+1}, \frac{3a}{x-1}$ $\frac{1}{x-1}, \frac{2}{2x-1}, \frac{1}{(x-1)(2x-1)}$

120. $\frac{x}{28a^3b^2}, \frac{y}{21a^2b}$ $\frac{a-b}{b}, \frac{2a}{a-b}, \frac{1}{a^2-b^2}$

73. *Կոտորակների գումարումն ու հանումը։* *Բազմանդամը միանդամի վրա բաժանելու կանոնով (§59) կարող ենք գրել՝*

$$\frac{a+b+c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}; \quad \frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m},$$

Այս հավասարությունները կարդալով աջից ձախ գտնում ենք.

1. Միանման հայտարարներ ունեցող կոտորակները գումարելու համար պետք է գումարել նրանց համարիչները յեվ գումարի տակ գրել նույն հայտարարը:

2. Միանման հայտարարներ ունեցող կոտորակները հանելու համար պետք է նրանց համարիչները հանել յեվ տարբերության տակ գրել նույն հայտարարը:

Յեթե գումարելու կամ հանելու համար տրված կոտորակները տարբեր հայտարարներ ունեն, ապա պետք է նախապես միևնույն հայտարարին բերել։

Օրինակի համար՝

$$1)\ \frac{\overset{df}{a}}{b}+\frac{\overset{bf}{c}}{d}+\frac{\overset{bd}{e}}{f}=\frac{adf+cbf+ebd}{bdf};$$

$$2)\ \frac{\overset{2b}{3m^2}}{10a^2bc}-\frac{\overset{5ac}{5n^2}}{4ab^2}=\frac{6bm^2-25acn^2}{20a^2b^2c};$$

$$3)\ \frac{x+1}{2x-2}-\frac{x^2+3}{2x^2-2}$$

$2x-2=2(x-1)$	Ա· բազմ.$=x+1$
$2x^2-2=2(x^2-1)=2(x+1)(x-1)$	» » $=1$
Ընդհ. հայտ. $2(x+1)(x-1)$	

Իբրև հանման արդյունք կստանանք.

$$\frac{(x+1)^2-(x^2+3)}{2(x+1)(x-1)}=\frac{x^2+2x+1-x^2-3}{2(x+1)(x-1)}=\frac{2x-2}{2(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x+1}.$$

Վարժություններ

121. $\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}$ $\quad\frac{2}{x^2}+\frac{5}{3x}$ $\quad\frac{a-1}{2}-\frac{2x+3}{4}$

122. $1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}$ (*1-ը պատկերացնել* $\frac{1}{1}$ *կոտորակով*)

123. $1+\frac{x-1}{2}$ $\quad x-\frac{2(3-x)}{3}$ $\quad 1-\frac{2(x-1)}{3}$

124. $\frac{2+x}{1+2x}-\frac{2-x}{1-2x}-\frac{1+6x}{4x^2-1}$

125. $\frac{2ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{a^2+ab}-\frac{a+b}{a^2-ab}$

74. *Կոտորակների բազմապատկումը։* Կոտորակը կոտորակով բազմապատկելու համար պետք է համարիչը համարիչով բազմապատկել ու հայտարարը հայտարարով յեվ առաջին արտադրյալը համարիչ դարձնել, իսկ յերկրորդը հայտարար, *այսինքն*

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}. \qquad (1)$$

Այս կանոնը համընկնում է թվաբանական կոտորակների բազմապատկման կանոնի հետ։ Բայց քանի վոր տառերի տակ կարող են հասկացվել վոչ միայն ամբողջ դրական թվերը, այլ նաև կոտորակայինները և բացասականները, ապա անհրաժեշտ է այդ կանոնն ստուգել նաև հանրահաշվական կոտորակների համար, յերբ a, b, c *և* d *թվերը կարող են լինել ամեն տեսակի թվեր։ Նախ յենթադրենք, վոր այդ բոլոր թվերը դրական են և կոտորակային։ Դիցուք օրինակ՝*

$$a=\frac{2}{3},\ b=\frac{7}{8},\ c=\frac{5}{6}\ և\ d=\frac{9}{4}.$$

Այս թվերը կտեղադրենք (1) հավասարության մեջ, կհաշվենք առանձին-առանձին նրա ձախ և աջ մասերը և կհամեմատենք ստացվող արդյունքները.

$$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}:\frac{7}{8}=\frac{2\cdot 8}{3\cdot 7}; \quad \frac{c}{d}=\frac{5}{6}:\frac{9}{4}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 9};$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{2\cdot 8}{3\cdot 7}\cdot\frac{5\cdot 4}{6\cdot 9}=\frac{2\cdot 8\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 7\cdot 6\cdot 9}$$

(վերջնական հաշիվը չենք կատարել)։

Այժմ գտնենք (1) հավասարության աջ մասը.

$$ac=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 6}; \qquad bd=\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{4}=\frac{7\cdot 9}{8\cdot 4};$$

$$\frac{ac}{bd}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 6}:\frac{7\cdot 9}{8\cdot 4}=\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 4}{3\cdot 6\cdot 7\cdot 9}.$$

Բաղդատելով ստացած արդյունքները՝ տեսնում ենք, որ նրանք միահավասար են, որովհետև (ամբողջ թվերի բազմապատկման տեղափոխական օրենքի համաձայն) $2\cdot 8\cdot 5\cdot 4=2\cdot 5\cdot 8\cdot 4$ և $3\cdot 7\cdot 6\cdot 9=3\cdot 6\cdot 7\cdot 9$։ Հետևաբար, (1) հավասարությունն իրավացի է մնում նաև այս դեպքում։

Այժմ ընդունենք, որ a, b, c և d թվերից մեկնումեկը բացասական է դարձել։ Դիցուք, օրինակի համար, $a=-\frac{2}{3}$ (b, c և d թվերը նախկին արժեքներն ունեն)։ Այն ժամանակ $\frac{a}{b}$ կոտորակը բացասական կդառնա և (1) հավասարության վողջ ձախ մասը նույնպես բացասական թիվ կլինի։ Աջ մասում ac արտադրյալը բացասական կդառնա, ուստի և վողջ աջ մասը նույնպես բացասական թիվ կլինի։ Թե ձախ մասի և թե աջ մասի բացարձակ մեծությունը, սակայն, կմնա նախկինը։ Կնշանակի (1) հավասարությունը չի խախտվել։ Նույնպես կհամոզվենք, որ (1) հավասարությունն իրավացի է մնում նաև այն դեպքերում, երբ տված թվերից ուրիշներն էլ են բացասական դառնում։

Այն ամենը, ինչ որ ասացինք մի մասնավոր օրինակի մասին, կարելի է կրկնել ամեն մի այլ օրինակի մասին, կնշանակի՝ (1) հավասարությունն իրավացի է a, b, c և d տառերի ամեն տեսակ արժեքների համար։

75. *Կոտորակի քառակուսին և խորանարդը։* *Կոտորակների բազմապատկման կանոնը կիրառենք՝ կոտորակները քառակուսի և խորանարդ բարձրացնելու նկատմամբ։ Կանոնի համաձայն*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a^3}{b^3}.$$

Այստեղից հետևում է.

Հանրահաշվական կոտորակը քառակուսի կամ խորանարդ բարձրացնելու համար պետք է այդպիսի աստիճան բարձրացնել համարիչն առանձին և հայտարարն առանձին:

76. *Կոտորակների բաժանումը։* Կոտորակը կոտորակի վրա բաժանելու համար բավական է առաջին կոտորակի համարիչը բազմապատկել երկ-

րորդի հայտարարով յեվ առաջինի հայտարարը յերկրորդի համարիչով, ապա առաջին արտադրյալը դարձնել համարիչ յեվ յերկրորդ արտադրյալը հայտարար, *այսինքն*

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc},$$

Վոր այս հավասարությունն իրավացի յե a, b, c, d *տառերի բոլոր տեսակի արժեքների համար, կարելի յե հավաստիանալ բաժանման ստուգումը կատարելով. իրոք, քանորդը բազմապատկելով բաժանարարով՝ կըստանանք բաժանելին, այսինքն*

$$\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ad\overset{cd}{\smile}c}{bcd}=\frac{a}{b},$$

77. *Դիտողություններ։ 1) Քանի վոր* $\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$, *ապա բաժանման կանոնը կարելի յե նաև այլ կերպ արտասանել՝* կոտորակը կոտորակի վրա բաժանելու համար բավական ե առաջին կոտորակը բազմապատկել յերկրորդի հակադարձով:

2) Ամեն մի ամբողջ հանրահաշվական արտահայտություն կարելի յե դիտել իբրև այնպիսի կոտորակ, վորի համարիչն ե այդ ամբողջ արտահայտությունը և վորի հայտարարն ե 1. որինակի համար՝ $a=\frac{a}{1}$; $3x^2=\frac{3x^2}{1}$ *և այլն։ Այս պատճառով* այն կանոնները, *վոր մենք տվինք* կոտորակների նկատմամբ կատարվող գործողությունների համար, կարելի յե նայեվ այնպիսի դեպքերի նկատմամբ կիրառել, յերբ տված արտահայտություններից վորեվե մեկն ամբողջ ե, *հարկավոր ե միայն այդ ամբողջ արտահայտությունը պատկերացնել իբրև կոտորակ։ Որինակի համար՝*

$$a:\frac{b}{c}=\frac{a}{1}:\frac{b}{c}=\frac{ac}{b},$$

Վարժություններ

126. $-\frac{3x}{5a}\cdot\frac{10ab}{7x^3}$ $\qquad$ $\frac{1-a}{5x^3}\cdot\frac{x^2}{1-a^2}$

127. $\frac{4x^2y^2}{15n^4a^3}\cdot 45p^2q^2$ $\qquad$ $\frac{x^2-1}{3}\cdot\frac{6a}{x+1}$

128. $\left(a+\frac{ab}{a+b}\right)\left(b-\frac{ab}{a+b}\right)$ $\qquad$ $\frac{3a^2b^5c^4}{4x^2y^2z^4}:\frac{4a^4b^3c^2}{3x^4y^3z^2}$

129. $\frac{12a^4b^2}{5mp}:4ab^2$ $\qquad$ $81a^3b^2:\frac{27ab^2}{5x^2y}$

130. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}:\frac{5a^2+5b^2}{a+b}$ $\qquad$ $\left(x+\frac{xy}{x-y}\right):\left(x-\frac{xy}{x+y}\right)$

ՉՈՐՐՈՐԴ ՀԱՏՎԱԾ

ԱՌԱՋԻՆ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

I. ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

78 *Հավասարություններ և նրանց հատկությունները։* *Յերկու թվեր կամ յերկու հանրահաշվական արտահայտություններ, որոնք իրար հետ միացված են* = *նշանով, կազմում են* հավասարություն: *Այդ թվերը կամ արտահայտությունները կոչվում են հավասարության* մասեր. *հավասարության այն մասը, որը գտնվում է* = *նշանից ձախ, կազմում է հավասարության* ձախ մասը, *իսկ այն մասը, որը գտնվում է* = *նշանից աջ, կոչվում է հավասարության* աջ մաս: *Որինակի համար՝*

$$a+a+a=a\cdot 3$$

հավասարության մեջ ձախ մասն է $a+a+a$ *գումարը, իսկ աջը՝* $a\cdot 3$ *արտադրյալը։*

Հավասարության յուրաքանչյուր մասը նշանակելով մի տառով՝ մենք կարող ենք հավասարության ամենագլխավոր հատկությունները հետևյալ ձևով արտահայտել.

ա) Յեթե $a=b$, *ապա նաև* $b=a$, *այսինքն* հավասարության մասերը կարելի յե տեղափոխանակել:

բ) Յեթե $a=b$ *և* $b=c$, *ապա* $a=c$, *այսինքն* յերբ յերկու թվեր զատ-զատ հավասար են մի յերրորդ թվի, ապա նրանք իրար հավասար են:

գ) Յեթե $a=b$ *և* $m=n$, *ապա* $a+m=b+n$ *և* $a-m=b-n$, *այսինքն* յերբ միահավասար թվերի ավելացնենք կամ միահավասար թվերից հանենք միահավասար թվեր, ապա հավասարությունը չի խախտվի:

դ) Յեթե $a=b$ *և* $m=n$, *ապա* $am=bn$ *և* $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$, *այսինքն* յերբ միահավասար թվերը բազմապատկենք միահավասար թվերով կամ բաժանենք նրանց վրա, ապա հավասարությունը չի խախտվի:

Ոգտակար է ուշադրություն դարձնել այն հանգամանքի վրա, որ հավասարության յերկու մասերը (-1)-ով բազմապատկելը կամ (-1)-ի վրա բաժանելը համազոր է հավասարության մասերի առջևի նշանները փոխելուն։ *Այսպես, յեթե* $-x=-5$ *հավասարության յերկու մասերն էլ բազմապատկենք* (-1)*-ով, ապա կստանանք՝* $x=5$։

79. *Նույնություն։ Յերկու հանրահաշվական արտահայտություններ* նույնական *են կոչվում, յեթե նրանք շարունակ միահավասար թվային մեծություններ են ունենում, ինչպիսի թվային արժեքներ էլ տրվեն այն*

տառերին, վորոնք կան այդ արտահայտությունների մեջ։ Այդպիսի արտահայտություններ են, որինակի համար, հետևյալները․

$$ab \text{ և } ba; \; a+(b+c) \text{ և } a+b+c.$$

Ցեթե վորևե հավասարության մեջ նրա յերկու մասերը նույնական հանրահաշվական արտահայտություններ են, ապա այդպիսի հավասարությունը կոչվում ե նույնություն։ Նույնություն ե, որինակի համար, այս հավասարությունը՝

$$a+b+c=a+(b+c).$$

Նույնություն ե կոչվում նաև այնպիսի հավասարությունը, վորի մեջ մտնում են թվանշաններով արտահայտված թվեր միայն, յեթե նրա յերկու մասերը, նշած բոլոր գործողությունները կատարելուց հետո, միևնույն թիվը են տալիս․ որինակի համար՝

$$(10 \cdot 5):8=5^2.$$

80․ **Հավասարում**։ Դիցուք կամենում ենք մի այնպիսի խնդիր լուծել՝ հայրը 40 տարեկան ե, վորդին 17։ Քանի՞ տարուց հետո հայրը յերկու անգամ մեծ կլինի վորդուց։

Թվաբանական յեղանակով կարելի յե լուծել այս խնդիրը, բայց ավելի հեշտ կլինի, յեթե տառային նշանակում կիրառենք։ Իրոք, տարիների վորոնելի թիվը՝ նշանակենք x տառով։ x տարուց հետո հայրը կլինի 40+x տարեկան, իսկ վորդին 17+x տարեկան։ Խնդրի պայմանի համաձայն հայրն այն ժամանակ 2 անգամ մեծ կլինի, քան վորդին, այսինքն հոր տարիքը (40+x), յերկու անգամ մեծ կլինի վորդու տարիքից, վոր ե (17+x)։ Այդ մենք կարող ենք գրել հետևյալ հավասարության տեսքով։

$$40+x=2(17+x).$$

Կնշանակի՝ x-ը կարող ե միայն այնպիսի թիվ լինել, վորի համար իրավացի յե այդ հավասարությունը։ Ստուգումով համոզվում ենք, վոր այդ տեղի ունի միայն այն դեպքում, յերբ x=6։ Իրոք՝

$$40+6=2(17+6); \quad 46=46.$$

Ուրիշ ինչ թիվ ել դնենք x-ի փոխարեն, հավասարությունը կխախտվի։ Այս հավասարությունը չի կարելի նույնություն անվանել, վորովհետև նա իրավացի չե իր մեջ մտնող տառի վոչ բոլոր արժեքների համար։ x-ի փոխարեն միայն վեց դնելն ե, վոր այս հավասարությունը նույնություն ե դարձնում, այսինքն

$$46=46.$$

Ցեթե յերկու կամ մի քանի տառեր պարունակող հավասարության յերկու մասերը միահավասար թվային մեծություններ ունեն այդ տառերի վոչ բոլոր արժեքների համար, ապա այդպիսի հավասարությունը կոչվում ե հավասարում, իսկ այդ տառերով նշանակված թվերը կոչվում են հավասարման անհայտներ (անհայտ թվեր)։ Այս թվերը սովորաբար նշանակվում են լատինական այբբենի վերջին տառերով՝ x, y, z,...։

Հավասարումները լինում են մեկ անհայտով, յերկու անհայտով և այլն և կոչվում են միանհայտ, յերկանհայտ և այլն հավասարումներ։

Հավասարումը լուծել նշանակում է գտնել նրա մեջ յեղած անհայտների այն արժեքները, վորոնք բավարարում են հավասարմանը, այսինքն հավասարումը նույնություն են դարձնում։ Անհայտների այդ արժեքները կոչվում են հավասարման արմատներ կամ լուծումներ։

Միանհայտ հավասարումը կարող է ունենալ մեկ արմատ, յերկու արմատ և ավելի թվով արմատներ. որինակի համար՝ $3x - 2 = 13$ հավասարումը մեկ արմատ ունի, այն է՝ 5, իսկ $x^2+2=3x$ հավասարումը յերկու արմատ ունի, վորոնք են 1 և 2, մինչդեռ $(x-1)(x-2)(x+1)=0$ հավասարումը յերեք արմատ ունի, վորոնք են՝ 1, 2, և -1*) և այլն։

Կարող է նույնիսկ պատահել, վոր հավասարումը բնավ արմատ չունենա։ Այդպիսի հավասարում է որինակ $x^2=-4$ հավասարումը. ինչպիսի դրական կամ բացասական թիվ էլ դնենք x-ի փոխարեն, այդ թվի քառակուսին, լինելով դրական՝ չի կարող բացասական թվի հավասարվել։

Այն հավասարումը, վոր վերն արտածեցինք մեր խնդրի պայմաններից, ունի 6 արմատ։ Հենց սա յել խնդրում դրված հարցի պատասխանն է։ Իրոք, 6 տարուց հետո հայրը կլինի 46 տարեկան, իսկ վորդին 23 տարեկան, այսինքն 2 անգամ փոքր։

Այսպիսով վորոշ խնդիրներ լուծելու համար ոգտակար է դիմել հավասարումներ կազմելուն և սովորել այդ հավասարումները լուծել. Իսկ դրա համար անհրաժեշտ է ծանոթանալ հավասարումների վորոշ ընդհանուր հատկություններին։

Իբրև որինակ լուծենք վերը բերած հավասարումը՝

$$40+x=2(17+x).$$

Հավասարման աջ մասում փակագծերը բանանք՝

$$40+x=34+2x.$$

Հավասարման յերկու մասերից էլ հանենք x, կստանանք

$$40=34+x.$$

Վերջապես հավասարման յերկու մասերից էլ հանենք 34։ Կստանանք.

$$6=x \text{ և, ուրեմն, } x=6։$$

Այսպիսով մեր հավասարումը մի շարք ձևափոխությունների յենթարկելուց հետո x-ի համար կստանանք 6 արժեքը։

Հետագայում կտեսնենք, վոր համարյա նույն ձևով լուծվում են նաև ուրիշ հավասարումներ։

*) Հիշենք, վոր յեթե վորևե արտադրիչ զերոյի յե հավասար, ապա արտադրյալն էլ է զերոյի հավասար և ընդհակառակը։

Վարժություններ

131. *Հետևյալ հավասարություններից վորոնք են նույնություններ և վորոնք հավասարումներ.*

$$x+y=4+x \qquad (a-b+x)c=ac-bc+xc$$
$$3a-4=2a+1 \qquad 8x+1=5x+7 \qquad a(bc)=abc$$
$$2x=x+1 \qquad (xy):y=x \qquad a:2b=\frac{a}{2}:b$$

81. *Համազոր հավասարումներ:* Յերկու հավասարումներ համազոր են կոչվում, յերբ նրանցից մեկի բոլոր արմատները ծառայում են իբրեվ արմատներ մյուս հավասարման համար էլ, ընդհակառակը, այս յերկրորդ հավասարման բոլոր արմատներն էլ ծառայում են իբրեվ արմատներ առաջին հավասարման համար: *Օրինակի համար, հետևյալ յերկու հավասարումները՝*

$$x^2+2=3x \text{ և } 3x-2=x^2$$

համազոր են, վորովհետև նրանք միևնույն արմատներն ունեն, այն է 1 և 2. իսկ

$$7x=14 \text{ և } x^2+2=3x$$

հավասարումները համազոր չեն, վորովհետև առաջինն ունի միայն մի արմատ, վոր է 2-ը, մինչդեռ յերկրորդն այդ արմատից զատ ունի նաև մի ուրիշ արմատ՝ 1-ը:

Յերբ վորևէ հավասարում լուծելիս նրա նկատմամբ վորոշ ձևափոխություններ ենք կատարում, ապա այդ ձևափոխությունների միջոցով մենք տված հավասարումը հաջորդաբար փոխարինում ենք ուրիշ, ավելի պարզ, հավասարումներով, մինչև վոր ստանանք ամենապարզ տեսքի հավասարումը, այն է $x=a$. այն ժամանակ մենք ասում ենք, վոր այդ a թիվը տվյալ հավասարման արմատն է: Բայց այսպիսի պնդումը անսխալ կլինի միայն այն պարագային, յերբ մենք վստահ ենք, վոր ձևափոխումների ընթացքում ստացած բոլոր հավասարումները համազոր են տված հավասարմանը:

Այն ձևափոխությունները, վոր մենք պետք է կատարենք հավասարումների նկատմամբ, հիմնված են հավասարման յերկու հատկությունների վրա, վոր մենք այժմ քննության կառնենք:

82. *Հավասարումների առաջին հատկությունը: Վերցնենք վորևէ հավասարում, օրինակի համար հետևյալը՝*

$$x^2+2=3x. \tag{1}$$

Յենթադրենք՝ այս հավասարման յերկու մասին էլ ավելացրել ենք միևնույն m *թիվը, ինչպիսին էլ լինի վերջինս (դրական, բացասական կամ զերո). այն ժամանակ կստանանք հետևյալ նոր հավասարումը.*

$$x^2+2+m=3x+m. \tag{2}$$

Ապացուցենք, վոր այս հավասարումը համազոր է տված հավասարմանը: Դրա համար բավական է համոզվել, վոր (1) հավասարման ամեն մի արմատը բավարարում է նաև (2) հավասարմանը, և, ընդհակառակը, վոր

(2) հավասարման ամեն մի արմատը բավարարում է նաև (1) հավասարմանը։

ա) Դիցուք գիտենք (1) հավասարման վորևէ արմատը, օրինակի համար՝ $x=1$։ *Այս նշանակում է, վոր յեթե այդ հավասարման մեջ x-ի փոխարեն 1 դնենք, ապա* x^2+2 *արտահայտությունը հավասար կդառնա* $3x$ *արտահայտությանը (այդ արտահայտություններից յուրաքանչյուրը կդառնա 3)։ Բայց յերբ* $x=1$*, ապա* x^2+2+m *և* $3x+m$ *գումարներն էլ իրար հավասար կդառնան, վորովհետև յեթե միահավասար թվերին (3 և 3) ավելացնենք միևնույն թիվը* (m)*, ապա միահավասար թվեր կստանանք* $(3+m$ *և* $3+m)$։ *Նշանակի* $x=1$ *արմատը պետք է արմատ լինի նաև (2) հավասարման համար յեթե (1) հավասարումն էլ վորևէ արմատ ունի, ապա նրա մասին կարելի յե նույնն ասել, ինչ վոր ասացինք* $x=1$ *արմատի մասին, այսինքն վոր նա բավարարում է նաև (2) հավասարման։ Այսպիսով (1) հավասարման* յուրաքանչյուր *արմատը պատկանում է նաև (2) հավասարման։*

բ) Դիցուք գիտենք (2) հավասարման վորևէ արմատը, օրինակի համար՝ $x=2$։ *Այս նշանակում է, վոր յեթե այդ հավասարման մեջ x-ի տեղը դնենք 2, ապա* x^2+2+m *արտահայտությունը հավասար կդառնա* $3x+m$ *արտահայտությանը (այն է՝ այդ արտահայտություններից յուրաքանչյուրը կդառնա* $6+m)$։ *Բայց յերբ* $x=2$*, ապա* x^2+2 *և* $3x$ *արտահայտություններն էլ իրար կհավասարվեն, վորովհետև յեթե* $(6+m$ *և* $6+m)$ *հավասար թվերից հանենք միևնույն* (m) *թիվը, ապա միահավասար թվեր կստանանք։ Նշանակի* $x=2$ *արմատն արմատ է նաև (1) հավասարման համար։ Յեթե (2) հավասարումը վորևէ ուրիշ արմատ էլ ունի, ապա նրա մասին կարելի յե կրկնել նույնը, ինչ վոր հենց նոր ասացինք* $x=2$ *արմատի մասին, այսինքն վոր այդ արմատը էլ պետք է բավարարի (1) հավասարմանը։*

Նշանակի՝ (2) հավասարման ամեն մի *արմատը պետք է արմատ լինի նաև (1) հավասարման համար։*

Բայց յեթե (1) և (2) հավասարումների արմատները միևնույնն են, ապա այդ հավասարումները համազոր են։

Այս հատկությունը վերաբերում է նաև հավասարման յերկու մասերից միևնույն թիվը հանելուն, վորովհետև վորևէ թիվ հանելը համազոր է այդ թիվը հակադիր նշանով ավելացնելուն։

Այսպիսով՝ եթե հավասարման երկու մասերին ավելացնենք կամ նրանցից հանենք միևնույն թիվը, ապա կստանանք մի նոր հավասարում, վորը համազոր է առաջինին:

83. *Հ ե տ և ա ն ք ն ե ր։ Այս հատկությունից կարելի յե հետևյալ հետևանքները բղխեցնել, վորոնցից հաճախ պետք է լինում օգտվել հավասարումներ լուծելիս.*

1. Հավասարման անդամները կարելի յե նրա մի մասից մյուսը փոխադրել, փոխելով այդպիսի անդամների նշանները: *Օրինակի համար յեթե*

$$8+x^2=7x-2$$

հավասարման յերկու մասերին էլ ավելացնենք 2, կստանանք

$$8+x^2+2=7x.$$

—2 անդամը աջ մասից անցավ ձախ մասը, փոխելով նշանը +-ի։ Վերջին հավասարման յուրաքանչյուր մասից հանելով x^2, կստանանք

$$8+2=7x-x^2.$$

$+x^2$ անդամը ձախ մասից անցավ աջ մասը հակառակ նշանով։

2. Երբ հավասարման յերկու մասերը պարունակում են յերկու միատեսակ անդամներ միևնույն նշաններով, ապա այդպիսի անդամները կարելի յե վոչնչացնել։ *Օրինակի համար՝*

$$6x+3=x^2+3։$$

Այս հավասարման յերկու մասերից էլ հանելով 3, կստանանք

$$6x=x^2։$$

84. *Հավասարումների յերկրորդ հատկությունը։ Վերցնենք նույն հավասարումը՝*

$$x^2+2=3x, \qquad (1)$$

և նրա յերկու մասերն էլ բազմապատկենք վորևե m թվով, վորը կարող է լինել դրական կամ բացասական (բայց վոչ զերո)։ Այն ժամանակ կստանանք հետևյալ նոր հավասարումը.

$$(x^2+2)m=3xm \qquad (2)$$

Այս յերկու հավասարումների համազորությունը յերևան հանելու համար կդատենք ճիշտ այնպես, ինչպես դատում եինք առաջին հատկության նկատմամբ. այսինքն նախ ցույց կտանք, վոր (1) հավասարման ամեն մի արմատը բավարարում է (2) հավասարմանը և ապա, ընդհակառակը, վոր (2) հավասարման ամեն մի արմատը բավարարում է (1) հավասարմանը։

ա) Դիցուք գիտենք (1) հավասարման մի վորևե արմատը, օրինակի համար $x=1$։ Այդ նշանակում է, վոր յեթե այդ հավասարման մեջ x-ի փոխարեն 1 դնենք, ապա x^2+2 արտահայտությունը հավասար կդառնա $3x$ արտահայտությանը (այդ արտահայտություններից յուրաքանչյուրը կդառնա 3)։ Բայց $x=1$ արժեքի համար $(x^2+2)m$ և $3xm$ արտադրյալները ևս կհավասարվեն իրար, վորովհետև յեթե (3 և 3) միահավասար թվերը բազմապատկենք միևնույն (m) թվով, ապա հավասար թվեր կստանանք՝ (3m և 3m)։ Նշանակի $x=1$ արմատը պետք է արմատ լինի նաև (2) հավասարման համար։ Քանի վոր այս ամենը կարելի յե կրկնել (1) հավասարման ամեն մի այլ արմատի մասին ևս, ապա յեզրակացնում ենք, վոր (1) հավասարման ամեն մի արմատը պատկանում է նաև (2) հավասարմանը։

բ) Ընդհակառակը, դիցուք գիտենք, վոր (2) հավասարումն ունի $x=2$ արմատը։ Այդ նշանակում է, վոր յեթե այդ հավասարման մեջ x-ի փոխարեն դնենք 2, ապա $(x^2+2)m$ և $3xm$ արտադրյալները միահավասար կդառնան (յուրաքանչյուրը հավասար կդառնա 6m-ի)։ Բայց այն ժամանակ $x=2$ արժեքի համար x^2+2 և $3x$ արտահայտությունները ևս հավասար կդառնան, վորովհետև յեթե (6m և 6m) հավասար թվերը բաժանենք միևնույն m թվի վրա, վորը զերոյից տարբեր է, ապա կստանանք միահավասար թվեր։ Նշանակի $x=2$ արմատը, ինչպես և (2) հավասարման ամեն *մի այլ արմատը, արմատ կլինի նաև (1) հավասարման համար. այս պատճառով այդ հավասարումները համազոր են։*

Այժմ յենթադրենք, վոր այն m *թիվը, վորով մենք բազմապատկում ենք հավասարման յերկու մասերը,* հավասար է զերոյի: *Որինակի համար՝ զերոյով բազմապատկենք*

$$x^2+2=3x$$

հավասարման յերկու մասերը, վորը յերկու արմատ ունի՝ 1 և 2. կստանանք հետևյալ նոր հավասարումը՝

$$(x^2+2)\cdot 0=3x\cdot 0.$$

Այս հավասարման բավարարում են վոչ միայն 1 և 2 արմատները այլև x-ի ամեն մի կամավոր արժեք: Այսպես, x-ի փոխարեն դնելով 5, 6 և այլն, կստանանք՝

$$(5^2+2)\cdot 0=3\cdot 5\cdot 0;\quad (6^2+2)\cdot 0=3\cdot 6\cdot 0$$

այսինքն

$$27\cdot 0=15\cdot 0;\quad 38\cdot 0=18\cdot 0;$$

կամ

$$0=0;\quad 0=0,$$

վորովհետև վորևե թվի և զերոյի արտադրյալը զերո յե։ Նշանակի՝ զերոյով բազմապատկելուց հավասարումների համազորությունը խախտվում է։

Այսպիսով՝ յեթե հավասարման յերկու մասերը բազմապատկենք զերոյից տարբեր միևնույն թվով, ապա կստանանք մի նոր հավասարում, վորը համազոր է առաջինին:

85. *Հետևանքներ։ Հավասարումների այս յերկրորդ հատկությունից, վոր նոր ապացուցեցինք, կարելի յե հետևյալ յերեք հետևանքները բղխեցնել։*

1. Յեթե հավասարման բոլոր անդամները այնպիսի ընդհանուր բազմապատկիչ ունեն, վորը զերոյից տարբեր է յեվ անհայտներ չի պարունակում, ապա հավասարման բոլոր անդամները կարելի յե նրա վրա բաժանել: *Որինակի համար՝*

$$60x-160=340-40x.$$

Բոլոր անդամները բաժանելով 20-ի վրա՝ կստանանք ավելի պարզ հավասարում՝

$$3x-8=17-2x.$$

2. Հավասարումը կարելի յե կոտորակային անդամներից ազատել: *Որինակի համար՝*

$$\frac{7x-3}{6}-\frac{x-5}{4}=\frac{43}{6},$$

Բոլոր անդամները բերենք ընդհանուր հայտարարի՝

$$\frac{14x-6}{12}-\frac{3x-15}{12}=\frac{86}{12}\quad \text{կամ}\quad \frac{14x-6-(3x-15)}{12}=\frac{86}{12},$$

Ընդհանուր հայտարարը ջնջելով՝ մենք հավասարման յերկու մասերն այդպիսով բազմապատկած կլինենք զերոյից տարբեր միևնույն թվով, այն է 12-ով. դրանից կստանանք մի հավասարում, վորը համազոր է տվածին՝

$$14x-6-(3x-15)=86 \text{ կամ } 14x-6-3x+15=86.$$

3. Հավասարման բոլոր անդամների առջև կարելի է նշանները փոխել, *վորովհետև այդ միևնույնն է, թե հավասարման յերկու մասերը բազմապատկել —1-ով: Որինակի համար՝ յեթե —1-ով բազմապատկենք* $-8-x^2=-7+2$ *հավասարման յերկու մասերը, կստանանք՝* $8+x^2=7-2$.

86. *Հավասարման մասերի բազմապատկումը կամ բաժանումը միևնույն հանրահաշվական արտահայտությամբ.* Երբեմն *հարկավոր է լինում տված հավասարումը ձևափոխելու համար նրա յերկու մասերը բազմապատկել (կամ բաժանել) միևնույն հանրահաշվական արտահայտությամբ (հաջորդ հոդվածում կտեսնենք դրա որինակը): Բազմապատկումից հետո ստացած նոր հավասարումը միայն այն ժամանակ կլինի տված հավասարմանը համազոր, յերբ այն հանրահաշվական արտահայտությունը, վորով բազմապատկում ենք (կամ բաժանում ենք) տված հավասարման յերկու մասերը,* հավասար չէ զրոյի, *վորովհետև զերոյով բազմապատկելուց հավասարումների համազորությունը խախտվում է:*

87. *Կոտորակի արմատներ: Հավասարման յերկու մասերն այն ժամանակ է կարիք լինում միևնույն հանրահաշվական արտահայտությամբ բազմապատկելու, յերբ լուծման յենթակա հավասարումը այնպիսի կոտորակներ է պարունակում, վորոնց հայտարարների մեջ անհայտն առաջ է գալիս: Դիցուք հարկավոր է լուծել հետևյալ հավասարումը.*

$$\frac{x^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{2x+2}{(x-2)^2} \qquad (1)$$

Բոլոր կոտորակների ընդհանուր հայտարարն է $(x-2)^2$: *Բոլոր անդամները բերենք այդ հայտարարին՝*

$$\frac{x^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{x-2}{(x-2)^2}+\frac{2x+2}{(x-2)^2},$$

և դեն գցենք հայտարարը, այսինքն ուրիշ խոսքով, բոլոր անդամները բազմապատկենք $(x-2)^2$*-ով. կստանանք՝*

$$x^2+2=x-2+2x+2,$$

այսինքն

$$x^2+2=3x. \qquad (2)$$

Այս հավասարումը յերկու արմատ ունի՝ 1 և 2: Բայց մենք չենք կարող յերաշխավորել, վոր այս յերկու արմատներն էլ պետքական են նախասկզբնական հավասարման համար, այսինքն սրա համար էլ արմատներ են. չենք կարող յերաշխավորել, քանի վոր այդ հավասարման յերկու մասերը հարկ յեղավ բազմապատկելու $(x-2)^2$*-ով, վորը* $x=2$ *արժեքի համար զերո յէ դառնում, իսկ զերոյով բազմապատկելիս հավասարումների համազորությունը կարող է խախտվել:*

Մնում է փորձարկել գտած արմատները՝ 1 և 2, վորոշելու համար, թե պետքական են նրանք նաև (1) հավասարման համար։ $x=1$ արմատը բավարարում է (1) հավասարման, վորովհետև

$$\frac{1^2}{(1-2)^2}+\frac{2}{(1-2)^2}=\frac{1}{1-2}+\frac{2\cdot 1+2}{(1-2)^2},$$

$$\frac{1}{(-1)^2}+\frac{2}{(-1)^2}=\frac{1}{-1}+\frac{2+2}{(-1)^2},$$

$1+2=-1+4$, այսինքն $3=3$,

Բայց մյուս արմատը՝ $x=2$, պետքական չէ (1) հավասարման համար, վորովհետև $x=2$ արժեքի համար ընդունում է հետևյալ անիմաստ կերպարանքը՝

$$\frac{4}{0}+\frac{2}{0}=\frac{1}{0}+\frac{6}{0}$$

(զերոյի վրա բաժանելը հնարավոր չէ)։

Այսպիսով տեսնում ենք, վոր յեթե տվյալ հավասարման մեջ կոտորակներ կան, վորոնց հայտարարներն անհայտը պարունակում են, և մենք այդ հայտարարներից ազատվել ենք հավասարման յերկու մասերը բազմապատկելով ընդհանուր հայտարարով, ապա ստացած հավասարման՝ արմատները գտնելուց հետո մենք դեռ պետք է տված հավասարման մեջ տեղադրելով փորձարկենք այդ արմատները՝ իմանալու համար, թե նրանց մեջ կողմնակիները չկա՞ն արդյոք։

Ընդհակառակը, հավասարման յերկու մասերը բաժանելով այնպիսի հանրահաշվական արտահայտության վրա, վորն անհայտը պարունակում է, մենք կարող ենք արմատներ կորցնել։

Օրինակի համար, յեթե

$$(2x+3)(x-3)=(3x-1)(x-3)$$

հավասարման յերկու մասերը բաժանենք $x-3$ յերկանդամի վրա, կստանանք

$$2x+3=3x-1$$

նոր հավասարումը, վորը համազոր չի լինի տված հավասարմանը, վորովհետև միայն մի արմատ ունի՝ $x=4$, մինչդեռ սկզբնական հավասարումը յերկու արմատ ունի՝ $x=4$ և $x=3$։

II. ՄԻԱՆՀԱՅՏ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄ

88. *Միանհայտ առաջին աստիճանի հավասարումների լուծումը։* Հետևյալ օրինակների վրա ցույց տանք առաջին աստիճանի միանհայտ հավասարումների լուծման յեղանակը։

1. Լուծել հետևյալ հավասարումը.

$$3x+2(4x-3)=5(x+2)-4։$$

Փակագծերը բանալով՝ կստանանք.

$$3x+8x-6=5x+10-4։$$

Անհայտը պարունակող անդամները հավաքենք ձախ մասում, իսկ հայտնի անդամները աջ մասում (տ. հավասարումների առաջին հատկության առաջին հետևանքը)

$$3x+8x-5x=10-4+6։$$

Կատարենք նման անդամների միացում՝

$$6x=12։$$

Վերջապես, հավասարման յերկու մասերը բաժանենք 6-ի վրա (հավասարումների յերկրորդ հատկության հիման վրա)։ Վերջնականորեն ստանում ենք՝

$$x=2։$$

Վորպեսզի համոզվենք, վոր հավասարումը լուծելիս վորևէ սխալ չենք արել, պետք է լուծման ստուգում կատարենք։ Դրա համար գտած արմատը կտեղադրենք տված հավասարման մեջ x-ի փոխարեն, կկատարենք հավասարման մեջ նշած գործողությունները, և յեթե հավասարությունը նույնություն դառնա, ապա արմատն ուղիղ է գտնված։ Մեր որինակում կստանանք՝

$$3 \cdot 2+2(4 \cdot 2-3)=5(2+2)-4$$

կամ

$$16=16։$$

Ուրեմն արմատն ուղիղ է գտնված։

2. Լուծել հետևյալ հավասարումը.

$$\frac{3x-4}{2}+\frac{3x+2}{5}-x=\frac{7x-6}{6}-1։$$

Բոլոր անդամները բերում ենք ընդհանուր հայտարարի, վորը հավասար է 30-ի։

$$\frac{15(3x-4)}{30}+\frac{6(3x+2)}{30}-\frac{30x}{30}=\frac{5(7x-6)}{30}-\frac{30}{30},$$

Հավասարման բոլոր անդամները բազմապատկում ենք 30-ով (կամ, վոր նույնն է, գեն ենք գցում ընդհանուր հայտարարը). ստանում ենք՝

$$15(3x-4)+6(3x+2)-30x=5(7x-6)-30.$$

Բացում ենք փակագծերը՝

$$45x-60+18x+12-30x=35x-30-30։$$

Անհայտը պարունակող անդամները հավաքում ենք ձախ մասում, իսկ հայտնի անդամներն աջ մասում.

$$45x+18x-30x-35x=60-12-30-30։$$

Նման անդամները միացնում ենք՝

$$-2x=-12։$$

Յերկու մասերը բաժանում ենք անհայտի գործակցի վրա (կարելի էր նախապես յերկու մասերը բազմապատկել —1-ով, դրական դարձնելու համար)։

$$x=\frac{-12}{-2}=\frac{12}{2}=6.$$

Ստուգում ենք կատարում՝

$$\frac{3\cdot 6-4}{2}+\frac{3\cdot 6+2}{5}-6=\frac{7\cdot 6-6}{6}-1;\quad 7+4-6=6-1;\quad 5=5.$$

Ուրեմն արմատը ուղիղ է գտնված։

Բերած օրինակներից կարելի է առաջին աստիճանի միանհայտ հավասարման լուծման համար հետևյալ կարգն արտածել.

1. Հավասարումն ազատել կոտորակային անդամներից (բերել ամբողջ տեսքի)։

2. Փակագծերը բանալ։

3. Անհայտը պարունակող անդամները հավաքել մի մասում, իսկ հայտնի անդամները մյուս մասում։

4. Կատարել նման անդամների միացում։

5. Հավասարման յերկու մասերը բաժանել անհայտի գործակցի վրա։

Այնուհետև պետք է ստուգել, թե գտած լուծումն ուղիղ է, վորի համար այդ լուծումը (արմատը) պետք է տեղադրել անհայտի փոխարեն սկզբնական հավասարման մեջ։

Հասկանալի է, վոր նայած թե ինչպիսի հավասարում է տված, ամեն անգամ կարիք չի լինիլ նշած բոլոր հինգ գործողությունները կատարել։

Դիտողություն: *Հավասարման նկատմամբ առաջին չորս գործողությունները կատարելուց հետո հավասարման յուրաքանչյուր մասում մնում է մեկ անդամ՝ աջ մասում անհայտը պարունակող անդամը, իսկ ձախ մասում հայտնի անդամը։ Այդ հավասարումն ընդհանուր տեսքով կարելի է հետևյալ ձևով ներկայացնել՝*

$$ax=b,$$

վորտեղ a *և* b *թվերը կարող են լինել դրական, բացասական և նույնիսկ զերոյի հավասար։ Հավասարման այս տեսքը կոչվում է* առաջին աստիճանի միանհայտ հավասարման նորմալ ձևը:

Վարժություններ

Լուծել հետևյալ հավասարումները.

132. $2x+1=35$ $\quad 19=4+3y$ $\quad 7y-11=24$

133. $3x+23=104$ $\quad 89=11y-10$ $\quad 38=2+3x$

134. $3x=15-2x$ $\quad 4x-3=9-2x$ $\quad 5x+\frac{1}{4}=3\frac{1}{2}$

135. $2{,}5x-0{,}86=4+0{,}7x$ $\quad 29+2x=(x-7)\cdot 3$

136. $x-7=\frac{3x+13}{20}$ $\quad -x=3$ $\quad -2x=8$

137. $\frac{2x+1}{2}=\frac{7x+5}{8}$ $\quad x+\frac{11-x}{3}=\frac{20-x}{2}$

138. $x+\frac{3x-9}{5}=11-\frac{15x-12}{3}$

89. *Գաղափար հավասարումներ կազմելու մասին։* Հավասարումների միջոցով կարելի յե համեմատաբար ավելի հեշտ լուծել այնպիսի խնդիրներ, վորոնց լուծելը թվաբանության միջոցով դժվար ե կամ նույնիսկ անհնարին։ Ամբողջ դժվարությունը նրանում ե, թե ինչպես կազմել այնպիսի հավասարում, վորի լուծումը տա վորոնելի պատասխանը։

Հավասարումներ կազմելու համար մի միասնական յեղանակ չկա, վորովհետև խնդիրների պայմանները կարող են շատ բազմազան լինել։ Կարելի յե միայն միքանի ընդհանուր վարվելակերպեր նշել, վորոնք գործադրվում են խնդրի տվյալներով հավասարումներ կազմելիս։ Իսկ ընդհանրապես, ունակությունները այդ ուղղությամբ միայն գործնականով կարելի յե ձեռք բերել։

Մի որինակի վրա ցույց տանք հավասարումներ կազմելու ընդհանուր վարվելակերպերը։

Խնդիր: *Դպրոցը գնեց հաստ և բարակ տետրեր, ընդամենը 80 հատ։ Հաստ տետրն արժե 35 կոպ., բարակը 4 կոպ.։ Քանի՞ տետր եր գնված մեկ և մյուս տեսակից, յեթե վճարված ե 9ռ. 40 կոպ.։*

1. **Վորոշում ենք, թե անհայտ մեծություններից վո՛րը նշանակենք x-ով:**

Մեր խնդրում յերկու անհայտ կա՝ հաստ տետրերի թիվը և բարակ տետրերի թիվը։ x-ով նշանակենք, որինակի համար, հաստ տետրերի թիվը։ Քանի վոր բոլոր տետրերն 80 հատ են, ապա բարակները կլինեն $80-x$ հատ։

Հաստ տետրերի թիվն ե	x
Բարակ » » »	$80-x$

2. **x-ի լեզվով խնդրում տված թվերի միջոցով մաթեմատիկորեն արտահայտում ենք խնդրի բոլոր պայմանները:**

Մեր խնդրում տված ե, վոր հաստ տետրն արժե 35 կոպ., իսկ բարակը՝ 4 կոպ.։ Հետևաբար, մենք կարող ենք հարցնել՝ ինչքան արժեն գնված բոլոր հաստ և բարակ տետրերը միասին (այս հարցն այն պատճառով ենք դնում, վոր խնդրում տված ե բոլոր տետրերի արժեքը)։

Հաստ տետրերի արժեքն ե	$35x$ կոպ.
Բարակ » » »	$4(80-x)$ կոպ.
Տետրերի ընդհանուր »	940 կոպ.։

3. **Հավասարում ենք կազմում:**

Քանի վոր խնդրում տված ե, վոր տետրերի ընդհանուր արժեքն 9 ռ. 40 կոպ. ե, ապա հաստ տետրերի արժեքի՝ $35x$-ի և բարակ տետրերի արժեքի՝ $4(80-x)$, գումարը պետք ե կազմի հենց ուղիղ 9 ռ. 40 կոպեկ.

$$35x+4(80-x)=940։$$

Այս հավասարումը լուծելով՝ x-ի համար կստանանք 20 թիվը։

Հավասարումը լուծելով՝ պետք ե պատասխաններ տալ խնդրում դրված բոլոր հարցերին։ Այսպես, մեր խնդրում հարցվում ե, թե քանի հատ են հաստ տետրերը և քանիսն են բարակ տետրերն առանձին-առանձին։ x-ով մենք նշանակեցինք հաստ տետրերի թիվը։ Կնշանակի հաստ տետրերից գնված ե յեղել 20 հատ, իսկ բարակներից՝ $80-20=60$ հատ։

Նկատենք, վոր խնդրում սովորաբար ճիշտ այնքան տվյալներ են լինում, վորքան անհրաժեշտ ե հավասարում կազմելու համար։ Այս պատճառով հավասարումը կազմելուց հետո օգտակար է նայել՝ արդյո՞ք օգտագործված են խնդրի բոլոր տվյալները, այսինքն խնդրում տրված բոլո՞ր թվերն են այս կամ այն ձևով հավասարման մեջ մտել։

Վարժություններ

139. Յերկու թվերի գումարը հավասար է 2548-ի. գտնել այդ թվերը, յեթե հայտնի է, վոր նրանցից մեկը մյուսից փոքր է 148-ով։

140. Յերեք գումարելիների գումարը հավասար է 100-ի. յերկրորդ գումարելին մեծ է առաջինից 10-ով, իսկ յերրորդը յերկրորդից՝ 20-ով։ Գտնել այդ գումարելիները։

141. Ձիավորը հետապնդում է հետևակին, վորը 15 կմ առաջ է ձիավորից։ Քանի՞ ժամից հետո ձիավորը կհասնի հետևակին, յեթե առաջինը 1 ժամում անցնում է 10 կմ, իսկ յերկրորդը միայն 4 կմ։

142. Յերկու տեսակ թեյից խառնուրդ է պատրաստած ընդամենը 32 կգ։ Առաջին տեսակի 1 կգ-ը արժե 8 ռուբլի, իսկ յերկրորդ տեսակինը՝ 6 ռ. 50 կոպ.։ Քանի՞ կիլոգրամ է վերցված մեկ և մյուս տեսակից, յեթե խառնուրդի կիլոգրամն արժե (առանց օգուտ կամ վնաս անելու) 7 ռ. 10 կոպ.։

90. Տառային հավասարումներ։ Անհրաժեշտ չէ, վոր անհայտը միշտ x տառով նշանակվի. նա կարող է նաև վորևէ այլ տառով նշանակվել։ Վերցնենք օրինակի համար, հետևյալ բանաձևը՝

$$s = \frac{1}{2} bh,$$

վորը յեռանկյան s մակերեսն արտահայտում է նրա b հիմքի և h բարձրության միջոցով։ Այս բանաձևը մի հավասարում է, վորի մեջ s, b և h թվերից յուրաքանչյուրը կարող է իբրև անհայտ ընդունվել։ Դիցուք, օրինակի համար, այսպիսի խնդիր է առաջադրված՝ գտնել այն յեռանկյան հիմքը, վորի բարձրությունը վորևէ տեսակի գծային միավորներով հավասար է h-ի, իսկ մակերեսը համապատասխան քառակուսի միավորներով հավասար է s-ի։ Այս դեպքում մեր բանաձևի մեջ b թիվը պետք է անհայտ համարվի, իսկ s և h թվերը՝ հայտնիներ։ Իհարկե, մենք կարող ենք անհայտ հիմքը նշանակել x տառով և հավասարումն այսպես գրել.

$$s = \frac{1}{2} hx,$$

վորտեղից

$$x = s : \frac{1}{2}h = 2s : h = \frac{2s}{h}.$$

Բայց կարելի է, առանց b-ն x-ով փոխարինելու, ուղղակի $s = \frac{1}{2}bh$ և հավասարումից վորոշել b-ն s-ի և h-ի միջոցով՝

$$s = \frac{1}{2}bh; \quad 2s = bh; \quad b = \frac{2s}{h}.$$

Ընդհանրապես պետք է վարժվել լուծելու ոչ միայն թվային հավասարումներ, որոնց մեջ տվյալ թվերն արտահայտված են թվանշաններով, իսկ անհայտը նշանակված է x-ով, այլև տառային հավասարումներ, որոնց մեջ տվյալ թվերը և անհայտը նշանակված են որևէ տառերով։

Օրինակներ.

1) $a+bx=c;$

$bx=c-a;$

$x=\frac{c-a}{b}$

2) $a(x-c)=b(x+d);$

$ax-ac=bx+bd;$

$ax-bx=bd+ac;$

$x(a-b)=bd+ac;$

$x=\frac{bd+ac}{a-b};$

3) $\frac{y}{a}-y=b;$

$y-ay=ab;$

$y(1-a)=ab;$

$y=\frac{ab}{1-a};$

4) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1;$

$bx+ax=ab;$

$x(b+a)=ab;$

$x=\frac{ab}{a+b};$

Վարժություններ

143. $(a+x)(b+x)=(a-x)(b-x)$

144. $(x-a)(x+b)+c=(x+a)(x-b)$

145. $a+bx=4-3(a-x)$ *հավասարումից գտնել x-ը որպես a-ի և b-ի ֆունկցիա։*

III. ԱՌԱՋԻՆ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐ

Երկու յերկանհայտ հավասարումների սիստեմ

91. *Խնդիր։ Փորձով գտան, որ արծաթից և պղնձից կազմված մի ձույլ, որի կշիռն է 148 կգ, ջրում կորցնում է իր կշռից $14\frac{2}{3}$ կգ։ Վորոշել ձույլի մեջ յեղած արծաթի և պղնձի քանակները, յեթե հայտնի յե, որ ջրի մեջ 21 կգ արծաթը կորցնում է 2 կգ, իսկ 9 կգ պղինձը կորցնում է 1 կգ։*

Ենթադրենք այդ ձույլի մեջ արծաթն x կգ է, իսկ պղինձը՝ y կգ։ Այդ դեպքում մի հավասարումը կլինի՝ $x+y=148$։ Մյուս հավասարումը կազմելու համար նկատենք, որ յեթե 21 կգ արծաթը ջրում իր կշռից կորցնում է 2 կգ, ապա այդ նշանակում է, որ 1 կգ արծաթը կորցնում է $\frac{2}{21}$ կգ, իսկ x կգ արծաթը ջրում կկորցնի $\frac{2}{21}x$ կգ։ Նույնպես և յեթե 9 կգ պղինձը ջրում իր կշռից կորցնում է 1 կգ, ապա այդ նշանակում է, որ 1 կգ պղինձը կորցնում է $\frac{1}{9}$ կգ, իսկ y կգ պղինձը կկորցնի $\frac{1}{9}y$ կգ։ Այս պատճառով յերկրորդ հավասարումը կլինի $\frac{2}{21}x+\frac{1}{9}y=14\frac{2}{3}$։ Այսպիսով մենք ստացանք յերկու հավասարում յերկու անհայտով, վորոնք են՝

$$x+y=148 \text{ և } \frac{2}{21}x+\frac{1}{9}y=14\frac{2}{3}=\frac{44}{3}։$$

Յերկրորդ հավասարումը կարելի յե պարզեցնել, ազատելով նրան կոտորակներից։ Դրա համար բոլոր կոտորակները կբերենք մի հայտարարի՝

$$\frac{6}{63}x+\frac{7}{63}y=\frac{924}{63}.$$

Այժմ հավասարման յերկու մասերը կբազմապատկենք 63-ով, վորից հետո կստանանք հետևյալ համազոր հավասարումը.

$$6x+7y=924.$$

Այժմ մենք ունենք յերկու հավասարում՝

$$x+y=148 \text{ և } 6x+7y=924.$$

Այս յերկու հավասարումները մենք կարող ենք միքանի յեղանակներով լուծել։ Որինակի համար, առաջին հավասարումից x-ը կորոշենք y-ի միջոցով. կստանանք՝

$$x=148-y.$$

Բանի վոր յերկրորդ հավասարման մեջ x և y տառերը նույն թվերն են նշանակում, ինչ վոր առաջին հավասարման մեջ, ապա մենք կարող ենք յերկրորդ հավասարման մեջ x-ի փոխարեն դնել $148-y$ տարբերությունը. կստանանք՝

$$6(148-y)+7y=924.$$

Լուծենք այս միանհայտ հավասարումը.

$$888-6y+7y=924;\quad y=924-888=36.$$

Այն ժամանակ

$$x=148-36=112։$$

Այսպիսով տված ձուլի մեջ պարունակվում է 112 կգ արծաթ և 36 կգ պղինձ։

92. **Առաջին աստիճանի յերկանհայտ հավասարման նորմալ տեսքը։** Վերցնենք յերկանհայտ հավասարման մի այսպիսի որինակ՝

$$2(2x+3y-5)=\frac{5}{8}(x+3)+\frac{3}{4}(y-4).$$

Այս հավասարումը պարզեցնելու նպատակով նրա մեջ նույն ձևափոխությունները կկատարենք, վոր առաջ նշել ելինք միանհայտ հավասարման համար, այն է՝

1. Փակագծերը կբանանք

$$4x+6y-10=\frac{5}{8}x+\frac{15}{8}+\frac{3}{4}y-3.$$

2. Հայտարարներից կազատվենք, որի համար բոլոր անդամները կբազմապատկենք 8-ով՝

$$32x+48y-80=5x+15+6y-24։$$

3. Անհայտ անդամները կհավաքենք հավասարության մի կողմում, իսկ հայտնիները մյուս կողմում՝

$$32x+48y-5x-6y=15-24+80$$

4. Կկատարենք նման անդամների միացում՝

$$27x+42y=71։$$

Այսպիսով նշած ձևափոխումները կատարելուց հետո մեր հավասարումն այնպիսի տեսք է ընդունում, որ հավասարման ձախ մասում միայն երկու անդամ են գտնվում՝ մեկը x անհայտով, մյուսն y անհայտով (երկուսն էլ առաջին աստիճանի), իսկ աջ մասում միայն մեկ անդամ կա և նա անհայտ չի պարունակում։ x-ի և y-ի գործակիցները կարող են կամ երկուսն էլ դրական լինել (ինչպես մեր օրինակում), կամ երկուսն էլ բացասական (այս դեպքը կարելի է նախորդ դեպքին վերածել, հավասարման բոլոր անդամները բազմապատկելով -1-ով) և կամ մեկը դրական և մյուսը բացասական. աջ մասում գտնվող անդամը կարող է կամ դրական թիվ լինել (ինչպես մեր օրինակում), կամ բացասական թիվ լինել և կամ նույնիսկ զերո։ x-ի և y-ի գործակիցները նշանակելով a և b տառերով և անհայտ չպարունակող անդամը c տառով, մենք կարող ենք առաջին աստիճանի երկանհայտ հավասարումն ընդհանուր տեսքով այսպես ներկայացնել.

$$ax+by=c.$$

Հավասարման այսպիսի տեսքը կոչվում է առաջին աստիճանի երկանհայտ հավասարման նորմալ ձևը:

93. *Մեկ երկանհայտ հավասարման անորոշությունը*։ Երկու անհայտով մեկ հավասարումը ունի անթիվ բազմության արմատներ։ Իրոք, եթե անհայտներից որևէ մեկի համար մի կամավոր թիվ վերցնենք և այդ թիվը դնենք նրա փոխարեն հավասարման մեջ, այն ժամանակ կստանանք մի հավասարում, որը միայն մյուս անհայտն է պարունակում, և այս անհայտը կգտնենք այդ հավասարումից։ Ընդունելով առաջին անհայտի համար մի ուրիշ թիվ, մենք նույն ձևով երկրորդ անհայտի համար կստանանք մի նոր թիվ և այլն։ Այսպիսով մենք կարող ենք ստանալ այնքան զույգ լուծումներ, ինչքան կամենանք։

Դիցուք, օրինակի համար, տրված է այսպիսի խնդիր. գտնել հավասարասրուն եռանկյան կողմերը, եթե նրա պարագիծը հավասար է 40 մ-ի։ Նշանակելով այդ եռանկյան հիմքի երկարությունը x տառով և նրա սրունքներից յուրաքանչյուրի երկարությունն y տառով, մենք կարող ենք հետևյալ հավասարումը գրել՝

$$x+2y=40.$$

x-ի համար նշանակենք վորևե կամավոր թիվ, որինակի համար, 10-ը։ Այն ժամանակ կգտնենք՝ $10+2y=40$, $2y=30$, $y=15$։ Կնշանակի, յեթե յեռանկյան հիմքը 10 մ. լինի, ապա յուրաքանչյուր սրունքը պետք է 15 մ. լինի։ Այժմ x-ի համար վորևե ուրիշ թիվ ընտրենք, որինակի համար, 8։ Այն ժամանակ $2y=32$ և $y=16$։ Այսպիսով մենք կարող ենք գտնել ցանկացած թվով լուծումներ և, հետևաբար, հավասարումն ու խնդիրն անորոշ են։

94. Հավասարումների սիստեմ։ Ընդունված է ասել, վոր մի-քանի հավասարումներ սիստեմ են կազմում, յեթե այդ բոլոր հավասարումների մեջ x, y, . . . տառերից յուրաքանչյուրը միևնույն թիվն է ներկայացնում բոլոր հավասարումների մեջ։

Յեթե, որինակի համար, հետևյալ յերկու հավասարումները՝

$$\begin{cases} 2x-5=3y-2 \\ 8x-y=2y+21 \end{cases}$$

դիտվում են այն պայմանով, վոր x տառը միևնույն թիվն է ներկայացնում յերկու հավասարումների մեջ, ինչպես և y տառը, ապա այդպիսի հավասարումները մի սիստեմ են կազմում։ Այս ամեն անգամ այն դեպքում է լինում, յերբ հավասարումները միևնույն խնդրի պայմաններից են կազմված։

Նշենք առաջին աստիճանի յերկու յերկանհայտ հավասարումների լուծման յերկու յեղանակ։

95. Տեղադրման յեղանակ։ Այս յեղանակն արդեն կիրառել ենք արծաթից ու պղնձից կազմված ձուլքին վերաբերող խնդիրը լուծելիս։

Այժմ վերցնենք մի ավելի բարդ որինակ՝

$$8x-5y=-16; \quad 10x+3y=17.$$

(յերկու հավասարումներն էլ բերված են նորմալ տեսքի)։

Հավասարումներից մեկից, որինակի համար առաջինից, կորոշենք անհայտներից մեկն ու մեկը, որինակի համար y-ը, իբրև մյուս անհայտի ֆունկցիա՝

$$y=\frac{8x+16}{5}; *$$

Քանի վոր յերկրորդ հավասարումը պետք է x-ի և y-ի նույն արժեքներով բավարարվի, ինչ վոր առաջինը, ապա մենք կարող ենք նրա մեջ y-ի փոխարեն դնել գտած արտահայտությունը, վորի հետևանքով կստանանք միայն x անհայտը պարունակող հետևյալ հավասարումը.

$$10x+3\cdot\frac{8x+16}{5}=17.$$

Լուծենք այս հավասարումը.

$$10x+\frac{24x+48}{5}=17; \quad 50x+24x+48=85; \quad x=\frac{1}{2}.$$

*) Այս բանաձևն արտածելու համար մենք —5y անդամը փոխադրեցինք աջ կողմը, իսկ —16 անդամը ձախ կողմը, այնուհետև հավասարման յերկու մասերը բաժանեցինք 5-ի վրա և հավասարման մասերի տեղերը փոխանակեցինք։ Պետք է վարժվել այս ձևափոխությունները մտքում կատարելու։

Այն ժամանակ՝

$$y=\frac{8x+16}{5}=\frac{4+16}{5}=4.$$

Մենք կարող էինք մի հավասարումից վորոշել x անհայտն իբրև y-ի ֆունկցիա և ստացած արտահայտությունը տեղադրել x-ի փոխարեն մյուս հավասարման մեջ. այն ժամանակ մենք կստանայինք միայն y անհայտը պարունակող մի հավասարում։

Այս յեղանակը հատկապես այն դեպքում է հարմար, յերբ վորեվե անհայտի մոտ գործակիցը հավասար է 1-ի: *Այն ժամանակ ամենից ավելի լավ կլինի այդ անհայտը վորոշել իբրև մյուս անհայտի ֆունկցիա (վորովհետև կարիք չի լինիլ գործակցի վրա բաժանելու)։ Օրինակի համար՝*

$$\begin{cases} 3x-2y=11 \\ 4x+y=22 \end{cases}$$

Յերկրորդ հավասարումից գտնում ենք՝

$$y=22-4x.$$

Այն ժամանակ առաջին հավասարումը կլինի՝

$$3x-2(22-4x)=11;\quad 3x-44+8x=11;$$

$$11x=44+11=55;\quad x=\frac{55}{11}=5;\quad y=22-4.5=2.$$

Կանոն. Յերկանհայտ յերկու հավասարումների սիստեմը տեղադրման յեղանակով լուծելու համար պետք է մի հավասարումից վորոշել անհայտներից մեկն իբրեվ մյուսի ֆունկցիա յեվ ստացած արտահայտությունը տեղադրել մյուս հավասարման մեջ. դրա հետեվանքով ստացվում է մի միանհայտ հավասարում: Լուծելով վերջինս՝ գտնում ենք այդ անհայտը: Գտած թիվը տեղադրելով այն արտահայտության մեջ, վոր ստացված էր առաջին անհայտի համար, գտնում ենք նայեվ այս մյուս անհայտը:

96. *Հանրահաշվական գումարման յեղանակ։* *Նախ յենթադրենք, վոր հավասարումների ավյալ սիստեմի մեջ (հավասարումները նախապես նորմալ տեսքի յեն բերված), գործակիցները վորևե անհայտի, օրինակի համար y-ի, մոտ միահավասար են։ Դիցուք, օրինակի համար, մեզ տրված է հետևյալ սիստեմը՝*

$$\begin{cases} 7x-2y=27 \\ 5x+2y=33, \end{cases}$$

վորի մեջ y անհայտի մոտ գործակիցները թվապես միահավասար են և տարբեր նշաններ ունեն։ Մենք գիտենք, վոր յեթե հավասար թվերի հավասար թվեր ավելացնենք (հանենք), ապա հավասար թվեր կստանանք։ Այս պատճառով յեթե ավյալ հավասարումների ձախ մասերն իրար հետ գումարենք (իրարից հանենք) և աջ մասերն էլ իրար հետ գումարենք (իրարից հանենք), ապա = նշանը կպահպանվի (այս միտքը կարճ այսպես են արտահայտում՝ հավասարումները կարելի յե անդամ առ անդամ գումարել կամ հանել)։

Այժմ տված հավասարումները գումարենք․ $-2y$ և $+2y$ անդամները իրար կոչնչացնեն, և մենք կստանանք x անհայտով մեկ հավասարում՝

$$\begin{aligned} 7x-2y&=27 \\ 5x+2y&=33 \\ \hline 12x\quad&=60, \end{aligned}$$ վորտեղից $x=5$.

Տված հավասարումներից մեկի մեջ տեղադրելով x-ի փոխարեն նրա համար գտած 5 թիվը, կստանանք մի հավասարում, վորից կգտնենք y-ը՝

$$7\cdot5-2y=27;\quad 35-2y=27;\quad 35-27=2y;$$
$$8=2y;\quad y=4.$$

Յեթե հավասարումների մեջ արտաքսելի անհայտի առաջ միատեսակ լինեյին և գործակիցները և նշանները, ապա հավասարումներից մեկի բոլոր անդամների առաջ նշանները փոխելով՝ մենք այս դեպքը կվերածենք հենց նոր քննած դեպքին։ Որինակի համար, յեթե տված է հետևյալ սիստեմը

$$\begin{cases} 3x-5y=5 \\ 3x+7y=32, \end{cases}$$

վորի մեջ x անհայտի առաջ յերկու հավասարումներն էլ միատեսակ են թե գործակիցները և թե նշանները, ապա մենք կփոխենք հավասարումներից մեկի, ասենք առաջինի, բոլոր անդամների նշանները (ուրիշ խոսքով, հավասարման յերկու մասերը կբազմապատկենք -1-ով) և ապա կգումարենք հավասարումները [1])։

$$\begin{aligned} -3x+5y&=-8 \\ 3x+7y&=32 \\ \hline 12y&=24 \qquad y=2. \end{aligned}$$

$$3x+7\cdot2=32;\quad 3x=32-14=18;\quad x=6.$$

Այժմ վերցնենք այնպիսի սիստեմ, վորի մեջ գործակիցները տարբեր են, որինակի համար, հետևյալը՝

$$\begin{cases} 7x+6y=29 \\ -5x+8y=10\,. \end{cases}$$

Այս դեպքում մենք կարող ենք անհայտներից մեկն ու մեկի, որինակ x-ի, մոտ գործակիցները նախապես իրար հավասարեցնել։ Դրա համար կվերցնենք 7 և 5 գործակիցների մի բազմապատիկը (ամենից լավ կլինի վերցնել ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը, վորը տվյալ որինակում կլինի 35) և ամեն մի հավասարման յերկու մասն էլ կբազմապատկենք լրացնող բազմապատկչով (ինչպես այդ արվում է կոտորակներն ընդհանուր հայտարարի բերելիս).

$$7x+6y=29 \text{ (բազմապատկել 5-ով)}$$
$$-5x+8y=10 \text{ (բազմապատկել 7-ով)}$$

---

[1]) Իհարկե, մի հավասարման բոլոր անդամների առաջ նշանները փոխել և ապա այդ հավասարումը գումարել մի ուրիշ հավասարման հետ,—այդ միևնույնն է, թե առաջին հավասարումը հանել յերկրորդից։

կստանանք

$$35x+30y=145$$
$$-35x+56y=70$$

և այն ժամանակ այս դեպքը վերածված կլինի նախորդին։

Կանոն։ Յերկանհայտ յերկու հավասարումների սիստեմը հանրահաշվական գումարման յեղանակով լուծելու համար նախ տվյալ հավասարումների մեջ անհայտներից մեկն ու մեկի առաջ հավասարեցնում են գործակիցները, յեվ այն դեպքում, յերբ այդ անհայտի առաջ յերկու հավասարումների մեջ էլ նշանները նույնն են, հավասարումներից մեկի մեջ նշանները փոխում են։ Այնուհետեվ գումարելով հավասարումները՝ ստանում են մի հավասարում մեկ անհայտով, վորից յեվ վորոշում են այս անհայտը։ Գտած թիվը տեղադրելով տվյալ հավասարումներից մեկն ու մեկի մեջ՝ գտնում են նայեվ մյուս անհայտը։

97. *Տառային գործակիցներով հավասարումների սիստեմներ։* *Յերբեմն հարկ է լինում հավասարումների այնպիսի սիստեմ լուծելու, վորի մեջ գործակիցները տառերով են արտահայտված։ Դիցուք օրինակի համար, պահանջվում է լուծել հետեվյալ հավասարումը.*

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

Մենք կարող ենք այս սիստեմը լուծել թվային գործակիցներ ունեցող սիստեմի լուծման համար նշած յերկու յեղանակներից թե մեկով և թե մյուսով։ Տվյալ դեպքում ամենից ավելի պարզ կլինի կիրառել հանրահաշվական գումարման յեղանակը, այսինքն այսպես վարվել. հավասարումներից մեկի մեջ նշանները փոխել, մի անհայտի, օրինակի համար y-ի, առաջ գործակիցները հավասարեցնել և յերկու հավասարումները գումարել.

$$\begin{array}{rl|c|l} ax+by= & c & b' & ab'x+bb'y=\ \ b'c \\ -a'x-b'y= & c' & b & -a'bx-bb'y=-c'b \\ \hline & & & (ab'-a'b)x\ \ =b'c-c'b \end{array}$$

վորտեղից գտնում ենք՝

$$x=\frac{b'c-c'b}{ab'-a'b}$$

Նման ձևով էլ կգտնենք y-ը՝

$$\begin{array}{rl|c|l} ax+by= & c & a' & aa'x+a'by=\ \ a'c \\ -a'x-b'y= & -c' & a & -aa'x-ab'y=-ac' \\ \hline & & & (a'b-ab')y=a'c-ac' \end{array}$$

վորտեղից՝

$$y=\frac{a'c-ac'}{a'b-ab'}$$

Վարժություններ

Տեղադրման յեղանակով լուծել հետևյալ հավասարումների սիստեմները.

146. $\begin{cases} y=2x-8 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x+y=3 \\ 3x-2y=7 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x-5y=6 \\ x+4y=-15 \end{cases}$

Հետևյալ սիստեմները լուծել համրահաշվական գումարման յեղանակով.

147. $\begin{cases} 4x+7y=5 \\ -2x+5y=6 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+5y=20 \\ 2x-10y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x-8y=19 \\ 2x-2y=10 \end{cases}$

Հետևյալ հավասարումները լուծել վորևե յեղանակով.

148. $(2x-1)(y+2)=(x-2)(2y+5)$
$5x-2=2y+15$

149. $ax+by-c$ $\quad$ $x+a=my$
$y=mx$ $\quad$ $y+b=nx$

150. *Գտնել* a-*ի և* b-*ի արժեքները* $y=ax+b$ *յերկանդամի մեջ, իմանալով, վոր* $y=-11$, *յերբ* $x=-2$, *և* $y=1$, *յերբ* $x=2$։

151. *Գնված է 8 կգ. մի տեսակի և 19 կգ. մի ուրիշ տեսակի ապրանք և բոլորի համար վճարված է 16 ռ. 40 կոպ.։ յերկրորդ անգամ նույն գներով գնված է 20 կգ. առաջին ապրանքից և 16 կգ. յերկրորդից ու վճարված է այս բոլորի համար 28 ռ. 40 կոպ.։ Իմանալ յուրաքանչյուր ապրանքի կիլոգրամի գինը։*

152. *Տրեստը վաճառման համար ձեռք բերեց վորոշ թվով սովորական և շարժիչավոր հեծանիվներ։ Սովորական հեծանիվներից յուրաքանչյուրի համար նա վճարեց 100 ռուբլի, իսկ շարժիչավորներից յուրաքանչյուրի համար 400 ռուբլի։ Այս վողջ ապրանքը ծախելով՝ տրեստը 2800 ռուբլի շահվեց. շահույթը սովորական հեծանիվի համար կազմում եր 12%, իսկ շարժիչավորի համար՝ 25%։ Քանի՞ սովորական և քանի՞ շարժիչավոր հեծանիվ կար։*

153. *Ճարտարագետը պետք է յերկու տեղերի միջև հեռագրասյուներ դնի։ Նա հաշվեց, վոր յեթե մեկական սյուն կանգնեցնի ծայրակետերում և յուրաքանչյուր 50 մ. հեռավորության վրա այդ կետերի միջև, ապա նրան կպակասի 21 սյուն։ Իսկ յեթե սյուները հաստատի մեկը մյուսից 55 մետր հեռավորության վրա, ապա միայն մեկ սյուն կպակասի։ Ընդամենը քանի՞ սյուն կա, և մեկը մյուսից ինչ հեռավորության վրա պետք է դրվեն սյուները։*

Յերեք յեռանհայտ հավասարումների սիստեմ

98. *Առաջին աստիճանի յեռանհայտ հավասարման նորմալ տեսքը։* Յեթե առաջին աստիճանի այնպիսի հավասարման մեջ, վորը պարունակում է յերեք անհայտներ՝ x, y և z, կատարենք նույն ձևափոխությունները, վոր առաջ նշել ելինք միանհայտ և յերկանհայտ հավասարումների համար, ապա հավասարումը կբերենք այնպիսի տեսքի, վորի մեջ

հավասարման ձախ մասը միայն յերեք անդամ է պարունակում՝ մեկն x-ով, մյուսն y-ով և յերրորդը z-ով, իսկ աջ մասը միայն մեկ անդամ, և այն էլ անհայտ չպարունակող։ Ցեռանհայտ հավասարման համար այս տեսքը կոչվում է նորմալ տեսք (բնականոն տեսք)։ Այսպիսի տեսք ունի, օրինակի համար հետևյալ հավասարումը․

$$5x-3y-4z=-12.$$

Ցեռանհայտ հավասարման ընդհանուր նորմալ տեսքը հետևյալն է․

$$ax+by+cz=d,$$

վորտեղ a, b, c և d վորևե հարաբերական թվեր են։

99. Յերկու․և մեկ յեռանհայտ հավասարումների անորոշությունը։ Դիցուք մեզ տրված է յերկու յեռանհայտ հավասարումների մի սիստեմ՝

$$5x-3y+z=2; \qquad 2x+y-z=6.$$

Անհայտներից մեկին, օրինակ z-ին տանք վորևե կամավոր արժեք, ասենք 1, և այս արժեքը դնենք հավասարումների մեջ z-ի փոխարեն. կըստանանք՝

$$\begin{matrix} 5x-3y+1=2 \\ 2x+y-1=6 \end{matrix} \quad \text{այսինքն} \quad \begin{matrix} 5x-3y=1 \\ 2x+y=7. \end{matrix}$$

Այսպիսով կստանանք յերկու յերկանհայտ հավասարումների մի սիստեմ։ Լուծելով այդ սիստեմը վորևե յեղանակով, կգտնենք՝ $x=2$, $y=3$. Նշանակի յեռանհայտ հավասարումների տվյալ սիստեմը բավարարվում է, յերբ $x=2$, $y=3$ և $z=1$։ Այժմ z անհայտին տանք վորևե այլ արժեք, օրինակի համար $z=0$ արժեքը, և այս արժեքը տեղադրենք տվյալ հավասարումների մեջ․ կստանանք՝

$$5x-3y=2; \qquad 2x+y=6.$$

Մենք նորից կստանանք յերկու յերկանհայտ հավասարումների մի սիստեմ։ Լուծելով այս սիստեմը վորևե յեղանակով, գտնում ենք՝

$$x=\frac{20}{11}=1\frac{9}{11}, \quad y=2\frac{4}{11}.$$

Նշանակի՝ տվյալ սիստեմը բավարարվում է, յերբ $x=1\frac{9}{11}$, $y=2\frac{4}{11}$ և $z=0$։ Ցեթե z-ի համար վորևե նոր արժեք ընտրենք, մենք նորից կստանանք յերկու յերկանհայտ հավասարումների սիստեմ, վորից x-ի և y-ի համար նոր արժեքներ կգտնենք։ Քանի վոր z-ի համար կարող ենք ցանկացած թվով տարբեր արժեքներ ընտրել, ապա x-ի և y-ի համար ես կարող ենք ցանկացած թվով արժեքներ ստանալ, վորոնք կհամապատասխանեն z-ի համար վերցրած արժեքներին։ Նշանակի՝ յերկու յեռանհայտ հավասարումներ ունեն անթիվ բազմության լուծումներ. ուրիշ խոսքով՝ այսպիսի սիստեմն անորոշ է:

Ե՛լ ավելի մեծ անորոշություն կլինի, յեթե տրված է միայն մեկ յեռանհայտ հավասարում։ Այն ժամանակ կարելի կլինի վորևէ յերկու անհայտների համար կամավոր թվեր վերցնել, իսկ յերրորդ անհայտը կգտնվի տվյալ հավասարումից, յեթե նրա մեջ տեղադրենք այն արժեքները, վոր կամավորապես վերցրել ենք յերկու անհայտների համար։

100. Յերեք յեռանհայտ հավասարումների սիստեմ։ Վորպեսզի կարելի լինի վորոշակի թվային արժեքներ գտնել x, y և z յերեք անհայտների համար, անհրաժեշտ է, վոր յերեք հավասարումների սիստեմ տված լինի։ Այդպիսի սիստեմը կարելի յե լուծել թե տեղադրման յեղանակով և թե հավասարումների հանրահաշվական գումարման յեղանակով։ Ցույց տանք այդ յեղանակների գործադրությունը հետևյալ որինակով (հավասարումները նախապես նորմալ տեսքի յեն բերված).

$$\begin{cases} 3x-2y+5z=7 \\ 7x+4y-8z=3 \\ 5x-3y-4z=-12. \end{cases}$$

101. Տեղադրման յեղանակ։ Վորևէ հավասարումից, որինակի համար առաջինից, կորոշենք անհայտներից մեկը, որինակի համար x-ը, կախված մյուս յերկու անհայտներից.

$$x=\frac{7+2y-5z}{3}.$$

Բանի վոր բոլոր հավասարումների մեջ x-ը միևնույն թիվն է նշանակում, ապա մենք կարող ենք x-ի համար գտած արտահայտությունը x-ի փոխարեն դնել մնացած հավասարումների մեջ՝

$$7\cdot\frac{7+2y-5z}{3}+4y-8z=3.$$

$$5\cdot\frac{7+2y-5z}{3}-3y-4z=-12.$$

Այսպիսով մենք կստանանք յերկու յերկանհայտ հավասարումների մի սիստեմ y և z անհայտներով։ Այս սիստեմը լուծելով առաջներում նշած յեղանակներից վորևէ մեկով՝ կգտնենք y-ի և z-ի թվային արժեքները։ Մեր որինակում այդ արժեքներն են՝ $y=3$, $z=2$. այս թվերը տեղադրելով x-ի համար գտած արտահայտության մեջ, կգտնենք նաև այս անհայտը՝

$$x=\frac{7+2\cdot3-5\cdot2}{3}=1.$$

Այսպիսով գտանք, վոր մեզ տված սիստեմը հետևյալ լուծումն ունի՝ $x=1$, $y=3$, $z=2$ (վորը կարելի յե նաև ստուգումով հաստատել)։

102. Հանրահաշվական գումարման յեղանակ։ Տված յերեք հավասարումներից կվերցնենք վորևէ յերկուսը, որինակի համար առաջինը և յերկրորդը, և սրանց մեջ միահավասարեցնելով գործակիցները մեկ անհայտի, որինակի համար z-ի, ապա՝ նրանցից կարտաքսենք այդ անհայտը հանրահաշվական գումարման միջոցով. դրա հետևանքով կստանանք մի հավասարում x և y յերկու անհայտներով։ Այնուհետև կվերցնենք տված յերեք հավասարումներից վորևէ ուրիշ յերկուսը, որինակի համար առաջինը

և յերրորդը (կամ յերկրորդը և յերրորդը), և նույն յեղանակով նրանցից կարտաքսենք այդ նույն անհայտը, այսինքն, մեր օրինակում z-ը. դրանից կստանանք x-ով և y-ով մի հավասարում ևս՝

$$
\begin{array}{ll|l}
1) & 3x-2y+5z=7 \quad (8\text{-ով}) & 24x-16y+40z=56 \\
2) & 7x+4y-8z=3 \quad (5\text{-ով}) & 35x+20y-40z=15 \\
\hline
 & & 59x+4y \qquad =71
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll|l}
1) & 3x-2y+5z=7 \quad (4\text{-ով}) & 12x-8y+20z=28 \\
3) & 5x-3y-4z=-12 \quad (5\text{-ով}) & 25x-15y-20z=-60 \\
\hline
 & & 37x-23y \qquad =-32
\end{array}
$$

Կլուծենք ստացված յերկու հավասարումները կունենանք՝ $x=1$, $y=3$: *Այս թվերը կներդրենք տվյալ յերեք հավասարումներից մեկի, օրինակի համար առաջինի մեջ. կստանանք՝*

$$3 \cdot 1-2 \cdot 3+5z=7; \quad 5z=7-3+6=10; \quad z=2.$$

Դիտողություն: *Այդ նույն յերկու յեղանակներով մենք կարող ենք չորս քառանհայտ հավասարումների սիստեմը վերածել յերեք յեռանհայտ հավասարումների սիստեմի (իսկ այս սիստեմը յերկու յերկանհայտ հավասարումների սիստեմի և այլն): Ընդհանրապես՝* m *անհայտներ պարունակող* m *հավասարումների սիստեմը մենք կարող ենք վերածել* $m-1$ *անհայտներ պարունակող* $m-1$ *հավասարումների սիստեմի, այս սիստեմն էլ* $m-2$ *անհայտներ պարունակող* $m-2$ *հավասարումների սիստեմի և այլն:*

Վարժություններ

154. $\begin{cases} 4x-3y+2z=9 \\ 2x-5y-3z=4 \\ 5x+6y-2z=18 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 2x+5y-3z+40=0 \\ 5x-6y+2z=45 \\ 5z=195+7x+y \end{cases}$

155. $\begin{cases} 3x-y+z=17 \\ 5x+3y-2z=10 \\ 7x+4y-5z=3 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{x+3y}{5x+6z}=\dfrac{7}{9} \\ \dfrac{3y+4z}{x+2y}=\dfrac{8}{7} \\ x+y+z=128 \end{cases}$

Հավասարումների սիստեմների մի քանի առանձնահատուկ դեպքեր

103. *Այն դեպքը, յերբ բոլոր հավասարումները չեն պարունակում բոլոր անհայտները. օրինակի համար՝*

$$
\begin{cases}
10x-y+3z=5 \\
4v-5x=6 \\
2y+3z=6 \\
3y+2v=4
\end{cases}
$$

Այս դեպքում սիստեմն ավելի արագ է լուծվում, քան սովորաբար, վորովհետև հավասարությունների մի մասի մեջ արդեն իսկ բացակայում են այս կամ այն անհայտները։ Հարկավոր է միայն կշռադատել, թե վոր անհայտները և վոր հավասարություններից պետք է արտաքսել, վորպեսզի ըստ կարելույն շուտ հասնենք մեկ անհայտով մի հավասարման։ Մեր որինակում, արտաքսելով z-ն առաջին ու յերրորդ հավասարություններից և v-ն յերկրորդից ու չորրորդից, կստանանք x-ով և y-ով յերկու հավասարումներ՝

$$\begin{array}{rl} 10x - y + 3z = & 5 \\ -2y - 3z = & -6 \\ \hline 10x - 3y \quad = & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 4v - 5x = & 6 \\ -4v - 6y = & -8 \\ \hline -5x - 6y = & -2 \end{array}$$

Այս հավասարումները լուծելով, կգտնենք՝

$$x = 0; \quad y = \frac{1}{3}$$

Այս թվերն այժմ կներդրենք յերկրորդ և յերրորդ հավասարումների մեջ. կստանանք՝

$$v = \frac{3}{2}; \; z = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}.$$

104. Այն դեպքը, յերբ անհայտները հավասարումների մեջ առաջ են գալիս միայն հետևյալ կոտորակների տեսքով՝ $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$,... Դիցուք տված է հետևյալ սիստեմը՝

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{7}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Այսպիսի սիստեմն ամենից ավելի հեշտ է լուծել ոժանդակ անհայտներ մուծելու միջոցով։ Վերցնենք $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{y} = y'$ և $\frac{1}{z} = z'$։ Այն ժամանակ կստանանք x', y' և z' անհայտներով հետևյալ սիստեմը՝

$$\begin{cases} x' + y' - z' = \frac{7}{6} \\ x' - y' - z' = -\frac{5}{6} \\ y' - x' - z' = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Լուծելով այս սիստեմը, կգտնենք՝

$$x' = \frac{1}{2}, \quad y' = 1, \quad z' = \frac{1}{3},$$

այսինքն

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}, \; \frac{1}{y} = 1, \; \frac{1}{z} = \frac{1}{3}.$$

Այստեղից վերջնականորեն գտնում ենք՝

$$x=2,\quad y=1,\quad z=3.$$

Վերցնենք մի ուրիշ օրինակ՝

$$\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=-13 \\ \frac{6}{x}-\frac{3}{y}-\frac{1}{z}=5\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{x}+\frac{7}{y}+\frac{2}{z}=3\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\frac{3}{x}$, $\frac{2}{y}$ և այլ կոտորակները կարելի յե դիտել իբրև այսպիսի արտադրյալներ՝ $3\cdot\frac{1}{x}$, $2\cdot\frac{1}{y}$ և այլն։ Այս պատճառով յեթե վերցնենք $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=y'$, $\frac{1}{z}=z'$, ապա սիստեմն այսպիսի տեսք կընդունի՝

$$3x'+2y'-4z'=-13;$$
$$6x'-3y'-z'=5\frac{1}{2};$$
$$-5x'+7y'+2z'=3\frac{1}{2}$$

Այս հավասարումներից գտնում ենք

$$x'=2,\quad y'=\frac{1}{2},\quad z'=5;$$

կնշանակի՝

$$\frac{1}{x}=2,\ \frac{1}{y}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{z}=5;$$

վորտեղից՝

$$x=\frac{1}{2},\quad y=2,\quad z=\frac{1}{5}.$$

105. Այն դեպքը, յերբ ոգտակար է տված բոլոր հավասարումները գումարել։ Դիցուք ունենք հետևյալ սիստեմը՝

$$\begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ x+z=c \end{cases}$$

Բոլոր յերեք հավասարումները գումարելով, կգտնենք՝

$$2(x+y+z)=a+b+c;$$
$$x+y+z=\frac{a+b+c}{2}.$$

Վերջին հավասարումից հանելով տված հավասարումներից յուրաքանչյուրը, կստանանք՝

$$z=\frac{a+b+c}{2}-a;\quad x=\frac{a+b+c}{2}-b;\quad y=\frac{a+b+c}{2}-c$$

Վարժություններ

156. $\begin{cases} 3x+5y=161 \\ 7x+2z=201 \\ 2y+z=89 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{6}{x}+\frac{5}{y}=1 \\ \frac{30}{x}+\frac{31}{y}=6 \end{cases}$

157. $\begin{cases} 4x-3z+u=10 \\ 5y+z-4u=1 \\ 3y+u=17 \\ x+2y+3u=25 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}-\frac{4}{z}=\frac{1}{12} \\ \frac{3}{x}-\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=\frac{19}{24} \end{cases}$

158. *Ինչպես լուծենք ամենից ավելի պարզ կերպով հետևյալ սիստեմը*

$$\begin{cases} x+y+z=29\frac{1}{4} \\ x+y-z=18\frac{1}{4} \\ x-y+z=13\frac{3}{4} \end{cases}$$

159. *Երեք գնորդներ գնեցին սուրճ, շաքար և թեյ։ Առաջին գնորդը 8 կգ. սուրճին, 10 կգ. շաքարին և 9 կգ. թեյին վճարեց 35 ռուբ., երկրորդ գնորդը 4 կգ. սուրճին, 15 կգ. շաքարին և 5 կգ. թեյին վճարեց 40 ռուբ., իսկ երրորդ գնորդն 82 ռ. 50 կոպ. ծախսեց 12 կգ. սուրճ, 20 կգ. շաքար և 10 կգ. թեյ գնելու համար։ Գտնել մեկական կիլոգրամ սուրճի, շաքարի և թեյի գինը։*

160. *Կա երեք կտոր ձուլք վոսկուց, արծաթից և պղնձից. այդ կտորները պարունակում են՝*

1) 5 մաս վոսկի, 6 մաս արծաթ, 8 մաս պղինձ
2) 3 » » 5 » » 7 » »
3) 7 » » 13 » » 18 » »

Ամեն մի կտորից քանի՞ կգ. պետք է վերցնել, յեթե պետք է այնպիսի ձուլք կազմել, վորի մեջ լինի 79 կգ. վոսկի, 118 կգ. արծաթ և 162 կգ. պղինձ։

Պատմական տեղեկություններ

Հավասարումները պատահում են դեռ շատ հին դարերում, յեգիպտացիների մոտ։ Ահմեսը, վոր ապրել է մեր թվականությունից մոտ 2000 տարի առաջ, իր գրած պապիրուսում տալիս է առաջին աստիճանի միանհայտ հավասարումներ, անհայտը նշանակելով «հաու» բառով, վոր նշանակում է կույտ։

Հույն մաթեմատիկոս Դիոֆանտի մոտ (մեր թվականության 4-րդ դարում) մենք գտնում ենք ամենաբազմազան տեսակի հավասարումներ, վորոնց թվում նաև մի քանի անհայտներով հավասարումներ։ Սակայն նա չի տալիս այդ հավասարումների լուծման ընդհանուր յեղանակը։

Նյուտոնն արդեն տալիս է հավասարումների սիստեմի լուծման մի քանի յեղանակներ, դրանց թվում նաև տեղադրման յեղանակը։

Հավասարումներով շատ զբաղվել են արաբ գիտնականները, վորոնք հավասարումների լուծման ժամանակ ոգտվում եյին հավասարումների յերկու մասերին միահավասար անդամներ գումարելու կամ հանելու կանոնից։ Առաջին գործողությունը կոչվում եր «վերականգնում», արաբերեն algebre. յերկրորդ գործողությունը կոչվում եր almykabalah. այս բառերից առաջինից (ալգեբր) էլ ծագել է «ալգեբրա» անունը։

ՀԻՆԳԵՐՈՐԴ ՀԱՏՎԱԾ

ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ԱՐՄԱՏ ՀԱՆԵԼԸ

I. ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

106. *Արմատի սահմանումը։* Երկրորդ աստիճանի (կամ քառակուսի, կամ պարզապես երկրորդ) արմատ a թվից կոչվում է այնպիսի թիվը, որի քառակուսին հավասար է a-ի։ Այսպես, քառակուսի արմատ 49-ից կլինի 7, այլև —7, որովհետև $7^2=49$ և $(-7)^2=49$։ Երրորդ աստիճանի (կամ խորանարդ, կամ պարզապես երրորդ) արմատ a թվից կոչվում է այնպիսի թիվը, որի խորանարդը հավասար է a-ի։ Օրինակի համար, —125-ի խորանարդ արմատը կլինի —5, որովհետև $(-5)^3=(-5)(-5)(-5)=-125$։

Ընդհանրապես, a թվից n-երորդ աստիճանի արմատ (կամ a թվի n-երորդ արմատ) կոչվում է այնպիսի թիվը, որի n-երորդ աստիճանը հավասար է a-ի:

n թիվը, որը ցույց է տալիս թե որերորդ (որ աստիճանի) արմատն ենք գտնում, կոչվում է արմատի ցուցիչ կամ արմատացույց:

Արմատը նշանակվում է $\sqrt{\ }$ նշանով, որը կոչվում է արմատանշան։ Արմատանշանի հորիզոնական գծի տակ գրում են այն թիվը, որի արմատը որոնում են, և որը կոչվում է արմատատակ թիվ, իսկ անկյան բացվածքի վերևը դնում են արմատի ցուցիչը։ Այսպես՝

27-ի խորանարդ արմատը նշանակվում է . . . . $\sqrt[3]{27}$;

32-ի չորրորդ » » . . . . $\sqrt[4]{32}$։

Քառակուսի արմատի ցուցիչն ընդունված է չգրել. օրինակի համար, $\sqrt[2]{16}$-ի փոխարեն գրում են $\sqrt{16}$։

Այն գործողությունը, որի միջոցով որոնում են արմատը, կոչվում է արմատ հանելու գործողություն. արմատ հանելը հակադարձ է աստիճան բարձրացնելուն, որովհետև այդ գործողության միջոցով որոնում ենք այն, ինչ որ տված է աստիճան բարձրացնելիս (այն է աստիճանի հիմքը), և տված է այն, ինչ որ որոնում ենք աստիճան բարձրացնելիս (այն է հենց աստիճանը)։ Այս պատճառով արմատ հանելու ճշտությունը մենք միշտ կարող ենք ստուգել աստիճան բարձրացնելու միջոցով: Օրինակի համար, որպեսզի ստուգենք $\sqrt[3]{125}=5$ հավասարությունը, բավական է 5-ը խորանարդ բարձրացնել. քանի որ արմատատակ 125 թիվն է ստացվում, ապա եզրակացնում ենք, որ 125-ի խորանարդ արմատը ճիշտ է առնված։

107. *Թվաբանական արմատ։* Արմատը թվաբանական է կոչվում, եթե արմատատակ թիվը դրական է և ինքն արմատն էլ դրական թիվ է ներկայացնում։ Օրինակի համար, 49-ի թվաբանական արմատը 7 է, մինչդեռ —7 թիվը, որը նույնպես 49-ի քառակուսի արմատն է, չի կարելի թվաբանական արմատ կոչել։

Նշենք թվաբանական արմատի հետևյալ յերկու հատկությունները։

ա) Դիցուք պահանջվում է գտնել $\sqrt{49}$ արտահայտության թվաբանական արմատը։ Այսպիսի արմատ կլինի 7-ը, վորովհետև $7^2=49$։ Ուրիշ ոչ՞ կարելի մի ուրիշ դրական x թիվ գտնել, վորը նույնպես հավասար լինի $\sqrt{49}$-ի։ Ցենթադրենք, վոր այդպիսի թիվ գոյություն ունի։ Այն ժամանակ այդ թիվը պետք է կամ փոքր լինի 7-ից կամ մեծ։ Ցեթե ընդունենք, վոր $x<7$, ապա այդ դեպքում նաև $x^2<49$ (վորովհետև բազմապատկելիի և բազմապատկչի փոքրանալուց արտադրյալը փոքրանում է). իսկ յեթե ընդունենք, վոր $x>7$, ապա այս դեպքում նաև $x^2>49$։ Հետևաբար և վոչ մի դրական թիվ, — լինի նա 7-ից փոքր թե 7-ից մեծ, — չի կարող $\sqrt{49}$-ի հավասարվել։ Այսպիսով տված թվից տված աստիճանի թվաբանական արմատը կարող է միայն մեկ հատ լինել։

Ուրիշ յեզրակացության կհանգեյինք, յեթե խոսքը վերաբերեր վոչ թե արմատի դրական արժեքին, այլ վորևե արժեքին. այսպես, $\sqrt{49}$-ը հավասար է և 7 թվին և —7 թվին [վորովհետև և $7^2=49$ և $(-7)^2=49$]։

բ) Վերցնենք վորևե յերկու անհավասար դրական թվեր, օրինակի համար 49 և 64։ Նրանից, վոր $49<64$, մենք կարող ենք յեզրակացնել, վոր նաև $\sqrt{49}<\sqrt{64}$ (յեթե միայն $\sqrt{}$ նշանի տակ հասկանանք թվաբանական քառակուսի արմատը)։ Իրոք, $7<8$։ Նույնպես էլ նրանից, վոր $64<125$, կարող ենք յեզրակացնել, վոր նաև $\sqrt[3]{64}<\sqrt[3]{125}$։ Իրոք, $\sqrt[3]{64}=4$, $\sqrt[3]{125}=$ $=5$ և $4<5$։ Ընդհանրապես՝

Յերկու դրական թվերից փոքրին համապատասխանում է փոքր թվաբանական արմատը (*նույն աստիճանի*)։

108. *Հանրահաշվական արմատ։* Արմատը հանրահաշվական է կոչվում, յեթե չի պահանջվում, վոր արմատատակ թիվը դրական լինի, և վոր ինքն արմատը դրական լինի։ Այսպիսով՝ յեթե $\sqrt[n]{a}$ արտահայտության տակ հասկացվում է n-երորդ աստիճանի հանրահաշվական արմատ, ապա այդ նշանակում է, վոր a թիվը կարող է և՛ դրական լինել և՛ բացասական, և արմատն ինքն էլ կարող է և՛ դրական լինել և՛ բացասական։

Նշենք հանրահաշվական արմատի հետևյալ չորս հատկությունները։

ա) Դրական թվի կենտ աստիճանի արմատը դրական թիվ է։

Այսպես, $\sqrt[3]{8}$-ը պետք է դրական թիվ լինի (հավասար է 2-ի), վորովհետև բացասական թվի կենտ աստիճանը բացասական թիվ է տալիս։

բ) Բացասական թվի կենտ աստիճանի արմատը բացասական է։

Այսպես, $\sqrt[3]{-8}$-ը պետք է բացասական լինի (հավասար է —2-ի), վորովհետև դրական թիվն ինչ աստիճան էլ բարձրացնենք, կստացվի դրական թիվ և վոչ բացասական։

գ) Դրական թվի զույգ աստիճանի արմատն ունի յերկու հակադիր արժեքներ (այսինքն՝ յերկու արժեքներ, վորոնց բացարձակ մեծությունը նույնն է, և վորոնց նշանները տարբեր են)։

Այսպես, $\sqrt{+4}=+2$ և $\sqrt{+4}=-2$, վորովհետև $(+2)^2=+4$ և $(-2)^2=+4$. Ճիշտ այդպես էլ $\sqrt[4]{+81}=+3$ և $\sqrt[4]{+81}=-3$, վորովհետև $(+3)^4$ և $(-3)^4$ աստիճանները հավասար են միևնույն $+81$ թվին։

Արմատի կրկնակի արժեքը սովորաբար նշանակում են արմատի բացարձակ մեծության առաջ դնելով և՛ բացասական նշան և՛ դրական. այսպես, գրում են՝

$$\sqrt{4}=\pm 2; \qquad \sqrt{a^2}=\pm a; \qquad \sqrt{9x^4}=\pm 3x^2.$$

դ) Բացասական թվի զույգ աստիճանի արմատը չի կարող հավասար լինել յեվ վո՛չ մի թվի, լինի սա դրական թե բացասական, վորովհետև թե՛ դրական թիվը և թե՛ բացասական թիվը զույգ աստիճան բարձրացնելուց հետո տալիս են դրական թիվ և վո՛չ թե բացասական։ Օրինակի համար, $\sqrt{-9}$ հավասար չէ վոչ $+3$-ի, վոչ -3-ի և վոչ էլ վորևէ այլ թվի։

Բացասական թվի զույգ աստիճանի արմատն ընդունված է անվանել կեղծ թիվ, իսկ հարաբերական թվերը՝ իրական թվեր։

Վարժություններ

Ինչի՞ յեն հավասար հետևյալ արտահայտությունները.

161. $\sqrt{100}$ $\sqrt{0,01}$ $\sqrt{\frac{1}{4}}$ $\sqrt{\frac{9}{16}}$ $\sqrt{a^2}$ $\sqrt{x^3}$

162. $\left(\sqrt{5}\right)^2$ $\left(\sqrt[3]{27}\right)^3$ $\left(\sqrt[5]{a}\right)^5$ $\left(\sqrt{1+x}\right)^2$

163. $\sqrt[3]{+27}$ $\sqrt[3]{-27}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$ $\sqrt[3]{-0,001}$

164. $\sqrt[4]{16}$ $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$ $\sqrt[4]{81}$ $\sqrt{-4}$ $\sqrt{-a^2}$ $\sqrt[4]{-16}$

109. Արտադրյալի, աստիճանի և կոտորակի արմատը։

ա) Դիցուք հարկավոր է քառակուսի արմատ հանել abc արտադրյալից։ Յեթե պահանջվեր արտադրյալը քառակուսի բարձրացնել, ապա, ինչպես տեսել ենք (§ 46), կարելի յէ քառակուսի բարձրացնել ամեն մի արտադրիչն առանձին։ Քանի վոր արմատ հանելն աստիճան բարձրացնելուն հակադարձ մի գործողություն է, ապա պետք է սպասել, վոր արտադրյալից արմատ հանելու համար էլ կարելի յէ ամեն մի բազմապատկչից առանձին արմատ հանել, այսինքն՝ վոր

$$\sqrt{abc}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}.$$

Համոզվելու համար, վոր այս հավասարությունն իրավացի յէ, նրա աջ մասը բարձրացնենք քառակուսի (օգտվելով այս թեորեմից՝ արտադրյալն աստիճան բարձրացնելու համար...).

$$(\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c})^2=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2(\sqrt{c})^2,$$

Բայց արմատի սահմանման համաձայն՝

$$(\sqrt{a})^2=a,\ (\sqrt{b})^2=b,\ (\sqrt{c})^2=c.$$

Հետևաբար՝

$$(\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c})^2=abc.$$

Բայց յեթե $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$ *արտադրյալի քառակուսին հավասար է* abc-*ի, ապա այդ նշանակում է, վոր այդ արտադրյալն ինքը հավասար է* abc-*ի քառակուսի արմատին։ Դրա նման ել՝*

$$\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c},$$

վորովհետև

$$\left(\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}\right)^3=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3\left(\sqrt[3]{b}\right)^3\left(\sqrt[3]{c}\right)^3=abc.$$

Կնշանակի՝ **արտադրյալից արմատ հանելու համար պետք է ամեն մի արտադրիչից առանձին արմատ հանել:**

բ) Հեշտ է ստուգել, վոր հետևյալ հավասարությունները իրավացի յեն՝

$$\sqrt{a^4}=a^2,\ \text{վորովհետև}\ (a^2)^2=a^4,$$

$$\sqrt[3]{x^{12}}=x^4,\qquad \text{»}\qquad (x^4)^3=x^{12}\ \text{և այլն.}$$

Կնշանակի՝ **աստիճանից արմատ հանելու համար, յերբ աստիճանի ցուցիչը բաժանվում է արմատի ցուցչի վրա, պետք է աստիճանացույցը բաժանել արմատացուցչի վրա:**

գ) Իրավացի յեն նաև հետևյալ հավասարությունները.

$$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}\ \text{վորովհետև}\ \left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16};$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3},\qquad \text{»}\qquad \left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}.$$

Ընդհանրաբար՝

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};\ \sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}.$$

Կնշանակի՝ **կոտորակից արմատ հանելու համար պետք է համարչից առանձին արմատ հանել, հայտարարից առանձին:**

Նկատենք, վոր այս ճշմարտությունների մեջ յենթադրվում է, վոր խոսքը **թվաքանական** *արմատների մասին է.*

Օրինակներ.

1. $\sqrt{9a^4b^6}=\sqrt{9}\ \sqrt{a^4}\ \sqrt{b^6}=3a^2b^3$;

2. $\sqrt[3]{125a^6x^9}=\sqrt[3]{125}\ \sqrt[3]{a^6}\ \sqrt[3]{x^9}=5a^2x^3$։

Դիտողություն: *Յեթե վորոնելի արմատը* զույգ *աստիճանի յե և չենթադրվում է* հանրահաշվական, *ապա գտած արդյունքի առաջ պետք է դնել ± կրկնակի նշանը։ Այսպես՝*

$$\sqrt{9x^4}=\pm 3x^2.$$

Վարժություններ

165. $\sqrt{4\cdot 9}$ $\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 0{,}01\cdot 25}$ $\sqrt{4a^2b^2}$ $\sqrt{9a^2x^2y^4}$

166. $\sqrt[3]{-27a^3b^3}$ $\sqrt[4]{\frac{1}{16}a^4x^4}$ $\sqrt[5]{abc}$

167. $\sqrt{a^4}$ $\sqrt{2^4}$ $\sqrt{x^6}$ $\sqrt{(a+b)^4}$

168. $\sqrt[3]{2^6}$ $\sqrt[3]{-a^6}$ $\sqrt[3]{x^9}$ $\sqrt[3]{(m+n)^6}$

169. $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$ $\sqrt[3]{-\frac{27}{1000}}$ $\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^3}}$ $\sqrt[3]{\frac{x}{y^3}}$ $\sqrt{\frac{x}{y}}$

170. $\sqrt{25a^6b^2c^4}$ $\sqrt{0{,}36x^4y^2}$ $\sqrt{\frac{1}{4}(b+c)^6x^4}$

Դ. ԹՎԵՐԻ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ԱՐՄԱՏԸ

110. *Նախնական դիտողություններ։ ա) Խոսքը համառոտելու համար այս գլխում «քառակուսի արմատ» ասելու փոխարեն պարզապես կասենք «արմատ»։*

բ) Յեթե քառակուսի բարձրացնենք բնական շարքի թվերը՝ 1. 2, 3, 4, 5.... ապա կստանանք քառակուսիների հետևյալ աղյուսակը.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144...

Ակներև է, վոր շատ ամբողջ թվեր կան, վորոնք այս աղյուսակում չեն գտնվում այդպիսի թվերից արմատ հանելիս, ինարկե, ամբողջ արմատ չի ստացվի։ Այս պատճառով յեթե պահանջվում է արմատ հանել վորևե ամբողջ թվից, օրինակ պահանջվում է գտնել $\sqrt{4082}$, ապա կպայմանավորվենք այդ պահանջն այսպես հասկանալ՝ 4082-ից ամբողջ արմատ հանել, յեթե այդ հնարավոր է, իսկ յեթե այդ հնարավոր չե, ապա մենք պետք է գտնենք այն ամենամեծ *ամբողջ թիվը, վորի քառակուսին պարունակվում է 4082-ի մեջ (այդ թիվը 63-ն է, վորովհետև $63^2=3969$, իսկ $64^2=4096$)։*

գ) Յեթե տված թիվը 100-ից փոքր է, ապա նրա արմատը գտնում ենք բազմապատկման աղյուսակից։

111. *Արմատ 10000-ից փոքր և 100-ից մեծ ամբողջ թվից։ Դիցուք պետք է գտնել $\sqrt{4082}$։ Քանի վոր արմատատակ թիվը փոքր է 10000-ից, ապա նրա արմատը փոքր է 100-ից։ Մյուս կողմից արմատատակ թիվը մեծ է 100-ից. կնշանակի՝ նրա արմատը մեծ է 10-ից (կամ հավասար է 10-ի)։ Բայց ամեն մի թիվ, վոր մեծ է 10-ից (կամ հավասար է 10-ի) և փոքր է 100-ից, յերկու թվանշան ունի. կնշանակի՝ վորոնելի արմատը ներկայացնում է այսպիսի գումար՝*

տասնավորներ + միավորներ,

այս պատճառով նրա քառակուսին պետք է հավասար լինի հետևյալ գումարին՝

(տասնավորներ)^2 + 2 · *(տաս.)* · *(միավ.)* + *(միավորներ)*^{2}

Այս գումարը պետք է լինի այն ամենամեծ քառակուսին, վորը պարունակվում է 4082-ի մեջ։ Քանի վոր (տասնավորներ)^2 *տալիս է հարյուրավորներ, ապա տասնավորների քառակուսին պետք է վորոնել տված թվի հարյուրավորների մեջ։ Տված թվի մեջ 40 հարյուրավոր կա (հարյուրավորների թիվը գտնելու համար տված թվի մեջ աջից յերկու թվանշան անջատում ենք ստորակետով)։ Բայց 40-ի մեջ մի քանի ամբողջ քառակուսիներ (այսինքն ամբողջ թվերի քառակուսիներ) կան՝ 36, 25, 16... Վերցնենք նրանցից ամենամեծը՝ 36-ը, և յենթադրություն անենք, վոր արմատի տասնավորների քառակուսին հավասար կլինի հենց այդ ամենամեծ քառակուսուն։ Այդ դեպքում արմատի տասնավորների թիվը պետք է 6 լինի։ Հիմա ստուգենք, վոր այդ միշտ պետք է այդպես լինի, այսինքն, վոր* արմատի տասնավորների թիվը միշտ էլ հավասար է արմատատակ թվի հարյուրավորների ամենամեծ ամբողջ արմատին։ *Իրոք, մեր որինակում արմատի տասնավորների թիվը չի կարող 6-ից մեծ լինել, վորովհետև (7 տասնավոր)*^{2}=49 *հարյուրավոր, վոր մեծ է 4082-ից։ Բայց նա չի կարող նաև փոքր լինել 6-ից, վորովհետև 5 տասնավորը (միավորների հետ միասին) փոքր է 6 տասնավորից, մինչդեռ (6 տասնավոր)*^{2}=36 *հարյուրավոր, վորը փոքր է 4082-ից։ Բայց քանի վոր մենք վորոնում ենք* ամենամեծ *ամբողջ արմատը, ապա մենք արմատի համար չպետք է վերցնենք 5 տասնավորը, յերբ նույնիսկ 6 տասնավորն է փոքր։ Այսպես ուրեմն, մենք գտանք արմատի տասնավորների թիվը, վոր է 6։ Այս թվանշանը գրում ենք = նշանից աջ, հիշելով վոր նա ցույց է տալիս արմատի տասնավորները։ Արմատում ստացած այդ 6 տասնավորը բարձրացնելով քառակուսի՝ կունենանք 36 հարյուրավոր։ Այս 36 հարյուրավորը հանում ենք արմատատակ թվի 40 հարյուրավորից և մնացորդին կցագրում ենք 82.*

$$\begin{array}{l} \sqrt{40'82}=6 \\ \underline{36} \\ \;\;48'2 \end{array}$$

482 թվի մեջ պետք է պարունակվի հետևյալ գումարը՝

2 *(6 տասն.)* · *(միավորն.)* + *(միավ.)*^{2}.

(6 տասն.) · *(միավ.) արտադրյալը պետք է կազմի տասնավորներ.*

ուստի տասնավորների և միավորների կրկնապատիկ արտադրյալը պետք է վորոնել մնացորդի տասնավորների մեջ, այսինքն 48-ի մեջ (մնացորդի տասնավորների թիվը կստանանք, յեթե մնացորդ 48'2-ի մեջ մի թվանշան աջից անջատենք)։ Արմատի կրկնապատիկ տասնավորները կազմում են 12. կնշանակի՝ յեթե 12-ը բազմապատկենք արմատի միավորներով (վորոնք առայժմ անհայտ են), ապա մենք պետք է այնպիսի թիվ ստանանք, վորը պարունակվի 48-ի մեջ։ Այս պատճառով մենք 48-ը կբաժանենք 12-ի վրա։ Դրա համար մնացորդից դեպի ձախ ուղղաձիգ գիծ ենք տանում և այս գծի ձախ կողմում (մի թվանշանի տեղ թողնելով գծի մոտ, վորի նպատակը հենց հիմա կպարզվի) գրում ենք արմատի առաջին թվանշանի կրկնակին, այսինքն 12-ը, այնուհետև 48-ը բաժանում ենք 12-ի վրա։

Քանորդում ստացվում է 4։ Բայց չի կարելի առաջուց վստահ լինել, վոր 4 թվանշանը կարելի՞ յե ընդունել իբրև արմատի միավորներ, վորովհետև մենք 12-ի վրա բաժանեցինք մնացորդի բոլոր տասնավորների թիվը, մինչդեռ այդ տասնավորների մի մասը կարող է և չպատկանել տասնավորների և միավորների կրկնապատիկ արտադրյալին, այլ կազմել միավորների քառակուսու մի մասը։ Այս պատճառով 4 թվանշանը կարող է և մեծ լինել։ Պետք է այդ 4 թվանշանը փորձարկել: Նա, ինչպես ակներև է, պետքական կլինի այն դեպքում միայն, յեթե 2 . (6 տասն.) . $4+4^2$ գումարը մեծ չլինի 482 մնացորդից։ Այս գումարը մենք կարող ենք միանգամից հաշվել հետևյալ պարզ ձևով՝ ուղղաձիգ գծի ձախ կողմում արմատի թվանշանի կրկնապատիկին (12-ին) աջից կցագրում ենք 4 թվանշանը (այս եր պատճառը, վոր գծի մոտ մի թվանշանի տեղ թողինք) և նրանով բազմապատկում ստացած թիվը (124-ը 4-ով)։

√40'82=6
36
124 | 48'2
4 | 49 6

Իրոք, այդ բազմապատկումը կատարելով՝ մենք 4-ը բազմապատկում ենք 4-ով, կնշանակի՝ գտնում ենք արմատի միավորների քառակուսին. այնուհետև մենք բազմապատկում ենք 12 տասնավորը 4-ով, կնշանակի՝ գտնում ենք արմատի տասնավորների ու միավորների կրկնապատիկ արտադրյալը։ Իբրև արդյունք միանգամից ստանում ենք այդ յերկսի գումարը։ Ստացած արտադրյալը, վոր 496-ն է, մեծ է 482 մնացորդից. կնշանակի՝ 4 թվանշանը մեծ է։ Հիմա փորձարկում ենք նույն ձևով հաջորդ փոքր թվանշանը՝ 3-ը։ Դրա համար ջնջում ենք 4 թվանշանը և 496 արտադրյալը և 4 թվանշանի փոխարեն դնում ենք 3 ու 123-ը բազմապատկում ենք 3-ով։

√40'82=63
36
123 | 48'2
3 | 36 9
| 113

369 արտադրյալը փոքր է 492 մնացորդից. կնշանակի 3 թվանշանը պետքական է (յեթե պատահեր, վոր այդ թվանշանն էլ մեծ լիներ, այն ժամա-

նակ կարիք կլիներ հետևյալ փոքր թվանշանը՝ 2-ը, փորձարկել)։ 3 թվանշանը գրում ենք արմատում տասնավորների թվանշանի աջ կողմում։ Վերջին մնացորդը՝ 113-ը, ցույց է տալիս տված թվի հավելորդը իր մեջ պարունակված ամենամեծ ամբողջ քառակուսու նկատմամբ։ Ստուգման համար 63-ը քառակուսի կբարձրացնենք և արդյունքին կգումարենք 113. կունենանք՝

$$63^2=3969$$
$$+\ \underline{113}$$
$$4082$$

քանի որ գումարում ստացվեց տված թիվը՝ 4082-ը, ապա գործողությունն ուղիղ է կատարած։

Օրինակներ.

1) $\sqrt{12'25}=35$
9
65 | 32'5
5 | 325
0

2) $\sqrt{86'55}=93$
81
183 | 55'5
3 | 549
6

3) $\sqrt{16'05}=40$
16
8 | 0'5

4) $\sqrt{8'72}=29$
4
49 | 47'2
9 | 441
31

5) $\sqrt{64'00}=80$
64
00

Չորրորդ օրինակում՝ մնացորդի 47 տասնավորը 4-ի վրա բաժանելիս քանորդում ստանում ենք 11։ Բայց քանի որ արմատի միավորների թվանշանը չի կարող յերկանիշ թիվ լինել, տվյալ դեպքում չի կարող 11 կամ 10 լինել, ապա պետք է ուղղակի փորձարկել 9 թվանշանը։

Հինգերորդ օրինակում՝ 8-ի քառակուսին առաջին դասակից հանելուց հետո մնացորդը լինում է 0, և հետևյալ դասակն էլ զերոներից է կազմված։ Այդ ցույց է տալիս, որ որոնելի արմատը միայն 8 տասնավորից է բաղկացած, և որ այդ պատճառով միավորների տեղը պետք է զերո դնել։

112. *10 000-ից մեծ ամբողջ թվի քառակուսի արմատը։* Դիցուք պետք է գտնել $\sqrt{35782}$-ը։ Քանի որ արմատատակ թիվը մեծ է 10 000-ից, ապա նրա քառակուսի արմատը մեծ է $\sqrt{10000}$-ից, այսինքն 100-ից և, հետևապես, բաղկացած է յերեք և ավելի թվանշաններից։ Քանի թվանշանից էլ բաղկացած լինի արմատը, մենք կարող ենք այն դիտել իբրև տասնավորների և միավորների գումար։ Յեթե, օրինակի համար, արմատը 482 ստացվելու լինի, ապա մենք կարող ենք այդ արմատը դիտել իբրև այսպիսի գումար՝ 48 տասնավոր+2 միավոր. Այն ժամանակ արմատի քառակուսին յերեք գումարելիներից բաղկացած կլինի՝

(տասնավորներ)^2+2 . (տասն.) (միավոր.)+(միավոր.)^2։

Այժմ մենք կարող ենք ճիշտ այնպես դատել, ինչպես $\sqrt{4082}$-ը գըտ-

նելիս (նախընթաց հոդվածում)։ Տարբերությունը միայն այն կլինի, վոր 4082-ի արմատի տասնավորները գտնելու համար մենք պետք է արմատ հանեինք 40-ից և այս կարելի յեր անել բազմապատկման աղյուսակով. իսկ այժմ $\sqrt{357'82}$-ի տասնավորներն ստանալու համար մենք պետք է արմատ հանենք 357-ից, վորը չի լինիլ կատարել բազմապատկման աղյուսակով. բայց մենք կարող ենք $\sqrt{357}$-ը գտնել այն ձևով, վորը նկարագրված է նախընթաց հոդվածում, վորովհետև $357 < 10000$։ Ամենամեծ ամբողջ արմատը 357-ից լինում է 18-ը։ Նշանակի՝ $\sqrt{3'57'82}$-ի մեջ պետք է 18 տասնավոր լինի։

$$\sqrt{3'57'82} = 189$$

	1
28	25'7
8	224
369	338'2
9	3321
	61

Միավորները գտնելու համար պետք է 3'57'82-ից հանել 18 տասնավորների քառակուսին, վորի համար բավական է 18-ի քառակուսին հանել 357 հարյուրավորից և մնացորդի մոտ իջեցնել արմատատակ թվի վերջին յերկու թվանշանները։ Այն մնացորդը, վոր ստացվում է 18-ի քառակուսին 357-ից հանելուց, մենք արդեն ունենք. այդ մնացորդը 33 է։ Նշանակի՝ վորպեսզի ունենանք այն մնացորդը, վոր ստացվում է 18 տասնավորի քառակուսին 3'57'82-ից հանելուց, բավական է 33-ին աջից կցագրել 82 թվանշանները։

Այնուհետև այնպես ենք վարվում, ինչպես վոր վարվում եյինք $\sqrt{4082}$-ը գտնելիս, այն է՝ 3382 մնացորդի ձախ կողմում ուղղաձիգ գիծ ենք տանում և սրա ձախ կողմում (գծի մոտ մեկ տեղ թողնելով) գրում ենք արմատում գտած տասնավորների կրկնապատիկը, այսինքն 36 (յերկու անգամ 18)։ Մնացորդի մեջ մի թվանշան աջից անջատում ենք և մնացորդի տասնավորների թիվը, այսինքն 338-ը, բաժանում ենք 36-ի վրա։ Քանորդում ստանում ենք 9։ Այս թվանշանը փորձարկում ենք, վորի համար այն կցագրում ենք 36-ին աջից և հենց նրանով էլ բազմապատկում։ Արտադրյալը լինում է 3321, վորը մնացորդից փոքր է։ Նշանակի 9 թվանշանը պետքական է, ուստի գրում ենք արմատում։

Ընդհանրապես, վորևէ ամբողջ թվից քառակուսի արմատ հանելու համար նախ պետք է արմատ հանել նրա հարյուրավորների թվից. յեթե այս թիվը 100-ից մեծ է, ապա պետք է վորոնել այդ հարյուրավորները ներկայացնող թվի հարյուրավորների, այսինքն տված թվի տասնհազարավորների արմատը, յեթե այդ թիվն էլ է 100-ից մեծ, ապա պետք է արմատ հանել տասնհազարավորները ներկայացնող թվի հարյուրավորներից, այսինքն տված թվի միլիոնավորներից և այլն։

Օրինակներ.

1) $\sqrt{8'72'00'00}=2952$

```
       8'72'00'00
       4
 49  | 47'2
  9  | 44 1
 585 | 310'0
   5 | 292 5
5902 | 1750'0
   2 | 1180 4
        569 6
```

2) $\sqrt{3'50'32'60'89}=18717$

```
        3'50'32'60'89
        1
   28 | 250
    8 | 224
  367 | 263'2
    7 | 256 9
 3741 | 636'0
    1 | 374 1
37427 | 26198'9
    7 | 26198 9
            0
```

3) $\sqrt{9'51'10'56}=3084$

```
        9
  608 | 511'0
    8 | 486 4
 6164 | 2465'6
    4 | 2465 6
           0
```

Վերջին օրինակում՝ գտնելով առաջին թվանշանը և հանելով նրա քառակուսին, մնացորդում ստանում ենք 0։ Իջեցնում ենք հաջորդ երկու թվանշանները՝ 51-ը։ Տասնավորները անջատելով, ստանում ենք 5 տասնավոր, մինչդեռ արմատի գտած թվանշանի կրկնապատիկը 6 է։ Կնշանակի՝ 5-ը 6-ի վրա բաժանելուց 0 ենք ստանում։ Արմատում 0 ենք գրում երկրորդ տեղում և մնացորդի մոտ ենք իջեցնում հետևյալ 2 թվանշանները. ստանում ենք 5110։ Այնուհետև շարունակում ենք ինչպես սովորաբար։

4) $\sqrt{81'00'00}=900$

```
 81
 --
  0
```

Այս օրինակի մեջ վորոնելի արմատը բաղկացած է միայն 9 հարյուրավորներից, ուստի արմատի տասնավորների տեղում և միավորների տեղում պետք է զերոներ դնել։

Կանոն։ Տված ամբողջ թվի քառակուսի արմատը գտնելու համար այդ թիվն աջից դեպի ձախ տրոհում են դասակների, յուրաքանչյուրի մեջ յերկուական թվանշան, բացի վերջինից, վորի մեջ կարող է նաև մեկ թվանշան լինել։

Արմատի առաջին թվանշանը գտնելու համար քառակուսի արմատ են հանում առաջին դասակից։

Յերկրորդ թվանշանը գտնելու համար առաջին դասակից հանում են արմատի առաջին թվանշանի քառակուսին, մնացորդի մոտ են իջեցնում յերկրորդ դասակը յեվ ստացած թվի տասնավորների թիվը բաժանում են արմատի առաջին թվանշանի կրկնապատիկի վրա. ստացած ամբողջ թիվը փորձարկում են։

Փորձարկն այսպես է կատարվում. (մնացորդի ձախ կողմում տարած) ուղղաձիգ գծի ձախից գրում են արմատում առաջուց գտած թվի կրկնապատիկը յեվ նրան աջ կողմից կցագրում են փորձարկելի թվանշանը. այդ կցագրումից հետո ստացված թիվը բազմապատկում են փորձարկելի թվանշանով: Յեթե բազմապատկումից հետո այնպիսի թիվ ստացվի, վորը մնացորդից մեծ լինի, ապա փորձարկելի թվանշանն անպետք է, յեվ պետք է հաջորդ փոքր թվանշանը փորձարկել:

Արմատի մյուս թվանշաններն էլ նույն ձեվով են գտնում:

Յեթե դասակն իջեցնելուց հետո ստացված թվի տասնավորների թիվը փոքր լինի բաժանարարից. այսինքն արմատի գտած մասի կրկնապատիկից, ապա արմատում 0 են դնում, հաջորդ դասակն են իջեցնում յեվ գործողությունն այսպես շարունակում:

113. *Արմատի թվանշանների թիվը։ Արմատը գտնելու պրոցեսի քննությունից հետեվում է, վոր* արմատում այնքան թվանշան կա, վորքան արմատատակ թվի մեջ յերկուական թվանշան պարունակող դասակներ կան (ձախ դասակի մեջ կարող է նայեվ միայն մեկ թվանշան լինել). *ուրիշ խոսքով՝* յեթե արմատատակ թվի մեջ զույգ թվով թվանշաններ կան, ապա արմատում թվանշանների թիվը յերկու անգամ փոքր է այդ զույգ թվից. իսկ յեթե արմատատակ թվի մեջ կենտ թվով թվանշաններ կան, ապա արմատում թվանշանների թիվը յերկու անգամ փոքր է այդ կենտ թվի յեվ մեկի գումարից։

Վարժություններ

Գտնել հետեվյալ թվերի քառակուսի արմատը.

171. $\sqrt{289}$ $\sqrt{4225}$ $\sqrt{61009}$ $\sqrt{582169}$

172. $\sqrt{135424}$ $\sqrt{956484}$ $\sqrt{57198969}$

173. $\sqrt{68492176}$ $\sqrt{422220304}$

III. ՄՈՏԱՎՈՐ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ԱՐՄԱՏՆԵՐ ՀԱՆԵԼԸ

114. *Ճշգրիտ քառակուսի արմատի հայտանիշները։ Ճշգրիտ քառակուսի արմատ տված ամբողջ կամ կոտորակային թվից կոչվում է այն թիվը, վորի քառակուսին ճշգրտորեն հավասար է տված թվին։ Նշենք այն հայտանիշները, վորոնցով յերբեմն կարելի յե դատել, վոր տված թվից ճշգրիտ արմատ չի դուրս գալիս։*

ա) Յեթե տված ամբողջ թվից ճշգրիտ ամբողջ արմատ չի հանվում (արմատ հանելիս մնացորդ է ստացվում), ապա այդպիսի թվից չի կարելի նաև ճշգրիտ կոտորակային արմատ գտնել, վորովհետև ամեն մի կոտորակ, վորը հավասար չէ ամբողջ թվի, ինքն իրենով բազմապատկվելով, արտադրյալում դարձյալ կոտորակ է տալիս և վոչ թե ամբողջ թիվ։

բ) Վորովհետև կոտորակի արմատը հավասար է համարիչի ու հայտարարի արմատների քանորդին, ապա անկրճատելի կոտորակից ճշգրիտ արմատ չի կարող ստացվել այն դեպքում, յեթե ճշգրիտ արմատ չի հանվում համարիչից կամ հայտարարից։ Որինակի համար, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{9}$ *և* $\frac{11}{15}$ *կոտորակ-*

ներից չի կարելի ճշգրիտ արմատ հանել, վորովհետև առաջին կատարակում հայտարարից չի կարելի ճշգրիտ արմատ հանել, յերկրորդում՝ համարիչից, իսկ յերրորդում՝ վոչ համարիչից և վոչ էլ հայտարարից։

Այն թվերից, վորոնցից չի կարելի ճշգրիտ արմատ հանել, կարելի յե միայն մոտավոր արմատներ հանել, վորոնց մասին այժմ կխոսենք։

115. *Մոտավոր արմատ մինչև 1 ճշտությամբ։* Մոտավոր քառակուսի արմատ մինչև 1 ճշտությամբ տված թվից (ամբողջ թե կոտորակային—այդ միևնույն է) կոչվում է այն ամբողջ թիվը, վորը բավարարում է հետևյալ յերկու պահանջներին. 1) այդ թվի քառակուսին փոքր է տված թվից (կամ հավասար է նրան). 2) բայց այդ թվի և 1-ի գումարի քառակուսին մեծ է տված թվից։ Ուրիշ խոսքով՝ մոտավոր քառակուսի արմատ մինչև 1 ճշտությամբ կոչվում է տված թվի ամենամեծ ամբողջ քառակուսի արմատը, այսինքն այն արմատը, վոր մենք գտնում էյինք նախընթաց գլխում։ Այս արմատը կոչվում է մոտավոր մինչև 1 ճշտությամբ այն պատճառով, վոր ճշգրիտ արմատն ստանալու համար այդ մոտավոր արմատին պետք կլինի դեռ ավելացնել 1-ից փոքր մի կոտորակ, այնպես վոր յեթե անհայտ ճշգրիտ արմատի փոխարեն մենք վերցնենք այս մոտավոր արմատը, ապա 1-ից փոքր սխալ արած կլինենք։

Յենթադրենք պահանջվում է գտնել 395,74-ի մոտավոր քառակուսի արմատը մինչև 1 ճշտությամբ։ Այն ժամանակ առանց կոտորակին ուշադրություն դարձնելու, կհանենք միայն ամբողջ թվի արմատը՝

$$\sqrt{3'95}=19$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 29 & 29'5 \\ 9 & 26\,1 \\ \hline & 3\,4 \end{array}$$

Գտած 19 արմատը կլինի վորոնածը, վորովհետև

$$19^2<395{,}74, \text{ իսկ } 20^2>395{,}74։$$

Կանոն։ Տված թվի մոտավոր քառակուսի արմատը մինչև 1 ճշտությամբ գտնելու համար պետք է գտնել նրա ամբողջ մասի ամենամեծ ամբողջ արմատը։

Այս կանոնով գտած թիվը մոտավոր արմատն է պակասորդով, վորովհետև ճշգրիտ արմատը ստանալու համար նրան պակասում է մի կոտորակ (վորը փոքր է 1-ից)։ Յեթե այս արմատը 1-ով մեծացնենք, ապա կստանանք մի ուրիշ թիվ, վորը մեծ է ճշգրիտ արմատից, ուրեմն սրա նկատմամբ մի ավել մաս ունի, վորը փոքր է 1-ից։ 1-ով մեծացրած այս արմատը կարելի յե նույնպես կոչել մոտավոր արմատ մինչև 1 ճշտությամբ, բայց հավելուրդով (ավել մասով)։

116. *Մոտավոր արմատ մինչև $\frac{1}{10}$ ճշտությամբ։* Դիցուք պահանջվում է գտնել $\sqrt{2{,}35104}$-ը մինչև $\frac{1}{10}$ ճշտությամբ։ Այդ նշանակում է, վոր պահանջվում է այնպիսի տասնորդական կոտորակ գտնել, վորը բաղկացած լինի ամբողջ միավորներից և տասնորդական մասերից և վորը բա-

վարարի հետևյալ յերկու պահանջներին. 1) այդ թվի քառակուսին մեծ չե 2,35104-ից, բայց 2) յեթե այդ թիվը $\frac{1}{10}$-ով մեծացնենք, ապա այդ մեծացրած կոտորակի քառակուսին մեծ ե 2,35104-ից։

$$\sqrt{2,35'104}=1,5$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 25 & 13'5 \\ 5 & 12\,5 \\ \hline & 1\,0 \end{array}$$

Այդպիսի կոտորակը գտնելու համար մենք նախ կգտնենք մոտավոր արմատը մինչև 1 ճշտությամբ, այսինքն արմատը կհանենք միայն ամբողջ թվից՝ 2-ից։ Կստանանք 1 (և մնացորդում 1)։ Արմատում գրում ենք 1 թվանշանը և նրանից հետո ստորակետ ենք դնում։ Այժմ կորոնենք տասնորդների թվանշանը։ Դրա համար մնացորդին կցագրում ենք 35 թվանշանները, վորոնք գտնվում են ստորակետից աջ, և շարունակում ենք արմատն այնպես հանել, իբր թե 235 ամբողջ թվից արմատ հանելիս լինեյինք։ Ստացած 5 թվանշանը գրում ենք արմատում տասնորդների տեղում։ Արմատատակ թվի մնացած թվանշանները (104) մեզ պետք չեն։ Վոր ստացած 1,5 թիվը իրոք մոտավոր արմատն ե մինչև $\frac{1}{10}$ ճշտությամբ, այդ յերևում ե հետևյալից։ Յեթե մենք գտնեյինք 235-ի ամենամեծ ամբողջ արմատը մինչև 1 ճշտությամբ. ապա կստանայինք 15։ Կնշանակի՝

$$15^2\leqslant 235, \text{ բայց } 16^2>235։$$

Այս բոլոր թվերը բաժանելով 100-ի վրա, կստանանք՝

$$\frac{15^2}{100}\leqslant 2,35; \qquad \frac{16^2}{100}>2,35,$$

այսինքն

$$\left(\frac{15}{10}\right)^2\leqslant 2,35 \qquad \left(\frac{16}{10}\right)^2>2,35,$$

կամ

$$1,5^2\leqslant 2,35; \quad 1,6^2>2,35$$

Հետևաբար՝

$$1,5^2<2,35104; \quad 1,6^2>2,35104։$$

(0,00104 թիվը ավելացնելուց $\leqslant$ կրկնակի նշանն, ինչպես ակներև ե, պետք ե փոխվի $<$ նշանի, իսկ $>$ նշանը մնում ե, վորովհետև $0,00104<0,01$)։

Կնշանակի՝ 1,5 թիվը այն տասնորդական կոտորակն ե, վորը մենք անվանեցինք մոտավոր արմատ մինչև $\frac{1}{10}$ ճշտությամբ։

Այս ձևով գտնենք նաև հետևյալ մոտավոր արմատները մինչև 0,1 ճշտությամբ.

$$\sqrt{57{,}40}=7{,}5 \qquad \sqrt{0{,}30}=0{,}5 \qquad \sqrt{0{,}03}=0{,}1$$

```
√57,40=7,5        √0,30=0,5      √0,03=0,1
 49                25             1
                   ―              ―
145 | 84'0          5             2
  5 | 72 5
    ―――――
     11 5
```

117. Մոտավոր արմատ մինչև $\frac{1}{100}$, մինչև $\frac{1}{1000}$ ճշտությամբ և այլն։ Դիցուք պահանջվում է գտնել $\sqrt{248}$-ը մինչև $\frac{1}{100}$ ճշտությամբ։ Այդ նշանակում է՝ գտնել այնպիսի տասնորդական կոտորակ, վորը բաղկացած լինի ամբողջներից, տասնորդ և հարյուրորդ մասերից և վորը բավարարի հետևյալ յերկու պահանջներին. 1) նրա քառակուսին մեծ չե 248-ից, բայց 2) յեթե այդ կոտորակը $\frac{1}{100}$-ով մեծացնենք, ապա այդ մեծացրած կոտորակի քառակուսին 248-ից մեծ կլինի։ Այսպիսի կոտորակը կարելի յե հետևյալ հաջորդականությամբ գտնել. նախ կգտնենք ամբողջ թիվը, ապա տասնորդների թվանշանը, ապա հարյուրորդների թվանշանը։ Ամբողջ թվի արմատը կլինի 15 ամբողջ։ Տասնորդների թվանշանն ստանալու համար, պետք է, ինչպես տեսանք, 23 մնացորդին կցագրել 2 թվանշան ևս, վորոնք գտնվում են ստորակետից դեպի աջ։ Մեր որինակում այդ թվանշանները չկան, նրանց տեղերում զերոներ ենք գրում։

```
√2'48',00'00=15,74
 1
 ―――
 25 | 14'8
  5 | 12 5
    ――――――
307 |  230'0
  7 |  214 9
    ―――――――
3144 |  1510'0
   4 |  1257 6
     ――――――――
        252 4
```

Կցագրելով այդ զերոները մնացորդին և շարունակելով գործողությունն այնպես, իբր թե 24800 ամբողջ թվի արմատը գտնելիս լինեյինք, կգտնենք տասնորդների թվանշանը՝ 7։ Մնում է գտնել հարյուրորդների թվանշանը։ Դրա համար 151 մնացորդին կցագրում ենք ելի 2 զերո և շարունակում ենք արմատ հանելը, իբր թե 2480000 ամբողջ թվի արմատը գտնելիս լինեյինք։ Ստանում ենք 15,74։ Այս թիվն իրապես 248-ի մոտավոր արմատն է մինչև $\frac{1}{100}$ ճշտությամբ, վոր յերևում է հետևյալից։ Յեթե մենք կգտնեյինք 2480000 ամբողջ թվի ամենամեծ ամբողջ արմատը, կստանայինք 1574. կնշանակի՝

$$1574^2 \leqslant 2480000, \text{ բայց } 1575^2 > 2480000։$$

Բոլոր թվերը բաժանելով 10000-ի (այսինքն 100^2-ու) վրա, կստանանք՝

$$\frac{1574^2}{100^2} \leqslant 248{,}0000; \qquad \frac{1575^2}{100^2} > 248{,}0000,$$

ունենք

$$\left(\frac{1574}{100}\right)^2<248,0000; \qquad \left(\frac{1575}{100}\right)^2>248,0000,$$

կամ

$$15,74^2<248; \qquad 15,75^2>248.$$

Նշանակի՝ 15,74-ն այն տասնորդական կոտորակն է, որը մենք անվանեցինք 248-ի մոտավոր արմատը մինչև $\frac{1}{100}$ ճշտությամբ։

Կիրառելով այս եղանակը մինչ $\frac{1}{1000}$, մինչև $\frac{1}{10000}$ և այլ ճշտությամբ մոտավոր արմատ գտնելու նկատմամբ, կգտնենք հետևյալը։

Կանոն։ Տված ամբողջ թվից կամ տված տասնորդական կոտորակից մինչեվ $\frac{1}{10}$, մինչեվ $\frac{1}{100}$, մինչեվ $\frac{1}{1000}$ յեվ այլ ճշտությամբ մոտավոր արմատ հանելու համար նախ գտնում են մոտավոր արմատը մինչեվ 1 ճշտությամբ, վորի համար արմատ են հանում ամբողջ թվից (յերբ ամբողջ չկա, արմատում գրում են 0 ամբողջ)։

Այնուհետեվ գտնում են տասնորդների թվանշանը։ Դրա համար մնացորդին կցագրում են արմատատակ թվի այն յերկու թվանշանները, վորոնք ստորակետից անմիջապես աջ են գտնվում (յերբ չկան, մնացորդին յերկու զերո յեն կցագրում) յեվ շարունակում են արմատ հանել այնպես, ինչպես այդ անում են ամբողջ թվից արմատ հանելիս։ Ստացած թվանշանը գրում են արմատում տասնորդների տեղում։

Այնուհետեվ գտնում են հարյուրորդների թվանշանը։ Դրա համար մնացորդին կցագրում են նորից յերկու թվանշաններ, վորոնք գտնվում են հենց նոր իջեցրած յերկու թվանշաններից անմիջապես դեպի աջ, յեվ այլն։

Այսպիսով, յերբ արմատատակ թիվը ամբողջից և տասնորդական կոտորակից է բաղկացած, ապա նրա արմատը գտնելու համար պետք է ստորակետից սկսած թե՛ դեպի ձախ *(թվի ամբողջ մասի մեջ)* յեվ թե՛ դեպի աջ *(կոտորակային մասի մեջ)* թիվը տրոհել յերկուական թվանշան պարունակող դասակների։

Որինակներ.

1. Գտնել մինչև $\frac{1}{100}$ ճշտությամբ հետևյալ արմատները՝ ա) $\sqrt{2}$; *բ)* $\sqrt{0,3}$;

ա) $\sqrt{2}=1,41$

	1
24	10'0
4	96
281	40'0
1	281
	119

բ) $\sqrt{0,30}=0,54$

	25
104	50'0
4	416
	84

2. Արմատ հանել մինչև $\frac{1}{10000}$. ա) $\sqrt{0,38472}$; բ) $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

ա) $\sqrt{0,38'47'20}=0,6202$;

$$\begin{array}{r|l} & 36 \\ \hline 122 & 24'7 \\ 2 & 24\,4 \\ \hline 12402 & 32'00'0 \\ 2 & 24\,80\,4 \\ \hline & 7\,19\,6 \end{array}$$

բ) $\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{0,42'85'71'42}$

$\sqrt{0,42\,85'71'42}=0,6546$

$$\begin{array}{r|l} & 36 \\ \hline 125 & 68'5 \\ 5 & 62\,5 \\ \hline 1304 & 607'1 \\ 4 & 521\,6 \\ \hline 13086 & 8\,554'2 \\ 6 & 7\,851\,6 \\ \hline & 702\,6 \end{array}$$

Վերջին օրինակում $\frac{3}{7}$ կոտորակը մենք դարձրինք տասնորդական, հաշվելով 8 տասնորդանշան, վորպեսզի 4 դասակ կազմվի, վոր անհրաժեշտ է արմատում 4 տասնորդանշան ունենալու համար։

Դիտողություն: Գոյություն ունեն հատուկ աղյուսակներ, վորոնց մեջ զետեղված են շատ թվերի քառակուսի արմատները (հաշված վորոշ ճշտությամբ)։ Այդպիսի աղյուսակներից օգտվելու եղանակները սովորաբար նշըվում են աղյուսակների նախաբանում։

118. Հասարակ կոտորակներից արմատ հանելը։ Անկըրճատելի կոտորակից ճշգրիտ քառակուսի արմատ կարելի յե հանել միայն այն դեպքում, յերբ յերկու անդամներն էլ ճշգրիտ քառակուսիներ են (§ 114)։ Այս դեպքում բավական է համարիչից առանձին արմատ հանել և հայտարարից առանձին. օրինակի համար՝

$$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}.$$

Հասարակ կոտորակից վորևե տասնորդական ճշտությամբ մոտավոր արմատ գտնելու համար ամենից ավելի պարզ ձևն այն կլինի, վոր հասարակ կոտորակը նախապես տասնորդական դարձնենք, հաշվելով ստորակետից հետո այնքան տասնորդանշաններ, վոր նրանց թիվը յերկու անգամ մեծ լինի վորոնելի արմատի տասնորդանշանների թվից։ Դիցուք, օրինակի համար, պետք է գտնել $\sqrt{2\frac{3}{7}}$-ը մինչև 0,01 ճշտությամբ, այսինքն ստորակետից հետո յերկու տասնորդանշանով։ Դրա համար $2\frac{3}{7}$-ը տասնորդական կոտորակ կդարձնենք, հաշվելով մինչև 4-րդ տասնորդանշանը ներառյալ. կստանանք $2\frac{3}{7}=2,4285...$ և մոտավոր արմատ կհանենք 2,4285-ից մինչև 0,01 ճշտությամբ.

```
√2,4235=1,55
    1
25│ 14'2
 5│ 12 5
305│ 178'5
  5│ 152 5
     260
```

Ի միջի այլոց, կարելի է ուրիշ կերպ էլ վարվել։ Այս բացատրենք հետևյալ օրինակով՝

Գտնել $\sqrt{\frac{5}{24}}$-ը մոտավորությամբ։

Հայտարարը ճշգրիտ քառակուսի դարձնենք։ Դրա համար բավական կլիներ կոտորակի երկու անդամներն էլ բազմապատկել 24-ով. բայց այս օրինակում կարելի է այլ կերպ վարվել։ 24-ը կվերլուծենք պարզ բազմապատկիչների՝ $24=2\cdot2\cdot2\cdot3$։ Այս վերլուծությունից երևում է, որ եթե 24-ը բազմապատկենք 2-ով և էլի 3-ով, ապա այդ ժամանակ արտադրյալում ամեն մի պարզ բազմապատկիչը զույգ թիվ անգամ կկրկնվի և, հետևաբար, հայտարարը քառակուսի կդառնա՝

$$\sqrt{\frac{5}{24}}=\sqrt{\frac{5}{2\cdot2\cdot2\cdot3}}=\sqrt{\frac{5\cdot2\cdot3}{2^4\cdot3^2}}=\frac{\sqrt{30}}{2^2\cdot3}=\frac{\sqrt{30}}{12}.$$

Մնում է $\sqrt{30}$-ը հաշվել որևէ ճշտությամբ և արդյունքը բաժանել 12-ի վրա։ Ընդսմին պետք է նկատի ունենալ, որ 12-ի վրա բաժանելուց փոքրանում է նաև այն կոտորակը, որը ցույց է տալիս ճշտության աստիճանը։ Այսպես, եթե գտնենք $\sqrt{30}$-ը մինչև $\frac{1}{10}$ ճշտությամբ և արդյունքը բաժանենք 12-ի, ապա կստանանք $\frac{5}{24}$ կոտորակի մոտավոր արմատը մինչև $\frac{1}{120}$ ճշտությամբ $\left(\text{այն է՝ } \frac{54}{120} \text{ և } \frac{55}{120}\right)$։

Վարժություններ

174. $\sqrt{13}$ մինչև 1 $\quad$ $\sqrt{13}$ մինչև 0,1 $\quad$ $\sqrt{13}$ մինչև 0,001

175. $\sqrt{101}$ մինչև $\frac{1}{100}$ $\quad$ $\sqrt{0,8}$ մինչև 0,01

176. $\sqrt{0,0081}$ մինչև $\frac{1}{100}$ $\quad$ $\sqrt{19,0969}$ մինչև $\frac{1}{100}$

177. $\sqrt{356}$ մինչև 1, ապա մինչև 0,1 և ապա մինչև 0,01

Պատմական տեղեկություններ

$\sqrt{}$ նշանը, իբրև արմատ հանելու գործողության նշան, մաթեմատիկայի մեջ մտցրել է Ռուդոլֆը 1525 թվին։ Նրանից առաջ գրում էին «արմատ» (լատիներեն radix) ամբողջ բառը, որն այնուհետև համառոտվելով վերածվեց միայն առաջին տառին, իսկ վերջինս էլ աստիճանաբար ընդունեց $\sqrt{}$ տեսքը։

ՎԵՑԵՐՈՐԴ ՀԱՏՎԱԾ

ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄ

119. *Խնդիր*։ Շարժիչավոր նավակը գետի հոսանքով իջավ 28 կմ և անմիջապես վերադարձավ. դրա համար հարկավորվեց 7 ժամ։ Գտնել նավակի շարժման արագությունը կանգնած ջրում, եթե հայտնի է, որ գետի հոսանքի արագությունն է 3 կմ 1 ժամում։

Դիցուք նավակի շարժման արագությունը կանգնած ջրում x կմ է 1 ժամում. այդ դեպքում գետի հոսանքով նա շարժվել է 1 ժամում $(x+3)$ կմ արագությամբ, իսկ հոսանքի հակառակ՝ 1 ժամում $(x-3)$ կմ արագությամբ։ Հետևաբար, 28 կմ-ը նավակն անցել է $\frac{28}{x+3}$ ժամում, երբ հոսանքի ուղղությամբ էր շարժվում, և $\frac{28}{x-3}$ ժամում, երբ հոսանքին հակառակ էր շարժվում, այսինքն վերադառնում էր։

Խնդրի պայմանի համաձայն ստանում ենք հետևյալ հավասարումը.

$$\frac{28}{x+3}+\frac{28}{x-3}=7.$$

Հայտարարներից ազատելով հավասարումը, ստանում ենք՝

$$28(x-3)+28(x+3)=7(x+3)(x-3),$$

այսինքն

$$28x-84+28x+84=7(x^2-9)=7x^2-63$$

կամ

$$56x=7x^2-63.$$

Ստացանք մի հավասարում, որի մեջ անհայտի երկրորդ աստիճանը պարունակող անդամ կա, բայց անհայտի ավելի բարձր աստիճանները պարունակող անդամներ չկան։ Այդպիսի հավասարումը կոչվում է երկրորդ աստիճանի հավասարում կամ քառակուսի հավասարում։

Անմիջական տեղադրումով համոզվում ենք, որ այս հավասարումը 9 և −1 արմատներն ունի, որոնցից միայն առաջինն է, որ կարող է խնդրի հարցի պատասխանը լինել։

Այժմ ընդհանուր կանոն արտածենք քառակուսի հավասարումների լուծման համար։

120. *Քառակուսի հավասարման նորմալ տեսքը*։ Քառակուսի հավասարման մեջ (ինչպես և ավելի բարձր աստիճանների հավասարումների մեջ) ընդունված է, հավասարումը պարզեցնելուց հետո, բոլոր անդամները հավաքել ձախ մասում, այնպես որ հավասարման աջ մասը հավասար է դառնում զերոյի։

Այսպես, այն հավասարումը, վոր մենք կազմեցինք նախընթաց խըն-դիրը լուծելու համար, անդամների փոխադրումից հետո տալիս է՝

$$56x-7x^2+63=0,$$

կամ, անդամներն x-ի նվազող աստիճաններով դասավորելուց հետո՝

$$-7x^2+56x+63=0.$$

—7, +56 և +63 թվերը կոչվում են այս քառակուսի հավասարման գործակիցներ. *Նրանցից +63-ը կոչվում է* ազատ անդամ, *իսկ —7 և +56 թվերը՝* առաջին *և* յերկրորդ գործակիցներ *(մենք յենթադրում ենք, վոր հավասարման անդամները միշտ դասավորված են x-ի նվազող աստիճաններով)։ Այս թվերը կարող են լինել թե դրական, թե բացասական և թե զերոներ (միայն առաջին գործակիցը չի կարող զերո լինել, վորովհետև հակառակ դեպքում հավասարումը քառակուսի չեր լինի)։ Յեթե յերեք գործակիցներն էլ տարբեր են զերոյից, ապա հավասարումը կոչվում է* լրիվ։ *Լրիվ քառակուսի հավասարման ընդհանուր տեսքը (*նորմալ *տեսքը) հետևյալն է.*

$$ax^2+bx+c=0.$$

Նկատենք, վոր առաջին գործակիցը՝ a-ն, մենք միշտ կարող ենք դրական դարձնել, հարկ յեղած դեպքում բոլոր անդամների առաջ նշանները փոխելով (ուրիշ խոսքով՝ հավասարման յերկու մասերը բազմապատկելով —1-ով)։ Այսպես, վերի հավասարումը կարող ենք այսպես գրել.

$$7x^2-56x-63=0։$$

121. ***Թերի քառակուսի հավասարումների լուծումը։*** *Քառակուսի հավասարումը կոչվում է* թերի, *յեթե նրա մեջ բացակայում է կամ x-ի առաջին աստիճանը պարունակող անդամը և կամ ազատ անդամը. ուրիշ խոսքով՝ կամ յերբ յերկրորդ գործակից b-ն է հավասար զերոյի, և կամ յերբ ազատ անդամ c-ն է հավասար զերոյի։ Առաջին դեպքում հավասարման տեսքն է՝ $ax^2+c=0$, իսկ յերկրորդ դեպքում՝ $ax^2+bx=0$ (կարող է նույնիսկ պատահել, վոր միաժամանակ և՛ $b=0$ և՛ $c=0$. այս դեպքում հավասարման տեսքը կլինի $ax^2=0$)։ Քննության առնենք այս բոլոր թերի հավասարումների լուծումը։*

1. Թերի քառակուսի հավասարում $ax^2+c=0$ տեսքի։

Վերցնենք հետևյալ յերեք որինակները.

ա) $3x^2-27=0$։ Ազատ անդամը տանելով աջ կողմը, կստանանք՝ $3x^2=27$ և, հետևաբար, $x^2=9$։ Նշանակի՝ x-ն 9-ի քառակուսի արմատն է, այսինքն հավասար է +3 թվին կամ —3 թվին։ Պայմանավորվենք $\sqrt{\ }$ նշանով նշանակել արմատի թվաբանական արժեքը. այդ դեպքում մենք կարող ենք գրել՝ $x=\pm\sqrt{9}=\pm3$։ Այսպիսով տվյալ հավասարումը յերկու լուծում ունի։ Նշանակելով նրանցից մեկը x_1 և մյուսը x_2, մենք կարող ենք այդ լուծումներն այսպես գրել.

$$x_1=+\sqrt{9}=+3; \quad x_2=-\sqrt{9}=-3.$$

բ) $2x^2-0{,}15=0$։ Ազատ անդամը փոխադրելով, կստանանք՝

$$2x^2=0{,}15 \text{ և } x^2=0{,}075.$$

Հետևաբար՝

$$x=\pm\sqrt{0{,}075}.$$

Գտնենք $\sqrt{0{,}075}$-ը մինչև $\frac{1}{100}$ ճշտությամբ (§ 117)։

$$\sqrt{0{,}07'50}=0{,}27$$

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 47 & 35'0 \\ 7 & 32\,9 \\ \hline & 2\,1 \end{array}$$

Հետևաբար, $x_1=0{,}27\ldots$, $x_2=-0{,}27\ldots$

գ) $2x^2+50=0$։ Փոխադրելով ազատ անդամը, կստանանք՝

$$2x^2=-50;\quad x^2=-\frac{50}{2}=-25;\quad x=\pm\sqrt{-25}.$$

Քանի որ բացասական թվից չի կարելի քառակուսի արմատ հանել, ապա տված հավասարումը (իրական) լուծումներ չունի։

Այսպիսով $ax^2+c=0$ տեսքի թերի քառակուսի հավասարումն այսպես է լուծվում.

$$ax^2=-c;\quad x^2=-\frac{c}{a};\quad x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Եթե $-\frac{c}{a}$ արտահայտությունը դրական թիվ է (որ այն դեպքում կլինի, երբ a-ն և c-ն տարբեր նշաններ ունեն), ապա նրանից կարելի է քառակուսի արմատ հանել (ճշգրիտ կամ մոտավոր) և այն ժամանակ x-ի համար ստանում ենք երկու հակադիր արժեքներ։ Իսկ եթե $-\frac{c}{a}$ արտահայտությունը բացասական թիվ է (որ կլինի, երբ a-ն և c-ն նույն նշանն ունեն), ապա հավասարումը իրական արմատ չունի։

2. $ax^2+bx=0$ տեսքի թերի քառակուսի հավասարում: *Իբրև մասնավոր օրինակ վերցնենք $2x^2-7x=0$ հավասարումը։ Այս հավասարման ձախ մասում x-ն իբրև բազմապատկիչ առնենք փակագծերից դուրս՝*

$$x(2x-7)=0.$$

Այժմ հավասարման ձախ մասը մի արտադրյալ է, իսկ աջ մասը հավասար է զերոյի։ Բայց արտադրյալը միայն այն ժամանակ է հավասար զերոյի, երբ բազմապատկիչներից որևէ մեկը հավասար է զերոյի. այս պատճառով մեր հավասարումը միայն այն ժամանակ է բավարարվում, երբ առաջին բազմապատկիչ x-ն է հավասար զերոյի, կամ երկրորդ բազմապատկիչ $2x-7$-ը (և երբ, հետևաբար, $x=\frac{7}{2}$)։ Հետևաբար տված հավասարումը երկու լուծում ունի՝

$$x_1=0 \text{ և } x_2=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}.$$

Այսպիսով $ax^2+bx=0$ թերի քառակուսի հավասարումն ընդհանրաբար այսպես ե լուծվում.

$$ax^2+bx=0; \quad x(ax+b)=0;$$

$$x_1=0; \quad ax_2+b=0; \quad x_2=-\frac{b}{a}.$$

Վարժություններ

178. $3x^2-147=0$ $\quad \frac{1}{3}x^2-3=0$ $\quad x^2+25=0$

179. $\frac{3(x^2-11)}{5}-\frac{2(x^2-60)}{7}=36$ $\quad \frac{4}{x-3}-\frac{4}{x+3}=\frac{1}{3}$

180. $2x^2-7x=0$ $\quad \frac{3}{7}x^2+x=0$ $\quad 0{,}2x^2-\frac{3}{4}x=0$

181. $x^2=x$ $\quad x^2-16x=0$ $\quad 7x^2=0$ $\quad 0{,}7x^2=0$

182. $(x-2)(x-5)=0$ $\quad x(x+4)=0$ $\quad 3(y-2)(y+3)=0$

122. Լրիվ քառակուսի հավասարումների լուծման որինակներ։ Իբրև առաջին որինակ վերցնենք այն քառակուսի հավասարումը, վորը կազմեցինք § 119-ի խնդրի համար՝

$$7x^2-56x-63=0.$$

Բոլոր անդամները բաժանենք 7-ի վրա և ազատ անդամը փոխադրենք աջ կողմը. կստանանք՝

$$x^2-8x=9.$$

Այժմ հարց տանք՝ չի՞ կարելի արդյոք x^2-8x յերկանդամին այնպիսի յերրորդ անդամ ավելացնել, վոր առաջացած յեռանդամը լրիվ քառակուսի ներկայացնի։ Այդ հարցին հեշտ ե պատասխանել, յեթե յերկանդամն այսպես պատկերացնենք.

$$x^2-2x\cdot 4.$$

Այժմ պարզ ե, վոր յեթե այս յերկանդամը լրացնենք 4^2 անդամով, ապա կստանանք

$$x^2-2x\cdot 4+4^2$$

յեռանդամը, վորը հավասար ե $x-4$ տարբերության քառակուսուն։ Բայց յեթե հավասարման ձախ մասին ավելացնում ենք 4^2-ն (այսինքն 16), ապա աջ մասին ել պետք ե ավելացնենք այդ նույն թիվը։ Այդ անելով՝ կստանանք.

$$x^2-8x+16=9+16, \text{ այսինքն } (x-4)^2=25.$$

Այսպիսով $x-4$ տարբերությունն այնպիսի թիվ ե, վորի քառակուսին հավասար է 25-ի. կնշանակի՝ այդ տարբերությունը պետք է հավասար լինի 25-ի քառակուսի արմատին, այսինքն 5-ի կամ —5-ի.

$$x-4=+\sqrt{25}=+5, \text{ կամ } x-4=-\sqrt{25}=-5.$$

Այժմ —4 անդամը փոխադրելով աջ մասը, կգտնենք ։երկու լուծում՝

$$x_1=4+5=9 \text{ և } x_2=4-5=-1.$$

Այս երկու լուծումներն էլ բավարարում են տված հավասարման (որ կարելի է ցույց տալ ստուգումով), բայց այն խնդրի համար, որից ստացված է այս հավասարումը, —1 լուծումն անպետք է, որովհետև խնդրում պահանջվում է գտնել արագության բացարձակ մեծությունը և ոչ թե նրա ուղղությունը։

Իբրև երկրորդ օրինակ վերցնենք հետևյալ հավասարումը՝

$$3x^2+15x-7=0$$

Բոլոր անդամները բաժանենք 3-ի վրա և ազատ անդամը փոխադրենք աջ կողմը՝

$$x^2+5x=\frac{7}{3}$$

x^2+5x երկանդամը կարելի յէ գումարի քառակուսի դարձնել, եթե նրան ավելացնենք $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ անդամը։ Ավելացնելով այս անդամը հավասարման երկու մասերին, կստանանք՝

$$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{3},$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}+\frac{7}{3}=\frac{75+28}{12}=\frac{103}{12}.$$

Այստեղից երևում է, որ $x+\frac{5}{2}=\pm\sqrt{\frac{103}{12}}$. հետևաբար

$$_1=-\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{103}{12}}; \quad x_2=-\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{103}{12}}.$$

Հաշվենք $\frac{103}{12}$-ը մինչև $\frac{1}{10}$ ճշտությամբ.

$$\sqrt{\frac{103}{12}}=\sqrt{8,58\ldots}=2,9\ldots$$

Հետևաբար

$$x_1=-2,5+2,9\ldots=0,4\ldots;$$

$$x_2=-2,5-2,9\ldots=-5,4\ldots$$

123. Վերածված քառակուսի հավասարման արմատների բանաձևը։ Այն քառակուսի հավասարումը, որի առաջին գործակիցը +1 է, կոչվում է վերածված հավասարում։

Յեթե հավասարումը վերածված տեսքի չէ, այսինքն առաջին գործակիցը տարբեր է 1-ից, ապա մենք կարող ենք այդ հավասարումը վերածված տեսքի բերել. հարկավոր է միայն՝ հավասարման բոլոր անդամները բաժանել այդ գործակցի վրա։ Ընդհանուր տեսքով վերածված հավասարումը սովորաբար այսպես է պատկերացվում.

$$x^2+px+q=0$$

Լուծենք այս տառային հավասարումը, նրա նկատմամբ կատարելով նույն ձևափոխությունները, վորոնք ցույց եյին տված մասնավոր որինակների վրա։

Ազատ անդամը փոխադրենք աջ մասը.

$$x^2+px=-q.$$

Քանի վոր $px=2x\cdot\frac{p}{2}$, *ապա* x^2+px *յերկանդամը լրիվ քառակուսի դարձնելու նպատակով հավասարման յերկու մասերին էլ ավելացնենք* $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ *կստանանք՝*

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Այժմ հավասարումը կարելի յե այսպես ներկայացնել.

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q,$$

վորտեղից գտնում ենք՝

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \quad \text{և} \quad x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\,.$$

Այս բանաձևը կարելի յե այսպես կարդալ.

Վերածված քառակուսի հավասարման անհայտը հավասար է յերկրորդ գործակցի կեսին հակադիր նշանով, պլյուս-մինուս քառակուսի արմատ այդ կեսի քառակուսու յեվ ազատ անդամի տարբերությունից:

Որինակներ.

1. $x^2-x-6=0$։ *Այս հավասարումը,* $x^2+px+q=0$ *տառային հավասարման նմանեցնելու համար, գրենք այսպես՝* $x^2+(-1)x+(-6)=0$։ *Այժմ յերևում է, վոր այս որինակի մեջ* $p=-1$ *և* $q=-6$. *այս պատճառով՝*

$$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}$$

$$x_1=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3; \quad x_2=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-2.$$

Ստուգում. $3^2-3-6=0$; $\quad(-2)^2-(-2)-6=0.$

2. $x^2-18x+81=0$; *այստեղ* $p=-18$, $q=+81$. *ուստի*

$$x=9\pm\sqrt{81-81}=9\pm0=9.$$

Հավասարումը միայն մեկ արմատ ունի։

3. $x^2-2x+5=0$; $x=1\pm\sqrt{1-5}=1\pm\sqrt{-4}$։ *Արմատները կեղծ են։*

Վարժություններ

183. $x^2+10x+5=2x^2-6x+53$.

184. $x^2+6x=27$ $\qquad$ $x^2-5\frac{3}{4}x=18$

185. $12x-\frac{6}{x}=21$ $\qquad$ $\frac{x}{7}+\frac{21}{x+5}=6\frac{5}{7}$

186. $x+2=\frac{9}{x+2}$ $\qquad$ $\frac{x-5}{4}-\frac{4}{5-x}=\frac{3x-1}{4}$

187. $x+\frac{1}{x-3}=5$ $\qquad$ $\frac{2x}{x-d}=\frac{x-d}{d}$

124. ***Քառակուսի հավասարման արմատների ընդհանուր բանաձևը։*** $ax^2+bx+c=0$ *հավասարումը, բոլոր անդամներն* a-*ի վրա բաժանելուց հետո, բերվում է վերածված հավասարման՝*

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Լուծելով այս հավասարումը վերածված հավասարման բանաձևով, կգտնենք՝

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}.$$

Այս արտահայտությունը կարելի յե այսպես պարզել.

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=$$

$$=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Օգտակար է այս պարզեցրած տեսքով հիշել բանաձևը, որը կարելի յե այսպես կարդալ.

Լրիվ քառակուսի հավասարման անհայտը հավասար է մի կոտորակի, որի համարիչն է յերկրորդ գործակիցը հակադիր նշանով, պլյուս-մինուս քառակուսի արմատ այն տարբերությունից, որ ստացվում է այդ գործակցի քառակուսուց հանելով առաջին գործակցի ու ազատ անդամի քառապատիկ արտադրյալը, իսկ հայտարարն է առաջին գործակցի կրկնապատիկը:

Այս բանաձևը կարելի յե ընդհանուր բանաձև կոչել, վորովհետև նա պիտանի յե և՛ վերածված հավասարման համար (յեթե վերցնենք $a=1$*) և* թվերի քառակուսի հավասարումների համար (յեթե վերցնենք $b=0$ կամ $c=0$)։

125. Բանաձևի պարզացումը, յերբ b գործակիցը զույգ թիվ է։ Ընդհանուր բանաձևը պարզանում է, յեթե b-ն զույգ թիվ է։ Այսպես, վերցնելով $b=2k$, կգտնենք՝

$$x=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a}=\frac{-2k\pm\sqrt{4(k^2-ac)}}{2a}=$$

$$=\frac{-2k\pm2\sqrt{k^2-ac}}{2a}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Այս բանաձևն ընդհանուրից նրանով է տարբերվում, վոր նրա մեջ 4 և 2 բազմապատկիչները բացակայում են։

126. Քառակուսի հավասարման արմատների թիվը։ Մենք տեսանք, վոր քառակուսի հավասարումը յերբեմն յերկու արմատ ունի, յերբեմն մեկ արմատ յերբեմն էլ վոչ մի արմատ (կեղծ արմատների դեպքը)։ Սակայն համաձայնության են յեկել քառակուսի հավասարումներին բոլոր դեպքերում յերկու արմատ վերագրել և այդ ժամանակ նկատի ունենալ, վոր արմատները կարող են յերբեմն միահավասար լինել և յերբեմն կեղծ։ Այսպիսի համաձայնության պատճառն այն է, վոր կեղծ արմատներն արտահայտող բանաձևերը նույն հատկությունները ունեն, ինչ վոր իրական արմատները. միայն պետք է կեղծ թվերի հետ գործողություններ կատարելիս ղեկավարվել այն կանոններով, վորոնք ստացված են իրական թվերի համար և այդ ժամանակ ընդունել, վոր $(\sqrt{-a})^2=-a$։ Ճիշտ այդպես էլ, յերբ հավասարումը մեկ արմատ ունի, մենք կարող ենք այդ արմատն իբրև յերկու միահավասար արմատներ նկատել և նրանց վերագրել նույն հատկությունները, ինչ վոր պատկանում են հավասարման տարբեր արմատներին։

Վարժություններ

188. $2x^2-3x-5=0$ $\qquad (2x-3)^2=8x$

189. $5x^2-8x+0{,}24=0$ $\qquad 65x^2+118x-55=0$

190. $(x-3)(x-4)=12$ $\qquad \frac{31}{6x}-\frac{16}{117-2x}=1$

191. $\frac{x}{x+60}=\frac{7}{3x-5}$ $\qquad x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$

192. Գտնել յերեք հաջորդական զույգ թվեր, վորոնց քառակուսիների գումարը հավասար լինի 776-ի։

193. Ուղղանկյան մակերեսը հավասար է 48 քառ. սմ-ի, իսկ պարագիծը 28 սմ-ի։ Գտնել կողմերը։

194. Գտնել ուղղանկյուն յեռանկյան կողմերը, իմանալով վոր նրանք արտահայտվում են յերեք հաջորդական ամբողջ թվերով։

195. Յեթե բազմանկյունն n կողմ ունի, ապա նրա բոլոր անկյունագծերի թիվը հավասար է $\frac{1}{2}n(n-3)$։ Վորոշել, թե քանի կողմ պետք է

ունենա բազմանկյունը, վորպեսզի նրա բոլոր անկյունագծերի թիվը 54 լինի։

196. Սավառնակը քամու ուղղությամբ ուղիղ գծով թռիչք կատարեց 150 կմ, անմիջապես վերադարձավ դարձյալ ուղիղ գծով քամուն հակառակ ուղղությամբ և թռիչքի սկզբից 4 ժամ անց հասավ այնտեղ, վորտեղից նախապես մեկնել եր։ Ի՞նչ արագություն ուներ քամին, յեթե սավառնակի արագությունը խաղաղ ոդում հավասար ե 80 կմ 1 ժամում։

197. Գնել են մի քանի թաշկինակ 60 ռուբլով, յեթե այդ նույն գումարով յերեք թաշկինակ ավելի գնած լինեյին, ապա յուրաքանչյուր թաշկինակը 1 ռուբլով եժան կլիներ։ Քանի՞ թաշկինակ են գնել։

198. Դպրոցի առաջին խմբում բաժանեցին 180 թերթ թուղթ, յուրաքանչյուրին հավասարապես։ Յերկրորդ խմբում նույնքան թերթ բաժանեցին և ելի յուրաքանչյուրին հավասարապես։ Այս խմբի ամեն մի աշակերտը 6 թերթ ավելի ստացավ, քան առաջին խմբինը։ Քանի՞ թերթ ստացավ առաջին խմբի յուրաքանչյուր աշակերտը, յեթե յերկրորդ խմբում առաջինից 40-ով պակաս աշակերտ կար։

199. Դպրոցականների մի խմբի համար, վորը բաղկացած եր 20 տղաներից ու աղջիկներից, և վորը վոտքով եքսկուրսիա պետք ե կատարեր, կոշիկներ գնեցին, ծախսելով ընդամենը 480 ռուբլի, վորից կեսը տղամարդու կոշիկի և կեսը կանացի կոշիկի համար։ Քանի՞ տղա և քանի՞ աղջիկ կար խմբում, յեթե տղամարդու կոշիկի յուրաքանչյուր զույգին 10 ռուբլի թանգ վճարեցին, քան կանացի կոշիկի մեկ զույգին։

200. Յերկու հեծանվորդներ միաժամանակ քաղաք են մեկնում, վորը 90 կմ հեռու յե գտնվում մեկնավայրից։ Առաջին հեծանվորդը յուրաքանչյուր ժամում 1 կմ-ով ավելի յե անցնում, քան յերկրորդը, և քաղաք ե հասնում 1 ժամ առաջ, քան յերկրորդը։ Յուրաքանչյուրը քանի՞ կիլոմետր ե անցնում 1 ժամում։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐԸ

1. $4a$; a^2. 4. $10x+y$. 10. $5+ab-4a$; $2x+a$. 11. n; $5a^3b^2x^3$. 18. 2. 19. 0. 24. 12. 25. $-1\frac{3}{4}$. 28. $10-(-8)$. 32. 27. 33. $3\frac{1}{16}$. 38. 90; $\frac{18}{15}$; $2\frac{25}{48}$; -28; -936. 39. 0; 31; -4. 45. $4a^3-3a^2b-13ab^2$. 46. $x^5-7a^2x^3$. 87. $x-a$. 99. $(a+b)(a-1)$; $(x-3)(y+z)$; $(2a+3)(2a-3)^2$. 100. $(2m-x)(2n-y)$. 104. $\frac{ax^2+bx+c}{ax^2+x}$; $\frac{x^2-ax-b}{x^2-x}$. 112. $\frac{x-1}{2x(x+1)}$; $\frac{a+x}{3b-cx}$; $-\frac{5a}{a-x}$. 113. $(a+b)(a-b)$; $\frac{1}{y^2-1}$. 139. 1200; 1348. 140. 20; 30; 50. 141. $2\frac{1}{2}$ ժամ. 142. 12,8 կգ; 19,2 կգ. 145. $x=\frac{4(a-1)}{3-b}$. 151. 110; 40. 152. 40; 25. 153. 200; 11 կմ. 160. 133; 150; 76. 192. 14; 16; 18 կամ -18; -16; -14. 193. 8; 6. 194. 3; 4; 5. 195. 12. 196. 20 կմ. 197. 12. 198. 3. 199. 8 և 12. 200. 10 և 9.

ՑԱՆԿ

(1604)

Գինը 2 Ռ.
Կազմը 50 կոպ.

А. КИСЕЛЕВ

АЛГЕБРА

Учебник для средней школы

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

6-ой и 7-ой год обучения

Госиздат ССР Армении
Эривань—1935