ՅՈՒ. Ո. ԳՈՒՐՎԻՑ ՅԵՎ Ռ. Վ. ԳԱՆԳՆՈՒՍ

ՅԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ

ՍԻՍՏԵՄԱՏԻԿ ԴԱՍԸՆԹԱՑՔ

ԱՌԱՋԻՆ ՄԱՍ

ՀԱՐԹԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

ՊԵՏԱԿԱՆ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ՅԵՐԵՎԱՆ 1936

513(075)

Հաստատված է ՌՍՖՍՀ Լուսժողկոմի կողմից

ՅՈՒ. Ո. ԳՈՒՐՎԻՑ ՅԵՎ Ռ. Վ. ԳԱՆԳՆՈՒՍ

ՅԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ

ՍԻՍՏԵՄԱՏԻԿ ԴԱՍԸՆԹԱՑՔ

ԱՌԱՋԻՆ ՄԱՍ

ՀԱՐԹԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԻՋՆԱԿԱՐԳ ԴՊՐՈՑԻ 6—8 ԴԱՍԱՐԱՆՆԵՐԻ ԴԱՍԱԳԻՐՔ

Ռուսերեն բնագրի 8-րդ հրատարակությունից խմբագրական փոփոխումներով

[redacted]

ՊԵՏԱԿԱՆ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ՅԵՐԵՎԱՆ 1936

[redacted]

Տեխն. խմբագիր՝ Գ. Զենյան
Սրբագրիչ՝ Ա. Տ.-Մկրտչյան

ՀԱՅԳԱՏԻՆ ... ՀԱՄԱՐ
4962-Աֆ.Հ

Հրատարակչ. № 24
Գլավ. լիտգոր. № Վ. 1088
Պատվեր № 230
Տիրաժ 30.000

Հանձնված է արտադրության 26/VI 1936 թ.
Ստորագրված է տպագրության 15/VII 1936 թ.

Կուսհրատի տպարան. Յերևան, Ալլահվերդյան № 27

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՅԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐ

§ 1. ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՅԵՎ ՅԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՄԱՐՄԻՆ

Մեզ շրջապատող բոլոր առարկաները, կամ մարմինները, մի ընդհանուր առանձնահատկություն ունեն, որ նրանք բոլորն էլ տարածության որոշ մաս են գրավում: Դրա հետ միասին ամեն մի մարմին ունի մի շարք ֆիզիկական հատկություններ, որոնք միայն նրան են հատուկ և որոնք այդ մարմինը տարբերում են ուրիշ մարմիններից: Այդպիսի ֆիզիկական հատկություններ են՝ մարմնի կշիռը, նրա զանգվածը, դիմահարությունը (անանցանելիությունը), առաձգականությունը, գունավորությունը և այլն, այսինքն այնպիսի հատկություններ, որոնք կախված են մարմնի նյութից: Բացի ֆիզիկական հատկություններից ամեն մի մարմին ունի բնորոշ արտաքին հատկություններ, այն է՝ ձև և մեծություն. *այս վերջին հատկությունները կոչվում են* մարմնի յերկրաչափական *հատկություններ:*

Մարմնի ֆիզիկական հատկություններն ուսումնասիրում են բնական գիտությունները՝ ֆիզիկան, քիմիան և այլն: Իսկ յերկրաչափական հատկությունները՝ մարմնի ձևը և մեծությունը, որոնք բնորոշ են ամեն մի մարմնի համար և հնարավորություն են տալիս մի մարմին մյուսից զանազանելու, ուսումնասիրում է յերկրաչափությունը *(գեոմետրիան), մի կողմ թողնելով մարմնի առանձնահատուկ ֆիզիկական հատկությունները. այս պատճառով յերկրաչափություն ուսումնասիրողի համար բոլորովին նույն բանն է՝ մարմնի ձևը և նրա յերկրաչափական այլ հատկություններն ուսումնասիրելու համար արդյոք յերկաթե մի խորանարդ է ձեռքի տակ, թե գրանիտե հղկուն խորանարդ, արդյոք ռետինե գունդ է, թե ոսկրե գունդ, արդյոք ապակե հատվածակողմ է, թե փայտե, և այլն:*

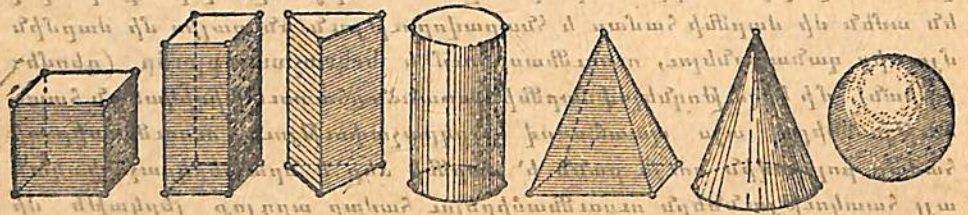
Շրջապատող մարմինների ձևերը լավ ճանաչելու համար յերկրաչափություն ուսումնասիրողը պետք է կարողանա իր ուշադրությունից դուրս թողնել մարմնի ֆիզիկական հատկությունները և սովորի

կենտրոնացնել իր ուշադրությունը մարմինների միայն և միայն հատկության՝ նրանց ձևի վրա։

Պետք է հիշել, վոր իրականության մեջ ձևն անբաժանելի յե մարմնին պատկանող հատկություններից, և վոր յերկրաչափությունը մարմնի ձևն ուսումնասիրելիս այդ ձևն անջատում, վերացնում է շրջապատող տարածության մեջ գտնվող իրական մարմնից։ Միայն բազմադարյան յերկարատև փորձի և վարժությունների միջոցով է, վոր մարդս սովորել է վերացական ձևերով մտածել, ուսումնասիրել է այդ ձևերի առանձնահատկությունները և օգտագործում է առանձին ձևերի հատկությունները կյանքում՝ տեխնիկայի և արտադրության մեջ։

Այսպես ուրեմն, յերկրաչափությունն ուսումնասիրում է վոչ թե ֆիզիկական մարմինը՝ նրան պատկանող ֆիզիկական հատկություններով հանդերձ, այլ այն մարմինը, վորը, ասես, զրկված է իր բոլոր ֆիզիկական հատկություններից, և վորը միայն պահպանում է այն ֆիզիկական մարմնի ձևը և մեծությունը, վորից մտքով վերացված, հեռացված են նրա ֆիզիկական հատկությունները։ Այսպիսի մարմինները կոչվում են յերկրաչափական մարմիններ։ Քանի վոր ամեն մի ֆիզիկական մարմին վորոշ տարածություն է գրավում, ապա այստեղից հետևում է, վոր յերկրաչափական մարմինը ֆիզիկական մարմնի գրաված տարածամասն է, ուրիշ խոսքով՝ յերկրաչափական մարմինն ամեն կողմից սահմանափակված մի տարածամաս է։

Յերկրաչափական մարմինը, ինչպես և ֆիզիկական մարմինը, յերեք չափումներ ունի՝ յերկարություն, լայնություն և բարձրություն կամ հաստություն։ Յեթե մարմնից նրա վորևէ մասն անջատենք, ապա այդ մասը ևս մարմին կլինի։ Այն, ինչ վոր մարմինն անջատում է նրան շրջապատող տարածությունից և ուրիշ մարմիններից, կոչվում է նրա մակերևույթ. մարմնի սահմանը մակերևույթ է։



Նկ. 1.

Մեր շրջապատում մենք հանդիպում ենք ամենաբազմազան մակերևույթների, վորոնց ձևը վորոշված է մարմնի ձևով։ Այսպես, գրատախտակի, սեղանի, դույլի, գնդակի, ձվի, գլանի, կոնի մակերևույթները տարբեր են և կախված են բացառապես մարմնի ձևից։

Մարմնի մակերևույթը կարող է մասերի բաժանվել, և նրա յուրաքանչյուր մասը նույնպես մակերևույթ է։

1-ին նկարում ցույց են տրված զանազան ձևի մարմիններ՝ խորանարդ, ուղղանկյուն զուգահեռանիստ (չորսփակ), հատվածակողմ (պրիզմա), գլան, բուրգ, կոն, գունդ։ Այս մարմիններից միքանիսը՝ խորանարդը, չորսփակը, պրիզման, բուրգը հարթ մակերևույթ ունեն, միքանիսն էլ, օրինակի համար, գունդը, կոր մակերևույթ ունեն, և վերջապես միքանիսն էլ՝ գլանը, կոնը, սահմանափակված են մասամբ հարթ, մասամբ էլ կոր մակերևույթով։

Մակերևույթը յերկու չափում ունի՝ յերկարություն և լայնություն։ Մակերևույթի սահմանը, այսինքն այնտեղը, վորտեղ մարմնի մակերևույթի մի մասը հատվում է մյուսի հետ, կոչվում է գիծ։ Մակերևույթի սահմանը գիծ է։ Գիծը միայն մի չափում ունի՝ յերկարություն։ Դիտենք 1-ի նկարի խորանարդը։ Խորանարդի կողը նրա յերկու նիստերի հատման տեղն է, իսկ այդ նիստերից յուրաքանչյուրը ներկայացնում է խորանարդի ամբողջ մակերևույթի մասը։

Գիծը կարելի յե մասերի բաժանել, և նրա յուրաքանչյուր մասը դարձյալ գիծ է։

Գծի սահմանը կետ է։ Կետը չափում չունի։ Նա յերկու կամ միքանի գծերի հատման տեղն է։ Այսպես, 1-ին նկարում խորանարդի գագաթը յերեք գծերի հատման տեղն է։ Մակերևույթները, գծերը և կետերը կարելի յե դիտել միայն մարմինների վրա, անկախորեն նրանք գոյություն չունեն. յեթե յերկրաչափության մեջ այսուամենայնիվ մենք խոսում ենք մակերևույթների, գծերի և կետերի մասին, իբրև անկախ գոյություն ունեցող ինչ-վոր բաների մասին, ապա միայն այն պատճառով, վոր մենք նրանց յերևակայում ենք մարմիններից անջատ։

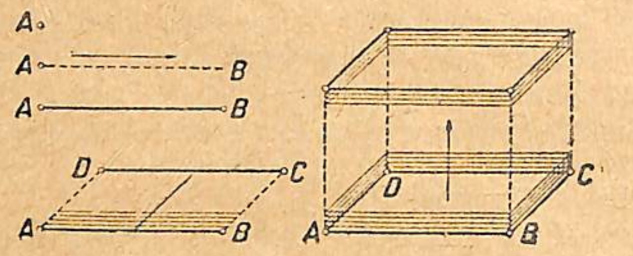
Մարմինը, մակերևույթը, գիծը և կետը կոչվում են յերկրաչափական կերպեր։

§ 2. ՅԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԿԵՐՊԵՐԻ ԱՌԱՋԱՑՈՒՄԸ ՇԱՐԺՈՒՄՈՎ

Կետով նշվում է տարածության մեջ վորոշ տեղ, լինի վերջինս մարմնի հենց մակերևույթի վրա, թե նրա ներսը, մարմնի մակերևույթին քաշած գծի վրա, թե այնպիսի գծի վրա, վորը մտածվում է նրանից անջատ։

Կետը՝ շարժվելով տարածության մեջ (Նկ. 2), անընդհատ փոխում է իր դիրքը և, ասես, այդպիսով մի գիծ է գծում. այդ պատճառով ասում են՝ գիծը ներկայացնում է շարժվող կետի հետքը։

Մթության մեջ արագ շարժման մեջ դրվող շիկացած ածխիկը, վորը մի լուսակետ է ներկայացնում, պատկերացում է տալիս գծի մասին, վոր այս դեպքում առացվում է իբրև հետք այն բոլոր դիրքերի, վոր գրավում է ածխիկը տարածության մեջ իր տեղափոխության ժամանակ։



Նկ. 2.

Նույնպես էլ կարող ենք մեզ պատկերացնել, վոր գիծը շարժվելով տարածության մեջ՝ ընդհանրապես մակերևույթ է առաջացնում (Նկ. 2)։ Արագորեն պտտվող անվի ճաղերը, ասես, միաձուլվելով, պատկերացում են տալիս մակերևույթի մասին։

Մակերևույթի շարժումով ընդհանրապես մարմին է կազմվում (Նկ. 2)։

Շրջանի պտտումն իր տրամագծի շուրջը պատկերացում է տալիս գնդի մասին։

§ 3. ԳԾԵՐԻ ՅԵՎ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԻ ՏԵՍԱԿՆԵՐԸ

1. Մարմինների վրա տարբերում են ուղիղ գծեր և կոր գծեր։

Այսպես, իբրև խորանարդի յերկու նիստերի փոխհատման տեղ ծառայում է նրա կողը, վոր ուղիղ գիծ է. իբրև գլանի կողմնային մակերևույթի և նրա հիմքի փոխհատման տեղ ծառայում է շրջագիծը, վորը կոր գիծ է։

Ուղիղ գծին սահմանում տալ չի կարելի։ Ուղիղ գծի գաղափարը պետք է հիմնական համարել. այս գաղափարը մարդս ստանում է անմիջապես փորձից։

Ուղիղ գծի ուղղության մասնավոր դեպքեր են հորիզոնական և ուղղաձիգ ուղիղները։ Հորիզոնական ուղիղի ուղղությունը ցույց է տալիս մի փոքրիկ ավազանի ջրի խաղաղ մակերևույթի վրա գտնվող փայտը. ուղղաձիգ ուղիղի ուղղությունը վորոշվում է այսպես կոչված կապարալարի դիրքով, այսինքն մի թելի ուղղությամբ, վորի ծայրին փոքրիկ ծանրություն է կախված։ *Ուղղաձիգ ուղիղն այն ուղիղն է, վորի ուղղությունը տանում է դեպի յերկրի կենտրոնը։*

2. Մարմինների մակերևույթները լինում են հարթ և կոր։

Հարթ մակերևույթ *կամ* պարզապես հարթություն *մենք կոչում ենք այնպիսի մակերևույթը, վորի յուրաքանչյուր յերկու կետով անցնող*

ուղիղը նրա վրա յե գտնվում իր բոլոր կետերով։ Իբրև հարթության օրինակ կարող է ծառայել սեղանի լավ հղկած յերեսատախտակը. քանոնի կողը, ինչ ուղղությամբ էլ քանոնը հպենք սեղանի յերեսին, կիպ մոտեցած է յերեսատախտակին և վոչ մի արանք չի մնում նրանց միջև։

Խորանարդի նիստերը, գլանի և կոնի հիմքերը հարթություններ են։ Գնդի մակերևույթը, գլանի և կոնի կողմնային մակերևույթը կոր մակերևույթներ *են. քանոնի կողը, վորը կցադրված է գնդի մակերևույթին, վերջինիս հետ չի համընկնում, ինչպիսի դիրք էլ տանք քանոնին. յեթե քանոնի կողը կցադրենք գլանի և կոնի մակերևույթին, ապա նա վորոշ դիրքերում կհամընկնի այդ մարմինների մակերևույթների հետ, բայց վորոշ դիրքերում էլ չի համընկնի։*

Հորիզոնական հարթության մասի պատկերը տալիս է փոքրիկ ամանի մեջ գտնվող ջրի խաղաղ մակերևույթը։

§ 4. ՅԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՐԿԱՆ ՅԵՎ ՅԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ

1. Յերկրաչափական կերպերը՝ կետը, գիծը, մակերևույթը, մարմինը, կարող են վերցվել թե զատ-զատ և թե իրար հետ համակցված կամ խմբավորված։

Լինեն յերկրաչափական կերպերը զատ-զատ, թե համակցված, նրանք ընդհանուր անունով կոչվում են յերկրաչափական պատկերներ, *իսկ ամեն մի յերկրաչափական կերպը, վոր կա պատկերի մեջ, կոչվում է այս պատկերի* տարր։

Յեռանկյունը յերկրաչափական պատկեր է, իսկ նրա կողմերը և անկյունները պատկերի տարրերն են՝ յեռանկյան տարրերը. խորանարդը յերկրաչափական պատկեր է, իսկ նրա նիստերը, կողերը, անկյունները խորանարդի տարրերն են։

2. Ի՞նչ է յերկրաչափությունը։ *Այս հարցին պատասխանելու համար նախ խոսենք յերկրաչափական պատկերների մասին։*

Յերկրաչափական պատկերները յերկու տեսակ են լինում՝ հարթ պատկերներ *և* տարածական պատկերներ։

Հարթ կոչվում են այն պատկերները, վորոնք իրենց բոլոր կետերով դասավորված են միայն մի *հարթության վրա. այսպես՝ յեռանկյունը, յերկու փոխհատվող ուղիղները, շրջանագիծը հարթ պատկերներ են։*

Տարածային կոչվում են այն պատկերները, վորոնք չեն կարող *իրենց բոլոր մասերով տեղավորվել մի հարթության վրա. իբրև տարածային պատկերների օրինակներ կարող են ծառայել յերկու փոխհատվող հարթությունները, խորանարդը, հատվածակողմը, գլանը, գունդը և այլն։*

Այժմ կարող ենք ասել, թե ինչ է յերկրաչափությունը։

Յերկրաչափությունն այն գիտությունն է, վորն ուսումնասիրում է յերկրաչափական պատկերների հատկություններն ու նրանց միջև գոյություն ունեցող առնչությունները, լինեն այս պատկերները հարթ, թե տարածային:

Յերկրաչափությունը յերկու մասի յե բաժանվում՝ հարթաչափություն (պլանիմետրիա), վորն ուսումնասիրում է հարթ պատկերները, և տարածաչափություն (ստերեոմետրիա), վորն ուսումնասիրում է տարածային պատկերները: Յերկրաչափությունը, ինչպես և ամեն մի ուրիշ գիտություն, ծագել է դիտողությունից ու փորձից և զարգացել է սերտորեն շաղկապված մարդու տնտեսական պահանջների հետ: Յերկրաչափություն անունը բառացի թարգմանություն է գեոմետրիա հունարեն բառի, վորով կոչվում է այս գիտությունը շատ օտար լեզուների մեջ:

3. Յերկրաչափությունն առաջացել է մեր թվականությունից շատ դարեր առաջ: Դեռ Արևելքի կուլտուրական ժողովուրդները՝ բաբելացիները և յեգիպտացիները, բավական մեծ յերկրաչափական գիտելիքներ ունեյին, վոր ձեռք եյին բերել հողամասերի չափումներ կատարելու, ամեն տեսակ կառուցվածքներ շինելու և յերկնային լուսատուների շարժումներն ուսումնասիրելու պահանջի հետ կապակցված:

Յերկրաչափությունն իր հետագա գիտական զարգացումն ստացավ Հունաստանում: Առաջին հույն մաթեմատիկոսները, վորոնք յեգիպտացիների աշակերտներն եյին, մեր թվականությունից դեռ 6 դար առաջ ծանոթ եյին յերկրաչափական պատկերների մի շարք հատկություններին. անմիջական փորձից ձեռք բերած յերկրաչափական պարզագույն կերպերի մասին ունեցած տեղեկությունների հիման վրա նրանք արտածեցին ուրիշ, ավելի բարդ, յերկրաչափական կերպերի հատկությունները: Եվկլիդի ժամանակ, վոր ապրում եր մեր թվականությունից յերեք դար առաջ, արդեն կուտակվել եր յերկրաչափական կերպերի մասին գիտելիքների մի մեծ քանակ: Եվկլիդը խոշոր ծառայություն մատուցեց գիտությանը, իր «Տարրերը» ձեռնարկի մեջ կուռ սիստեմի բերելով յերկրաչափության հիմունքները:

I. ՈՒՂԻՂ ԳԻԾ

§ 1. ՈՒՂԻՂ ԳԻԾ: ՃԱՌԱԳԱՅԹ: ՀԱՏՎԱԾ: ԲԵԿՅԱԼ: ԿՈՐ ԳԻԾ:

Ուղիղ գիծը, կամ ուղիղը, բոլոր գծերից պարզագույնն է: Ուղիղի մասին պատկերացում կարելի յե կազմել՝ դիտելով պիրկ ձգած թելը կամ լավ սղոցած քանոնի կողը. յերբ արևի ճառագայթները մի փոքր անցքով մութ սենյակի ներսն են մտնում, նրանց ճանապարհն իբրև ուղիղ գիծ է յերևում:

Ուղիղը կարելի յե մտածել անսահմանորեն շարունակված դեպի յերկու կողմերը:

Ուղիղը սովորաբար նշանակվում է լատինական այբուբենի յերկու մեծատառերով: 3-րդ նկարում գծված է AB ուղիղը:

Յեթե AB ուղիղի վրա վորևե տեղում վերցնենք մի C կետ, ապա այս C կետով AB ուղիղը կբաժանվի յերկու ճառագայթի՝ CA և CB (նկ. 4):

Նկ. 3.

Նկ. 4.

C կետը ճառագայթի յելակետն է և գրության ժամանակ դրըվում է առաջին տեղը: Ճառագայթը կարող է անվերջորեն ձգվել միայն դեպի մի կողմը: Այսպես, CA ճառագայթն ուղղված է C կետից դեպի ձախ, իսկ CB-ն՝ դեպի աջ:

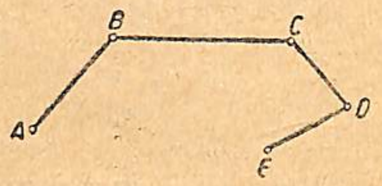
CA և CB յերկու ճառագայթները (նկ. 4) մի ուղիղ են ներկայացնում:

Յեթե ուղիղի վրա վորևե յերկու կետ վերցնենք, ապա ուղիղի այն մասը, վորը սահմանափակված է այդ կետերով, կոչվում է հատված: Ուղիղի հատվածը նշանակվում է յերկու մեծ տառերով, վորոնք դրվում են նրա ծայրերի մոտ. AB-ն (նկ. 5) ներկայացնում է ուղիղ գծի մի հատված: Հատվածը հաճախ նշանակում են մի փոքր տառով, որինա-

կի համար՝ a-ով. այսպիսի դեպքում a-ն սովորաբար նշանակում ե նաև հատվածի յերկարությունը՝ ընդունված մասշտաբի միավորներով:

Այն գիծը, վորը կազմված ե մի ուղիղ գծի վրա չգտնվող հատվածներից, կոչվում ե բեկյալ գիծ կամ պարզապես՝ բեկյալ (նկ. 6): Այն հատվածները, վորոնցից կազմված ե բեկյալը, կոչվում են բեկյալի

Նկ. 5.



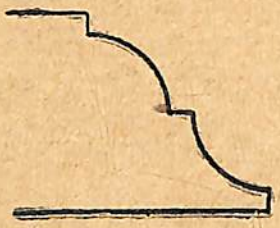
Նկ. 6.

կողմեր կամ օղակներ: Բեկյալը նշանակում են մեծ տառերով, վորոնք գրվում են նրա կողմերի ծայրերին, օրինակի համար՝ ABCDE բեկյալը:

Կոր գիծ կոչվում ե այնպիսի գիծը, վորը ուղիղ գծի և վոչ մի հատված չի պարունակում (նկ. 7):

Խառն գիծ կոչվում ե այնպիսի գիծը, վորը բաղկացած ե ուղիղի հատվածներից և կորի մասերից (նկ. 8):

Նկ. 7.



Նկ. 8.

§ 2. ՈՒՂԻՂԻ ԱՔՍԻՈՄՆԵՐԸ

1. Ուղիղը կարող ե անսահմանափակորեն շարունակվել դեպի իր յերկու կողմերը.

Բացի այս հատկությունից ուղիղն ունի ուրիշ հատկություններ ևս: Հարթության վրա նշենք A և B յերկու կետերի դիրքը (նկ. 9): Այդ A և B կետերով ստուգած քանոնի միջոցով տանենք ուղիղ գիծ: Յեթե փորձենք այդ նույն A և B կետերով մի յերկրորդ ուղիղ գիծ ևս տանել, ապա կտեսնենք, վոր նա համընկնում ե առաջինի հետ. այստեղից յեզրակացնում ենք, վոր

Նկ. 9.

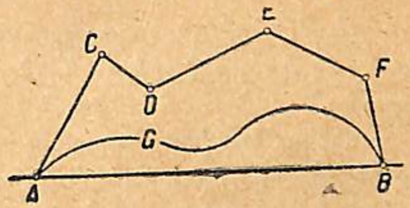
2. Տված յերկու կետերով կարելի յե ուղիղ գիծ տանել յեվ այն ել միայն մեկը:

Սա ուղիղի յերկրորդ հատկությունն ե. այս հատկությունը ցույց ե տալիս, վոր ամեն մի ուղիղի դիրքը լիովին վորոշվում ե յերկու կետերով.

այս պատճառով յեթե յերկու ուղիղներ այնպես համատեղենք, վոր մի ուղիղի յերկու կետերը համընկնեն մյուսի յերկու կետերի հետ, ապա այս յերկու ուղիղները կհամընկնեն իրենց բոլոր կետերով: Յեթե յերկու ուղիղներ միայն մի ընդհանուր կետ ունեն, ապա նրանք փոխհատվում են:

AB և CD յերկու փոխհատվող ուղիղների ընդհանուր կետը կոչվում ե փոխհատման կետ, յերբեմն նաև՝ հատման կետ:

Մի կետով կարելի յե տանել անթիվ բազմությամբ ուղիղներ: Բոլոր այդպիսի ուղիղների ամբողջությունը կազմում ե ուղիղների փունջ:



Նկ. 10.

Փնջի բոլոր ուղիղների ընդհանուր կետը կոչվում ե փնջի կենտրոն:

Յեթե հարթության վրա վերցնենք յերկու կետ՝ A և B, նրանցով տանենք ուղիղ, կոր և բեկյալ գծեր, ապա A և B կետերը միաժամանակ կսահմանափակեն AB հատվածը, AGB կորը և կծառայեն իբրև ACDEFB բեկյալի ծայրեր (նկ. 10): Ակներև ե, վոր AB հատվածը կարճ ե AGB կորից և ACDEFB բեկյալից. այստեղից յեզրակացնում ենք.

3. Ուղիղի հատվածը կարճագույն հեռավորությունն ե ուղիղի յերկու կետերի միջև:

Ուղիղի այս հատկության հիման վրա յերկու կետերի հեռավորությունը միշտ չափվում ե այդ յերկու կետերով անցնող ուղիղի ուղղությամբ: Հատվածի յերկարությունը տալիս ե նրա ծայրակետերի միջև յեղած հեռավորությունը:

4. Ուղիղը, իբրև յերկրաչափական պատկեր, ունի մի շարք հատկություններ. վերջիններիս իրավացիությունը հաստատված ե փորձով, վորը մարդկությունը կուտակել ե շրջապատող աշխարհի յերևույթների ամենօրյա դիտողության և գործնական հարցերի լուծման միջոցով:

Ամեն մի դատողություն յերկրաչափական պատկերի այնպիսի հիմնական հատկության մասին, վորը հաստատված ե գործնականում, կոչվում ե աքսիոմ. աքսիոմներն ընդունվում են առանց ապացուցման և հիմք են ծառայում յերկրաչափության թեորեմների ապացուցման համար:

Ուղիղի հատկությունների մասին հետևյալ դատողությունները ներկայացնում են աքսիոմներ.

1) Ուղիղը հնարավոր ե դեպի յերկու կողմն անսահմանափակորեն շարունակել.

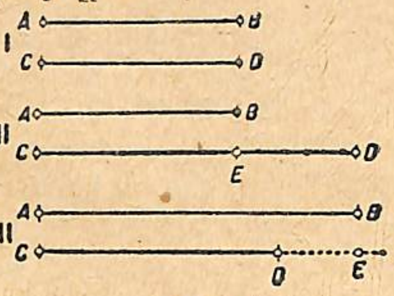
2) Տված յերկու կետերով կարելի յե ուղիղ գիծ տանել և այն ել միայն մեկը:

3) Ուղիղի հատվածը կարճագույն հեռավորությունն է յերկու կետերի միջև:

§ 3. ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ԲԱՂԴԱՏՈՒՄԸ

Ուղիղների յերկարությունները բաղդատել հնարավոր չէ, վորովհետև ուղիղները կարելի յե դեպի յերկու կողմն անսահմանափակորեն շարունակել: Իրար հետ կարելի յե բաղդատել միայն հատվածները:

Յերկու հատված բաղդատել նշանակում է իմանալ՝ հավասա՞ր են նրանք, թե անհավասար, և յեթե անհավասար են, ապա վո՞րն է մեծ: *Հատվածների բաղդատումը տեղի յե ունենում մի հատվածի* վերադրումով *մյուսի վրա:*



Նկ. 11.

Խնդիր. Բաղդատել իրար հետ AB *և* CD յերկու հատվածները *(նկ. 11):*

Լուծում. AB *հատվածը կվերադրենք* CD *հատվածի վրա այնպես, վոր* A *կետը համընկնի* C *կետի հետ և* AB *հատվածը գնա* CD *հատվածի վրայով: Յեթե* B *կետը համընկնի* CD *հատվածի* D *վերջնակետի հետ, ապա* AB *և* CD *հատվածները հավասար են: Հատվածների այս հավասարությունն այսպես է գրվում՝* $AB=CD$ *(նկ. 11, I):*

Յեթե B *կետն ընկնում է* CD *հատվածի* E *կետի վրա, վորը գտնվում է* C *և* D *կետերի միջև, ապա* AB *հատվածը փոքր է* CD *հատվածից, և այս հետևյալ ձևով է գրվում՝* $AB<CD$ *(նկ. 11, II):*

Յեթե B *կետն ընկնում է* CD *հատվածի շարունակության վորևէ* E *կետի վրա, ապա* AB *հատվածը մեծ է* CD *հատվածից: Գրությունը՝* $AB>CD$ *(նկ. 11, III):*

Նկ. 12.

§ 4. ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ՀԵՏ

1. Խնդիր. Գումարել AB և CD հատվածները. *հատվածների մեծությունները տված են 12-րդ նկարում:*

Նկ. 13.

Կառուցում: *Տանում ենք* MN *ուղիղը (նկ. 13): Այդ ուղիղի* K *կետից կարկինի օգնությամբ դնում ենք* KL *հատվածը՝ հավասար* AB*-ին, այնուհետև* L *կետից* LP *հատվածը՝ հավասար* CD*-ին, այնպես, վոր առաջին հատվածի* L *վերջնակետը դառնա յերկրորդ հատվածի յելա-*

կետը: KP *հատվածը տալիս է* AB *և* CD *հատվածների գումարը: Գրությունն՝* $AB+CD=KL+LP=KP$*:*

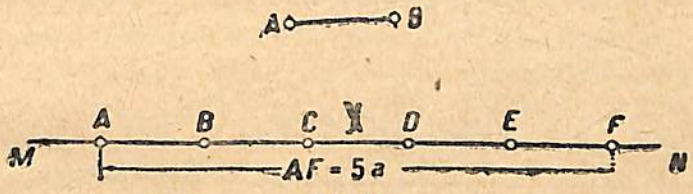
2. Խնդիր. AB հատվածից հանել CD հատվածը. *հատվածների մեծությունները տված են 14-րդ նկարում:*

Նկ. 14.

Կառուցում. MN *ուղիղի վրա վերցնում ենք* $KL=AB$ *հատվածը և ապա* L *կետից հակառակ ուղղությամբ դնում ենք* $LP=CD$ *հատվածը.* KP *հատվածը հավասար է լինում* $AB-CD$ *տարբերության:*

3. Խնդիր. AB հատվածը մեծացնել 5 անգամ, այսինքն AB հատվածը վերցնել իբրև գումարելի 5 անգամ:

Կառուցում. MN *ուղիղի վրա մեկը մյուսի յետևից 5 անգամ դնում ենք* AB *հատվածը: Ստանում ենք՝ հատված* $AF=5\ AB$ *(նկ. 15):*



Նկ. 15.

4. Խնդիր. *Տված են* a, b *և* c *հատվածները: Կառուցել* $x=3a+2b-4c$ *հատվածը:*

Կամավոր ուղիղի վրա կառուցում ենք նախ մի հատված, վորը հավասար է 3a*-ի. այնուհետև նրան ավելացնում ենք* b *հատվածը 2 անգամ և վերջապես 4 անգամ հանում ենք* c *հատվածը:*

Խնդիրը հնարավոր է միայն այն դեպքում, յերբ $3a+2b>4c$ *կամ յեթե* $3a+2b=4c$*: Վերջին դեպքում* $x=0$*:*

5. Հատվածի բաժանումը հատվածի վրա, ինչպես և հատվածի բաժանումը հավասար ու անհավասար մասերի, կդիտարկվի առանձին:

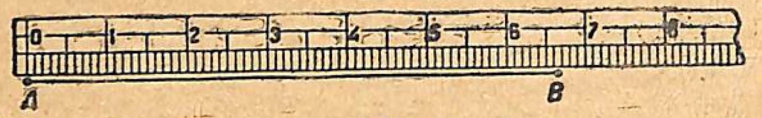
§ 5. ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ՉԱՓՈՒՄԸ

Հատվածը չափել նշանակում է իմանալ, թե քանի անգամ է նրա մեջ պարունակվում մի ուրիշ հատված, վորն ընդունված է իբրև միավոր: *Հատվածների չափման համար իբրև միավոր կարող է ծառայել ամեն մի հատված: Սակայն հատվածը սովորաբար չափվում է յերկարության համար սահմանված չափերով՝ մետրով, սանտիմետրով, միլիմետրով:*

AB *հատվածը չափելու համար նրա վրա մեկը մյուսի յետևից դնում են ընտրած գծային միավորը: Յեթե վերջինս* AB *հատվածի մեջ*

տեղավորվում է ամբողջ թիվ անգամ, ապա հենց այս թիվն էլ ցույց է տալիս, թե քանի գծային միավոր է պարունակում հատվածը։ Իսկ յեթե յերկարության միավորը, վոր ընտրել ենք, AB հատվածի մեջ ամբողջ թիվ անգամ չի պարունակվում, այլ վորոշ մնացորդ է ստացվում, ապա պետք է այս մնացորդը չափել ավելի փոքր գծային չափով. յեթե նոր մնացորդ է ստացվում, ապա այդ մնացորդը չափում են էլ ավելի փոքր գծային չափով և այլն։

Կարող է պատահել, վոր ընտրած գծային չափերից վոչ մեկը, ինչպես և այն մասերից վոչ մեկը, վորոնք ստացվում են այդ գծային չափերն ամբողջ թվով մասերի բաժանելուց, ամբողջ թիվ անգամ չպարունակվի չափվող հատվածի մեջ. այս դեպքում հատվածի յերկարու-

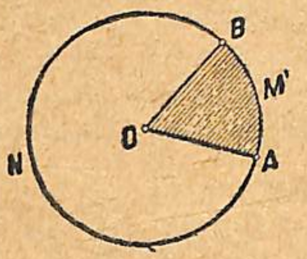


Նկ. 16.

թյունը վորոշում են մոտավորապես և վորքան կարելի յե մեծ ճշտությամբ։ 16-րդ նկարում AB հատվածը մեծ է 6,5 սմ-ից և փոքր է 7 սմ-ից. նա մոտավորապես հավասար է 6,7 սմ-ի։ Գրությունը՝ AB $\simeq$ 6,7 սմ։

§ 6. ՇՐՋԱՆԱԳԻԾ ՅԵՎ ՇՐՋԱՆ

1. Շրջանագիծ յեվ շրջան. Յեթե OA հատվածը հարթության վրա իր ծայրերից մեկի շուրջը, օրինակի համար՝ O կետի շուրջը, պտտելիս լրիվ պտույտ գործի և նորից գրավի իր սկզբնական դիրքը, ապա նրա մյուս ծայրը՝ A կետը, կգծի մի կոր գիծ, վորը կոչվում է շրջանագիծ։ Հարթության այն մասը, վորը սահմանափակված է շրջանագծով, կոչվում է շրջան (Նկ. 17)։ O կետը, վորի շուրջը պտտվում է OA հատվածը, կոչվում է և՛ շրջանագծի, և՛ շրջանի կենտրոն. OA հատվածը կոչվում է շառավիղ և սովորաբար նշանակվում է r կամ R։



Նկ. 17.

Պետք է նկատել, վոր OA հատվածի A վերջնակետը չէ միայն, վոր շրջանագիծ է գծում, հատվածը O կետի շուրջը պտտելիս նրա ամեն մի կետն էլ շրջանագիծ է գծում։

Շրջանագծի յուրաքանչյուր կետը նրա O կենտրոնից ունի միևնույն հեռավորությունը, վորը հավասար է շառավղի յերկարության։

Գրությունը՝ OA=OB=r։

Շրջանագծի կառուցումից անմիջապես հետևում է, վոր

Շրջանագիծը հարթության վրա գտնվող փակ կոր գիծ է, վորի բոլոր կետերը հավասար են հեռացած մի կետից՝ կենտրոնից։

Շրջանագիծը լրիվ վորոշված է, յերբ տված են նրա շառավիղը և նրա կենտրոնի դիրքը։

Շրջանագծերը տարբերվում են իրարից իրենց շառավիղների յերկարությամբ. վորքան մեծ է շրջանագծի շառավիղը, այնքան ավելի մեծ է և ինքը շրջանագիծը։ Յերկու շրջանագծեր, վորոնք միևնույն մեծության շառավիղ ունեն, վերադրման ժամանակ համընկնում են և, հետևաբար, հավասար են։

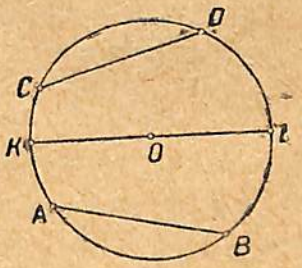
Շրջանագիծը գծում են կարկինի միջոցով։

2. Աղեղ. Յեթե OA հատվածը O կետի շուրջը լրիվ պտույտի միայն մի մասը կատարի, ապա նրա A վերջնակետը կգծի շրջանագծի միայն մի մասը. շրջանագծի մասը, օրինակի համար՝ AB-ն, կոչվում է աղեղ, իսկ ամբողջ շրջանի մասը, օրինակի համար՝ AOB մասը, վոր OA հատվածը գծում է, կոչվում է արտատ (սեկտոր)։ AOB-ն արտատ է (Նկ. 17)։ «Աղեղ» բառը գրության ժամանակ փոխարինվում է $\smile$ նշանով։ Յեթե գրված է $\smile$AB, ապա կարդում են՝ «աղեղ AB» կամ «AB աղեղ»։ Շրջանագծի վրա նշանակելով վորևե յերկու կետ, օրինակի համար՝ A և C, մենք շրջանագիծը բաժանում ենք յերկու մասի, յերկու աղեղի, վորոնք ընդհանրապես իրար անհավասար են։ Վորպեսզի ճշգրտորեն ցույց տան, թե յերկու աղեղներից վորի մասին է խոսքը, աղեղը սովորաբար նշանակում են վոչ թե յերկու, այլ յերեք տառերով, վորոնցից մեկը դրվում է աղեղի ծայրակետերը նշող տառերի միջև, և գրում են $\smile$ AMB (Նկ. 17)։

Յեթե գրված է $\smile$AB առանց վորևէ լրացուցիչ ցուցմունքի, ապա այդ նշանակումով հասկացվում է շրջանագծի փոքր աղեղը։

Միևնույն շրջանագծի կամ յերկու հավասար շրջանագծերի յերկու աղեղներ իրար հավասար են, յեթե այդ աղեղների վերադրման դեպքում նրանց ծայրակետերը համընկնում են։ Այսպես, յեթե AB աղեղը CD աղեղի վրա վերադրելիս (Նկ. 18) A կետն ընկնի D կետի վրա և B կետը C կետի վրա, ապա $\smile$AB=$\smile$CD։

3. Լար. Շրջանագծի յերկու կետերը միացնող CD հատվածը կոչվում է լար. լարը ձգում է (պրկում է) աղեղը. շրջանագծի յուրաքանչյուր աղեղին համապատասխանում է վորոշակի լար և ընդհակառակը։ Լարը բաժանում է շրջանագիծը յերկու մասի (Նկ. 18)։ Կենտրոնով անցնող լարը կոչվում է տրամագիծ։ Շրջանագծի մեջ կարելի յե տանել անթիվ բազմությամբ տրամագծեր։ Շրջանագծի տրամագծերը բոլորն իրար հավասար են, և նրանցից ամեն մեկը հավասար է յերկու շառավղի։



Նկ. 18.

Տրամագծով շրջանագիծը բաժանվում է յերկու կիսաշրջանագծերի, իսկ շրջանը՝ յերկու կիսաշրջանների։

Միևնույն շրջանագծի կամ հավասար շրջանագծերի մեջ հավասար աղեղները ձգվում են հավասար լարերով։ Իրոք, յեթե AB և CD աղեղները (նկ. 18) վերադրման ժամանակ համընկնում են, ապա համընկնում են նրանց ծայրակետերը և, հետևաբար, համընկնում են նաև AB և CD լարերը, վորոնք միացնում են այդ ծայրակետերը։ Նույնպես իրավացի յե հետևյալ դատողությունը. աղեղները հավասար են, յեթե հավասար են նրանց համապատասխանող լարերը։ Ընդսմին յենթադրվում է, վոր իրար հետ բաղդատվում են լարերով պրկված 2 աղեղներից կամ փոքրերը, կամ մեծերը։

4. Աղեղային աստիճան. Շրջանագիծը բաժանում են 360 հավասար մասերի՝ 360 հավասար աղեղների. յուրաքանչյուր այդպիսի աղեղ կոչվում է աղեղային աստիճան և նշանակվում է փոքրիկ զրոյով (°), վորը դրվում է աղեղային աստիճանների թիվը ցույց տվող թվի աջ կողմում վերևից. որինակի համար՝ 360°, կամ 180°, կամ 90°։ Շրջանագիծն ունի 360°, կիսաշրջանագիծը՝ 180°, իսկ քառորդ շրջանագիծը՝ 90°։

Յուրաքանչյուր աղեղային աստիճան բաժանվում է 60 հավասար մասերի, և նրանցից յուրաքանչյուրը կոչվում է աղեղային րոպե. «րոպե» բառը նշանակելու համար ոգտվում են ' նշանիկից. 30' գրությունը կարդացվում է՝ 30 րոպե։

Յուրաքանչյուր աղեղային րոպե բաժանում են 60 հավասար մասերի և րոպեյի ամեն մի այդպիսի մասը կոչում են աղեղային վայրկյան։

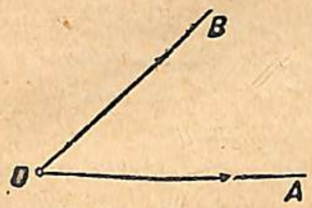
Վայրկյանը նշանակելու համար գործ են ածում " նշանիկը։ 45" գրությունը կարդացվում է՝ 45 վայրկյան։ 90° 30' 20" գրությունը կարդացվում է 90 աստիճան 30 րոպե 20 վայրկյան։

II. ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

§ 1. ԱՆԿՅՈՒՆԸ ՅԵՎ ՆՐԱ ՆՇԱՆԱԿՈՒՄԸ

1. Միևնույն O կետից յելնող յերկու ճառագայթներ՝ OA և OB, կազմում են մի պատկեր, վոր կոչվում է անկյուն (նկ. 19)։

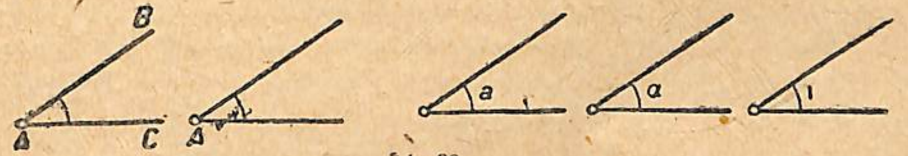
O կետը կոչվում է անկյան գագաթ, OA և OB ճառագայթները՝ անկյան կողմեր։



Նկ. 19.

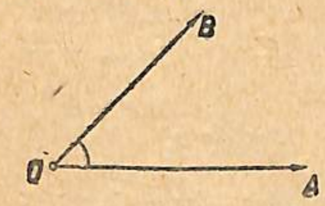
Անկյունը սովորաբար նշանակում են յերեք մեծ տառերով, վորոնցից մեկը գրվում է անկյան գագաթի մոտ, իսկ մյուս յերկուսը՝ նրա կողմերի վորևէ կետերի մոտ։ «Անկյուն» բառը գրության ժամանակ փոխարինում են ∠ նշանով. գագաթի մոտ գրվող տառը գրվում է և արտասանվում մյուս յերկու տառերի միջև։

Այն անկյունը, վոր կազմված է OA և OB ճառագայթներով, կարելի յե յերկու կերպ գրել կամ ∠ AOB կամ ∠ BOA։ Անկյունը յերբեմն նշանակում են միայն մի տառով, վորը դրվում է անկյան գագաթի մոտ, յեթե միայն այդ նույն գագաթի մոտ ուրիշ անկյուններ



Նկ. 20.

չկան։ Անկյունը նշանակում են նաև լատինական կամ հունական այբուբենի մի փոքր տառով կամ թվանշանով. այս դեպքում տառը կամ թվանշանը դնում են անկյան ներսը գագաթի մոտ (նկ. 20)։



Նկ. 21.

2. Դիտարկենք OA ճառագայթը, վորը պտտվում է իր O յելակետի շուրջը (նկ. 21)։ Պտտվելով՝ AO ճառագայթն անընդհատ փոխում է իր դիրքը, անցնում է իր սկզբնական դիրքից մի նոր OB դիրքի և այդ ժամանակ գծում է ∠AOB-ն։

Անկյունը ճառագայթի՝ իր սկզբնակետի շուրջը պտտելու չափն է։

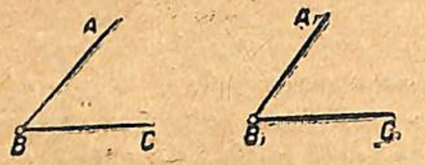
3. Յերկու փոխհատվող ուղիղներ՝ AB և CD, կազմում են 4 անկյուններ, վորոնցից յուրաքանչյուրի մեծությունը նրանից է կախված, թե այդ ուղիղներն իրար նկատմամբ ինչ թեքություն ունեն:

Ընդունված է ասել՝ անկյունը որոշում է մի ուղիղի մյուսի նկատմամբ ունեցած թեքության աստիճանը:

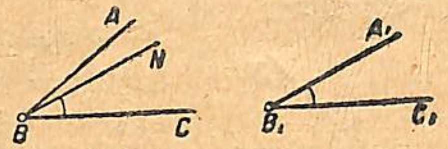
Անկյան մեծությունը կախված չէ նրա կողմերի յերկարությունից:

§ 2. ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԲԱՂԴԱՏՈՒՄԸ: ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՅԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

1. Տված են յերկու անկյուններ՝ $\angle ABC$ և $\angle A_1B_1C_1$ (Նկ. 22): Վորպեսզի այդ անկյունները բաղդատենք իրար հետ և վորոշենք՝ հա-



Նկ. 22.

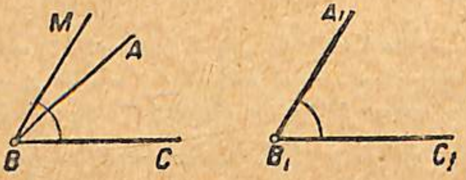


Նկ. 23.

վասա՞ր են նրանք, թե անհավասար, և վերջին դեպքում վո՞րն է նրանցից մեծը, օգտվում ենք վերադրման յեղանակից: Վերադրենք $\angle A_1B_1C_1$-ն $\angle ABC$-ի վրա այնպես, վոր B_1 գագաթը համընկնի B գագաթի հետ և B_1C_1 կողմը գնա BC կողմի վրայով. յեթե այդ ժամանակ B_1A_1 կողմը գնա BA կողմի վրայով, ապա $\angle A_1B_1C_1$-ը կհամընկնի $\angle ABC$-ի հետ և, հետևաբար, անկյունները հավասար կլինեն: Գրությունը՝ $\angle A_1B_1C_1=\angle ABC$:

2. Յեթե B_1 ու B գագաթների և B_1C_1 ու BC կողմերի համատեղումից հետո A_1B_1 կողմը գնա անկյան ներսով և գրավի BN դիրքը (Նկ. 23), ապա $\angle A_1B_1C_1$-ը հավասար չէ $\angle ABC$-ին, և փոքր է վերջինից: Գրությունը՝ $\angle A_1B_1C_1<\angle ABC$,

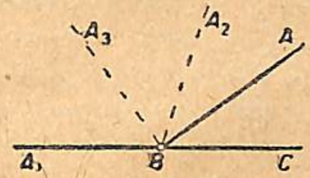
Վերջապես, յեթե $\angle A_1B_1C_1$-ն $\angle ABC$-ի վրա վերադրելիս A_1B_1 կողմը գնա $\angle ABC$-ից դուրս և գրավի AM դիրքը (Նկ. 24), ապա $\angle A_1B_1C_1$-ը մեծ է $\angle ABC$-ից: Գրությունը՝ $\angle A_1B_1C_1>\angle ABC$:



Նկ. 24.

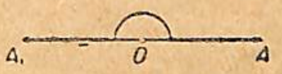
§ 3. ԲԱՑԱԾ ԱՆԿՅՈՒՆ ՅԵՎ ՈՒՂԻՂ ԱՆԿՅՈՒՆ

1. ABC անկյան (Նկ. 25) մեծությունը կախված է նրա կողմերի թեքության աստիճանից: Յեթե անկյան կողմերից մեկը, ասենք՝ AB-ն, պտտենք B գագաթի շուրջը, այդ ժամանակ մյուս կողմը՝ BC-ն, թողնելով անշարժ, ապա BA կողմը հաջորդաբար կգրավի զանազան դիրքեր՝ BA_2, BA_3 և այլն: BA կողմը կարող է նաև այնպիսի BA_1 դիրք ընդունել, վոր կլինի BC կողմի շարունակությունը. յերբ կողմերն այսպիսի դիրք ունեն, A_1BC անկյունը կոչվում է բացած անկյուն:



Նկ. 25.

Այսպես ուրեմն՝ բացած անկյունն այն անկյունն է, վորի կողմերը մի ուղիղ գիծ են կազմում և ուղղված են այդ անկյան գագաթից դեպի հակադիր կողմեր:



Նկ. 26.

Բոլոր բացած անկյուններն իրար հավասար են:

Այս դատողության իրավացիությունն ստուգում ենք մի բացած անկյունը մյուսի վրա վերադրելով: Բացած անկյունը կարելի յե դիտել իբրև OA ճառագայթի սկզբնական և վերջնական ուղղությունների միջև կազմված անկյունը, յերբ այդ ճառագայթը մի կիսապտույտ է գործել իր O սկզբնակետի շուրջը (Նկ. 26):

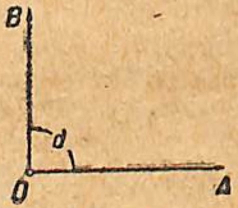
2. Բացած անկյան կեսը կոչվում է ուղիղ անկյուն:

Ուղիղ անկյուն նշանակում են լատինական d տառով (ֆրանսերեն «droit» բառի սկզբնատառը. այդ բառը նշանակում է «ուղիղ»):

Բոլոր ուղիղ անկյուններն իրար հավասար են:

Ուղիղ անկյունը OA ճառագայթի սկզբնական և վերջնական ուղղությունների միջև առաջացած անկյունն է, յերբ ճառագայթը միայն մի քառորդ պտույտ է արել (Նկ. 27). $\angle AOB=d$:

3. Յերբ OA ճառագայթը մի լրիվ պտույտ է գործում իր O սկզբնակետի շուրջը և նորից գրավում է իր սկզբնական դիրքը, ապա ասում են, վոր OA ճառագայթը գծել է լրիվ անկյուն (Նկ. 28):



Նկ. 27.

Նկ. 28.

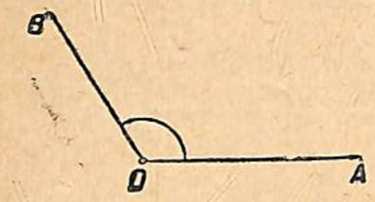
Ուղիղ անկյունը հավասար է բացած անկյան կեսին և, հետևաբար, բացած անկյունը հավասար է յերկու ուղիղ անկյան:

Գրությունը՝ $\angle AOA_1=2d$ (Նկ. 26):

Լրիվ անկյունը հավասար է յերկու բացած անկյան կամ 4 ուղիղ անկյան. լրիվ անկյունը հավասար է 4d-ի:

4. Յերբ ճառագայթն իր սկզբնակետի շուրջը պտտված է մի քա-

ռորդ պտույտից պակաս (նկ. 21), ապա առաջացած անկյունը փոքր է ուղիղ անկյունից և կոչվում է **սուր անկյուն**: Այն անկյունը, որը մեծ է ուղիղ անկյունից, բայց փոքր է բացած անկյունից, կոչվում է **բութ անկյուն** (նկ. 29):



Նկ. 29.

5. **Ուղիղ անկյունն ընդունվում է իբրև անկյան չափի միավոր:**

Անկյունների մեծությունն արտահայտում են ուղիղ անկյան մասերով: Օրինակի համար՝

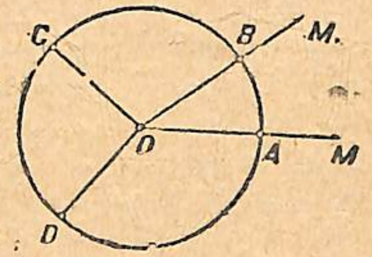
1) 0,3d; $\frac{1}{2}$d; $\frac{2}{3}$d; *դրանք սուր անկյուններ են, որովհետև յուրաքանչյուրը փոքր է ուղիղ անկյունից:*

2) 1,5d; $\frac{5}{4}$ d; $\frac{11}{8}$d; *դրանք բութ անկյուններ են, որովհետև յուրաքանչյուրը մեծ է ուղիղ անկյունից և փոքր է բացած անկյունից:*

3) 2,3d; $\frac{11}{4}$ d; $\frac{23}{8}$ d; *դրանք բացած անկյունից մեծ անկյուններ են:*

§ 4. ԿԵՆՏՐՈՆԱԿԱՆ ԱՆԿՅՈՒՆ ՅԵՎ ՆՐԱ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

1. OM *ճառագայթը, պտտվելով իր* O *սկզբնակետի շուրջը, գծում է* MOM_1 *անկյունը (նկ. 30), իսկ մի որևէ* A *կետ, որը վերցված է* OM *ճառագայթի վրա, շարժվելով ճառագայթի հետ կգծի շրջանագծի* AB *աղեղը, որի շառավիղը հավասար է* OA-*ի: Դիտենք* ∠AOB-*ն. նրա գագաթը գտնվում է շրջանագծի կենտրոնում, իսկ կողմեր ծառայում են* OA *և* OB *շառավիղները և նրա կողմերի միջև ընկած է նույն շրջանագծի* AB *աղեղը:*



Նկ. 30.

Այն անկյունը, որի համար իբրև գագաթ ծառայում է շրջանագծի կենտրոնը, կոչվում է կենտրոնական անկյուն: *Ամեն մի կենտրոնական անկյան* **համապատասխանում** *է* **որոշ աղեղ:**

Հասկանալի յե, որ ամեն մի աղեղի յել համապատասխանում է որոշ կենտրոնական անկյուն, որը կստացվի, յեթե աղեղի ծայրերը շառավիղների միջոցով միացնենք կենտրոնի հետ:

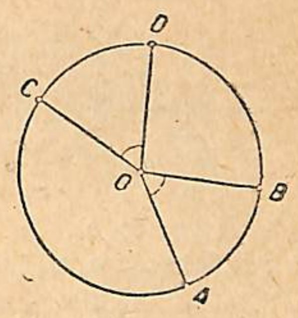
2. *Կենտրոնական անկյունները և նրանց համապատասխանող աղեղները հետևյալ հատկությունները ունեն.*

Միևնույն շրջանագծի կամ հավասար շրջանագծերի մեջ՝

1) Հավասար կենտրոնական անկյուններին համապատասխանում են հավասար աղեղներ:

2) Հավասար աղեղներին համապատասխանում են հավասար կենտրոնական անկյուններ:

Դիցուք ունենք մի շրջան, որի կենտրոնն է O *կետը (նկ. 31), և յերկու հավասար կենտրոնական անկյուններ՝* ∠AOB *և* ∠COD*. պտտենք* AOB *սեկտորը* O *կենտրոնի շուրջն այնպես, որ* OA *շառավիղը համընկնի* OD *շառավղի հետ. այն ժամանակ* AOB *և* COD *անկյունների հավասարության հետևանքով,* OB *շառավիղը կհամընկնի* OC *շառավղի հետ. կհամընկնեն նաև* AOB *և* COD *սեկտորների աղեղների* A *ու* D *և* B *ու* C *ծայրակետերը. բայց յեթե աղեղների ծայրակետերը համընկնում են, ապա կհամընկնեն նաև* AB *և* CD *աղեղները:*



Նկ. 31.

Գրությունը՝ յեթե ∠AOB=∠COD, *ապա* ◡AB=◡CD:

Հավասար աղեղների և նրանց համապատասխան անկյունների հատկությունը կգրվի այսպես.

Յեթե ◡AB=◡CD, *ապա* ∠AOB=∠COD: *Այս հատկության իրավացիությունն ստուգվում է դարձյալ վերադրման յեղանակով:*

Արտածումն իրավացի յե և այն աղեղների համար, որոնք համապատասխանում են **հավասար** *շառավիղ ունեցող յերկու տարբեր շրջանագծերի հավասար կենտրոնական անկյուններին:*

3. *Շրջանագիծը բաժանելով 360 հավասար մասերի և բաժանման յուրաքանչյուր կետը միացնելով կենտրոնի հետ, կստանանք 360 կենտրոնական անկյուններ, որոնք իրար հավասար են, որովհետև նրանցից յուրաքանչյուրին համապատասխանում է միևնույն մեծության աղեղ, որը հավասար շրջանագծի* $\frac{1}{360}$ *մասին, կամ մի աղեղային աստիճանի:*

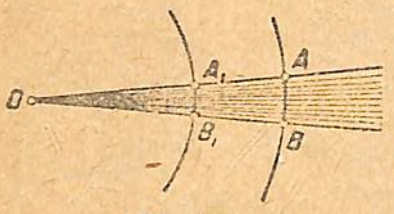
Այն կենտրոնական անկյունը, որին համապատասխանում է մեկ աստիճան մեծության աղեղ, կոչվում է անկյունային աստիճան:

Անկյունային աստիճանը բաժանվում է 60 **անկյունային րոպեների,** *և յուրաքանչյուր անկյունային րոպեն՝ 60* **անկյունային վայրկյանների:**

Անկյունային աստիճանի և նրա մասերի՝ րոպեների ու վայրկյանների, կրճատ նշանակման համար նույն նշաններն են գործածվում, ինչ որ աղեղային աստիճանի և նրա մասերի համար: 32-րդ նկարում պատկերացված է AOB *անկյունը, որը բաժանված է 10 անկյունային աստիճանների և հատած է տարբեր շառավիղներ ունեցող շրջանագծերի յերկու աղեղներով. այդ շրջանագծերի* O *կենտրոնը գտնվում է* AOB *անկյան գագաթում: Նկարից յերևում է, որ աղեղային աստի-*

ճանները միահավասար չեն և կախված են շառավիղների յերկարություններից։

Այս դեպքում ուրեմն շրջանագծի աղեղը՝ $\smile AB$-ն կամ $\smile A_1B_1$-ը (Նկ. 32), պարունակում է 10 աղեղային աստիճան, իսկ համապատասխան կենտրոնական անկյունը պարունակում է 10 անկյունային աստիճան։



Նկ. 32.

Եզրակացություն.—Կենտրոնական անկյանը համապատասխանող աղեղի աղեղային աստիճանների թիվը միաժամանակ ցույց է տալիս նաև անկյան անկյունային աստիճանների թիվը։

Լրիվ անկյունը, վորի O գագաթը գտնվում է կենտրոնում, բաժանվում է 360 կենտրոնական անկյունների, 36C°-ների։ Այն կենտրոնական անկյունը, վորը հավասար է բացած անկյան, պարունակում է 180°։ Այն կենտրոնական անկյունը, վորը հավասար է բացած անկյան կեսին, այսինքն ուղիղ անկյան, պարունակում է 90°. այս պատճառով

Անկյունային աստիճանը կազմում է ուղիղ անկյան $\frac{1}{90}$ մասը։

4. Ուղիղ անկյան մասերն աստիճանային չափով մի քանի դեպքերի համար տրվում են հետևյալ աղյուսակում.

Անկյունն ուղիղ անկյան մասերով	$\frac{1}{3}$d	$\frac{1}{2}$d	$\frac{2}{3}$d	$\frac{3}{4}$d	$\frac{4}{5}$d	d	$1\frac{1}{3}$d	1,5d	$1\frac{2}{3}$d	2d	3d	4d
Անկյունն աստիճանային չափով	30°	45°	60°	67°30'	72°	90°	120°	135°	150°	180°	70°	360°

§ 5. ՓՈԽԱԴՐԻՉ

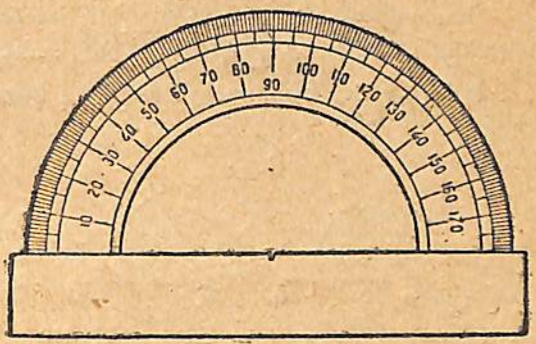
1. Անկյունը չափելու համար բանեցնում են մի հատուկ գործիք, վորը կոչվում է փոխադրիչ (տրանսպորտիր)։ Նա մի կիսաշրջան է, վորի աղեղը բաժանված է 180 աղեղային աստիճանների. կիսաշրջանի կենտրոնը նշված է փոսիկով (Նկ. 33)։

Տված անկյունը չափելու համար փոխադրիչն այնպես են դնում նրա վրա, վոր փոխադրիչի կենտրոնը համընկնի անկյան գագաթի հետ, իսկ տրամագիծը՝ անկյան կողմերից մեկի հետ, և նայում են, թե փոխադրիչի վոր բաժանումով է անցնում անկյան յերկրորդ կողմը. այն ժամանակ փոխադրիչի բաժանման մոտ դրված թիվը ցույց կտա չափվող անկյան մեջ պարունակված աստիճանների թիվը։

Փոխադրիչից օգտվելը հիմնված է նրա վրա, վոր ամեն մի կենտրոնական անկյան համապատասխանում է այնպիսի աղեղ, վորը պա-

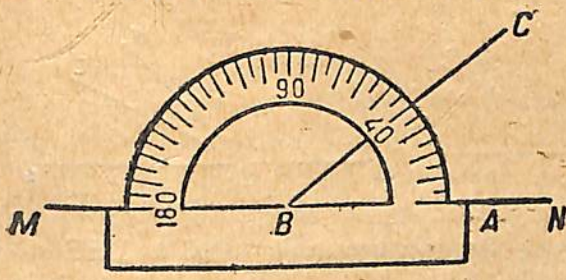
րունակում է նույն թվով ամբողջ աստիճաններ և աստիճանի մասեր, ինչ վոր անկյունը։

2. Փոխադրիչից օգտվում են նաև անկյունը կառուցելու համար։ Դրա համար տանում են MN ուղիղը (Նկ. 34), փոխադրիչը դնում են նրա վրա այնպես, վոր նրա տրամագիծը համընկնի ուղիղի հետ, և անկյան գագաթը նշանակում են այն կետում, վորը համընկնում է փոխադրիչի կենտրոնի հետ. այնուհետև կենտրոնը և փոխադրիչի համապատասխան բաժանման կետը միացնելով ուղիղով, տանում են պահանջվող անկյունը։



Նկ. 33.

3. Շրջանագծի յերկարությունը կախված է շառավղի յերկարությունից, և վորքան ավելի յերկար է շառավիղը, այնքան ավելի մեծ է գծվող շրջանագիծը. այստեղից հասկանալի յե, վոր մի աղեղային աստիճանի, այսինքն շրջանագծի $\frac{1}{360}$ մասի, յերկարությունը կախված է շառավղից և փոփոխվում է շառավղի փոփոխման հետ միասին։ Բայց այդպես չե անկյունային աստիճանի կառուցման դեպքում։ Անկյունային աստիճանը կախված չե շառավղի յերկարությունից. անկյունային աստիճանը հաստատուն, չփոխվող մեծություն է և հավասար է ուղիղ անկյան $\frac{1}{90}$ մասին։



Նկ. 34.

§ 6. ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԵՏ։ ՀԱՐԱԴԻՐ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

1. Յեթե անկյունների աստիճանային չափը հայտնի յե, ապա նրանց գումարումը կարելի յե կատարել թե հաշվումի և թե կառուցման միջոցով։

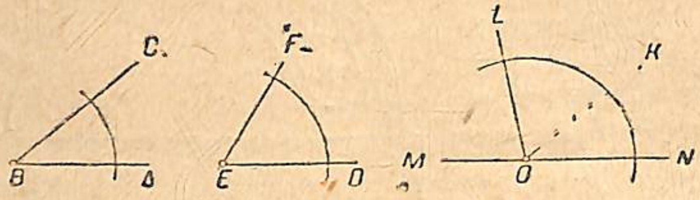
Խնդիր 1. Գտնել հետևյալ անկյունների գումարը և տարբերությունը. $\angle ABC=47°40'$ և $\angle DEF=30°23'45''$.

Լուծում. 1) $47°40' + 30°23'45'' = 78°3'45''$ 2) $47°40' - 30°23'45'' = 17°16'15''$

Պատասխան. 1) $\angle ABC+\angle DEF=78°3'45''$,

2) $\angle ABC-\angle DEF=17°16'15''$,

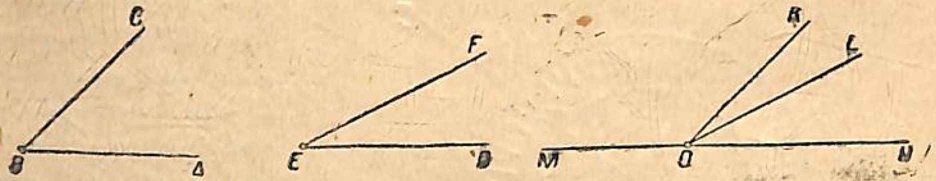
Խնդիր 2. Փոխադրիչի միջոցով կառուցել ABC և DEF անկյունների գումարը. անկյունների մեծությունը տված է 35-րդ նկարում։



Նկ. 35.

Կառուցում. Տանում ենք MN ուղիղը, այդ ուղղի մի O կետի մոտ փոխադրիչի օգնությամբ կառուցում ենք $\angle NOK=\angle ABC$ և ապա, ընդունելով O կետն իբրև գագաթ և OK-ն իբրև յերկրորդ անկյան կողմերից մեկը, կառուցում ենք $\angle LOK=\angle DEF$. այն ժամանակ LON անկյունը կլինի տված յերկու անկյունների որոնելի գումարը՝

$$\angle ABC+\angle DEF=\angle NOK+\angle KOL=\angle LON։$$



Նկ. 36.

Խնդիր 3. Փոխադրիչի օգնությամբ կառուցել ABC և DEF անկյունների տարբերությունը. անկյունների մեծությունը տված է 36-րդ նկարում։

Կառուցում. Տանում ենք MN ուղիղը, նրա մի O կետի մոտ կառուցում ենք $\angle NOK=\angle ABC$ (նկ. 36) և ապա այդ նույն O կետի և MN ուղղի մոտ կառուցում ենք $\angle NOL=\angle DEF$. այն ժամանակ LOK անկյունը կլինի որոնելի տարբերությունը՝

$$\angle ABC-\angle DEF=\angle LOK.$$

Խնդիր 4. $\angle ABC$-ն բազմապատկել 3-ով։

Լուծում. Խնդիրը վերածվում է յերեք անկյունների հաջորդաբար իրար գումարելու, որոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է տված ABC անկյանը։

2. Երկու անկյուններ, որոնք ունեն ընդհանուր գագաթ ու ընդհանուր կողմ և իրար չեն ծածկում, կոչվում են հարադիր անկյուններ։ 35-րդ նկարում $\angle NOK$ և $\angle KOL$ հարադիր անկյուններ են։ $\angle NOK$ և $\angle NOL$ հարադիր անկյուններ չեն։

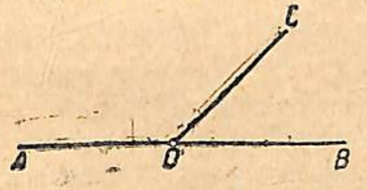
3. Յեթե անկյան ներսը տանենք գագաթով անցնող մի ուղիղ, ապա նա անկյունը կբաժանի յերկու հարադիր անկյունների, որոնք կարող են իրար հավասար լինել և կամ անհավասար։

Այն ուղիղը, որն անկյունը կիսում է, կոչվում է անկյան կիսորդ կամ անկյան բիսեկտրիս։

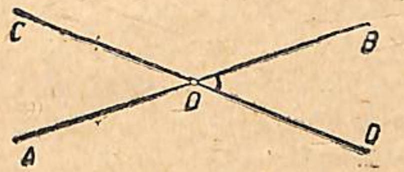
Անկյան բաժանումը հավասար կամ անհավասար մասերի կդիտարկվի առանձին։

§ 7. ԿԻՑ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ ՅԵՎ ՆՐԱՆՑ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ։ ԳԱՂԱՓԱՐ ԹԵՈՐԵՄԻ ՄԱՍԻՆ

1. Երկու հարադիր անկյուններ՝ $\angle AOC$ և $\angle BOC$ (նկ. 37), որոնք ունեն մի ընդհանուր կողմ՝ OC, և որոնց մյուս յերկու կողմերը՝ OA և OB, հակադիր ուղղություն ունեն և մի ուղիղ գիծ են կազմում, կոչվում են կից անկյուններ։



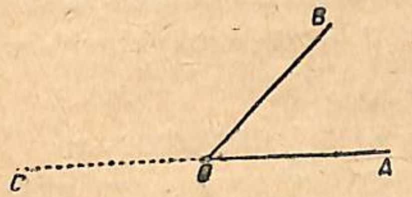
Նկ. 37.



Նկ. 38.

Վերցնենք յերկու փոխհատվող ուղիղներ՝ AB և CD (նկ. 38). նրանք կազմում են չորս անկյուններ, որոնք իրենց հատման O կետում ունեն ընդհանուր գագաթ։

Հարադիր անկյունների յուրաքանչյուր զույգը՝ $\angle AOC$ և $\angle COB$, $\angle COB$ և $\angle BOD$ և այլն, կից անկյուններ են։



Նկ. 39.

Կից անկյունները կարող են ստացվել հետևյալ կառուցումով. տված է $\angle AOB$ (նկ. 39). շարունակելով նրա կողմերից մեկը, ասենք՝ OA-ն, O գագաթից դուրս, կստանանք BOC նոր անկյունը, որը կից կլինի տված անկյանը, որովհետև ունի նրա հետ ընդհանուր գագաթ՝ C, մի ընդհանուր կողմ՝ OB, և նրա OC կողմը կազմում է առաջին անկյան OA կողմի շարունակությունը։ $\angle AOB$-ն և $\angle BOC$-ն կից անկյուններ են։

2. Գոյություն ունի՞ արդյոք կախում յերկու կից անկյունների միջև։ Գտնենք AOB և BOC յերկու կից անկյունների գումարը։

$\angle AOB + \angle BOC = AOC$, որը, իբրև բացած անկյուն, հավասար է 2d-ի, այսինքն երկու ուղիղ անկյան: Նշանակի երկու կից անկյունների գումարը հավասար է 2d-ի:

Այս բառերով արտահայտված է մի որոշ դատողություն կից անկյունների հատկության մասին:

3. Կից անկյունների հատկությունը երևան բերինք մի շարք դատողությունների միջոցով, որոնք հիմնված էին երկրաչափական հայտնի իրակությունների (փաստերի) վրա:

Ամեն մի դատողություն երկրաչափական պատկերի՝ որևէ հատկության մասին կոչվում է թեորեմ, եթե նրա իրավացիությունն ակնհայտ է դառնում որոշ հիմնավորումից՝ ապացուցումից հետո, որի համար դիմում ենք արդեն հայտնի երկրաչափական իրակությունների օգնության:

Այս դատողությունը՝ «երկու կից անկյունների գումարը հավասար է 2d-ի», թեորեմ է:

Թեորեմ է նաև մեզ արդեն հայտնի հետևյալ դատողությունը՝ «եթե կենտրոնական անկյունները հավասար են, ապա հավասար են նաև նրանց համապատասխանող աղեղները»:

Թեորեմների հետ մենք գործ ենք ունենում նաև թվաբանության մեջ, թվերի հատկությունների մասին դատողություններ տալիս: Այս դատողությունը՝ «եթե թիվը վերջանում է զույգ թվանշանով, ապա նա առանց մնացորդի բաժանվում է երկուսի վրա», թեորեմ է:

4. Թեորեմի մեջ տարբերում են երկու կողմ. 1. պայման. կամ այն, ինչ որ տված է: Այսպես, հետևյալ թեորեմի մեջ՝ «երկու կից անկյունների գումարը հավասար է 2d-ի», տված են երկու անկյուններ՝ AOB և BOC. Նրանց մասին հայտնի է, որ կից անկյուններ են:

Պայմանի համառոտ գրությունը.

Տված է (տված) $\angle AOB$ և $\angle BOC$ կից անկյուններ են:

2. Եզրակացություն կամ այն, ինչ որ պետք է ապացուցել: Այսպես հետևյալ թեորեմի մեջ՝ «երկու կից անկյունների գումարը հավասար է 2d-ի», պետք է ապացուցել, որ երկու կից անկյունների գումարը հավասար է 2d-ի:

Եզրակացության համառոտ գրությունը՝

Պետք է ապացուցել (ապացուցելի) $\angle AOB + \angle BOC = 2d$.

Թեորեմի պայմանը և նրա եզրակացությունը սովորաբար գրում են տակետակ, ինչպես ցույց է տրված ստորև, և այդ ժամանակ պայմանը եզրակացությունից բաժանում են գծով:

Տված է՝ $\angle AOB$ և $\angle BOC$ կից անկյուններ են

Պետք է ապացուցել՝ $\angle AOB + \angle BOC = 2d$.

5. Այն դատողությունները, որոնք անմիջապես բխում են աքսիոմներից և թեորեմներից, կոչվում են հետևանքներ:

Դիտենք հետևյալ թեորեմի հետևանքները՝ «երկու կից անկյունների գումարը հավասար է 2d-ի»:

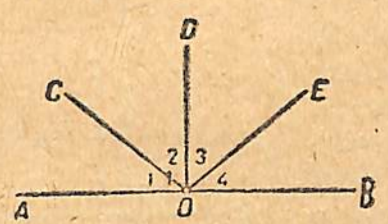
Հետևանքներ. 1. ա) եթե տված անկյունը սուր է, ապա նրան կից անկյունը բութ է, և ընդհակառակը:

բ) Եթե տված անկյունն ուղիղ է, ապա նրա կից անկյունը ևս ուղիղ է:

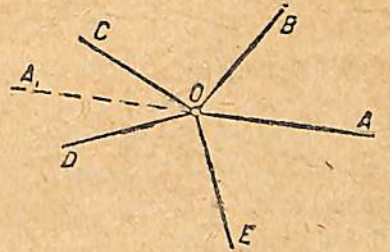
գ) Ուղիղ անկյունը երկու հավասար կից անկյուններից մեկն է:

2. Եթե մի քանի հարակից անկյուններ այնպես են դասավորված, որ առաջին և վերջին արտաքին կողմերը փոխադարձաբար հակադիր են, այսինքն մի ուղիղ գծի վրա իրար շարունակություն են կազմում, ապա այդպիսի անկյունների գումարը հավասար է 2d-ի (Նկ. 40):

Իրոք, 40-րդ նկարում բոլոր հարակից անկյունները միասին կազմում են մի բացած անկյուն, այդ պատճառով նրանց գումարը հավասար է 2d-ի:



Նկ. 40.



Նկ. 41.

3) Եթե մի քանի հարակից անկյուններ այնպես են դասավորված, որ առաջին և վերջին արտաքին կողմերը համընկնում են, ապա այդպիսի անկյունների գումարը հավասար է 4d-ի (Նկ. 41):

O կետից դեպի յետ շարունակելով որևէ անկյան կողմերից մեկը, օրինակի համար՝ OA կողմը, կստանանք AA_1 ուղիղը, որը կբաժանի COD անկյունը երկուսի:

Ունենք՝
$$\angle AOE + \angle EOD + \angle DOA_1 = 2d$$
$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COA_1 = 2d$$
Բոլոր անկյունների գումարը $= 4d$:

6. ա) Երկու անկյուններ, որոնց գումարը հավասար է 180°-ի կամ 2d-ի, կոչվում են հավելվածական անկյուններ:

Իբրև հավելվածական անկյունների օրինակ կարող են ծառայել կից անկյունները: Հավելվածական անկյունները կից անկյուններ կլինեն միայն այն դեպքում, երբ նրանք միաժամանակ նաև հարակից անկյուններ են:

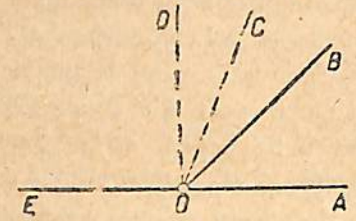
Եթե երկու հարակից անկյունների գումարը հավասար է 2d-ի,

ապա այդ անկյունները կից են, այսինքն նրանց չհամընկնող կողմերը մի ուղիղ գիծ են կազմում:

բ) Երկու անկյուններ, որոնց գումարը հավասար է 90°-ի կամ d-ի, կոչվում են լրացուցիչ անկյուններ:

§ 8. ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑ ԵՎ ԹԵՔ

1. AOB և BOE կից անկյուններից (նկ. 42) առաջինը փոքր է երկրորդից: Եթե նրանց OB ընդհանուր կողմը պտտենք O գագաթի շուրջը, ապա նա կգրավի նաև այնպիսի OD դիրք, երբ երկու կից անկյուններն իրար հավասար կդառնան և, հետևաբար, նրանցից յուրաքանչյուրն ուղիղ անկյուն կլինի: Այդպիսի դիրքի դեպքում OD ուղիղը կոչվում է ուղղահայաց AE ուղիղին, իսկ O կետը՝ ուղղահայացի հիմք:



Նկ. 42.

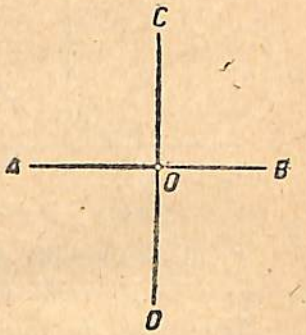
Ուրեմն, տված ուղիղին ուղղահայաց կոչվում է այնպիսի ուղիղը, որը նրա հետ ուղիղ անկյուններ է կազմում:

Երկու ուղիղներ՝ AB և CD, որոնք հատվում են ուղիղ անկյունով (նկ. 43), կոչվում են փոխուղղահայաց ուղիղներ:

Երկու ուղիղների ուղղահայացությունը նշանակում են ⊥ նշանով:

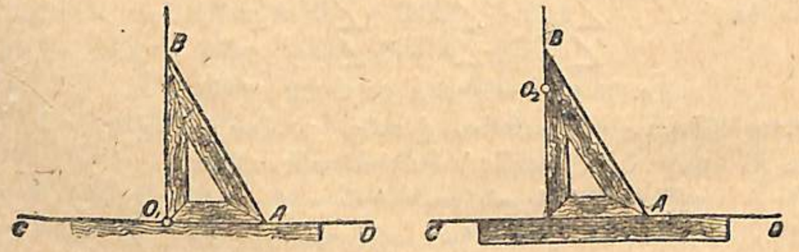
AB ⊥ CD *գրությունը կարդացվում է՝* AB-*ն ուղղահայաց է* CD-*ին:*

2. *Ուղղահայացի կառուցման համար գործ են ածում քանոն և գծագրական եռանկյունի, որի անկյուններից մեկն ուղիղ անկյուն է:*



Նկ. 43.

Ուղղահայաց տանելու եղանակը պարզ է 44-րդ նկարից. $BO_1 \perp CD$ *կամ* $BO_2 \perp CD$:



Նկ. 44.

3. OD-*ից տարբեր ամեն մի այլ ուղիղ, օրինակի համար՝* OB (*նկ.* 45), *որը* AE-*ի հետ ուղիղ անկյուն չի կազմում, այլ մի կողմից սուր,*

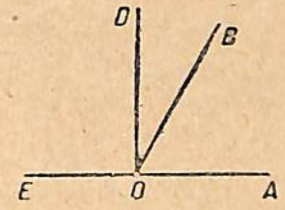
մյուս կողմից բութ անկյուն, կոչվում է թեք. OB *թեքի և* AE *ուղղի հատման* O *կետը կոչվում է* թեքի հիմք:

4. Թեորեմ. Ուղիղի վրա վերցրած կետից կարելի է տանել նրա նկատմամբ միայն մեկ ուղղահայաց:

Տված՝ OD ⊥ EA (*նկ.* 46):

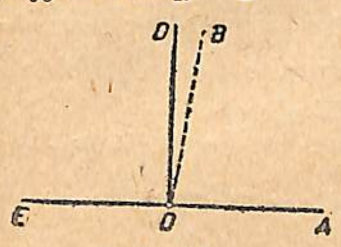
Ապացուցել՝ OD-*ն միակ ուղղահայացն է* EA-*ին* O *կետում:*

Ապացույց. *Ենթադրենք, թե* O *կետով բացի* OD *ուղղահայացից տարված է* EA-*ին մի ուրիշ ուղղահայաց ևս, այն է՝* OB. *այն ժամանակ* OB *ուղղահայացը* OA *ուղիղի հետ ուղիղ անկյուն կկազմի, իսկ այդ նշանակում է, որ* ∠BOA-*ն* = *է* ∠DOA-*ին, որովհետև բոլոր ուղիղ անկյուններն իրար հավասար են.*



Նկ. 45.

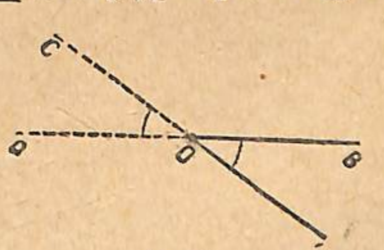
բայց BOA *անկյունը* DOA *անկյան միայն մի մասն է, իսկ մի մասը չի կարող հավասար լինել ամբողջին. այս պատճառով էլ* BOA *անկյունը չի կարող հավասար լինել* DOA *անկյան և հետևաբար այն ենթադրությունը, թե* O *կետով բացի* OD *ուղղահայացից կարելի է մի ուղղահայաց էլ տանել* EA-*ին, իրավացի չէ. այս պատճառով* OD-*ն միակ ուղիղն է, որը* EA-*ի հետ ուղիղ անկյուն է կազմում, իսկ այդ նշանակում է, որ ուղիղի վրա վերցրած կետից ուղիղին կարելի է տանել միայն մեկ ուղղահայաց:*



Նկ. 46.

§ 9. ՀԱԿԱԴԻՐ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

1. *Եթե* AOB *անկյան երկու կողմերն էլ շարունակենք* O *գագաթից դուրս* (*նկ.* 47), *ապա կստացվի* ∠COD, *որը տված անկյան հետ ունի* O *ընդհանուր գագաթը: Երկու անկյուններ, ինչպես մեր օրինակում* AOB *և* COD *անկյունները, կոչվում են* հակադիր անկյուններ, *եթե մեկի կողմերը կազմում են մյուսի կողմերի շարունակությունները: Հակադիր անկյուններն առաջանում են երկու ուղիղների փոխհատման ժամանակ:*



Նկ. 47.

O *կետի մոտ մենք ունենք երկու զույգ հակադիր անկյուններ՝* ∠AOB *և* ∠COD, ∠AOD *և* ∠BOC:

2. Թեորեմ. Հակադիր անկյունները հավասար են:

Տված է՝ ∠AOB և ∠COD հակադիր անկյուններ են (նկ. 47)
Պետք է ապացուցել՝ ∠AOB = ∠COD.

Ապացուցում. *1)* ∠AOB + ∠BOC = 2d, *իբրև կից անկյուններ,*
2) ∠COD + ∠BOC = 2d, *իբրև կից անկյուններ,*

Հետևաբար, ∠AOB + ∠BOC = ∠COD + ∠BOC,

ուստի ∠AOB = ∠COD:

Հետևանք. Եթե տված է այն չորս անկյուններից մեկի մեծությունը, որոնք կազմվում են երկու ուղիղների փոխհատման ժամանակ, ապա մնացած երեքի մեծությունները որոշվում են տված անկյունով:

ՀԱՐՑԵՐ ԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Ինչի՞ է հավասար մի կետի շուրջը դասավորված ութ հարադիր հավասար անկյուններից յուրաքանչյուրը:

2. Ինչի՞ է հավասար երկու ուղիղների փոխհատումից առաջացած չորս անկյուններից յուրաքանչյուրը, եթե նրանցից մեկը հավասար է ա) 60°-ի, բ) $\frac{4}{9}$ *d-ի:*

3. Կառուցել մի անկյուն, որը կից է տված ABC անկյան:

4. Երկու կից անկյուններ հարաբերում են իրար այնպես, ինչպես 4 : 5. Որոշել նրանցից յուրաքանչյուրը:

5. Որոշել այն անկյունը, որը փոքր է իր կից անկյունից՝ ա) 27°-ով, բ) 90°-ով:

6. Մի կետի շուրջը դասավորված չորս հարադիր անկյուններից երեքը համապատասխանաբար հավասար են 0,6 d, 20° և 45°: Որոշել չորրորդ անկյունը:

7. Հաշվել, թե քանի աստիճան է պարունակում այն անկյունը, որը հավասար է՝ 1) $\frac{5}{6}$ *d, 2)* $\frac{3}{8}$ *d, 3)* $1\frac{1}{6}$ *d:*

8. Որոշել այն երկու ուղիղների կազմած անկյունը, որոնցից յուրաքանչյուրը կիսում է երկու կից անկյուններից մեկը: Ցույց տալ, թե ինչ փոխադարձ դիրք ունեն այդ ուղիղները:

III. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

§ 1. ՈՒՂՂԱԳԻԾ ՊԱՏԿԵՐՆԵՐ

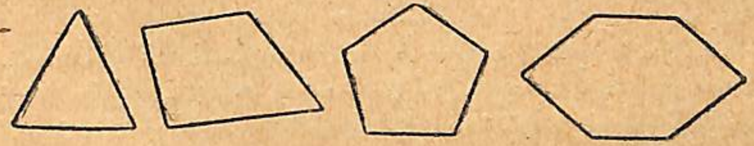
1. Հարթության այն մասը, որ սահմանափակված է փակ բեկյալով, *կոչվում է* բազմանկյուն:

Բեկյալի հատվածները կոչվում են բազմանկյան կողմեր: *Բազմանկյան յուրաքանչյուր երկու հարևան կողմերը կազմում են անկյուն: Բազմանկյան անկյունների թիվը հավասար է նրա կողմերի թվին:*

Եթե բազմանկյունը երեք *կողմ ունի, կոչվում է* եռանկյուն:

Եթե բազմանկյունը չորս *կողմ ունի, կոչվում է* քառանկյուն *և այլն:*

Եթե բազմանկյունը n կողմ ունի, կոչվում է n-անկյուն:



Նկ. 48.

48-րդ նկարում տված են եռանկյունը, քառանկյունը, հնգանկյունը և վեցանկյունը:

2. *Բազմանկյունը նշանակում են լատինական այբուբենի մեծ գրերով, որոնք դրվում են բազմանկյան անկյունների գագաթների մոտ. բազմանկյան անկյունների գագաթները կոչվում են նաև* բազմանկյան գագաթներ:

«Եռանկյուն» բառը գրության ժամանակ փոխարինում են △ նշանով. △ ABC *գրությունը կարդացվում է՝ «եռանկյուն* ABC*» կամ* «ABC *եռանկյուն»:*

Եռանկյան կողմերը՝ AB, BC *և* AC *(նկ. 49), նշանակում են նաև լատինական այբուբենի փոքր գրերով: Այս դեպքում յուրաքանչյուր կողմը սովորաբար նշանակում են այն տառի փոքրագրով, որը դրված է այդ կողմի հանդիպակաց գագաթի մոտ: Այսպես* AB *կողմը, որը գտնվում է* C *գագաթի դիմաց, նշանակվում է* c *փոքրագրով.* AC *կողմը*

b փոքրատառով և BC կողմը a փոքրատառով։ Փոքր տառով սովորաբար նշանակում են նաև կողմի յերկարությունը, յերբ վերջինս չափված է յերկարության չափի վորոշ միավորներով։ Այսպես, օրինակի համար՝

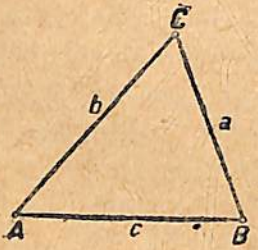
BC=a սմ. AC=b սմ, AB=c սմ.

Այս նշանակումներին համապատասխան՝

1) ∠A-ն գտնվում է a կողմի դիմաց և b ու c կողմերի միջև.
2) ∠B-ն » » b » » » a ու c » »
3) ∠C-ն » » c » » » a ու b » »

Նույնպես և՝

1) a կողմին առընթեր են ∠B և ∠C
2) b » » » ∠A » ∠C
3) c » » » ∠A » ∠B։



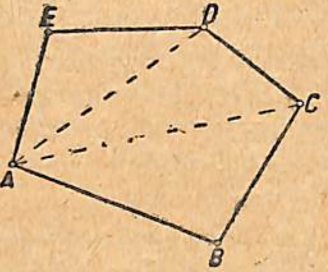
Նկ. 49.

3. **Բազմանկյան պարագիծ** կոչվում է նրա բոլոր կողմերի յերկարությունների գումարը։

ABC յեռանկյան պարագիծը (նկ. 49) հավասար է նրա յերեք կողմերի յերկարությունների գումարին։ Յեթե պարագիծը նշանակենք P տառով, ապա յեռանկյան համար կունենանք P=BC+CA+AB կամ P=a+b+c։

4. **Այն հատվածը, վորը միացնում է բազմանկյան միևնույն կողմի վրա չգտնվող յերկու գագաթները**, կոչվում է **անկյունագիծ**։ Անկյունագծերը բազմանկյունը բաժանում են յեռանկյունների։ AC և AD անկյունագծերը (նկ. 50) ABCDE հնգանկյունը բաժանում են յերեք յեռանկյունների՝ ABC, ACD և ADE։

5. Քանի վոր բազմանկյունը կարելի յե բաժանել յեռանկյունների, ապա բազմանկյան հատկությունների ուսումնասիրությունը վերածվում է յեռանկյան հատկությունների ուսումնասիրության, այդ պատճառով յեռանկյան ուսումնասիրությունը բացառիկ կարևորություն է ստանում։

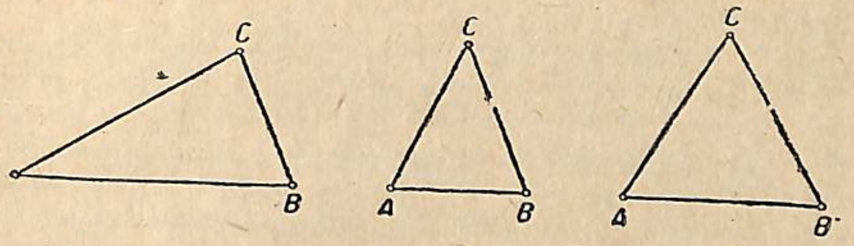


Նկ. 50.

§ 2. ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԱՍԱԿԱՐԳՈՒՄԸ

1. Յեռանկյունները կողմերի յերկարության տեսակետից լինում են ա) **անհավասարակողմ**, յերբ բոլոր կողմերը տարբեր յերկարություններ ունեն, բ) **հավասարասրուն**, յերբ յերկու կողմերը հավասար են և գ) **հավասարակողմ**, յերբ բոլոր յերեք կողմերն իրար հավասար են։

2. Անկյունների մեծության տեսակետից յեռանկյունները լինում են (նկ. 52).

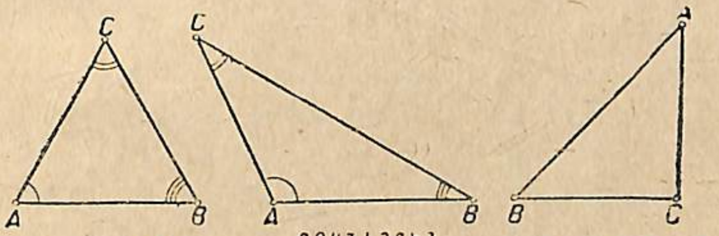


անհավասարակողմ հավասարասրուն հավասարակողմ

Նկ. 51.

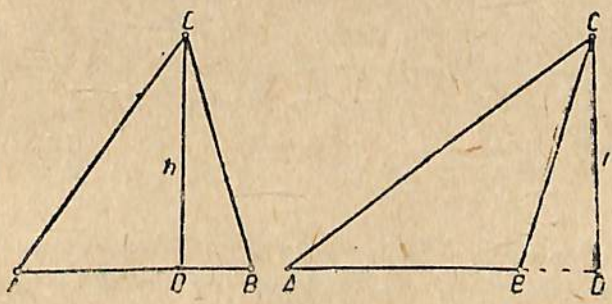
1) **խոտորանկյուն** յեռանկյուններ՝
ա) **սրանկյուն**, յերբ բոլոր անկյունները սուր են.
բ) **բթանկյուն**, յերբ անկյուններից մեկը բութ է.
2) **ուղղանկյուն**, յերբ անկյուններից մեկն ուղիղ է։

3. Ուղղանկյուն յեռանկյան այն կողմերը, վորոնցով կազմված է ուղիղ անկյունը, կոչվում են **էջեր** (կատետներ), իսկ ուղիղ անկյան դիմացի կողմը կոչվում է **ներքնաձիգ** (հիպոթենուզ)։ Հավասարասրուն յեռանկյան մեջ հավասար կողմերը կոչվում են **սրունքներ**։



ՍՐԱՆԿՅՈՒՆ ԲԹԱՆԿՅՈՒՆ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ

Նկ. 52.



Նկ. 53.

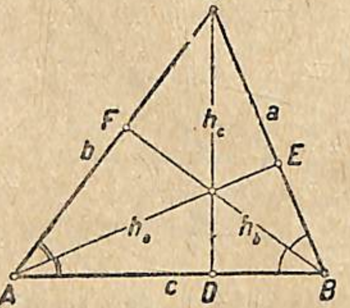
§ 3. ԳԾԵՐ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ՄԵՋ

1. **Բարձրություն**։ Յեռանկյան կողմերից մեկը սովորաբար անվանում են **հիմք**։ Յեռանկյան համար իբրև հիմք կարող է ծառայել նրա

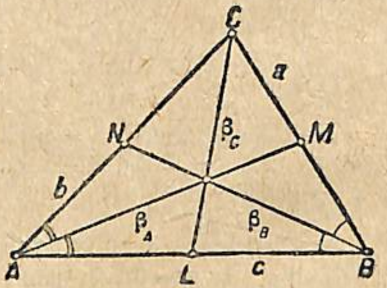
ուրաքանչյուր կողմը։ Խոսելով յեռանկյան գագաթի մասին, սովորաբար նկատի յեն ունենում նրա յերեք գագաթներից այն մեկը, վորը գտնվում ե հիմքի դիմաց։

Հավասարասրուն յեռանկյան մեջ իբրև հիմք ընդունում են սովորաբար այն կողմը, վորը հավասար չե սրունքներին, իսկ իբրև գագաթ՝ նրա դիմացի անկյան գագաթը։ Այն ուղղահայացը, վորը իջեցրած ե յեռանկյան գագաթից հիմքի կամ նրա շարունակության վրա, կոչվում ե յեռանկյան բարձրություն (նկ. 53)։ Բարձրությունն ընդունված ե նշանակել h տառով։ A գագաթից a կողմի վրա իջեցրած բարձրությունը նշանակում են h-ով, մոտը դնելով a նշանիկը, այսպես $AE=h_a$ (նկ. 54)։ Նույնպես և B գագաթից b կողմի վրա իջեցված բարձրությունը նշանակում են h_b, այսպես $BF=h_b$։ Յերրորդ բարձրությունը՝ $CD=h_c$։

2. Կիսորդ։ Այն ուղիղը, վորը յեռանկյան անկյունը կիսում ե, կոչվում ե կիսորդ։ Կիսորդը սովորաբար նշանակվում ե հունարեն β տառով։



Նկ. 54.



Նկ. 55.

Յեռանկյան A գագաթից տարած կիսորդը նշանակում են β-ով, կցելով a նշիկը. այսպես կիսորդ $AM=\beta_A$. B գագաթից տարած կիսորդը նշանակում են β_B. այսպես $BN=\beta_B$։ Յերրորդ կիսորդը՝ $CL=\beta_c$. AM կիսորդը կիսում ե A անկյունը. հետևաբար՝

$$\angle CAM=\angle MAB=\frac{1}{2}\angle A։$$

3. Միջնագիծ. AA_1 հատվածը (նկ. 56), վորը յեռանկյան A գագաթը միացնում ե նրա դիմացի a կողմի A_1 միջնակետի հետ, կոչվում ե միջնագիծ (մեդիանա)։ Միջնագիծը նշանակում են m-ով, կցելով a, b կամ c նշիկը, նայած թե վոր կողմի միջնագիծն ե տարած. այսպես միջնագիծ $AA_1=m_a$. միջնագիծ $BB_1=m_b$ և միջնագիծ $CC_1=m_c$։

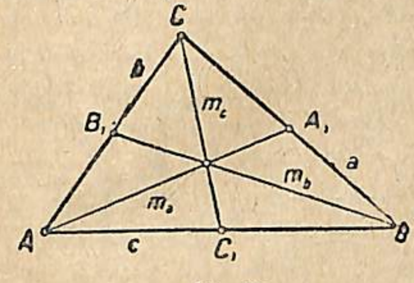
AA_1 միջնագիծը կիսում ե $BC=a$ կողմը, հետևաբար

$$A_1B=A_1C=\frac{a}{2}։$$

57-րդ նկարում տարված են ABC յեռանկյան CD բարձրությունը, CE կիսորդը և CF միջնագիծը։ Բարձրությունը, կիսորդը և միջնագիծը յեռանկյան մեջ յերեք տարբեր գծեր են։

§ 4. ԿԱԽՈՒՄ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

57-րդ նկարում տված ե △ ABC-ն. A և B գագաթները ներկայացնում են թե AB հատվածի և թե ACB բեկյալի ծայրերը։ Ուղիղի աքսիոմի հիման վրա AB հատվածը կարճագույն հեռավորությունն ե A և B կետերի միջև, հետևաբար $AB<AC+CB$. $BC<BA+AC$, $CA<CB+BA$, այս պատճառով ամեն մի յեռանկյան մեջ վորևե յերկու կողմերի գումարը մեծ ե յերրորդ կողմից։



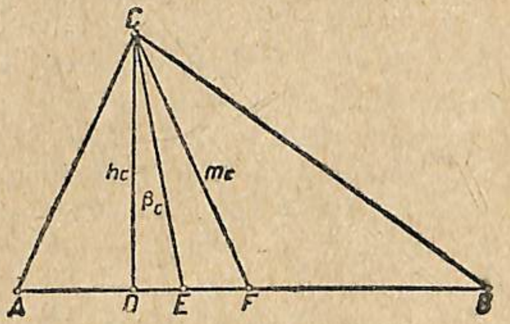
Նկ. 56.

Յեթե $AB<AC+CB$ անհավասարության յերկու մասերից հանենք միևնույն AC մեծությունը, կունենանք՝

$AB-AC<CB$, կամ
$CB>AB-AC$. նմանապես նաև
$BC-BA<AC$,
$CB-CA<BA$, այսինքն՝

յեռանկյան յուրաքանչյուր կողմը մեծ ե նրա յերկու կողմերի տարբերությունից։

Ստացած արդյունքը ցույց ե տալիս, վոր ամեն յերեք հատվածներ չեն կարող իբրև յեռանկյան կողմեր ծառայել. յերեք հատվածներից կարելի յե յեռանկյուն կառուցել միայն այն ժամանակ, յերբ ամեն յերկու հատվածների գումարը մեծ ե յերրորդից։



հիմք
Նկ. 57.

§ 5. ՀԱՎԱՍԱՐԱՍՐՈՒՆ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆ։ ՆՐԱ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Թեորեմ. 1. Հավասարասրուն յեռանկյան մեջ գագաթի անկյան կիսորդը միաժամանակ և՛ միջնագիծ ե և՛ բարձրություն։

2. Հավասարասրուն եռանկյան մեջ հիմքի վրա գտնվող անկյուն-ները հավասար են։

Տված է $\triangle ABC$-ի մեջ՝ 1) $AC=CB$

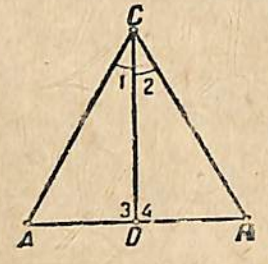
2) CD *— կիսորդ.* $\angle 1=\angle 2=\frac{\angle C}{2}$ *(նկ. 58)*

Պետք է ապացուցել 1) CD*-ն միջնագիծ է, այսինքն* $DA=DB$,

2) CD*-ն բարձրություն է, այսինքն* $CD \perp AB$,

3) $\angle A=\angle B$.

Ապացուցում. *CD կիսորդը կիսում է $\angle C$-ն, որով առաջանում են 1 և 2 անկյունները, և բաժանում է ABC եռանկյունը երկու եռանկյունների՝ $\triangle ACD$ և $\triangle CBD$։ Ծալենք 58-րդ նկարը ըստ CD ուղղի և համոզվենք, որ ACD և CBD եռանկյունները համատեղվում են։ Իրոք, 1 և 2 անկյունների հավասարության հետևանքով CA կողմը կգնա CB կողմի վրայով, և որովհետև $CA=CB$, ապա A կետը կհամընկնի B կետի հետ, միաժամանակ կհամընկնեն նաև DA և DB կողմերը, որովհետև համընկել են նրանց ծայրակետերը՝ A և B, և նրանց ընդհանուր D կետը մնացել է իր տեղում. համատեղվել են նաև 3 անկյունը 4-ի հետ և A անկյունը B-ի հետ։ $\triangle ACD$-ի և $\triangle CBD$-ի բոլոր տարրերի համատեղումից հետևում է, որ։*



Նկ. 58.

1) $DA=DB$, իսկ այս նշանակում է, որ D-ն AB հիմքի միջնակետն է, և CD հատվածը միջնագիծ է։

2) $\angle 3=\angle 4$, և որովհետև այս անկյունները, իբրև կից և իրար հավասար անկյուններ, ուղիղ անկյուններ են, ապա $CD \perp AB$, և CD հատվածը բարձրություն է.

3) $\angle A=\angle B$, այսինքն հավասարասրուն եռանկյան հիմքի մոտի անկյունները հավասար են։ Թեորեմն ապացուցված է։

Հետևանքներ։ 1. Միևնույն եռանկյան մեջ հավասար կողմերի դիմաց ընկած են հավասար անկյուններ։

Իրոք, եթե ABC եռանկյան մեջ երկու կողմերը հավասար են՝ $AC=CB$, ապա նա հավասարասրուն է և հավասար կողմերի դիմաց հավասար անկյուններ են ընկած, այսինքն՝ $\angle A=\angle B$։

2. Հավասարասրուն եռանկյան մեջ գագաթից հիմքի վրա իջեցրած ուղղահայացը կիսում է՝ 1) հիմքը և 2) գագաթի անկյունը։

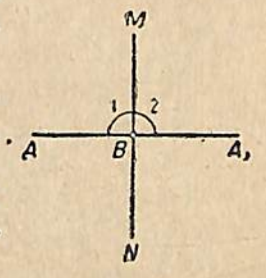
3. Հավասարասրուն եռանկյան մեջ գագաթից դեպի հիմքը տարած միջնագիծն ուղղահայաց է հիմքին և գագաթի անկյունը կիսում է։

4. Հավասարասրուն եռանկյան մեջ հիմքի միջնակետից հիմքին տարած ուղղահայացը, այսինքն հիմքի միջնուղղահայացը անցնում է եռանկյան գագաթով և գագաթի անկյունը կիսում է։

§ 6. ԱՌԱՆՑՔԱՅԻՆ ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

1. Համաչափ կետեր. *Եթե մի թերթի վրա տանենք MN ուղիղը, վերջինիս ձախ կողմում վերցնենք որևէ A կետ և ապա թերթը ծալենք ըստ MN ուղղի այնպես, որ թերթի ձախ մասը համընկնի աջ մասի հետ, ապա A կետը կընկնի մի A_1 կետի վրա (նկ. 59)։ Այսպիսի երկու կետերի մասին ասում են, որ նրանք* համաչափ (սիմետրիկ) *են դասավորված MN ուղղի նկատմամբ։ MN ուղիղը կոչվում է* համաչափության առանցք (սիմետրիայի առանցք)։ *Պարզելու համար, թե ինչպիսի հատկություններ ունեն A և A_1 համաչափ կետերը, միացնում ենք այդ կետերը AA_1 ուղղով. սա կտրում է համաչափության MN առանցքը B կետում։*

Նկարն ըստ MN առանցքի ծալելիս (նկ. 59) A կետը կհամընկնի A_1 կետի հետ և $\angle 1$-ը $\angle 2$-ի հետ, հետևաբար՝

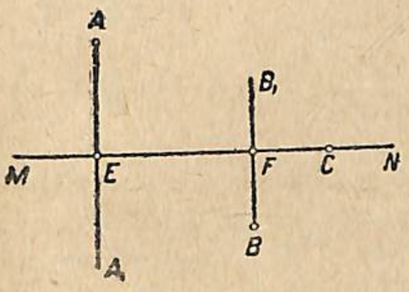


Նկ. 59.

1) $\angle 1=\angle 2$, բայց սրանք կից անկյուններ են և որովհետև իրար հավասար են, ապա յուրաքանչյուրն ուղիղ անկյուն է. կնշանակի $MN \perp AA_1$, այսինքն համաչափության MN առանցքն ուղղահայաց է AA_1 հատվածին, որը միացնում է իրար հետ է A և A_1 համաչափ կետերը։

2) $BA=BA_1$. կնշանակի B կետն AA_1 հատվածի միջնակետն է, և A ու A_1 կետերը համաչափության MN առանցքից հավասարահեռ են։

Այսպես ուրեմն՝ առանցքի նկատմամբ համաչափ կետերը գտնվում են համաչափության առանցքին տարած միևնույն ուղղահայացի վրա, առանցքից հավասար են հեռացած և գտնվում են նրա տարբեր կողմերում. կամ՝ երկու կետերի համաչափության առանցքն ուղղահայաց է այդ կետերը միացնող հատվածին և անցնում է վերջինիս միջնակետով։

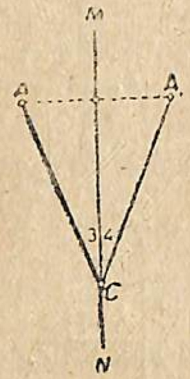


Նկ. 60.

Խնդիր. *Տրված են A, B, C կետերը և MN առանցքը. կառուցել A, B և C կետերի համաչափ կետերը MN առանցքի նկատմամբ։*

Կառուցում. *A և B կետերից (նկ. 60) տանում ենք ուղղահայացներ MN առանցքին և նրանց շարունակության վրա դնում ենք $EA_1=EA$ և $FB_1=BF$ հատվածները. կստանանք A_1 և B_1 կետերը, որոնք համաչափ են A և B կետերին։ C կետի համար, որը գտնվում է համաչափության առանցքի վրա, հենց ինքը C կետը կլինի համաչափ կետ։*

2. **Համաչափ ուղիղներ.** A և A_1 կետերը համաչափ են MN առանցքի նկատմամբ (նկ. 61)։ Ցեթե MN համաչափության առանցքի վրա վերցնենք մի որևէ C կետ և միացնենք A ու A_1 համաչափ կետերի հետ, ապա կստանանք CA և CA_1 ուղիղները, որոնք կհամընկնեն, երբ նկարն ըստ MN ուղիղի ծալենք։ Այդպիսի ուղիղները կոչվում են **համաչափ ուղիղներ**։ 61-րդ նկարը ծալելով ըստ MN առանցքի, մենք



Նկ. 61.

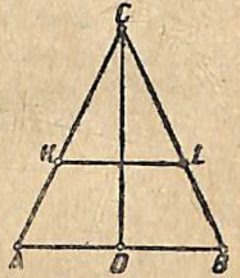
համոզվում ենք, որ կհամընկնեն նաև 3 և 4 անկյունները, որոնք կազմվում են CA և CA_1 համաչափ ուղիղների և առանցքի միջև, հետևաբար՝ $\angle 3 = \angle 4$, իսկ այդ նշանակում է, որ CA և CA_1 համաչափ ուղիղների MN համաչափության առանցքը կիսում է այդ ուղիղների կազմած անկյունը և, հետևաբար՝ այդ անկյան կիսորդն է։ Այսպես ուրեմն, **երկու փոխհատվող համաչափ ուղիղների կազմած անկյան կիսորդը նրանց համաչափության առանցքն է**։

Երկու փոխհատվող համաչափ ուղիղների համաչափության առանցքի այս հատկությունն այսպես էլ են արտահայտում.

Անկյան կիսորդը նրա կողմերի համաչափության առանցքն է:

Հավասարասրուն եռանկյան մեջ գագաթի անկյան կիսորդը այդ անկյան կողմերի համաչափության առանցքն է:

Ցեթե ABC հավասարասրուն եռանկյան մեջ (նկ. 62) C գագաթի անկյան CD կիսորդի որևէ կետից այդ կիսորդին ուղղահայաց տանենք, ապա վերջինս եռանկյան CA և CB սրունքները կհատի K և L երկու համաչափ կետերում. այս կետերն անկյան գագաթից հավասարահեռ են, որովհետև 62-րդ նկարն ըստ առանցքի ծալելիս K ու L կետերը և CK ու CL հատվածները կհամընկնեն։



Նկ. 62.

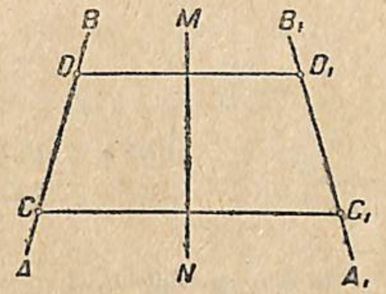
Խնդիր. Կառուցել այն ուղիղը, որը համաչափ է AB ուղիղին համաչափության տված MN առանցքի նկատմամբ (նկ. 63)։

Կառուցում. AB ուղիղի որևէ երկու C և D կետերից տանում ենք MN առանցքին ուղղահայացներ, գտնում ենք այդ կետերի համաչափ կետերը՝ C_1 և D_1, այնուհետև այս կետերով տանում ենք A_1B_1 ուղիղը, որը և համաչափ կլինի տված AB ուղիղին։

3. **Համաչափ պատկերներ։** Երկու պատկերներ համաչափ են կոչվում առանցքի նկատմամբ, եթե մի պատկերի յուրաքանչյուր կետին համապատասխանում է նրան համաչափ կետ մյուս պատկերի վրա։

Պատկերը համաչափ է կոչվում, եթե նրա մեջ կարելի է այնպիսի ուղիղ տանել, որ պատկերն ըստ այդ ուղիղի ծալելիս նրա մի մասը լրիվին համատեղվի մյուսի հետ։ Հավասարասրուն եռանկյունը համաչափ պատկեր է (նկ. 62). նրա բարձրությունը, որը միաժամանակ գագաթի անկյան կիսորդն է, ներկայացնում է նրա համաչափության առանցքը։

Շրջանագիծը համաչափ պատկեր է. նրա յուրաքանչյուր տրամագիծը նրա համաչափության առանցքն է։



Նկ. 63.

ՀԱՐՑԵՐ ՑԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Ինչու հավասարակողմ եռանկյան մեջ նրա ամեն մի բարձրությունը միաժամանակ և՛ կիսորդ է և՛ միջնագիծ։

2. Շրջանի մեջ որ գիծն է ծառայում իբրև տրամագծի համաչափության առանցք։

3. Հավասարասրուն եռանկյան մեջ սրունքին տարած միջնագիծը բաժանում է եռանկյան պարագիծը երկու մասերի, որոնք հավասար են 7,5 սմ-ի և 6,5 սմ-ի։ Հաշվել կողմերը։

4. Կառուցել տված ուղղանկյուն եռանկյանը համաչափ ուղղանկյուն եռանկյուն, եթե համաչափության առանցքն է՝ ա) էջերից մեկը, բ) ներքնաձիգը։ Ի՞նչ պատկեր կստացվի ա) դեպքում։

5. Ապացուցել, որ երկու փոխհատվող ուղիղների համաչափության երկու առանցքները փոխադարձաբար ուղղահայաց են։

IV. ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

§ 1. ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅԱՆ ՅԵՐԵՔ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸ

Յերկու պատկերներ հավասար են կոչվում, յեթե վերադրման դեպքում մեկը մյուսի հետ համընկնում է իր բոլոր տարրերով, այսինքն՝ թե՛ կողմերով և թե՛ անկյուններով:

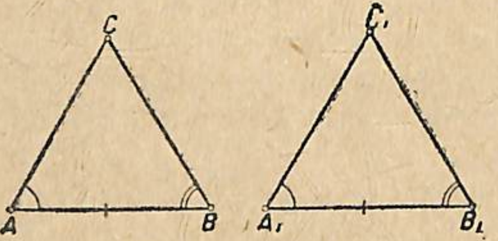
1. Առաջին հայտանիշ.

Թեորեմ. Յերկու յեռանկյուններ հավասար են, յեթե մի յեռանկյան մի կողմը և սրան առընթեր յերկու անկյունները համապատասխանաբար հավասար են մյուս յեռանկյան մի կողմին և սրան առընթեր յերկու անկյուններին:

Տված են՝ △ ABC *և* △ $A_1B_1C_1$. *1)* $A_1B_1=AB$, *2)* $\angle A_1=\angle A$, *3)* $\angle B_1=\angle B$ *(նկ. 64):*

Պետք է ապացուցել՝ $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$.

Ապացուցում. $\triangle A_1B_1C_1$-*ը վերադրենք* △ABC-*ի վրա այնպես, վոր* A_1 *գագաթը համընկնի* A *գագաթի հետ և* A_1B_1 *կողմը գնա* AB *կողմի վրայով. այն ժամանակ,* A_1B_1 *և* AB *կողմերի հավասարության հետևանքով,* B_1 *կետը կընկնի* B *կետի վրա և վորովհետև* $\angle A_1=\angle A$ *և* $\angle B_1=\angle B$, *ապա* A_1C_1 *կողմը կգնա* AC *կողմի վրայով և* B_1G_1 *կողմը՝* BC *կողմի վրայով:* C_1 *յերրորդ գագաթն անպայման կընկնի* C_1 *կետի վրա, վորովհետև* C *և* G_1 *կետերը վորոշվում են միևնույն ուղիղների հատումով, վորոնք համընկել են: Այսպես ուրեմն,* $A_1B_1C_1$ *և* ABC *յեռանկյունները համընկան, հետևաբար, նրանք հավասար են՝* $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$: *Յեռանկյունների հավասարությունից հետևում է նրանց մյուս համապատաս-*



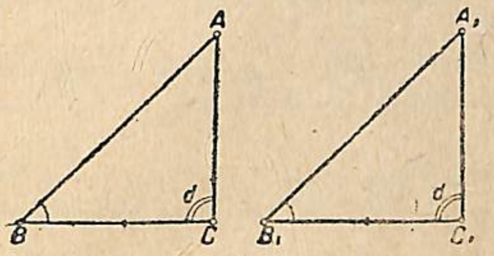
Նկ. 64.

խան դասավորված տարրերի հավասարությունը ևս, այն է՝ $A_1C_1=AC$, $B_1C_1=BC$ *և* $\angle C_1=\angle C$:

Այս թեորեմն ապացուցված է վերադրման յեղանակով:

Հետևանք. Յերկու ուղղանկյուն յեռանկյուններ հավասար են, յեթե ունեն մեկական հավասար էջ և այդ էջին առընթեր մեկական հավասար սուր անկյուն:

Իրոք, 65-րդ նկարից յերևում է, վոր ABC *և* $A_1B_1C_1$ *ուղղանկյուն յեռանկյունները միահավասար են, վորովհետև, ինչպես նկարում նշված է, նրանք ունեն մեկական հավասար կողմ՝* $B_1C_1=BC$. *և յերկուական համապատասխանաբար հավասար անկյուններ, վորոնք առընթեր են այդ կողմին՝* $\angle B_1=\angle B$ *(ըստ պայմանի) և* $\angle C_1=\angle C$, *իբրև ուղիղ անկյուններ:*



Նկ. 65.

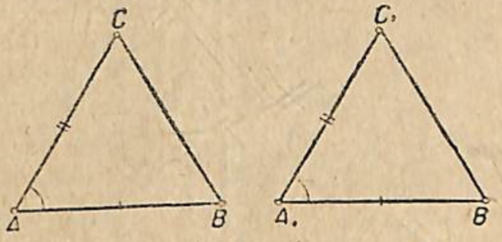
2. Յերկրորդ հայտանիշ.

Թեորեմ. Յերկու յեռանկյուններ հավասար են, յեթե մի յեռանկյան յերկու կողմերը և սրանցով կազմված անկյունը համապատասխանաբար հավասար են մյուս յեռանկյան յերկու կողմերին և սրանցով կազմված անկյանը:

Տված են՝ △ABC *և* $\triangle A_1B_1C_1$, *1)* $A_1B_1=AB$, *2)* $A_1C_1=AC$ *և* *3)* $\angle A_1=\angle A$ *(նկ. 66):*

Պետք է ապացուցել՝ $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$.

Ապացուցում. $\triangle A_1B_1C_1$-*ը վերադրենք* △ABC-*ի վրա այնպես, վոր* A_1 *գագաթը համընկնի* A *գագաթի հետ և* A_1B_1 *կողմը գնա* AB *կողմի վրայով. այն ժամանակ,* A_1B_1 *և* AB *կողմերի հավասարության հետևանքով,* B_1 *կետը կընկնի* B *կետի վրա և,* A *ու* A_1 *անկյունների հավասարության հետևանքով,* A_1C_1 *կողմը կգնա* AC *կողմի վրայով. բայց վորովհետև* $A_1C_1=AC$, *ապա* C_1 *կետը կհամընկնի* C *կետի հետ, միաժամանակ կհամատեղվեն նաև* C_1B_1 *և* CB *կողմերը, վորովհետև նրանց ծայրակետերը՝* C_1 *ու* C *և* B_1 *ու* B, *համընկել են: Այսպես ուրեմն,* $A_1B_1C_1$ *և* ABC *յեռանկյունները համընկան, հետևաբար՝ նրանք հավասար են, այսինքն* $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$: *Յեռանկյունների հավասարությունից հետևում է, վոր նրանց համապատասխան դասավորություն ունեցող կողմերն ու*



Նկ. 66.

անկյունները միահավասար են, այն է՝ 1) $C_1B_1=CB$, 2) $\angle B_1=\angle B$ և 3) $\angle C_1=\angle C$: Այս թեորեմը ևս ապացուցված է վերադրման եղանակով:

Այս եղանակը նրանում է կայանում, որ նախ համատեղում են կետը (մի եռանկյան գագաթը) կետի հետ (մյուս եռանկյան գագաթի հետ). այնուհետև հատվածը (մի եռանկյան կողմը) միահավասար հատվածի հետ (մյուս եռանկյան կողմի հետ). երկու եռանկյունների մեկական անկյան կամ երկուական անկյան հավասարությամբ դատում են վերադրվող եռանկյունների մեկական կողմի կամ երկուական կողմերի ուղղության մասին:

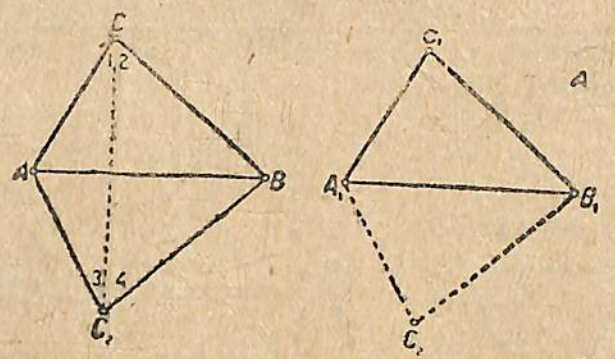
Եթե պարզվում է, որ եռանկյունների երրորդ գագաթներն էլ են համընկնում, ապա եռանկյունները համընկնում են և, հետևաբար, հավասար են:

Հետևանք. Եթե երկու ուղղանկյուն եռանկյունների էջերը համապատասխանաբար հավասար են, ապա այդ ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են:

Իրոք այդպիսի ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են իբրև եռանկյուններ, որոնք ունեն երկուական համապատասխանաբար հավասար կողմեր, որոնց միջև ընկած անկյունը ուղիղ անկյուն է և, հետևաբար, միևնույն մեծությունն ունի:

3. Երրորդ հայտանիշ.

Թեորեմ. Երկու եռանկյուններ հավասար են, եթե մեկի երեք կողմերը համապատասխանաբար հավասար են մյուսի երեք կողմերին:



Նկ. 67.

Տված են՝ $\triangle ABC$ և $\triangle A_1B_1C_1$.

1) $A_1B_1=AB$, 2) $A_1C_1=AC$ և 3) $B_1C_1=BC$ (նկ. 67).

Պետք է ապացուցել՝ $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$.

Ապացուցում. $\triangle A_1B_1C_1$-ը պտտենք A_1B_1 կողմի շուրջը 180°-ով. A_1B_1 կողմը թողնելով անշարժ, այն ժամանակ $\triangle A_1B_1C_1$-ը կգրավի $A_1B_1C_2$ դիրքը: Ակներև է, որ $\triangle A_1B_1C_1=\triangle A_1B_1C_2$: Այժմ $A_1B_1C_2$ եռանկյունն այնպես կցադրենք ABC եռանկյանը, որ A_1 կետը համընկնի A կե-

տի հետ և A_1B_1 կողմը գնա AB կողմի վրայով. այն ժամանակ, A_1B_1 և AB կողմերի հավասարության հետևանքով, B_1 կետը կհամընկնի B կետի հետ և C_2 գագաթը կգրավի C_3 դիրքը: Այնուհետև միացնենք C և C_3 գագաթները CC_3 ուղիղով. առաջացան երկու հավասարասրուն եռանկյուններ՝ ACC_3 և CBC_3, որոնց համար CC_3-ն ընդհանուր հիմք է, $AC=AC_3$ և $BC=BC_3$:

Հավասարասրուն եռանկյունների մեջ հիմքի մոտի անկյունները հավասար են, ուստի

1) ACC_3 եռանկյան մեջ $\angle 1=\angle 3$

և 2) CBC_3 եռանկյան մեջ $\angle 2=\angle 4$:

Անդամ առ անդամ գումարելով՝ կստանանք,

$$\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4,$$

բայց

$$\angle 1+\angle 2=\angle C \text{ և } \angle 3+\angle 4=C_3,$$

ուստի

$$\angle C=\angle C_3:$$

Այժմ դիտենք $\triangle ABC$-ն և $\triangle ABC_3$-ը. նրանց մեջ $AC=AC_3$, $BC=BC_3$ (ըստ պայմանի) և $\angle C=\angle C_3$ (ըստ ապացուցածի). հետևաբար, այդ եռանկյունները հավասար են 2-րդ հայտանիշի համաձայն. բայց $\triangle ABC_3=\triangle A_1B_1C_2=\triangle A_1B_1C_1$ և $\triangle ABC_3=\triangle ABC$. կնշանակի՝ $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$: Թեորեմն ապացուցված է:

§ 2. ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

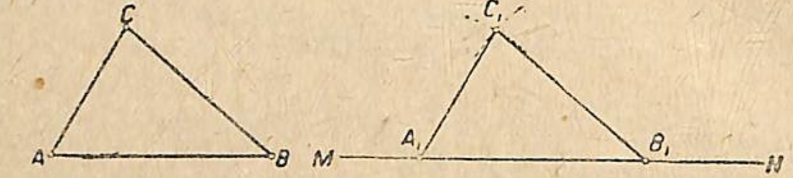
Հարթաչափության հիմնական կերպերն են կետը և գիծը. հարթաչափության մեջ դիտարկվող բոլոր գծերից ամենապարզն են ուղիղ գիծը և շրջանագիծը: Իբրև գործիք ուղիղի կառուցման համար ծառայում է քանոնը, շրջանագծի կառուցման համար՝ կարկինը:

Այս երկու գործիքները՝ համեմատած ուրիշների, օրինակ, փոխադրիչի կամ ուղղանկյունաչափի հետ, շատ ճշգրիտ են: Այս պատճառով երկրաչափության մեջ հնուց այն տեսակետն է հաստատվել, որ ճշգրիտ երկրաչափական կառուցումը պետք է կատարվի կարկինով և քանոնով, այսինքն՝ ուղիղներ և շրջանագծեր գծելու միջոցով: Ըստ այդմ էլ կառուցման խնդիրը միայն այն դեպքում է լուծված համարվում, երբ ցույց է տրված, թե ինչպես է կատարվում կառուցումը կարկինի և քանոնի միջոցով: Երբ պահանջվում է այս կամ այն պատկերը կառուցել, ապա միշտ ենթադրվում է, որ այդ կառուցումը պետք է կատարվի կարկինով ու քանոնով: Եթե այս միջոցներով հնարավոր չի կառուցումը կատարել (ինչպես, օրինակ, անկյունը երեք հավասար մասերի բաժանելը), ապա ասում են, որ պահանջվող կառուցումը (խնդրի այսպիսի ըմբռնումով) անիրագործելի է:

Յեռանկյունների հավասարության թեորեմները հնարավորություն են տալիս լուծելու քանոնի և կարկինի միջոցով կատարվող կառուցման վերաբերյալ բազմաթիվ խնդիրներ, այլև հիմնավորելու կատարած կառուցման ստույգ լինելը։

Խնդիր 1. Կառուցել մի յեռանկյուն, վորը հավասար լինի տված ABC յեռանկյանը *(նկ. 68)*։

Կառուցում։ MN կամավոր ուղիղի վրա դնում են $A_1B_1=AB$, վորտեղ AB-ն ABC յեռանկյան մի կողմն է. A_1 և B_1 կետերն իբրև կենտրոններ ընդունելով, տված յեռանկյան AC և BC կողմերին հավասար շառավիղներով գծում ենք աղեղներ. սրանց հատման C_1 կետը ուղիղներով միացնելով A_1 և B_1 կետերի հետ՝ կստանանք վորոնելի յեռանկյունը՝ $\triangle A_1B_1C_1$։



Նկ. 68.

Իրոք, $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$, վորովհետև նրանց մեջ $A_1B_1=AB$, $A_1C_1=AC$ և $B_1C_1=BC$։

Խնդիր 2. Կառուցել յեռանկյունը, յերբ տված են նրա յերեք կողմերը՝ a, b և c։

Յեռանկյունը կարելի յե կառուցել, յեթե տված յերեք հատվածներից յուրաքանչյուրը փոքր է մնացած յերկուսի գումարից։ Այս պայմանն ստուգելու համար բավական է ստուգել, վոր մեծ հատվածը փոքր է մյուս յերկուսի գումարից, վորովհետև փոքր հատվածներից յուրաքանչյուրը փոքր լինելով մեծ հատվածից, անպայման փոքր կլինի նաև սրա և մյուս հատվածի գումարից։

Ստուգում ենք, թե տվյալ հատվածները բավարարում են նշած պայմանին. յեթե բավարարում են, անցնում ենք կառուցման։

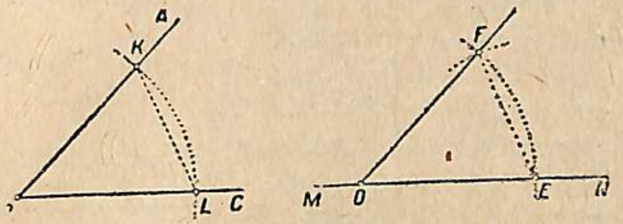
Կառուցումը կատարում ենք այն ձևով, վորը նշված է նախընթաց խնդրում։

Խնդրի տվյալներով կարելի յե այնքան յեռանկյուններ կառուցել, վորքան կամենանք, բայց նրանք բոլորն էլ վերադրման ժամանակ կհամընկնեն իրար հետ։ Նշանակի խնդրի տվյալներով միայն մի յեռանկյուն կարելի յե կառուցել, վորն ունենա տվյալ տեսքն ու մեծությունը։

Խնդիր. 3. Կառուցել մի անկյուն, վորը հավասար լինի տված անկյանը։

Կառուցում. *Տված է* $\angle ABC$ *(նկ. 69)*։ Կտանենք MN ուղիղը և

նրա վրա կնշենք վորևե D կետ։ Այնուհետև կամավոր, բայց միևնույն յերկարության շառավղով յերկու աղեղներ գծենք, մեկի համար կենտրոն ընդունելով B գագաթը, իսկ մյուսի համար՝ D կետը։ Առաջին աղեղը ABC անկյան AB և BC կողմերը կհատի L և K կետերում։ MN ուղիղի և յերկրորդ աղեղի հատման E կետը կենտրոն դարձնելով, CK լարին հավասար շառավղով կգծենք մի նոր աղեղ, վորը յերկրորդ աղեղը կհատի F կետում։ F կետը միացնելով D կետի հետ, կստանանք վորոնելի EDF անկյունը, վորը հավասար է տված ABC անկյանը։



Նկ. 69.

Ապացուցելու համար, վոր այդպիսի կառուցումով ստացած EDF անկյունը հավասար է ABC անկյան, ուղիղով միացնենք E և F կետերը և դիտարկենք DEF և BKL յեռանկյունները։ $\triangle DEF=\triangle BKL$, վորովհետև նրանց մեջ $DE=BL$, $DF=BK$ և $EF=KL$ ըստ կառուցման, իբրև հավասար շրջանագծերի շառավիղներ։

Յեռանկյունների հավասարությունից հետևում է, վոր $\angle EDF=\angle LBK$, իբրև անկյուններ, վորոնք հավասար յեռանկյունների մեջ գտնվում են EF և LK հավասար կողմերի դիմաց։ Այսպես ուրեմն՝

$$\angle EDF=\angle LBK=\angle ABC.$$

Խնդիր 4. Կառուցել յեռանկյունը յերկու կողմերով՝ b ու c, և նրանց միջև գտնվող A անկյունով։

Կառուցում. Վորևե MN ուղիղի վրա մի A կետից դնում ենք $AB=c$ հատվածը և A կետի մոտ կառուցում ենք A-ին հավասար մի անկյուն այնպես, վոր նրա մի կողմը գնա MN ուղիղի վրայով, նրա մյուս կողմի վրա վերցնում ենք $AC=b$ հատվածը։ C կետը միացնելով B կետի հետ, կստանանք վորոնելի ABC յեռանկյունը, վորը բավարարում է խնդրի պայմաններին։

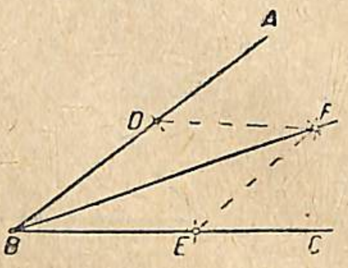
Խնդիր 5. Կառուցել յեռանկյուն, յերբ տված է մի կողմը c և նրան առընթեր յերկու անկյունները՝ A և B։

Կառուցում. MN կամավոր ուղիղի վրա նրա վորևե A կետից վերցնում ենք $AB=c$ հատվածը, A կետի մոտ կառուցում ենք A անկյանը հավասար անկյուն և B կետի մոտ՝ B անկյանը հավասար անկյուն այնպես, վոր այդ յերկու անկյունների յերկրորդ կողմերն AB ընդհանուր կողմն իր վրա կրող MN ուղիղի միևնույն կողմում

գտնվեն. այն ժամանակ այս յերկրորդ կողմերը հատվելով C կետում, կորոշեն վորոնելի ABC յեռանկյան յերրորդ գագաթը: Յերկու ուղիղներ կարող են հատվել միայն մի կետում, այս պատճառով տվյալ խնդրի պայմանները միայն մի լուծում են թույլ տալիս, այսինքն կառուցումը տալիս է վորոշակի տեսքի և վորոշակի մեծության մի յեռանկյուն:

Խնդիր 6. Տված անկյունը կիսել:

Կառուցում. *Տված է ABC անկյունը (նկ. 70): B գագաթը կենտրոն ընդունելով, կամավոր շառավղով աղեղ ենք գծում, վորն անկյան կողմերը հատում է D և E կետերում: Այս կետերն իբրև կենտրոններ ընդունելով, հավասար յերկարության շառավիղներով աղեղներ են գծում, շառավիղները բավականաչափ յերկար ընտրելով, վորպեսզի աղեղներն իրար հետ հատվեն. ստացվում է F կետը: Այնուհետև F կետը միացնելով B գագաթի հետ, կստանանք տված ABC անկյան BF կիսորդը:*



Նկ. 70.

Ապացուցում. *F կետը միացնելով D և E կետերի հետ, կստանանք յերկու յեռանկյուններ՝*

△BDF և △BEF. նրանք հավասար են, վորովհետև նրանց մեջ 1) BF-ն ընդհանուր կողմ է, 2) BE=BD, իբրև միևնույն աղեղի շառավիղներ, 3) EF=DF, իբրև հավասար շրջանագծերի շառավիղներ. այս պատճառով ∠FBE=∠FBD. իբրև այնպիսի անկյուններ, վորոնք հավասար յեռանկյունների մեջ գտնվում են EF և FD հավասար կողմերի դիմաց:

Այսպես ուրեմն, BF ուղիղը կիսում է տված ABC անկյունը. BF-ն անկյան կիսորդն է:

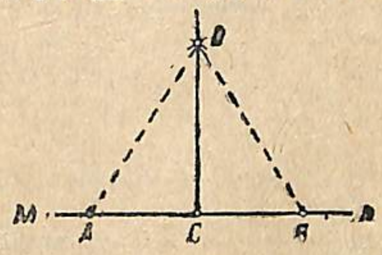
Յեթե FBE և FBD անկյուններից յուրաքանչյուրը կիսենք, ապա տված անկյունը 4 հավասար մասերի կբաժանվի: Նույն ձևով շարունակելով ստացած անկյունների կիսումը, կարող ենք անկյունը բաժանել 8, 16 և ընդհանրապես 2^n հավասար մասերի, վորտեղ n-ն ամբողջ դրական թիվ է:

Խնդիր 7. Ուղիղին ուղղահայաց տանել նրա վրա տված C կետից:

Կառուցում. *Տված MN ուղիղի վրա վերցնում ենք տված C կետից դեպի յերկու կողմերը CA և CB կամավոր միահավասար հատվածները (նկ. 71). A և B կետերն իբրև կենտրոններ ընդունելով, AC-ից մեծ կամավոր շառավղով գծում ենք աղեղներ: Աղեղների հատման D կետը միացնում ենք C կետի հետ. CD ուղիղը վորոնելի ուղղահայացն է:*

Ապացույց. *D կետը միացնելով A և B կետերի հետ, կստանանք*

DCA և DCB յեռանկյունները, վորոնք հավասար են, վորովհետև նրանց մեջ 1) DC-ն ընդհանուր կողմ է, 2) CA=CB, ըստ կառուցման. 3) AD=BD, իբրև հավասար շրջանագծի շառավիղներ. այստեղից հետևում է, վոր ∠DCA=∠DCB. այս անկյունները կից են, և նրանցից յուրաքանչյուրը հավասար է ուղիղ անկյան. այս պատճառով CD⊥AB կամ, վոր նույնն է, CD⊥MN: Այսպես, ուրեմն, CD-ն վորոնելի ուղղահայացն է:

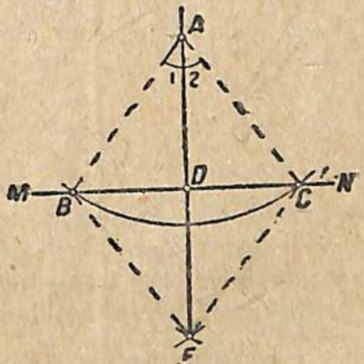


Նկ. 71.

Խնդիր 8. Տված MN ուղիղին ուղղահայաց տանել ուղիղից դուրս վերցրած A կետից *(նկ. 72):*

Կառուցում. *A կետն իբրև կենտրոն ընդունելով, այնպիսի շառավղով աղեղ կգծենք, վոր վերջինս հատի տված MN ուղիղը, ասենք, B և C կետերում: B և C կետերն իբրև կենտրոններ ընդունելով, հավասար շառավիղներով աղեղներ կտանենք MN ուղիղի այն կողմում, վորտեղ չի գտնվում A կետը, այդ աղեղները կհատվեն մի E կետում: Ուղիղ գծով միացնելով A և E կետերը, կստանանք վորոնելի AE ուղղահայացը:*

Ապացուցում: *A և E կետերն ուղիղներով միացնելով B և C կետերի հետ, կստանանք, վոր △ABE=△ACE, վորովհետև նրանց մեջ՝ 1) AE-ն ընդհանուր կողմ է, 2) AB=AC, իբրև միևնույն աղեղի շառավիղներ, 3) BE=CE, իբրև հավասար շրջանագծերի շառավիղներ:*



Նկ. 72.

Յեռանկյունների հավասարությունից հետևում է, վոր ∠1=∠2:

Այնուհետև դիտարկում ենք ABC յեռանկյունը. նա հավասարասրուն է, վորովհետև AB=AC. AD-ն A անկյան կիսորդն է, վորովհետև ∠1=∠2: Հավասարասրուն յեռանկյան գագաթի անկյան կիսորդը միաժամանակ նաև նրա բարձրությունն է, ուստի AD⊥BC կամ, վոր նույնն է, AD⊥MN

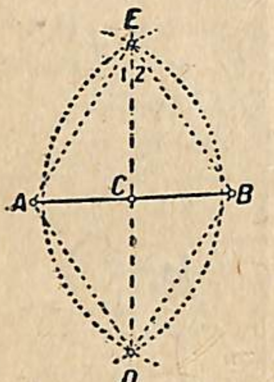
Խնդիր 9. Տվյալ հատվածը կիսել:

Կառուցում. *Տված AB հատվածի A և B ծայրերն իբրև կենտրոններ ընդունելով (նկ. 73), տանում ենք AB-ի կեսից մեծ կամավոր շառավղով աղեղներ այնպես, վոր հատվեն AB հատվածի յերկու կողմերում: Աղեղների հատման D և E կետեր միացնող ED ուղիղը կհատի AB հատվածը C կետում, վորը և կլինի AB տվյալ հատվածի միջնակետը:*

Ապացույց. D և E կետերը միացնելով A և B կետերի հետ, կըստանանք միքանի յեռանկյուններ։ ADE և DBE հավասար յեռանկյուններից հետևում է, վոր $\angle 1=\angle 2$. հավասարասրուն $\triangle ABE$-ից, վորի մեջ $\angle 1=\angle 2$, գտնում ենք, վոր EC-ն գագաթի E անկյան կիսորդն է և, հետևաբար, նաև AB կողմի միջնագիծը, վորի պատճառով $CA=CB$, այսինքն C կետը AB հատվածի միջնակետն է։

ՀԱՐՑԵՐ ՅԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Քանի՞ և ի՞նչպիսի՞ պայմաններով է վորոշվում յերկու հավասարակողմ յեռանկյունների հավասարությունը։



Նկ. 73.

2 Ինչո՞ւ յերկու հավասարասրուն յեռանկյունների հավասարությունը պարզելու համար բավական է իմանալ՝ հավասա՞ր են նրանց մեջ 1) գագաթի անկյունն ու սրունքը, 2) հիմքը և հիմքի մոտի անկյունը և 3) հիմքը և սրունքը՛

3. ABC հավասարասրուն յեռանկյան մեջ հիմքի մոտի A և B անկյունների գագաթներից տարված են AM և BN միջնագծերը։ Ապացուցել, վոր այդ միջնագծերը հավասար են,

Գրել՝ 1) ի՞նչպիսի համապատասխանաբար հավասար տարրեր են հայտնի տված խնդրի պայմանից, 2) վո՞ր յերկու յեռանկյունների հավասարությունը պետք է ապացուցել։

4. Ապացուցել, վոր հավասարասրուն յեռանկյան մեջ հիմքի մոտի անկյունների կիսորդները հավասար են։

5. Յերկու հավասար յեռանկյուններ՝ ABC և $A_1B_1C_1$։ իրար կցադրված են, ինչպես ցույց է տրված 67-րդ նկարում, իրենց AB և A_1B_1 կողմերով, վորոնք իրար հավասար են։ Ապացուցել, վոր այդ յեռանկյունների C և C_1 գագաթները միացնող CC_1 ուղիղը ուղղահայաց է նրանց ընդհանուր AB կողմին, այսինքն $CC_1 \perp AB$։

6. Կառուցել յեռանկյունը, յերբ տված են յերկու կողմերը՝ a, b, և բարձրությունը՝ h_a։

7. Կառուցել յեռանկյունը, յերբ տված են յերկու կողմերը՝ b, c, և միջնագիծը m_b։

8. Կառուցել հավասարասրուն ուղղանկյուն յեռանկյունը, յերբ տված է ուղիղ անկյան գագաթից տարած h_c բարձրությունը։

9. Կառուցել հավասարակողմ յեռանկյունը, յերբ տված է նրա a կողմը։

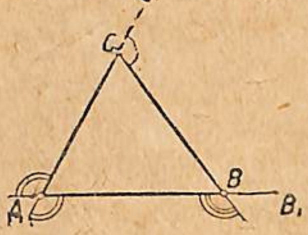
10. Կարկինի և քանոնի միջոցով կառուցել հետևյալ անկյունները. 1) 90°, 2) 45°, 3) 135°։

V. ԿԱԽՈՒՄՆԵՐ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ՅԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

§ 1. ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԱՐՏԱՔԻՆ ԱՆԿՅՈՒՆԸ. ՆՐԱ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

1. Սահմանում. $\angle CAD$-ն կամ $\angle BAE$-ն (նկ. 74), վորը կազմված է յեռանկյան կողմերից մեկով և հարևան կողմի շարունակությամբ, կոչվում է յեռանկյան արտաքին անկյուն, տարբերելու համար յեռանկյան ներքին անկյունից, վորը կազմված է նույն յերկու հարևան կողմերով։

Յեռանկյան յուրաքանչյուր գագաթի մոտ կարելի յե կառուցել յերկու արտաքին անկյուններ, շարունակելով յեռանկյան կամ այս կամ այն կողմը։ Միևնույն գագաթի մոտի արտաքին անկյունները հավասար են, իբրև հակադիր անկյուններ, $\angle CAD=\angle BAE$։



Նկ. 74.

ABC յեռանկյան A գագաթի մոտ կառուցելով CAD և BAE արտաքին անկյունները, մենք ստանում ենք նաև DAE անկյունը, վորը յեռանկյան արտաքին անկյուն չէ, վորովհետև կազմված է յեռանկյան յերկու կողմերի շարունակություններով. այս անկյունը հավասար է յեռանկյան նույն գագաթի մոտի ներքին անկյանը իբրև հակադիր անկյուն։

2. Յեռանկյան մեջ միևնույն գագաթ ունեցող արտաքին անկյունը և ներքին անկյունը կից անկյուններ են, և նրանց գումարը հավասար է 2d-ի, այսինքն $\angle CAD+\angle CAB=2d$։

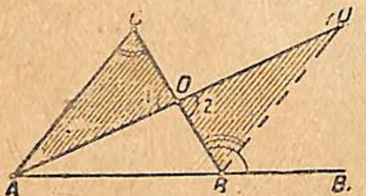
Այս հավասարությունից բխում է՝ 1) յեթե անկյուններից մեկը սուր է, ապա մյուսը բութ է. 2) յեթե յերկու անկյունները հավասար են, ապա նրանցից յուրաքանչյուրն ուղիղ անկյուն է։

3. Թեորեմ: Յեռանկյան արտաքին անկյունը մեծ է յուրաքանչյուր ներքին անկյունից, վոր կից չէ նրան:

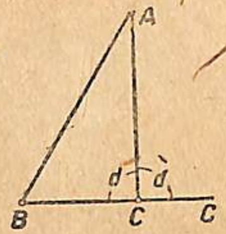
Տված է՝ (նկ. 75) $\triangle ABC$-ի մեջ $\angle CBB_1$-ն արտաքին անկյուն է։

Պետք է ապացուցել՝ 1) $\angle CBB_1>\angle C$, 2) $\angle CBB_1>\angle A$։

Ապացուցում: Տանում ենք $AO=m_a$ միջնագիծը և նրա շարունակության վրա վերցնում ենք AO-ին հավասար OD հատվածը: Այնուհետև D կետը միացնելով B գագաթի հետ, ստանում ենք յերկու յեռանկյուններ՝



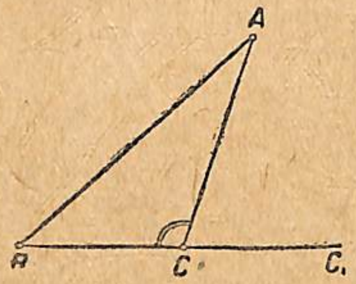
Նկ. 75.



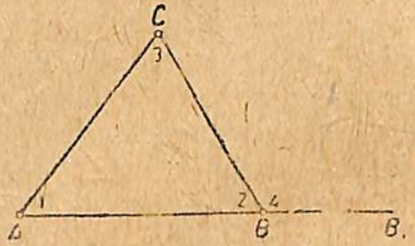
Նկ. 76

$\triangle AOC$ և $\triangle BOD$. նրանց մեջ՝ 1) $CO=OB$ 2) $AO=OD$, 3) $\angle 1=\angle 2$ իբրև հակադիր անկյուններ. հետևաբար յեռանկյունները հավասար են: Նրանց հավասարությունից հետևում է, որ $\angle ACO=\angle OBD$, բայց $\angle OBD$-ն իբրև CBB_1 արտաքին անկյան մի մասը, փոքր է նրանից՝ $\angle OBD<\angle OBB_1$, այս պատճառով նրան հավասար ACO անկյունը ևս փոքր է OBB_1 անկյունից. կամ, որ նույնն է,

$\angle CBB_1>\angle ACB$: Նույն ձևով կապացուցենք, որ $\angle CBB_1>\angle A$. դրա համար կտանենք m_c միջնագիծը:



Նկ. 77.



Նկ. 78.

Հետևանք. յեթե յեռանկյան մեջ մի անկյունն ուղիղ է կամ բութ, ապա մյուս անկյուններն սուր են:

Իրոք, 1) յեթե $\triangle ABC$-ի մեջ (նկ. 76) C-ն ուղիղ անկյուն է, ապա նրան կից ACC_1 արտաքին անկյունը նույնպես ուղիղ է, ուստի $\angle A$ $\angle d$ և $\angle B$ $\angle d$, այսինքն A և B անկյունները սուր են. 2) յեթե $\triangle ABC$-ի մեջ (նկ. 77) $\angle C$-ն բութ է, ապա նրան կից ACC_1 արտաքին անկյունը սուր է, ուստի սուր են նաև A և B անկյունները:

4. Թեորեմ. Ամեն մի յեռանկյան մեջ որևե յերկու ներքին անկյունների գումարը փոքր է յերկու ուղիղ անկյունից:

Տված է՝ $\triangle ABC$-ի 1, 2 և 3 անկյունները (նկ. 78)

Պետք է ապացուցել՝ $\angle A+\angle B<2d$, կամ $\angle A+\angle C<2d$, կամ $\angle B+\angle C<2d$.

Ապացուցում. $\angle 2+\angle 4=2d$ իբրև կից անկյուններ, միաժամանակ $\angle 4>\angle 1$ և $\angle 4>\angle 3$.

Յեթե $\angle 4+\angle 2=2d$ հավասարության ձախ մասի մեջ $\angle 4$-ը փոխարինենք 1 կամ 3 անկյունով, որոնք նրանից փոքր են, ապա գումարը կփոքրանա, հավասարությունը կխախտվի, և կստանանք հետևյալ անհավասարությունը:

և $\angle 1+\angle 2<2d$, կամ $\angle A+\angle B<2d$

$\angle 3+\angle 2<2d$, կամ $\angle C+\angle B<2d$.

Նույն ձևով ապացուցվում է, որ՝ $\angle 1+\angle 3<2d$:

§ 2. ԿԱԽՈՒՄ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ՅԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

Թեորեմ. Ամեն մի յեռանկյան մեջ ա) հավասար կողմերի դիմաց ընկած են հավասար անկյուններ, բ) մեծ կողմի դիմաց ընկած է մեծ անկյուն:

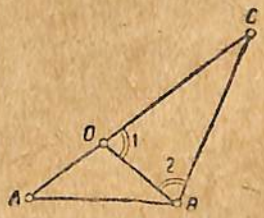
ա) Յեթե ABC յեռանկյան մեջ $AC=CB$, ապա նա հավասարասրուն է, և նրա մեջ հիմքի մոտի անկյունները հավասար են՝ $\angle B=\angle A$. կնշանակի միևնույն յեռանկյան մեջ հավասար կողմերի դիմաց ընկած են հավասար անկյուններ:

Յեթե ABC յեռանկյան մեջ $AC=AD=CB$, ապա նա հավասարակողմ է, և նրա մեջ հավասար կողմերի դիմաց ընկած են հավասար անկյուններ, քանի որ նրա բոլոր հիմքերը հավասար են, ապա հավասար են նաև նրա բոլոր անկյունները: Հավասարակողմ յեռանկյունը միաժամանակ նաև հավասարանկյուն յեռանկյուն է:

բ) Տված է՝ $\triangle ABC$-ի մեջ $AC>CB$ (նկ. 79)

Պետք է ապացուցել՝ $\angle B>\angle A$.

Ապացուցում: AC մեծ կողմի վրա C գագաթից կվերցնենք $CD=CB$ հատվածը և D կետը կմիացնենք B գագաթի հետ. կստանանք CBD հավասարասրուն յեռանկյունը, որի մեջ հիմքի մոտի անկյունները հավասար են՝ $\angle 1=\angle 2$. բայց $\angle 1$-ը իբրև ADB յեռանկյան արտաքին անկյունը մեծ է A անկյունից՝



Նկ. 79.

$\angle 1>\angle A$. մյուս կողմից $\angle 1=\angle 2$, ուստի նաև $\angle 2>\angle A$. բայց $\angle 2$-ը կազմում է $\angle ABC$-ի միայն մի մասը, հետևաբար $\angle ABC$-ն առավել ևս մեծ է $\angle A$-ից՝ $\angle B>\angle A$:

2. Դիտարկենք այս թեորեմներին հակադարձ թեորեմները: Տվյալ թեորեմին հակադարձ կոչվում է այն թեորեմը, որի մեջ իբրև պայ-

ման ծառայում է տվյալ թեորեմի յեզրակացությունը կամ նրա մի մասը, իսկ իբրև յեզրակացություն ծառայում է տվյալ թեորեմի պայմանը կամ նրա մի մասը: Որինակի համար՝

1) *Ամեն մի յեռանկյան մեջ հավասար կողմերի դիմաց ընկած են հավասար անկյուններ:*

Տված է՝ AC=CB, պետք է ապացուցել՝ $\angle B=\angle A$:

2) *Ամեն մի յեռանկյան մեջ հավասար անկյունների դիմաց ընկած են հավասար կողմեր:*

Տված է՝ $\angle B=\angle A$, պետք է ապացուցել, վոր AC=CB:

Յեթե տված թեորեմներից յերկրորդն ընդունվում է իբրև հակադարձ, ապա առաջինը նրա նկատմամբ կոչվում է ուղիղ թեորեմ:

Տված որինակի մեջ յերկու թեորեմներն էլ իրավացի յեն, բայց միշտ չի այդպես լինում: Յեթե ուղիղ թեորեմն ապացուցված է, ապա դեռ չի կարելի յեզրակացնել, վոր հակադարձ թեորեմը տեղի ունի: Այսպես, որինակի համար, իրավացի յե հետևյալ թեորեմը.

«Յերկու հակադիր անկյուններ հավասար են», իսկ հակադարձ թեորեմը՝ «Յեթե յերկու անկյուններ հավասար են, ապա նրանք հակադիր անկյուններ են», տեղի չունի:

3. **Թեորեմ** (հակադարձ). Ամեն մի յեռանկյան մեջ հավասար անկյունների դիմաց ընկած են հավասար կողմեր:

Տված է՝ $\triangle ABC$-ի մեջ $\angle B=\angle A$

Պետք է ապացուցել՝ AC=BC

Ապացուցում (*հակասող ընդունելությամբ*): Պետք է ապացուցել, վոր AC=BC: Յենթադրենք նրան հակասողը, այն է՝ յենթադրենք, վոր AC-ն հավասար չէ BC-ին, այդ դեպքում AC-ն կամ մեծ է BC-ից և կամ փոքր է BC-ից: Նշաններով, ա) $AC>BC$: բ) $AC<BC$:

Այն յենթադրությունից, վոր $AC>BC$, հետևում է, վոր անկ. B> անկ. A, վորովհետև յեռանկյան մեջ մեծ կողմի դիմաց ընկած է մեծ անկյուն: Սակայն ստացված յեզրակացությունը հակասում է թեորեմի պայմանին, ըստ վորի $\angle A=\angle B$, այս պատճառով մեր յենթադրությունը, թե $AC>BC$ անհնարին է. նույն յեզրակացության կգանք, յեթե ընդունենք, վոր $AC<BC$:

Այսպես ուրեմն, յեթե $\angle A=\angle B$, ապա անհնարին է, վոր AC-ն մեծ կամ փոքր լինի BC-ից: Իսկ յեթե AC-ն չի կարող BC-ից մեծ կամ փոքր լինել, ապա AC-ն պետք է հավասար լինի BC-ին:

Այսպես ուրեմն AC=BC:

Վերջին թեորեմն ապացուցելիս մենք օգտվեցինք ապացուցման հակասող ընդունելության յեղանակից. այս յեղանակը նրանում է կայանում, վոր մենք յենթադրում ենք, թե թեորեմի պնդումը ճիշտ չէ, այլ ճիշտ է նրան հակասող պնդումը, և այնուհետև դատողությունների միջոցով հանգում ենք այն յեզրակացության, վոր մեր յենթա-

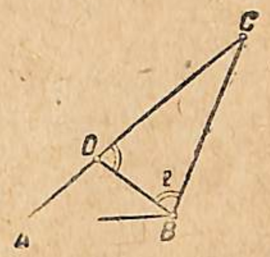
դրությունն անընդունելի յե, վորովհետև հակասում է արդեն ապացուցած թեորեմներին. դրա հետևանքով մեր արած յենթադրությունն, իբրև սխալ յենթադրություն, հերքվում է, և այդպիսով ապացուցվում թեորեմի մեջ տված յեզրակացության իրավացիությունը:

4. **Թեորեմ** (հակադարձ). Ամեն մի յեռանկյան մեջ մեծ անկյան դիմաց ընկած է մեծ կողմ:

Տված է՝ $\triangle ABC$-ի մեջ $\angle B>\angle A$ (նկ. 79 bis)

Պետք է ապացուցել՝ $AC>BC$.

Ապացուցում (*հակասող ընդունելությամբ*): Պետք է ապացուցել, վոր AC-ն մեծ է CB-ից: Յենթադրենք, վոր AC մեծ չէ CB-ից, և դիտարկենք այս պարագային հնարավոր յերկու դեպքերը՝ 1) AC=CB կամ 2) $AC<CB$:



Նկ. 79. bis.

Այն յենթադրությունից, վոր AC=CB, հետևում է, վոր $\angle B=\angle A$, բայց այս յեզրակացությունը հակասում է թեորեմի պայմանին, վորի համաձայն $\angle B>\angle A$, այս պատճառով այն յենթադրությունը, վոր AC=BC, իրավացի չէ. մյուս յենթադրությունից, վոր $AC<CB$, հետևում է, վոր այն ժամանակ նաև $\angle B<\angle A$-ից, վոր նույնպես հակասում է թեորեմի պայմանին: Հանգում ենք այն յեզրակացության, վոր յեթե $\angle B>\angle A$, ապա և $AC>CB$:

5. **Հետևանքներ.** 1. Ուղղանկյուն յեռանկյան մեջ ներքնաձիգը մեծ է յուրաքանչյուր էջից:

2. Բութանկյուն յեռանկյան մեջ բութ անկյան դիմացի կողմը ամենամեծն է:

ՀԱՐՑԵՐ ՅԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Ի՞նչպիսի յեռանկյան մեջ է արտաքին անկյունը հավասար իրեն կից ներքին անկյանը:

2. Ինչու՞ ուղղանկյուն յեռանկյան մեջ էջերից յուրաքանչյուրը փոքր է ներքնաձիգից: Ինչու՞ էջերի գումարը մեծ է ներքնաձիգից: Ի՞նչ թեորեմներ պետք է օգտագործել այս հարցերին պատասխանելու համար:

3. ABC յեռանկյան մեջ կողմերի յերկարությունները են՝ AB=18 սմ, BC==22 սմ և AC=20 սմ: Յեռանկյան անկյուններից վո՞րն է ամենամեծ և վո՞րն ամենափոքրը:

4. ABC յեռանկյան մեջ $\angle A=60^\circ$, $\angle B=80^\circ$ և $\angle C=40^\circ$: Ցույց տալ, թե վո՞րն է յեռանկյան մեծագույն կողմը և վո՞րն է փոքրագույնը:

VI. ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑ ԵՎ ԹԵՔԵՐ

§ 1. ԿԵՏԵՐԻ ԱՌԱՋԱՁԳՈՒԹՅՈՒՆՆ ՈՒՂԻՂԻ ՎՐԱ

1. Թ ե ո ր ե մ. Ուղիղից դուրս գտնվող կետից ուղիղին կարելի յե միայն մի ուղղահայաց տանել:

Տված են՝ MN ուղիղը, նրանից դուրս A կետը և AB⊥MN (նկ. 80),

Պետք է ապացուցել՝ AB-ն միակ ուղղահայացն է A կետից MN ուղիղին։

Ապացուցում (*հակասող ընդունելությամբ*)։ *Ընդունենք վոր A կետից MN ուղիղին տարված է AB ուղղահայացից զատ մի ուրիշ ուղղահայաց ես՝ AC։ Կստանանք △ABC-ն, վորը յերկու ուղիղ անկյուններ ունի; բայց այս լինել չի կարող, վորովհետև յեռանկյան մեջ յերկու անկյունների գումարը միշտ փոքր է յերկու ուղիղ անկյունից։ Նշանակի՝ մեր յենթադրությունը, թե A կետից կարելի յե MN ուղիղին AB ուղղահայացից զատ մի ուրիշ AC ուղղահայաց ես տանել, սխալ է. հետևաբար՝* ուղիղից դուրս վերցրած կետից այդ ուղիղին կարելի յե միայն մի ուղղահայաց տանել:

2. AB *ուղղահայացի* B *հիմքը կոչվում է* A *կետի* առաջաձգություն (*պրոեկցիա*) MN *ուղիղի վրա։* Կետի առաջաձգությունն ուղիղի վրա կետ է:

Հասկանալի յե, վոր B *կետը՝* AB *ուղղահայացի հիմքը, վոչ թե միայն* A *կետի առաջաձգությունն է, այլ նաև ամեն մի այլ կետի, վորը գտնվում է* AB *ուղղահայացի վրա, ներառյալ նաև* B *կետը, վորը գտնվում է և՛ ուղղահայացի, և՛* MN *ուղիղի վրա։*

§ 2. ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑ ԵՎ ԹԵՔԵՐ

1. *Յեթե* AB⊥MN, *ապա* AC, AD, AE *ուղիղները թեքեր են* (*նկար 80*)։

2. Թ ե ո ր ե մ. Յերբ մի արտաքին կետից դեպի տվյալ ուղիղը տանենք ուղղահայացը և վորևե թեք, ապա ուղղահայացը կարճ կլինի թեքից:

Տված են՝ AB⊥MN և AC-ն թեք է (նկ. 80).

Պահանջվում է ապացուցել՝ AB<AC.

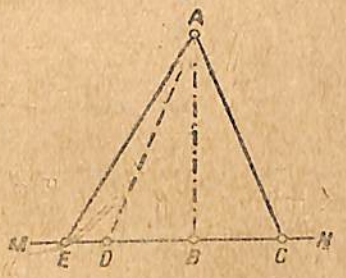
Ապացուցում։ AB *ուղղահայացը և* AC *թեքը ներկայացնում են* ABC *ուղղանկյունը յեռանկյան մեջ համապատասխանաբար էջը և ներքնաձիգը։* AC *ներքնաձիգը մեծ է* AB *էջից՝* AB<AC։

Ուղղահայացը կետի կարճագույն հեռավորությունն է ուղիղից:

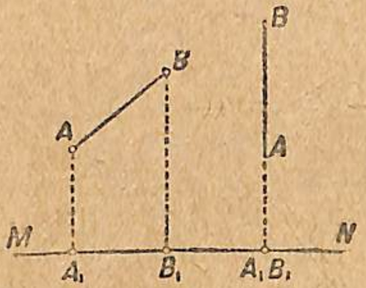
Յերբ ասում են՝ «կետի հեռավորությունն ուղիղից», միշտ հասկանում են կարճագույն հեռավորությունը, վորը չափվում է տվյալ կետից տվյալ ուղիղի վրա իջեցրած ուղղահայացի յերկարությամբ, այսինքն այն հատվածը, վորի ծայրերն են տված կետը և նրա առաջաձգությունը տված ուղիղի վրա։

§ 3. ԹԵՔԵՐ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ԱՌԱՋԱՁԳՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

1. MN *ուղիղի* BC *հատվածը* (*նկ. 80*), *վորի համար իբրև ծայրեր ծառայում են* AB *ուղղահայացի* B *հիմքը և* AC *թեքի* C *հիմքը, կոչվում է* AC *թեքի* առաջաձգություն MN *ուղիղի վրա։*



Նկ. 80 a.



Նկ. 80 b.

Այն դեպքում, յերբ AB *հատվածը չի հատում* MN *ուղիղը* (*նկ. 80* b), *նրա առաջաձգությունը* MN *ուղիղի վրա կոչվում է այն* A_1B_1 *հատվածը, վորի համար իբրև ծայրեր ծառայում են* AB *հատվածի* A *և* B *ծայրերի առաջաձգությունները։*

Յեթե AB *հատվածը ուղղահայաց է* MN *ուղիղին, ապա նրա առաջաձգությունն* MN *ուղիղի վրա* A_1 *կետն է, վորովհետև* AB *հատվածի* A *և* B *ծայրերի* A_1 *և* B_1 *առաջաձգությունները միաձուլվում են։*

2. Թ ե ո ր ե մ. 1) Միևնույն կետից դեպի միևնույն ուղիղը տարած թեքերը հավասար են, յերե հավասար են նրանց առաջաձգությունները:

2) Միևնույն կետից դեպի միևնույն ուղիղը տարած յերկու թեքերից այն է մեծը, վորի առաջաձգությունն այդ ուղիղի վրա մեծ է:

1) Տված են՝ AB⊥MN *և* BC=BD (*նկ. 80*)

Պետք է ապացուցել՝ AC=AD

2) Տված են՝ AB⊥MN *և* BE>BC.

Պետք է ապացուցել՝ AE>AC.

Ապացուցում. 1) ABC և ABD յեռանկյուններն ուղղանկյուն են, նրանց համար AB-ն ընդհանուր կողմ է և $BC=BD$ ըստ պայմանի, հետևաբար, նրանք հավասար յեռանկյուններ են, և այդ պատճառով $AC=AD$:

2) Ըստ պայմանի $BE>BC$, հատված BE-ի վրա B կետից դնենք $BD=BC$ հատվածը և D-ն միացնենք A-ի հետ. կստանանք AD թեքը, վորը հավասար է AC-ին: Դիտենք AED յեռանկյունը. նրա մեջ $\angle ADE$-ն բութ է, իբրև ABD ուղղանկյուն յեռանկյան արտաքին անկյունը, վորը կից չէ ուղիղ անկյանը. հետևաբար $\angle ADE>\angle AED$, ուստի և $AE>AD$, կամ վոր նույնն է՝ $AE>AC$, վորովհետև $AC=AD$:

3. Թեորեմ (հակադարձ). Յեթե միևնույն կետից դեպի միևնույն ուղիղը տարած թեքերը հավասար են, ապա հավասար են նաև նրանց առաջաձգությունները այդ ուղիղի վրա:

Տված են՝ $AB \perp MN$ և $AC=AD$ (նկ. 80 a)

Պետք է ապացուցել՝ $BC=BD$.

Ապացուցում (հակասող ընդունելությամբ). Յենթադրենք $BC>BD$. այն ժամանակ նաև $AC>AD$, վորը, սակայն, հակասում է պայմանին, ըստ վորի $AC=AD$. ուրեմն մեր յենթադրությունը սխալ է. յենթադրենք $BC<BD$. այն ժամանակ նաև $AC<AD$, բայց այս էլ է հակասում պայմանին, ըստ վորի $AC=AD$. ուրեմն մեր այս յենթադրությունն էլ է սխալ:

Այսպես ուրեմն, BC-ն չի կարող BD-ից վոչ մեծ լինել վոչ էլ փոքր, ուստի $BC=BD$:

4. Թեորեմ (հակադարձ). Միևնույն կետից դեպի միևնույն ուղիղը տարած յերկու անհավասար թեքերից մեծ թեքի առաջաձգությունը մեծ է փոքր թեքի առաջաձգությունից:

Տված են՝ $AB \perp MN$ և $AE>AD$ նկ. 80 a)

Պետք է ապացուցել՝ $BE>BD$

Ապացուցում (հակասող ընդունելությամբ). Յենթադրենք, թե BE-ն մեծ չէ BD-ից. այն ժամանակ յերկու դեպք է հնարավոր՝ կամ $BE=BD$ և կամ $BE<BD$: Յեթե առաջին յենթադրությունն ընդունենք, ապա $AE=AD$, բայց այս հակասում է տվյալ պայմանին, վորի համաձայն $AE=AD$. ուստի մեր առաջին յենթադրությունը սխալ է: Յեթե յերկրորդ յենթադրությունն ընդունենք, այսինքն ընդունենք, վոր $BE<BD$, ապա $AE<AD$, վորը նույնպես հակասում է պայմանին. հետևաբար, այս յենթադրությունն էլ է սխալ:

Այսպես ուրեմն, BE-ն չի կարող հավասար լինել BD-ին և չի կարող փոքր լինել BD-ից, ուստի BE-ն կարող է միայն մեծ լինել BO-ից այսինքն $BE>BD$, վոր և պետք էր ապացուցել:

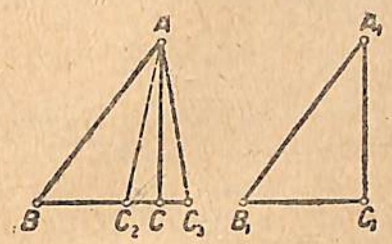
§ 4. ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Քննարկենք ուղղանկյուն յեռանկյունների հավասարության յերկու հատկանիշ ևս:

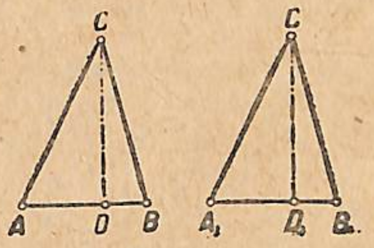
1. Թեորեմ. Ուղղանկյուն յեռանկյունները հավասար են, յեթե մի յեռանկյան ներքնաձիգը և մի սուր անկյունը համապատասխանաբար հավասար են մյուսի ներքնաձիգին և մի սուր անկյանը:

Տված են՝ $\triangle ABC$-ի և $\triangle A_1B_1C_1$-ի մեջ՝ 1) $A_1B_1=AB$ 2) $\angle B_1=\angle B$, 3) $\angle C_1=\angle C=90°$ (նկ. 81):

Պետք է ապացուցել՝ $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$.



Նկ. 81.



Նկ. 82.

Ապացուցում. $\triangle A_1B_1C_1$-ն, այնպես վերադրենք $\triangle ABC$ վրա, վոր A_1B_1 և AB ներքնաձիգները համընկնեն. այն ժամանակ, B և B_1 անկյունների հավասարության հետևանքով, B_1C_1 կողմը կգնա BC կողմի վրայով: Հարց է առաջ գալիս՝ BC ուղիղի վոր կետի վրա կընկնի C_1 կետը: Մտածելի յե յերեք դեպք՝ C_1 կետը կընկնի 1) C-ից դեպի ձախ, 2) C-ից դեպի աջ և 3) C-ի վրա: Յեթե C_1 կետն կընկներ C-ից դեպի ձախ, ասենք, C_2 կետի վրա, այն ժամանակ A_1C_1 էջը կգնար AC_2-ի վրայով, իսկ այս կնշանակեր, վոր A կետից BC ուղիղին յերկու AC և AC_2, վոր հնարավոր չէ, վորովհետև ուղղահայացներ են տարված՝ ուղիղից դուրս վերցրած կետից միայն մի ուղղահայաց կարելի յե տանել ուղիղին: Նույն յեզրակացության կհանգենք, յեթե յենթադրենք թե C_1 կետը կընկնի C-ից դեպի աջ: C_1 կետը, ինչպես տեսնում ենք, չի կարող C կետից վոչ դեպի ձախ ընկնել և վոչ էլ դեպի աջ, հետևաբար, նա կարող է միայն համընկնել C կետի հետ: Այսպես ուրեմն, $A_1B_1C_1$ յեռանկյունը վերադրման ժամանակ համընկնում է ABC յեռանկյան հետ և, հետևաբար, հավասար է նրան:

Հետևանք. Հավասար յեռանկյունները համապատասխանաբար հավասար բարձրություններ ունեն:

Տված է՝ $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$, C_1D_1 և CD նրանց բարձրություններն են (նկ. 82)

Պետք է ապացուցել՝ $C_1D_1=CD$

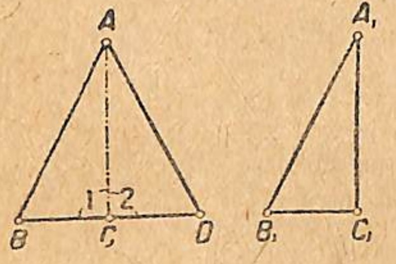
Ապացուցում: Դիտենք $\triangle A_1C_1D_1$-ը և $\triangle ACD$-ն այս յեռան-

կյուններն ուղղանկյուն են. նրանք իրար հավասար են, վորովհետև նրանց մեջ $A_1C_1=AC$ և $\angle A_1=\angle A$. այդ յեռանկյունների հավասարությունից հետևում է, վոր $C_1D_1=CD$, այսինքն վոր $A_1B_1C_1$ և ABC յեռանկյունների բարձրությունները հավասար են: Նույն ձևով կարելի յե ցույց տալ նաև մյուս բարձրությունների հավասարությունը:

2. **Թեորեմ.** Ուղղանկյուն յեռանկյունները հավասար են, յեթե մի յեռանկյան ներքնաձիգը և մի էջը համապատասխանաբար հավասար են մյուսի ներքնաձիգին և մի էջին:

Տված են՝ $\triangle A_1B_1C_1$ և $\triangle ABC$, $A_1B_1=AB$, $A_1C_1=AC$. $\angle C_1=\angle C=90^\circ$ (նկ. 83):

Պետք է ապացուցել՝ $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$.



Նկ. 73.

Ապացուցում. $\triangle A_1B_1C_1$-ն կցադրենք ABC յեռանկյանն այնպես, վոր A_1C_1 և AC հավասար էջերը համընկնեն: Կստանանք ABCD պատկերը: Դիտարկենք C կետի մոտի 1 և 2 անկյունները: $\angle 1+\angle 2=2d$, վորովհետև նրանցից ամեն մեկն ուղիղ անկյուն է. այստեղից հետևում է, վոր BCD-ն բացած անկյուն է, ուստի և BC-ն և CD-ն մի ուղիղ են կազմում. յեզրակացնում ենք, վոր ստացված պատկերը յեռանկյուն է. բայց այս յեռանկյան մեջ AB=AD, այս պատճառով նա հավասարասրուն է և իր AC բարձրությամբ բաժանվում է յերկու հավասար յեռանկյունների՝ $\triangle ABC=\triangle ACD$. հետևաբար նաև $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$:

ՀԱՐՑԵՐ ՅԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Հավասարասրուն յեռանկյան հիմքը հավասար է a-սմ-ի: Ինչի՞ յե հավասար նրա սրունքի առաջանձգությունը հիմքի վրա:

2. Ուղղանկյուն յեռանկյան էջերը համապատասխանաբար հավասար են a սմ-ի և b սմ-ի: Ինչի՞ յեն հավասար ներքնաձիգի առաջանձգությունները յուրաքանչյուր էջի վրա:

3. Բութանկյուն յեռանկյան մեջ բարձրություն տանել այն կողմից մեկին, վորոնք կազմում են բութ անկյունը:

4. ABC յեռանկյան մեջ տարված է AD կիսորդը: Ապացուցել վոր AD կիսորդի առաջանձգությունները AB յեվ AC կողմերի վրա հավասար են:

5. AD-ն ABC անկյան կիսորդն է: Ապացուցել, վոր կիսորդի ամեն մի կետը հավասարահեռ է անկյան կողմերից:

6. Տված են MN ուղիղը և նրանից դուրս A ու B կետերը: MN ուղղի վրա գտնել այնպիսի կետ, վորը հավասարահեռ է A և B կետերից:

VII. ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՈՒՂԻՂՆԵՐ

§ 1. ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՈՒՂԻՂՆԵՐ

1. Մի հարթության վրա դասավորված յերկու ուղիղներ՝ AB և CD, միմյանց նկատմամբ կարող են զանազան դիրքեր ունենալ. նրանք կարող են կամ փոխհատվել, կամ համընկնել և կամ իրար հետ չհատվել:

1) այն դեպքում, յերբ AB և CD յերկու ուղիղները փոխհատվում են, նրանք ունենում են մի ընդհանուր կետ՝ հատման կետը, վորը հետևաբար պատկանում է թե մեկ և թե մյուս ուղղին, այսինքն գտնվում է թե մեկ և թե մյուս ուղղի վրա:

2) Այն դեպքում, յերբ յերկու ուղիղներ վոչ թե մեկ, այլ յերկու ընդհանուր կետ ունեն, նրանք համընկնում են, վորովհետև յերկու կետերով միայն մի ուղիղ կարելի յե տանել և այս պատճառով մեկ ուղղի ամեն մի կետը նաև մյուս ուղղի կետն է:

3) Վերջապես, յերբ յերկու ուղիղներ՝ AB և CD (նկ. 84), վորոնք դասավորված են միևնույն հարթության վրա, վոչ մի ընդհանուր կետ չունեն, այսինքն չեն հատվում իրար հետ, ինչքան էլ նրանց շարունակենք դեպի մեկ ու դեպի մյուս կողմը և չեն էլ համընկնում, ապա այդպիսի ուղիղները կոչվում են զուգահեռ ուղիղներ:

Նկ. 84.

Սահմանում. Այնպիսի ուղիղները, վորոնք դասավորված են մի հարթության վրա և վորոնք իրար հետ չեն հատվում, վորքան էլ դեպի յերկու կողմ շարունակենք, կոչվում են զուգահեռ ուղիղներ:

Զուգահեռ ուղիղների մասին հասկացողություն կարող են տալ՝ յերկաթուղու ուղիղ ռելսերը, սեղանի ուղղանկյուն յերեսատախտակի հակադիր յեզրերը, յերկու կապարալարեր, ճախարակների թելերը և այլն:

Ուղիղների զուգահեռությունը նշանակելու համար գործածում են

‖ նշանը. AB ‖ CD գրությունը կարդացվում ե՝ AB ուղիղը զուգահեռ ե CD ուղղին։

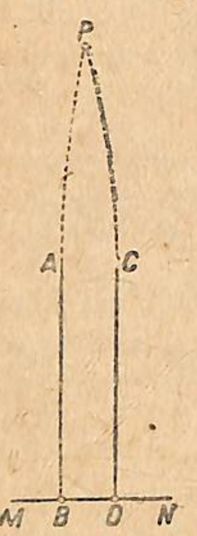
2. Վոր զուգահեռ ուղիղներ գոյություն ունեն, այդ մեզ ցույց ե տալիս մեզ շրջապատող առարկաների ամենօրյա դիտողությունը, բայց զուգահեռ ուղիղների գոյությունը կարելի յե ապացուցել նաև տեսական ճանապարհով։

Թեորեմ. Յերկու ուղիղներ, վորոնք ուղղահայաց են միևնույն ուղղին, իրար հետ չեն հատվում, այսինքն զուգահեռ են։

Տված են՝ AB ⊥ MN, CD ⊥ MN *(նկ. 85)*

Պետք ե ապացուցել՝ AB ‖ CD.

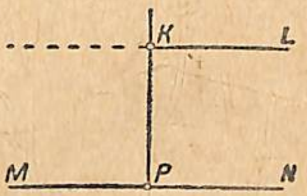
Ապացուցում *(հակասող ընդունելությամբ)։ Յենթադրենք, թե* AB *և* CD *ուղիղները, վորոնք ուղղահայաց են* MN *ուղղին, շարունակվելու դեպքում փոխհատվում են վորևե* P *կետում. այն ժամանակ* P *կետից դեպի* MN *ուղիղը տարված կլինեն յերկու ուղղահայացներ՝* AB *և* CD, *վոր սակայն հնարավոր չե, վորովհետև մի կետից մի ուղղի կարելի յե միայն մեկ ուղղահայաց տանել, հետևաբար, մեր յենթադրությունը, թե* AB *և* CD *ուղիղները փոխհատվում են, սխալ ե, քանի վոր այդ ուղիղները չեն փոխհատվում (և չեն համընկնում), ապա նրանք զուգահեռ են. այսպես ուրեմն* AB ‖ CD։



Նկ. 85.

Խնդիր. Տված ե *(նկ. 86)* MN ուղիղը և նրանից դուրս K կետը։ K կետից տանել այնպիսի ուղիղ, վոր զուգահեռ լինի MN ուղղին։

Կառուցում. *Տված* K *կետով տանում ենք* KP*-ն ուղղահայաց* MN *ուղղին, այնուհետև նույն կետից* KL*-ն ուղղահայաց* KP*-ին։* KL*-ն վորոնած ուղիղն ե։ Իրոք* KL ‖ MN, *վորովհետև* KL *և* MN *ուղիղներն ուղղահայաց են* KP *ուղղին։*



Նկ. 86.

§ 2. ԶՈՒԳԱՀԵՌՆԵՐԻ ԱՔՍԻՈՄԸ

1. *Մենք համոզվեցինք, վոր* MN *ուղղից դուրս վերցրած* K *կետից կարելի յե այդ ուղղին զուգահեռ ուղիղ տանել։ Պետք եր նաև ապացուցել, վոր այդպիսով տարած* KL *ուղիղը* միակն *ե, վորն անցնում ե* K *կետով և զուգահեռ ե* MN *ուղղին։ Սակայն այս դրույթը մաթեմատիկորեն ապացուցել անկարելի յե և այն պետք ե ընդունել վորպես աքսիոմ. հենց այդպես ել վարվել են հին հույն յերկրաչափները մեր թվականությունից շատ առաջ։ Բայց և այնպես բոլոր ժամանակների և ժողովուրդների լավագույն յերկրաչափները փորձել են ապացուցել այդ դրույթը և հանդիպել են անհաջողության։ Միայն անցյալ (XIX) դարում հաջողվեց ապացուցել, վոր այդ դրույթը* հնարավոր չե *ապացուցել, այսինքն վոր այդ դրույթը հնարավոր չե արտածել իբրև տրամաբանական հետևանք մնացած աքսիոմներից, վորոնք սովորաբար դրվում են յերկրաչափության հիմքում։ Այդպիսի ապացուցման պլանը լավ հայտնի յեր դեռ գերմանացի մաթեմատիկոս Գաուսին (1777—1855). բայց այնպիսի յերկրաչափական կառուցում, վորը հարցը գրեթե սպառում եր, իրապես տվեց 182[illegible] թվին ռուս յերկրաչափ* Ն. Ի. Լոբաչևսկին *(1793—1856) և նրանից հետո 1832 թ. հունգարացի մաթեմատիկոս* Յ. Բոլյայը *(1802—1860)։ Նրանցից հետո մի շարք յերկրաչափներ ապացույցը սպառիչ կերպով հիմնավորեցին, և ներկայումս միանգամայն պարզ ե, վոր Եվկլիդը ուղիղ ե վարվել ընդունելով այդ դրույթն իբրև աքսիոմ. նրա իրավացիությունն արդարացվում ե անմիջական դիտողություններով և դարավոր փորձով, վոր կուտակել ե մարդկությունը։*

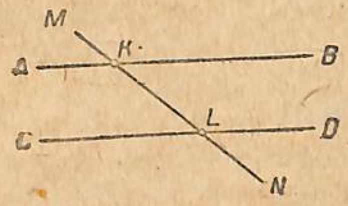
Աքսիոմ. Ուղղից դուրս վերցված մի կետից այդ ուղղին կարելի յե միայն մի զուգահեռ ուղիղ տանել։

2. Հետևանքներ 1. Յերբ ուղիղը հատում ե զուգահեռ ուղիղներից մեկը, ապա նա կհատի նաև մյուսը։

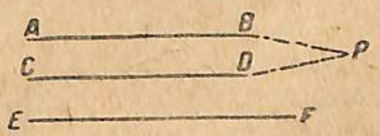
Տված են՝ AB ‖ CD. MN*-ը հատում ե* AB*-ն* K *կետում (նկ. 87)*

Պետք ե ապացուցել՝ MN*-ը հատում ե* CD*-ն։*

Ապացուցում *(հակասող ընդունելությամբ)։ Յենթադրենք՝* MN *ուղիղը, վորն* AB *ուղղի հետ հատվում ե* K *կետում, չի հատվում* CD *ուղղի հետ։ Յեթե այդ այդպես ե, ապա* MN*-ն պետք ե զուգահեռ լինի* CD*-ին, և այն ժամանակ* K *կետով յերկու ուղիղներ* (AB *և* MN) *կանցնեն, վորոնք զուգահեռ կլինեն* D*-ին. բայց այս հակասում ե զուգահեռների աքսիոմին. հետևաբար, մեր յենթադրությունը, թե բացի* AB *ուղղից* K *կետով մի ուրիշ ուղիղ ե անցնում, վորը նույնպես զուգահեռ ե* CD*-ին, սխալ ե։ Այսպես ուրեմն,* MN *ուղիղը զուգահեռ չե* CD*-ին և, հետևաբար, այս ուղիղները հատվում են։*



Նկ. 87.



Նկ. 88.

2. Յերբ յերկու ուղիղներից ամեն մեկը զուգահեռ ե մի յերրորդ ուղղին, ապա նրանք իրար ել զուգահեռ են։

Տված են՝ AB ∥ EF և CD ∥ EF (նկ. 88)

Պետք է ապացուցել՝ AB ∥ CD։

Ապացուցում (հակասող ընդունելությամբ)։ Ենթադրենք AB և CD ուղիղները զուգահեռ չեն և հատվում են որևէ P կետում։ Այն ժամանակ P կետից երկու տարբեր ուղիղներ (AB և CD) կանցնեն, որոնք զուգահեռ են EF-ին, բայց այս հակասում է զուգահեռների աքսիոմին. հետևաբար, մեր ենթադրությունը սխալ է։ Այսպես ուրեմն, AB և CD ուղիղները, որոնք զուգահեռ են EF ուղիղին, չեն կարող փոխհատվել. նրանք զուգահեռ են՝ AB ∥ CD։

§ 3. ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ, ՈՐՈՆՔ ԱՌԱՋ ԵՆ ԳԱԼԻՍ, ԵՐԲ ԵՐԿՈՒ ԶՈՒԳԱՀԵՌՆԵՐ ՀԱՏՎՈՒՄ ԵՆ ՄԻ ՈՒՂԻՂՈՎ

1. Երբ AB ուղիղը (նկ. 89) հատում է մի որևէ ուղիղ, օրինակի համար CD-ն, ապա նրա հետ կազմում է 4 անկյուններ, որոնք զույգ առ զույգ իրար հավասար են իբրև հակադիր անկյուններ. այսպես՝ $\angle 1=\angle 3$ և $\angle 2=\angle 4$։ Բացի դրանից հակադիր անկյուններից յուրաքանչյուր զույգի գումարը տվյալ դեպքում հավասար է 2d-ի, որովհետև այստեղ հակադիր անկյունները նաև կից անկյուններ են՝

$$\angle 1+\angle 2=2d,\quad \angle 2+\angle 3=2d,$$
$$\angle 3+\angle 4=2d,\quad \angle 1+\angle 4=2d։$$

Եթե AB և CD ուղիղներն իրար նկատմամբ ուղղահայաց չեն, ապա հակադիր անկյուններից երկուսը բութ են լինում և երկուսը սուր, իսկ եթե այդ ուղիղներն իրար ուղղահայաց են, ապա բոլոր չորս անկյուններն էլ ուղիղ անկյուններ են լինում և հետևաբար, իրար հավասար։

Նկ. 89.

2. Եթե EF ուղիղը (նկ. 90) հատում է ոչ թե մեկ, այլ երկու ուղիղներ՝ AB և CD, ապա փոխհատման կետերի մոտ առաջանում են ութ անկյուններ՝ չորսը AB ու EF ուղիղների փոխհատման M կետի մոտ և չորսն էլ CD ու EF ուղիղների փոխհատման N կետի մոտ։ EF ուղիղը, որը հատում է AB ու CD ուղիղները, կոչվում է հատող։

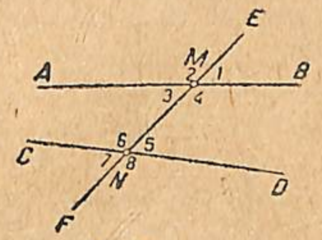
Նայած հատողի նկատմամբ ունեցած դասավորության, առաջացած անկյուններն ստանում են առանձին անուններ։

1) Այն անկյունները, որոնք դասավորված են AB ու CD ուղիղների միջև EF հատողի միևնույն կողմում, կոչվում են՝ ներքին միակողմյան անկյուններ։ Դրանք են՝ $\angle 3$ ու $\angle 6$, $\angle 4$ ու $\angle 5$։

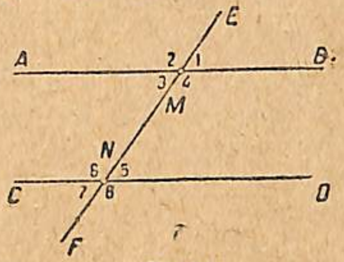
2) Այն անկյունները, որոնք դասավորված են AB ու CD ուղիղներից դուրս EF հատողի միևնույն կողմում, կոչվում են արտաքին միակողմյան անկյուններ։ Դրանք են՝ $\angle 1$ և $\angle 8$, $\angle 4$ ու $\angle 7$։

3) Այն անկյունները, որոնք դասավորված են AB ու CD ուղիղների միջև EF հատողի տարբեր կողմերում, կոչվում են ներքին խաչադիր անկյուններ։ Դրանք են՝ $\angle 3$ և $\angle 7$, $\angle 4$ և $\angle 6$։

4) Այն անկյունները, որոնք դասավորված են AB ու CD ուղիղներից դուրս EF հատողի տարբեր կողմերում, կոչվում են արտաքին խաչադիր անկյուններ։ Դրանք են՝ $\angle 1$ և $\angle 7$, $\angle 2$ և $\angle 8$։



Նկ. 90.



Նկ. 91.

5) Այն անկյունները, որոնք դասավորված են EF հատողի մի կողմում և որոնցից մեկը արտաքին է, իսկ մյուսը ներքին, կոչվում են համապատասխան անկյուններ։ Դրանք են՝ $\angle 1$ և $\angle 5$, $\angle 2$ և $\angle 6$, $\angle 3$ և $\angle 7$, $\angle 4$ և $\angle 8$։

3. Եթե նշած անկյունազույգերից որևէ մեկի երկու անկյունների միջև մի որոշակի կախում գոյություն ունի, ապա սրանից իբրև հետևանք, բխում է, որ մյուս անկյունազույգերի անկյունների միջև ևս որոշակի կախում կա։

Թեորեմ: Եթե երկու ուղիղներ երրորդով հատվելիս համապատասխան անկյունները հավասար են, ապա 1) ներքին խաչադիր անկյունները հավասար են, 2) արտաքին խաչադիր անկյունները հավասար են, 3) ներքին միակողմյան անկյունների գումարը 2d է, 4) արտաքին միակողմյան անկյունների գումարը 2d է:

Տված են՝ AB ու CD ուղիղները և EF հատողը $\angle 1=\angle 5$ (նկ. 91).

Պետք է ապացուցել՝ 1) $\angle 3=\angle 5$ և $\angle 4=\angle 6$

2) $\angle 1=\angle 7$ և $\angle 2=\angle 8$

3) $\angle 4+\angle 5=2d$ և $\angle 3+\angle 6=2d$

4) $\angle 1+\angle 8=2d$ և $\angle 2+\angle 7=2d$։

Ապացուցում. 1) $\angle 1=\angle 5$ ըստ պայմանի, $\angle 1=\angle 3$ իբրև հակադիր անկյուններ. հետևաբար, $\angle 3=\angle 5$, որովհետև եթե երկու մեծություններ՝ $\angle 3$ և $\angle 5$ զատ-զատ հավասար են երրորդին, այսինքն $\angle 1$-ին, ապա իրար հավասար են։

Այսպես ուրեմն. եթե $\angle 1$ և $\angle 5$ համապատասխան անկյունները

հավասար են, ապա հավասար են նաև 3 և 5 ներքին խաչադիր անկյունները, այսինքն $\angle 3=\angle 5$։ Նույն ձևով կարելի յե ապացուցել, վոր $\angle 1=\angle 7$, յեթե $\angle 1=\angle 5$։

2) Ըստ պայմանի $\angle 1=\angle 5$. յեթե $\angle 1$-ին ավելացնենք $\angle 4$-ը, և $\angle 5$-ին ավելացնենք $\angle 6$-ը, ապա $\angle 1+\angle 4=2d$ և $\angle 5+\angle 6=2d$, իբրև կից անկյուններ։ Այսպես ուրեմն, 1 և 5 հավասար անկյուններին ավելացրինք մեկական անկյուն և յերկու դեպքում էլ միևնույն գումարն ստացանք, այն է 2d. բայց այս հնարավոր է միայն այն դեպքում, յերբ $\angle 4=\angle 6$, իսկ այս ցույց է տալիս, վոր ներքին խաչադիր անկյուններն իրար հավասար են։ Նույն ձևով կարելի յե ապացուցել, վոր $\angle 2=\angle 8$ յեթե $\angle 1=\angle 5$։

3) Ըստ պայմանի $\angle 1=\angle 5$, իսկ $\angle 1+\angle 4=2d$ իբրև կից անկյունների գումար։ Վերջին հավասարության մեջ $\angle 1$-ը փոխարինելով նրան հավասար $\angle 5$-ով, ստանում ենք, վոր $\angle 5+\angle 4=2d$, այսինքն ներքին միակողմյան անկյունների գումարը 2d է։ Նույն ձևով ապացուցում ենք, վոր $\angle 2+\angle 6=2d$, յեթե $\angle 1=\angle 5$։

4) Ըստ պայմանի $\angle 1=\angle 5$, իսկ $\angle 5+\angle 8=2d$ իբրև կից անկյունների գումար։ Վերջին հավասարության մեջ $\angle 5$-ը փոխարինելով նրան հավասար $\angle 1$-ով, կստանանք $\angle 1+\angle 8=2d$, այսինքն՝ արտաքին միակողմյան անկյունների գումարն է 2d։ Նույն ձևով ապացուցում ենք, վոր $\angle 2+\angle 7=2d$, յեթե $\angle 1=\angle 5$։

§ 4. ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ԶՈՒԳԱՀԵՌՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸ

1. *Յերկու ուղիղների զուգահեռության հայտանիշներից մեկը հետևյալն է*, յերբ յերկու տարբեր ուղիղներ ուղղահայաց են միևնույն յերրորդ ուղիղին, ապա իրար զուգահեռ են։ *Դիտարկենք մի քանի ուրիշ հայտանիշներ էլ, վորոնք հիմնված են յերկու ուղիղներ յերրորդով հատելուց առաջացող անկյունների հատկությունների վրա։*

Թեորեմ։ Յերկու ուղիղներ, վորոնք կտրված են մի յերրորդ ուղիղով, զուգահեռ են, 1) յերբ ներքին խաչադիր անկյուններն իրար հավասար են, 2) յերբ արտաքին խաչադիր անկյուններն իրար հավասար են. 3) յերբ համապատասխան անկյունները միահավասար են. 4) յերբ ներքին միակողմյան անկյունների գումարը 2d է. 5) յերբ արտաքին միակողմյան անկյունների գումարը 2d է։

Ապացուցենք այդ թեորեմի առաջին մասը։

Տված են՝ AB ու CD ուղիղները և EF հատողը, $\angle 1=\angle 2$ (նկ. 92)։

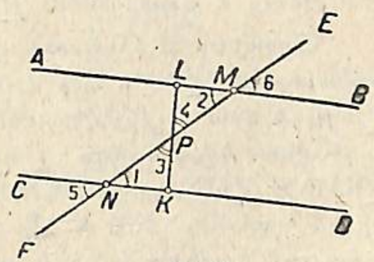
Պետք է ապացուցել՝ AB ∥ CD։

Ապացուցում։ EF հատողը կտրում է AB ու CD ուղիղները M ու N կետերում։ MN հատվածը կիսենք և նրա միջնակետ P-ից տանենք CD-ի ուղղահայացը՝ PK. վերջինս շարունակենք մինչև AB ուղիղի

հետ հատվելը L կետում. կստանանք յերկու յեռանկյուններ՝ $\triangle PLN$ և $\triangle PKN$։ Այս յեռանկյունների մեջ 1) PM=PN ըստ կառուցման, 2) $\angle 1=\angle 2$ ըստ պայմանի, 3) $\angle 3=\angle 4$, իբրև հակադիր անկյուններ. հետևաբար, $\triangle PLM=\triangle PKN$։ Նրանց հավասարությունից հետևում է, վոր $\angle K=\angle L$. բայց ըստ պայմանի $\angle K=d$, վորովհետև $PK\perp CD$. այստեղից բխում է, վոր նաև $\angle L=d$, իսկ այս նշանակում է, վոր $PL\perp AB$։ Այսպես ուրեմն, AB ու CD ուղիղներն ուղղահայաց են միևնույն KL ուղիղին, հետևաբար, նրանք զուգահեռ են՝ AB ∥ C։

Թեորեմի ապացուցումն այն դեպքի համար, յերբ տված է, վոր արտաքին խաչադիր անկյուններն են միահավասար, օրինակ $\angle 5=\angle 6$, վերածվում է դիտարկած դեպքին։

Տված է, վոր $\angle 5=\angle 6$։ Քանի վոր $\angle 5=\angle 1$ և $\angle 6=\angle 2$ իբրև հակադիր անկյուններ, ապա $\angle 1=\angle 2$. բայց սրանք ներքին խաչադիր անկյուններ են և իրար հավասար, կնշանակի՝ AB ∥ CD։

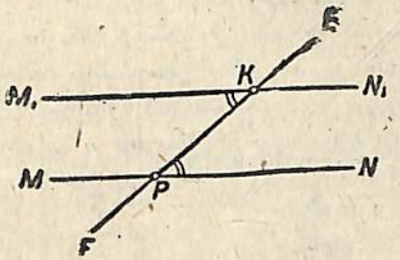


Նկ. 92.

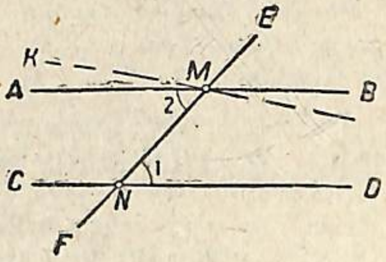
Նման ձևով ենք ապացուցում թեորեմը նաև այն դեպքում, յերբ տված է, վոր ներքին և կամ արտաքին միակողմյան անկյունների գումարը 2 d է։

Խնդիր։ Տանել այնպիսի ուղիղ, վոր անցնի K կետով և զուգահեռ լինի տված MN ուղիղին *(նկ. 93)*։

Կառուցում։ *Տված են MN ուղիղը և նրանից դուրս K կետը։ K կետից տանում ենք վորևէ EF ուղիղ, վորը հատվի MN-ի հետ. նա*



Նկ. 93.



Նկ. 94.

MN ուղիղի հետ կազմում է KPN անկյունը։ Այնուհետև K կետի մոտ EF հատողի մյուս կողմում, վորտեղ չի դասավորված KPN անկյունը, կառուցում ենք սրան հավասար M_1KP անկյունը, այն ժամանակ այս անկյան M_1K կողմը կլինի վորոնած ուղիղը, վորը զուգահեռ է MN-ին, այսինքն $M_1K \parallel MN$։ Իրոք, կառուցման համաձայն $\angle M_1KP=\angle KPN$, իսկ սրանք ներքին խաչադիր անկյուններ են, հետևաբար $M_1N_1 \parallel MN$։

Թեորեմ (հակադարձ)։ Եթե երկու զուգահեռ ուղիղներ կտրված են մի երրորդով, ապա. 1) ներքին խաչադիր անկյունները հավասար են, 2) արտաքին խաչադիր անկյունները հավասար են, 3) համապատասխան անկյունները հավասար են, 4) ներքին միակողմյան անկյունների գումարը հավասար է 2d-ի, 5) արտաքին միակողմյան անկյունների գումարը հավասար է 2d-ի։

Ապացուցենք թեորեմի առաջին մասը։

Տված են՝ D$\angle$AB ∥ C, EF *հատողն է (նկ. 94)*

Պետք է ապացուցել՝ $\angle 1=\angle 2$։

Ապացուցում *(հակասող ընդունելությամբ)։ Ենթադրենք $\angle 1$-ը հավասար չէ $\angle 2$-ին, այն ժամանակ $\angle 1$-ը կամ պետք է մեծ լինի $\angle 2$-ից և կամ փոքր։ Ընդունենք, թե $\angle 1>\angle 2$։ M կետի մոտ EF հատողի վրա կկառուցենք $\angle 1$-ին հավասար KNM անկյունը։ Եթե $\angle$KMN$=\angle$MN, ապա DKM ∥ CD և M կետով անցնում են այսպիսով երկու ուղիղներ՝ KM և AB, որոնք զուգահեռ են CD-ին. բայց այս հակասում է զուգահեռների աքսիոմին, ուստի այն ենթադրությունը, թե $\angle 1>\angle 2$, սխալ է։*

Եթե ընդունենք, որ $\angle 1<\angle 2$, ապա M կետի մոտ EF հատողի վրա կառուցելով $\angle 1$-ին հավասար անկյուն, մենք նորից կհանգենք այն եզրակացության, որ M կետով CD-ին զուգահեռ երկու ուղիղներ են անցնում, որը անհնարին է, քանի որ այս հակասում է զուգահեռների աքսիոմին։ Այսպես ուրեմն, եթե $\angle 1$-ը չի կարող վոչ մեծ լինել վոչ էլ փոքր $\angle 2$-ից՝ ապա $\angle 1=\angle 2$. իսկ այս նշանակում է, որ երկու զուգահեռ ուղիղների մի երրորդով հատվելուց առաջացող ներքին խաչադիր անկյունները միահավասար են։

Թեորեմի մնացած մասերի իրավացիությունը բխում է ապացուցածից, վորովհետև ներքին խաչադիր անկյունների հավասարության հետևանքով հավասար են նաև արտաքին խաչադիր անկյունները, համապատասխան անկյունները, այնուհետև թե ներքին և թե արտաքին միակողմյան անկյունների գումարը հավասար է 2d-ի։

Հետևանք: Եթե ուղիղը ուղղահայաց է երկու ուղիղներից մեկին, ապա նա ուղղահայաց է նաև մյուսին:

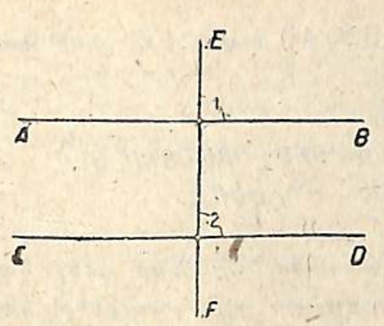
Տված են՝ AB ∥ CD, EF ⊥ AB *(նկ. 95)։*

Պետք է ապացուցել՝ EF ⊥ CD։

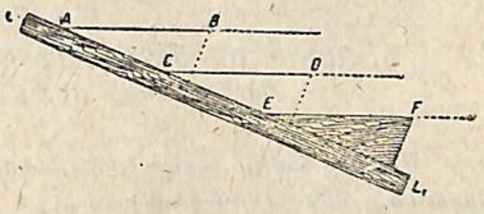
Ապացուցում։ *Եթե* AB ∥ CD, *ապա* $\angle 1=\angle 2$, *իբրև համապատասխան անկյուններ, բայց* $\angle 1=$d, *հետևաբար նաև* $\angle 2=$d, *այսինքն* EF ⊥ CD.

3. Միևնույն MN ուղիղին տարած AB ուղղահայացը և CD թեքը փոխհատվում է *(նկ. 95 a)*։

D *կետից կտանենք* DN *ուղղահայացը* MN *ուղիղին. նա զուգա-*

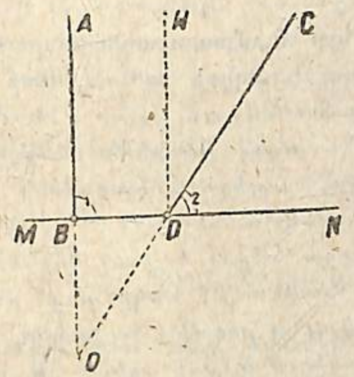


Նկ. 95.

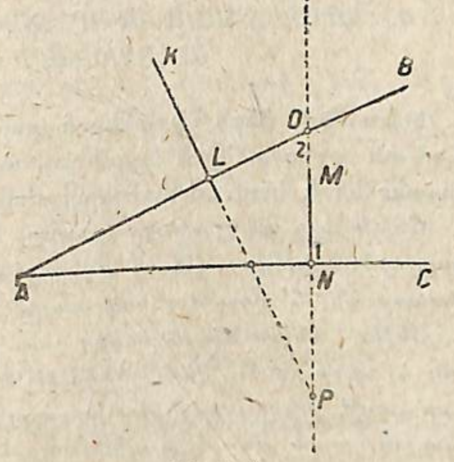


Նկ. 96.

հեռ է AB-ին (այն թեորեմի հիման վրա, ըստ վորի երկու ուղիղները զուգահեռ են, եթե ուղղահայաց են միևնույն երրորդ ուղիղին), և վորովհետև D կետից միայն մեկ ուղիղ կարելի է տանել AB-ին զուգահեռ, ապա DC ուղիղը զուգահեռ չի AB-ին, այսինքն նրա հետ փոխհատվում է։



Նկ.95 a.



Նկ. 95 b.

4. Երկու փոխհատվող *(AB և BC)* տարված ուղղահայացները *(KL և MN)* իրար հետ հատվում են *(նկ. 98 b)*։

Դիտարկենք այն դեպքը, յերբ AB և AC ուղիղներն իրար ուղղահայաց չեն։ MN և AB ուղիղները իրրև ուղղահայաց և թեք, վորոնք տարված են AC-ին, հատվում են. դիցուք O կետը նրանց հատման կետն է։ Դիտարկենք AON յեռանկյունը. նրա նկատմամբ $\angle 1$-ը արտաքին է և ուղիղ, $\angle 2$-ը ներքին է և սուր, հետևաբար, $\angle 1>\angle 2$. այստեղից հետևում է, վոր MN-ը թեք է AB-ի նկատմամբ։

Դիտարկելով այնուհետև MN և KL ուղիղները, վորոնցից առաջինը թեք է և յերկրորդն ուղղահայաց միևնույն AB ուղիղի նկատմամբ, յեզրակացնում ենք, վոր նրանք իրար հետ հատվում են։

Դիտարկել այն դեպքերը, յերբ AB և AC ուղիղները բութ կամ ուղիղ անկյուն են կազմում։

§ 5. ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ ՔԱՆՈՆԻ ՅԵՎ ԳԾԱԳՐԱԿԱՆ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ՄԻՋՈՑՈՎ

Ամենից ավելի պարզ յեղանակով զուգահեռ ուղիղներ գծել կարողանալը մեծ նշանակություն ունի գծագրական աշխատանքներ կատարելիս։ Այսպիսի կառուցում ամենից ավելի պարզ յեղանակով կարելի յե կատարել քանոնի և գծագրական յեռանկյան օգնությամբ։ Ուղիղների զուգահեռությունն այդ ժամանակ հիմնավորված է այն համապատասխան անկյունների հավասարությամբ, վորոնք կազմվում են, յերբ յերկու զուգահեռ ուղիղները հատում ենք մի յերրորդով (նկ. 96)։

§ 6. ՀԱՄԱՊԱՏԱՍԽԱՆԱԲԱՐ ԶՈՒԳԱՀԵՌ ԿՈՂՄԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Թեորեմ. Յեթե մի անկյան կողմերը համապատասխանաբար զուգահեռ են ուրիշ անկյան կողմերին, ապա այդպիսի անկյունները կամ հավասար են և կամ գումարվելով տալիս են 2d։

Յեթե այդ անկյուններն ուղիղ են, ապա թեորեմն անմիջապես ապացուցված է, վորովհետև ամեն յերկու ուղիղ անկյուն և՛ իրար հավասար են, և՛ գումարվելով տալիս են 2d։

Յեթե անկյուններն ուղիղ չեն, ապա կարող է լինել, վոր 1) յերկուսն էլ սուր լինեն կամ յերկուսն էլ բութ և 2) մեկը սուր լինի և մյուսը բութ։ Յեվ վորովհետև սուր անկյունը բութին հավասար լինել չի կարող, ապա թեորեմի պնդումից հետևում է, վոր պետք է ապացուցել՝ **համապատասխանաբար զուգահեռ կողմեր ունեցող անկյունները 1) իրար հավասար են, յեթե յերկուսն էլ սուր են կամ յերկուսն էլ բութ, 2) գումարվելով տալիս են 2d, յեթե մեկը սուր է և մյուսը բութ։**

Համառոտ ձևակերպում։

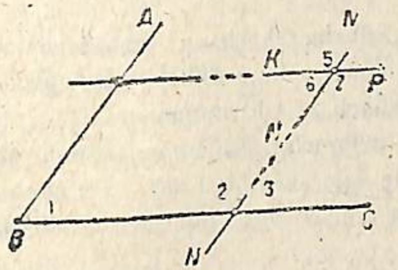
Տված են՝ ∠B *սուր է.* MN ∥ AB *և* KL ∥ BC *(նկ. 97)։*

Պետք է ապացուցել՝ 1) ∠B=∠6=∠4

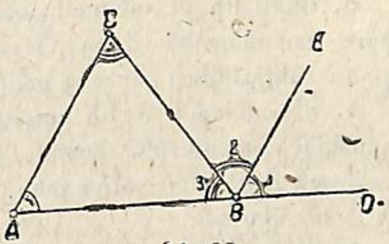
2) ∠B+∠7=2d, ∠B+∠5=2d

Ապացուցում. 1) P կետի մոտի անկյան կողմերից մեկը, ասենք MN-ը, շարունակենք մինչև BC կողմի հետ փոխհատվելը, այն ժամանակ ∠B=∠3, իբրև AB ու MN զուգահեռների մոտ BC հատողով առաջացած համապատասխան անկյուններ. բայց նաև ∠4=∠3, իբրև համապատասխան անկյուններ, վորոնք առաջացել են BC ու KL ուղիղները MN ուղիղով հատելուց։ Այսպես ուրեմն, ∠B-ն և ∠4-ը զատ զատ հավասար են ∠3-ին, նրանք իրար էլ հավասար են՝ ∠B=∠4։ Բայց ∠4=∠6 իբրև հակադիր անկյուններ, հետևաբար նաև ∠B=∠6։

Յեթե B անկյան կողմերից մեկն ու մեկը, ասենք BA-ն շարու-



Նկ. 97.



Նկ. 98.

նակենք B-ին կից անկյուն ստանալու համար, ապա դժվար չի լինի նկատել, վոր առաջացած անկյունը բութ է և հավասար է P կետի մոտի ∠5-ին և ∠7-ին, վորոնք իրար հավասար են իբրև հակադիր անկյուններ։

2) Ապացուցենք, վոր ∠B-ն P կետի մոտի վորևէ բութ անկյան հետ գումարվելով տալիս է 2d։ Իրոք, ∠4+∠7=2d իբրև կից անկյուններ, և ∠4=∠B իբրև սուր անկյուններ, վորոնց համապատասխան կողմերը զուգահեռ են։ Առաջին հավասարության մեջ ∠4-ը փոխարինելով նրան հավասար ∠B-ով, կստանանք ∠B+∠7=2d։ Այնուհետև այս հավասարության մեջ ∠7-ը փոխարինելով նրան հավասար ∠5-ով, կստանանք ∠B+∠5=2d։

§ 7. ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Թեորեմ. Ամեն յեռանկյան ներքին անկյունների գումարը հավասար է 2d-ի։

Տված է՝ △ABC *(նկ. 98)*

Պետք է ապացուցել՝ ∠A+∠B+∠C=2d։

Ապացուցում։ Շարունակենք ABC յեռանկյան AB կողմը և նրա գագաթից տանենք BE ∥ AC։ B կետի մոտ անկյունների գումարը հավասար է 2d-ի, այսինքն ∠1+∠2+∠3=2d։ Բայց ըստ կառուցման 1) ∠1=∠A իբրև համապատասխան անկյուններ, 2) ∠2=∠C իբրև խաչադիր անկյուններ, 3) ∠3=∠B։ Քանի վոր ∠1+∠2+∠3=2d, ապա նաև ∠A+∠B+∠C=2d։

Հետևանքներ 1. Յեռանկյան մեջ ավելի քան մեկ ուղիղ անկյուն և կամ մեկ բութ անկյուն չի կարող լինել։

Իրոք՝ յեռանկյան յերեք անկյունների գումարը հավասար է 2d-ի, և յեթե նրանցից մեկը հավասար է d-ի կամ մեծ է d-ից, ապա մնա-

ցած յերկու անկյունների գումարը համապատասխանաբար հավասար կլինի d-ի կամ փոքր կլինի d-ից և, հետևաբար, մնացած յերկու անկյուններից յուրաքանչյուրը փոքր կլինի d-ից:

Ուղղանկյուն յեռանկյան սուր անկյունների գումարը հավասար է d-ի:

3. **Յեթե մի յեռանկյան անկյուններից յերկուսը համապատասխանաբար հավասար են մի ուրիշ յեռանկյան անկյուններից յերկուսին, ապա այդ յեռանկյունների յերրորդ անկյուններն էլ են հավասար:**

4. **Յեռանկյան վորևէ արտաքին անկյունը հավասար է այն յերկու անկյունների գումարին, վորոնք նրան կից չեն** *(նկ. 98)*, **և հետևաբար յեռանկյան վորևէ արտաքին անկյունը մեծ է ամեն մի ներքին անկյունից, վորը նրան կից չէ:**

5. **Յեռանկյան արտաքին անկյունների գումարը հավասար է 4 d-ի:**

Իրոք, յեռանկյան ամեն մի գագաթի մոտ արտաքին անկյան և ներքին անկյան գումարը հավասար է 2d-ի. հետևաբար, բոլոր ներքին և բոլոր արտաքին անկյունների գումարը հավասար կազմում է 6d. բայց վորովհետև միայն ներքին անկյունների գումարը հավասար է 2d-ի, ապա բոլոր արտաքին անկյունների գումարը հավասար է 6d—2d=4d:

6. **Հավասարակողմ յեռանկյան ամեն մի անկյունը հավասար է 60°-ի կամ $\frac{2}{3}$ d-ի:**

7. **Յեթե ուղղանկյուն յեռանկյան մեջ անկյուններից մեկը 30°-ի յե, ապա նրա դիմացի էջը հավասար է ներքնաձիգի կեսին:**

Նկ. 98. a

Իրոք, ABC ուղղանկյուն յեռանկյան մեջ A անկյունը հավասար է 30°-ի, ուստի B անկյունն էլ հավասար է 60°-ի: BA ներքնաձիգի վրա վերցնենք BM=BC և C-ն միացնենք M-ի հետ: Այն ժամանակ △MBC-ն հավասարասրուն կլինի, և ∠BMC=∠BCM=60°, հետևաբար, յեռանկյունը հավասարակողմ է, այսինքն BC=BM=MC:

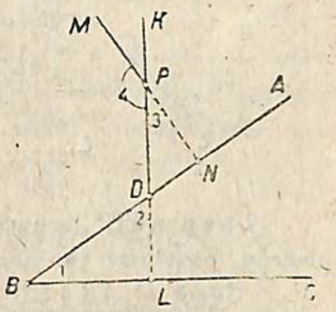
∠ACM=90°—60°=30°, ուստի △CMA-ն հավասարասրուն է, վորովհետև ∠ACM=∠MAC. հետևաբար, MC=MA: Նշանակի՝ BC=BM=MC=MA և BC= $\frac{1}{2}$ *AB:*

§ 8. ՀԱՄԱՊԱՏԱՍԽԱՆ ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑ ԿՈՂՄԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Թեորեմ: Համապատասխանաբար ուղղահայաց կողմեր ունեցող անկյունները կամ հավասար են, կամ գումարվելով տալիս են 2d:

Տված են՝ ∠1, ∠3 և ∠4, MN⊥AB և KL⊥BC (նկ. 99):
Պետք է ապացուցել՝ 1) ∠1=∠3 կամ ∠MPK
2) ∠1+∠4=2d կամ ∠1+∠KPM=2d:

Ապացուցում: *1) Դիտենք BDL և PDN ուղղանկյուն յեռանկյունները. նրանց մեջ ∠B+∠2=d և ∠3+∠2=d. այս յերկու հավասարությունները բաղդատելով յեզրակացնում ենք, վոր ∠B=∠3 կամ ∠1=∠3, վորով յեզրակացության 1-ին կետն ապացուցվեց. 2-րդ կետն ապացուցելու համար նկատենք, վոր ∠3+∠4=2d, իբրև կից անկյուններ. այս հավասարության մեջ ∠3-ի փոխարեն դնելով ∠1-ը, ստանում ենք ∠1+∠4=2d, վոր և պետք էր ապացուցել:*



Նկ. 99.

Ապացույցն ընդհանրացնելու համար անհրաժեշտ է քննության առնել այն դեպքերը, յերբ P անկյան գագաթը գտնվում է 1) տված B անկյան ներսը և 2) B անկյունից դուրս, բայց այնպես, վոր P անկյան կողմերը հատում են տված անկյան կողմերի շարունակությունները: Աշակերտներին հանձնարարվում է ինքնուրույնաբար կատարել այս ընդհանրացումը:

Մեր ապացույցից հետևում է, վոր փոխադարձաբար ուղղահայաց կողմեր ունեցող անկյունները յեթե հավասար են, ապա կամ յերկուսն էլ բութ են և կամ յերկուսն էլ սուր, իսկ յեթե գումարվելով 2d են տալիս, ապա մեկը սուր է և մյուսը բութ:

§ 9. ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՈՒՂԻՂՆԵՐՈՎ ԿՏՐՎԱԾ ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

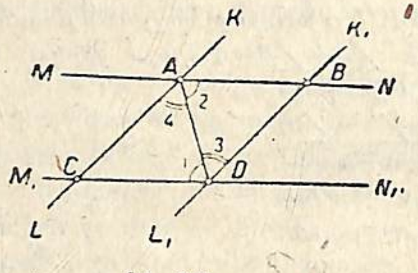
1. **Թեորեմ. Զուգահեռ ուղիղներով կտրված յերկու զուգահեռ ուղիղների հատվածները միահավասար են.**

Տված է՝ MN ∥ M_1N_1 և KL ∥ K_1L_1 (նկ. 100):
Պետք է ապացուցել՝ AB=CD և AC=BD.

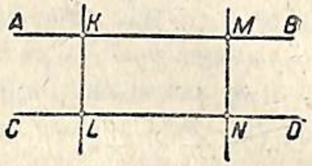
Ապացուցում. *Ուղիղով միացնենք A ու D կետերը և դիտենք ABD ու ACD յեռանկյունները: Սրանք հավասար են, վորովհետև նրանց մեջ 1) AD-ն ընդհանուր կողմ է, 2) ∠1=∠2 իբրև խաչադիր անկյուններ, 3) ∠3=∠4 իբրև խաչադիր անկյուններ:*

Յեռանկյունների հավասարությունից հետևում է համապատասխան կողմերի հավասարությունը, ուստի 1) AB=CD իբրև կողմեր, վորոնք ընկած են 3 և 4 հավասար անկյունների դիմաց, և 2) AC=BD իբրև 1 և 2 հավասար անկյունների դիմացի կողմեր:

2. Զուգահեռ ուղիղներից մեկի վրա կետից մյուսի վրա իջեցրած ուղղահայացի երկարությունը կոչվում է այդ երկու զուգահեռ ուղիղների հեռավորությունն իրարից:



Նկ. 100



Նկ. 101.

Հետևանք: Զուգահեռ ուղիղներն իրենց ամբողջ տարածության վրա իրարից հավասար հեռավորություն ունեն:

Տված է՝ AB ∥ CD *(նկ. 101)*

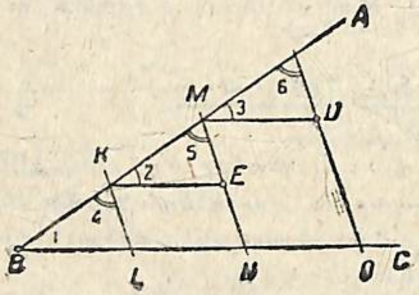
Պետք է ապացուցել՝ KL=MN:

Ապացուցում: AB *ուղղի վրա երկու* K *և* M *կետերից* CD *ուղղին տարած* KL *և* MN *ուղղահայացները զուգահեռ են՝* KL ∥ MN: *Ուրեմն* KL-*ը և* MN-*ը զուգահեռ հատվածներ են* AB *և* CD *զուգահեռների մեջ, և, հետևաբար, միահավասար են՝* KL=MN:

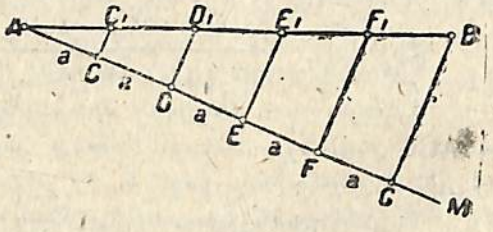
3. Եթե հատվածը զուգահեռ է ուղղին, ապա նրա առաջաձգությունն այդ ուղղի վրա հավասար է հենց հատվածին իրեն:

Իրոք, եթե KM ∥ CD *(նկ. 101,) ապա* KM *հատվածը և նրա* LM *առաջաձգությունը միահավասար են իբրև զուգահեռ ուղիղներով կտրված զուգահեռ ուղիղների հատվածներ:*

4. Թեորեմ: Եթե անկյան մի կողմի վրա դնենք միահավասար հատվածներ և նրանց ծայրերից զուգահեռ ուղիղներ տանենք մինչև անկյան մյուս կողմի հետ հատվելը, ապա այս կողմի վրա էլ կառաջանան միահավասար հատվածներ:



Նկ. 102.



Նկ. 103.

ABC *անկյան* BA *կողմի վրա. վերցնենք հավասար հատվածներ՝* BK=KM=MP *(նկ. 102) և* K, M *ու* P *կետերից տանենք զուգահեռ ուղիղներ՝* KL ∥ MN ∥ PQ.

Տված են՝ BK=KM=MP, KL ∥ MN ∥ PQ

Պետք է ապացուցել՝ BL=LN=NQ.

Ապացուցում. K *ու* M *կետերից կտանենք* KE ∥ BC, MD ∥ BC *և կդիտենք ստացված* BKL, KME *և* MPD *եռանկյունները: Նրանք հավասար են. վորովհետև ունեն մեկական հավասար կողմ և երկուական առընթեր անկյուններ.* BK=KM=MP *ըստ կառուցման,* ∠1=∠2=∠3 *և* ∠4=∠5=∠6 *իբրև համապատասխան անկյուններ:*

Եռանկյունների հավասարությունից հետևում է համապատասխան կողմերի հավասարությունը, ուստի BL=KE=MD: *Բայց 1)* KE=LN *և* MD=NQ *իբրև զուգահեռների միջև զուգահեռ հատվածներ և 2) ըստ ապացուցածի* KE=MD=BL, *հետևաբար,* LN=NQ=BL:

§ 10. ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ ՀԱՎԱՍԱՐ ՄԱՍԵՐԻ

Կարկինի ու քանոնի օգնությամբ մենք կարողանում ենք հատվածը բաժանել 2, 4, 8, 16 և, ընդհանուր ձևով, 2^n *հավասար մասերի:*

Դիտենք, թե ինչպես կարելի է հատվածը բաժանել ցանկացած թվով հավասար մասերի, օրինակ 3, 4, 5, 6, 7 և այլ թվով մասերի:

Խնդիր: AB հատվածը բաժանել 5 հավասար մասերի: *(նկ. 103):*

Կառուցում: AB *հատվածի* A *ծայրից կտանենք կամավոր անկյունով մի օժանդակ* AM *ուղիղ և* A *գագաթից այս ուղղի վրա 5 անգամ կվերցնենք կամավոր երկարության մի հատված, ասենք* AC=a *հատվածը. կստանանք* AC=CD=DE=EF=FG=a: *Վերջին հատվածի* G *ծայրը կմիացնենք տված* AB *հատվածի* B *ծայրի հետ և բաժանման* C, D, E *և* F *կետերից կտանենք* BG-*ին զուգահեռ ուղիղներ. սրանք* BA *հատվածը կբաժանեն 5 միահավասար մասերի՝* $AC_1=C_1D_1=D_1F_1=$ $=E_1F_1=F_1B$:

Կառուցման ուղիղ լինելն ապացուցվում է նախորդ թեորեմի հիման վրա:

ՀԱՐՑԵՐ ՅԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Ի՞նչ եզրակացություն կարելի է անել հետևյալ գրառության հիման վրա հարթության վրա տված են՝ AB⊥MN *և* CD⊥MN: *Գծագիրը պատրաստել:*

2. Տված է, որ AB⊥KL *և* AB ∥ CD: *Ի՞նչ եզրակացություն կարելի է անել այդ ուղիղների փոխադարձ դասավորության մասին: Պատասխանը պարզել գծագրով:*

3. Հաշվել այն բոլոր անկյունների մեծությունը, որոնք առաջանում են երկու զուգահեռ ուղիղներ մի երրորդ ուղղով հատելիս, եթե 1) անկյուններից մեկը 3 անգամ մեծ է իր կից անկյունից. 2) անկյուններից մեկը 22° 30'-ով փոքր է մյուսից. 3) անկյուններից մեկը կազմում է մյուսի 0,8 մասը. 4) երկու կից անկյունների տարբերությունը 37° է:

4. Տված է, որ AB ∥ CD *և* EF-*ը նրանց համար հատող է: Ապացուցել, որ*

AB-ի և CD-ի վրա համաձ կեաերում կազմված յերկու հավասար անկյունների կիսորդները զուգահեռ են, իսկ յերկու անհավասար անկյունների կիսորդները՝ փոխադարձաբար ուղղահայաց:

5. Ապացուցել, որ հավասարասրուն ուղղանկյուն յեռանկյան մեջ h_c բարձրությունը հավասար է c ներքնաձիգի կեսին:

6. Ուղղանկյուն յեռանկյան մեջ տանել նրա սուր անկյունների կիսորդները և ցույց տալ, որ կիսորդների կազմած անկյուններից մեկը 135°-ի յե:

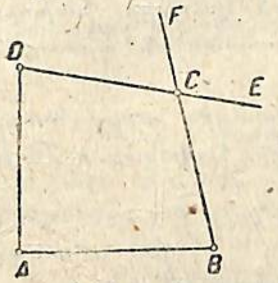
7. Յեռանկյան մեջ վորոշել արտաքին և նրան կից ներքին անկյան մեծությունը, յեթե նրանց հարաբերությունն է՝ ա) 3:2, բ) 4:5, գ) 11:7, դ) 5:13, և գտնել մյուս յերկու ներքին անկյունների գումարը:

8. Հաշվել յեռանկյան անկյունների մեծությունը, յեթե հայտնի յե, վոր նրանց հարաբերությունն է՝ 1 : 2 : 3: Կարո՞ղ են յեռանկյան կողմերն իրար այնպես հարաբերել, ինչպես 1 : 2 : 3:

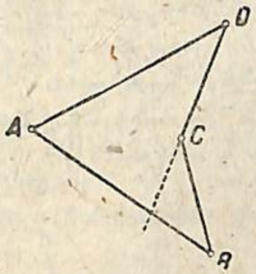
VIII. ՔԱՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ ՅԵՎ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

§ 1. ՔԱՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

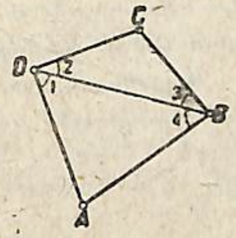
1. *Ինչպես գիտենք,* քառանկյուն կոչվում է չորս կողմ ունեցող բազմանկյունը կամ, *ուրիշ խոսքով,* այն հարթամասը, որը սահմանափակված է չորս հատվածներով կազմված փակ բեկյալով:



Նկ. 104.



Նկ. 105.



Նկ. 106.

Քառանկյան բոլոր կողմերի գումարը կոչվում է քառանկյան պարագիծ (պերիմետր): Քառանկյունները լինում են՝ ուռուցիկ (Նկ. 104 և 106) և վոչ ուռուցիկ (Նկ. 105):

Քառանկյունն ուռուցիկ է կոչվում այն դեպքում, յեթե նա ամբողջովին դասավորված է իր յուրաքանչյուր կողմի և սրա շարունակության միևնույն կողմում: Հակառակ դեպքում քառանկյունը կոչվում է վոչ-ուռուցիկ:

Հետագայում մենք զբաղվելու յենք միայն ուռուցիկ քառանկյուններով:

Ուռուցիկ քառանկյան մեջ յուրաքանչյուր ներքին անկյունը փոքր է մի բացած անկյունից, այսինքն 2d-ից:

Քառանկյան յուրաքանչյուր գագաթի մոտ, ինչպես և յեռանկյան դեպքում կարելի յե յերկու արտաքին անկյուն կառուցել (104-րդ նկարում $\angle$DCF և $\angle$BCE), նրանք իրար հավասար են և նրանցից միայն մեկն է ուշադրության առնվում. դրա հետևանքով այնպես են համարում, որ քառանկյունը միայն չորս արտաքին անկյուն ունի, վորը և համապատասխանում է նրա գագաթների, կողմերի և անկյունների թվին:

2. Թ ե ո ր ե մ. Քառանկյան ներքին անկյունների գումարը հավասար է 4d-ի կամ 360°-ի։

Տված է՝ ABCD *քառանկյունը (նկ. 106)*

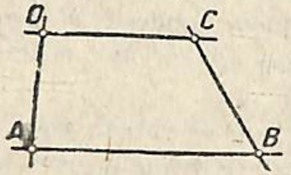
Պետք է ապացուցել $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4d$։

Ապացուցում. *Տանենք* BD *անկյունագիծը. նրանով քառանկյունը կբաժանվի յերկու յեռանկյան։ Յուրաքանչյուր յեռանկյան ներքին անկյունների գումարը* 2d *է, հետևաբար, յերկու յեռանկյունների ներքին անկյունների գումարը կլինի* 4d, *ուրեմն և* ABCD *քառանկյան ներքին անկյունների գումարը* 4d *է։*

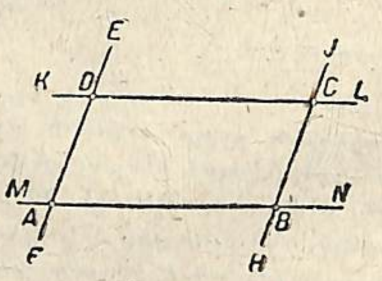
3. Թ ե ո ր ե մ. Քառանկյան արտաքին անկյունների գումարը հավասար է 360°-ի կամ 4d-ի։

Իրոք, քառանկյան յուրաքանչյուր գագաթի մոտի արտաքին անկյան և ներքին անկյան գումարը հավասար է 2d-*ի. հետևաբար քառանկյան բոլոր արտաքին և բոլոր ներքին անկյունների գումարը* 8d *է. բայց քանի վոր միայն ներքին անկյունների գումարը, նախորդ թեորեմի համաձայն,* 4d *է, ապա մնում է, վոր քառանկյան արտաքին անկյունների գումարը լինի* $8d-4d=4d$։

Այսպես ուրեմն, ամեն քառանկյան մեջ արտաքին անկյունների գումարը, ինչպես և ներքին անկյունների գումարը, հավասար է 4d-*ի։*



Նկ. 107.



Նկ. 108.

4. *Քառանկյունների մեջ աչքի յե ընկնում հատկապես յերկու տեսակը՝ սեղանը (տրապեցը) և զուգահեռագիծը (պարալելոգրամը)։*

Սեղանն *այն քառանկյունն է, վորի մեջ հանդիպակաց կողմերից մի զույգն իրար զուգահեռ են։*

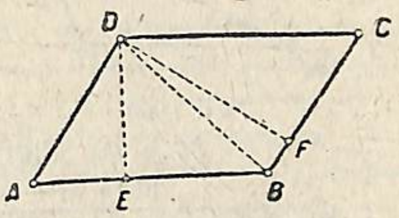
ABCD *քառանկյունը սեղան է (նկ. 107)։*

Զուգահեռագիծը *(զուգահեռակողմը) այն քառանկյունն է, վորի մեջ հանդիպակաց կողմերը զուգաբար (զույգ առ զույգ) զուգահեռ են։ Այսպիսի քառանկյուն կստացվի, յեթե վորևե յերկու զուգահեռ ուղիղներ՝* KL *և* MN *հատենք ուրիշ յերկու զուգահեռ ուղիղներով՝* EF *և* JH։

ABCD *քառանկյունը (նկ. 108) զուգահեռագիծ է։*

§ 2. ԶՈՒԳԱՀԵՌԱԳԻԾԸ ՅԵՎ ՆՐԱ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

1. Զուգահեռագծի հիմքը և բարձրությունը։ *Զուգահեռագծի վորևե յերկու զուգահեռ կողմերն ընդունվում են իբրև նրա* հիմքեր, *օրինակի համար* AB-*ն և* DC-*ն* ABCD *զուգահեռագծի մեջ (նկ. 109). հիմքերի միջև յեղած հեռավորությունը, վորը չափվում է ուղղահայացով, կոչվում է զուգահեռագծի* բարձրություն. *բարձրությունը սովորաբար տանում են զուգահեռագծի գագաթներից մեկն ու մեկից.* DE-*ն և* DF-*ն* ABCD *զուգահեռագծի յերկու տարբեր բարձրություններն են։*



Նկ. 109.

2. Զուգահեռագծի կողմերի հատկությունը։

Թ ե ո ր ե մ. Զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմերը զուգաբար հավասար են։

Տված է՝ ABCD-*ն զուգահեռագիծ է, այսինքն*

$AB \parallel DC,\ AD \parallel BC$

Պետք է ապացուցել՝ $AB=DC,\ AD=BC$։

Այս թեորեմի իրավացիությունն անմիջորեն բղխում է այն թեորեմից, վոր զուգահեռների հատվածները զուգահեռների միջև միահավասար են։

3. Զուգահեռագծի անկյունների հատկությունները։

Թ ե ո ր ե մ. Զուգահեռագծի մեջ հանդիպակաց անկյունները հավասար են, իսկ միևնույն կողմին առընթեր անկյունների գումարը 2d է։

Այս թեորեմի իրավացիությունը բղխում է այն թեորեմից, վորը վերաբերում է համապատասխանաբար զուգահեռ կողմեր ունեցող անկյունների հատկություններին։

Հ ե տ և ա ն ք. Յեթե զուգահեռագծի անկյուններից մեկն ուղիղ է, ապա նրա բոլոր անկյուններն ուղիղ են։

Զուգահեռագծի առանձին անկյունների մեծությունները վորոշելու համար բավական է իմանալ նրա միայն մի անկյան մեծությունը, ինչպես այդ հետևում է զուգահեռագծի անկյունների հատկություններից։

4. Զուգահեռագծի անկյունագծերի հատկությունները.

Թ ե ո ր ե մ. Զուգահեռագիծն անկյունագծով բաժանվում է յերկու հավասար յեռանկյունների։

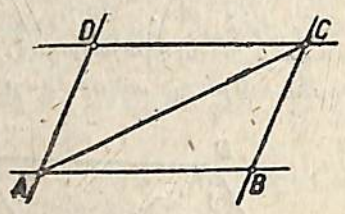
Տված է՝ ABCD-*ն զուգահեռագիծ է,* AC-*ն՝ նրա անկյունագիծը (նկ. 110)։*

Պետք է ապացուցել՝ $\triangle ABC=\triangle ACD$։

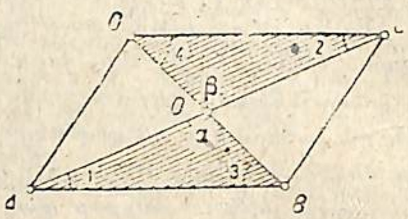
Ապացուցում. ABC *և* ACD *յեռանկյունների մեջ* $AB=DC$ *և* $AD=$

=BC իբրև զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմեր, իսկ AC անկյունագիծն ընդհանուր կողմ է, ուստի △ABC=△ACD:

Թեորեմ. Զուգահեռագծի մեջ անկյունագծերն իրենց փոխհատման կետերում կիսվում են:



Նկ. 110,



Նկ. 111.

Տված է՝ ABCD-*ն զուգահեռագիծ է,* AC-*ն և* BD-*ն նրա անկյունագծերն են (Նկ. 111)*

Պետք է ապացուցել՝ AO=OC *և* BO=OD:

Ապացուցում. *Դիտենք* AOB *և* DOC *յեռանկյունները.* AB=DC *իբրև զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմերը,* ∠1=∠2 *և* ∠3=∠4 *իբրև ներքին խաչադիր անկյուններ. հետևաբար, յեռանկյունները հավասար են՝* △AOB=△DOC. *այստեղից բղխում է, վոր* AO=OC *իբրև հավասար յեռանկյունների մեջ 3 և 4 հավասար անկյունների դիմացի կողմեր, և* OD=BO, *իբրև 1 և 2 հավասար անկյունների դիմացի կողմեր:*

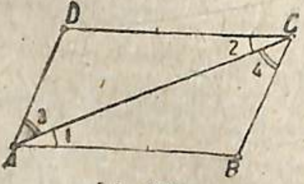
3. ԶՈՒԳԱՀԵՌԱԳԻԾԸ ՎՈՐՈՇՈՂ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸ

1. **Թեորեմ.** Յերբ մի քառանկյան մեջ յերկու հանդիպակաց կողմեր միահավասար են և զուգահեռ՝ ապա նա զուգահեռագիծ է, այսինքն նրա մյուս յերկու կողմերն էլ են զուգահեռ:

Տված է՝ ABCD-*ն քառանկյուն է,* AB=DC *և* AB ∥ BC *(Նկ. 112):*

Պետք է ապացուցել՝ AD ∥ BC.

Ապացուցում. *Տանենք* AC *անկյունագիծը և դիտենք առաջացած* ABC *և* ACD *յեռանկյունները: Այս յեռանկյունների մեջ 1)* AC-*ն ընդհանուր կողմ է, 2)* AB=DC *ըստ պայմանի, 3)* ∠1=∠2 *իբրև ներքին խաչադիր անկյուններ* AB *և* DC *զուգահեռների մոտ. ուստի* △ABC=△ACD. *յեռանկյունների հավասարությունից հետևում է, վոր* ∠3=∠4. *սրանք ներքին խաչադիր անկյուններ են* AD *և* BC *ուղիղների մոտ, վորոնք հատվել են* AC *ուղիղով, ուստի* AD ∥ BC:



Նկ. 112.

2. **Թեորեմ.** Յերբ մի քառանկյան մեջ հանդիպակաց կողմերը զուգաբար հավասար են, ապա այդ քառանկյունը զուգահեռագիծ է, այսինքն նրա կողմերը զուգաբար զուգահեռ են:

Տված է՝ ABCD-*ն քառանկյուն է,* AB=DC *և* AD=BC *(Նկ. 112):*

Պետք է ապացուցել՝ AB ∥ DC *և* AD ∥ BC.

Ապացուցում. *Տանենք* AC *անկյունագիծը և դիտենք* ABC *ու* ACD *յեռանկյունները. սրանք հավասար են, վորովհետև նրանց մեջ* AC-*ն ընդհանուր կողմ է,* AB=CD *և* AD=BC: *Յեռանկյունների հավասարությունից հետևում է նրանց համապատասխանորեն դասավորված տարրերի հավասարությունը, այն է՝* ∠1=∠2. *այս անկյունները ներքին խաչադիր անկյուններ են, ուստի* AB ∥ DC. *բացի դրանից* ∠3=∠4, *ուստի* AD ∥ BC: *Այսպիսով* ABCD *քառանկյան հանդիպակաց կողմերը զուգաբար զուգահեռ են, հետևաբար, այդ քառանկյունը զուգահեռագիծ է:*

3. **Թեորեմ.** Յերբ մի քառանկյան մեջ անկյունագծերն իրար կիսում են, ապա այդպիսի քառանկյունը զուգահեռագիծ է, այսինքն նրա հանդիպակաց կողմերը զուգաբար զուգահեռ են *(Նկ. 111):*

Տված է՝ ABCD-*ն քառանկյուն է,* AC *և* BD *անկյունագծեր են,* AO=OC *և* BO=OD.

Պետք է ապացուցել՝ AD ∥ BC *և* AB ∥ CD, *այսինքն* ABCD-*ն զուգահեռագիծ է:*

Ապացուցում. *Դիտենք* AOB *և* DOC *յեռանկյունները, վորոնց կողմերի թվում կան անկյունագծերի հատվածները՝* AO=OC: BO=OD *ըստ պայմանի և* ∠α=∠β *իբրև հակադիր անկյուններ. հետևաբար* △AOB=△DOC. *յեռանկյունների հավասարությունից հետևում է հավասար կողմերի դիմաց ընկած անկյունների հավասարությունը, այն է՝* ∠1=∠2 *և* ∠3=∠4. *սրանք խաչադիր անկյուններ են և նրանց մի զույգի հավասարությունից արդեն բղխում է, վոր* AB ∥ DC: *Դիտելով* AOD *և* COB *յեռանկյունները, կգտնենք, վոր նրանք հավասար են և վոր* AD ∥ BC:

Այսպես ուրեմն, AD ∥ BC *և* AB ∥ CD, *այսինքն* ABCD *քառանկյան հանդիպակաց կողմերը զուգաբար զուգահեռ են, հետևաբար այդ քառանկյունը զուգահեռագիծ է:*

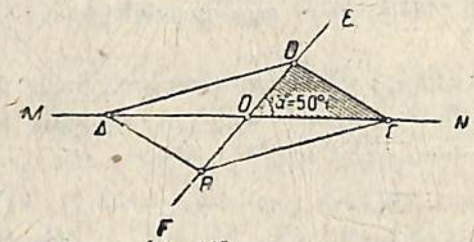
Զուգահեռագծի այս հայտանիշն օգտագործում են զուգահեռագծի կառուցման համար, յերբ տված են նրա յերկու անկյունագծերը՝ m *ու* n, *և նրանցով կազմված* α *անկյունը: Այս հատկությունից օգտվելով, զուգահեռագիծը կառուցում են կարկինի ու քանոնի միջոցով առանց զուգահեռների կառուցման դիմելու:*

Խնդիր. 1. Կառուցել զուգահեռագիծ, յերբ տված են նրա անկյունագիծը՝ $m=10$ սմ և կողմերը՝ $a=6$ սմ և $b=7$ սմ:

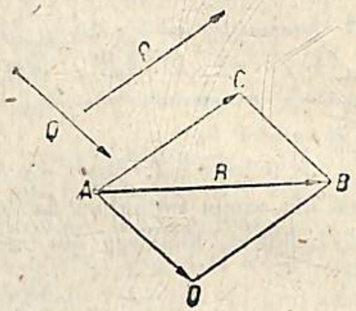
Կառուցում. *Կառուցել a, b և m կողմերն ունեցող յեռանկյունը և ապա լրացնել այն մինչև զուգահեռագիծ դառնալը:*

Խնդիր 2. Կառուցել զուգահեռագիծ, յերբ տված են նրա կողմերը՝ $a=5$ սմ, $b=4$ սմ և սրանցով կազմված անկյունը՝ $\angle C=40°$.

Կառուցում: *Նախ կառուցել յեռանկյունը a և b կողմերի ու նրանցով կազմված C անկյան միջոցով և ապա լրացնել այդ յեռանկյունը մինչև զուգահեռագիծ դառնալը:*



Նկ. 113.



Նկ. 114.

Խնդիր 3. Կառուցել զուգահեռագիծ, յերբ տված են նրա յերկու անկյունագծերը՝ $m=6$ սմ, $n=10$ սմ, և նրանցով կազմված անկյունը $\alpha=50°$:

Կառուցում: *Կգծենք (նկ. 113) 50°-ի անկյունով իրար հետ հատվող յերկու ուղիղներ՝ MN ու EF, սրանցից յուրաքանչյուրի վրա նրանց հատման O կետից դեպի յերկու կողմը կդնենք անկյունագծերի կեսերին հավասար հատվածներ, և ապա ստացած հատվածների ծայրերը կմիացնենք իրար հետ. ստացած ABCD քառանկյունը վորոնած զուգահեռագիծն է:*

Խնդիր 4. Կառուցել զուգահեռագիծ նրա m ու n անկյունագծերով և a կողմով:

Կառուցում. *Խնդրի լուծումը վերածվում է յեռանկյան կառուցմանը յերեք կողմերով՝ a, $\frac{m}{2}$ և $\frac{n}{2}$ (նկ. 113):*

Խնդրի լուծումը հնարավոր է, յեթե այս յերեք կողմերից յուրաքանչյուրը փոքր է մյուս յերկուսի գումարից:

Խնդիր 5. Կառուցել զուգահեռագիծ, յերբ տված են նրա R անկյունագիծը յերկարությամբ ու ուղղությամբ և նրա P ու Q կողմերի ուղղությունները *(նկ. 114)*:

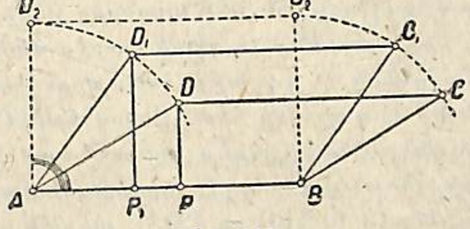
Կառուցում. *AB=R անկյունագծի, A ծայրից տանում ենք կողմերի տված ուղղություններին զուգահեռ ուղիղներ: Այնուհետև անկյունագծի մյուս ծայրերից՝ B կետից, տանում ենք այդ նույն յերկու ուղղություններին զուգահեռ ուղիղներ: Կառուցած ուղիղների փոխհատման կետերը կլինեն զուգահեռագծի մյուս յերկու գագաթները:*

2. Սրանք զուգահեռագծի կառուցման հիմնական դեպքերն են: Կառուցելով այդ յեռանկյուններից մեկն ու մեկը, վորոնց բաժանում է զուգահեռագիծը մեկ կամ յերկու անկյունագծերի միջոցով, վորոշած ենք լինում վողջ զուգահեռագիծը: Այստեղից բղխում են զուգահեռագծերի հավասարության հետևյալ հայտանիշները.

Զուգահեռագծերը հավասար են, յեթե հավասար են նրանց հետևյալ տարրերը՝

1) յերկու հարևան կողմերը և նրանց միջի անկյունը,
2) յերկու անկյունագծերը և նրանց միջի անկյունը,
3) յերկու հարևան կողմերը և մի անկյունագիծը,
4) յերկու անկյունագծերը և մի կողմը:

Պետք է հիշել, վոր զուգահեռագծի անկյունները վորոշելու համար բավական է գիտենալ նրա միայն մեկ անկյան մեծությունը:



Նկ. 115.

3. Խնդիր. ABCD *հողակապավոր զուգահեռագծի օգնությամբ (նկ. 115) հետազոտել, թե նրա անկյուններից մեկի, օրինակի համար A-ի, փոփոխվելով ինչպես են փոփոխվում նրա DP բարձրությունը և պարագիծը:*

Հետազոտում. *Զուգահեռագծի A անկյան փոփոխվելով նրա DP բարձրությունը փոփոխվում է, վորի ժամանակ նա մեծանում է, յեթե A անկյունն աճում է մինչև 90°, և փոքրանում է յեթե A անկյունը նվազում է մինչև 0°. վերջին դեպքում զուգահեռագիծ այլևս չի ստացվում, նրա կողմերը համընկնում են և զուգահեռագիծը փոխարկվում է մի հատվածի, վորի յերկարությունը հավասար է զուգահեռագծի՝ յերկու հարևան կողմերի գումարին:*

Յերբ $\angle A=90°$, զուգահեռագծի բոլոր անկյունները ուղիղ են և DP բարձրությունն ամենամեծն է, իսկ նրա պարագիծը այս բոլոր դեպքերում անփոփոխ է մնում:

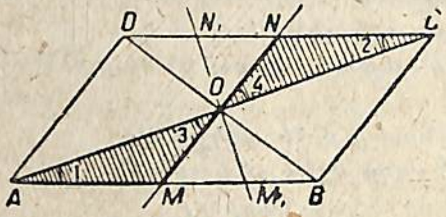
§ 5. ԿԵՆՏՐՈՆԱԿԱՆ ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

1. ABCD *զուգահեռագծի մեջ (նկ. 116) անկյունագծերի հատման O կետից տարված է մի կամավոր ուղիղ, վորը զուգահեռ կողմերի մի*

գույգը հատում է M և N կետերում։ Ապացուցել, որ MN հատվածը O կետում կիսվում է։

Իրոք, AOM և ONC եռանկյունները հավասար են, որովհետև AO=OC, $\angle 1=\angle 2$ իբրև խաչադիր անկյուններ և $\angle 3=\angle 4$ իբրև հակադիր անկյուններ. եռանկյունների հավասարությունից հետևում է, որ OM=ON։

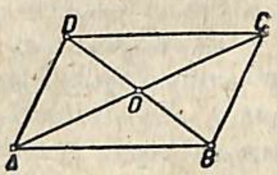
Այսպես ուրեմն, զուգահեռագծի անկյունագծերի O հատման կետով անցնող ամեն մի հատողի այն հատվածը, որը գտնվում է զուգահեռագծի կողմերի միջև, այդ O կետում կիսվում է։



Նկ. 116.

2. ABCD զուգահեռագծի մեջ (Նկ. 117) տանենք նրա AC և BD անկյունագծերը. Նրանք հատվում են իրար հետ O կետում. ստանում ենք 4 եռանկյուններ։ Գծագրի հարթության մեջ նրանցից մեկը, օրինակի համար AOB եռանկյունը, պտտենք O կետի շուրջը 180°-ով. այն ժամանակ B գագաթը կհամընկնի D գագաթի հետ, որովհետև OB=OD, և A գագաթը կհամընկնի C գագաթի հետ, որովհետև OA=OC. քանի որ AOB և COD եռանկյունների երեք գագաթները համընկան, ապա համընկնում են նաև եռանկյունները։ Նույնը վերաբերում է BOC ու DOA եռանկյուններին և ABC ու CDA եռանկյուններին, ինչպես նաև MBCN ու NDAM քառանկյուններին (Նկ. 116)։

3. Երկու կետեր՝ A ու C, B ու D (Նկ. 117), երկու հատվածներ՝ AB ու DC, BC ու AD, AO ու OC, երկու պատկերներ՝ △AOB ու △COD, △ABC ու △CDA, կոչվում են կենտրոնահամաչափ O կետի նկատմամբ, եթե սրա շուրջը 180°-ի պտույտ գործելիս նրանցից մեկը համընկնում է մյուսի հետ։



Նկ. 117.

Պատկերը կոչվում է կենտրոնահամաչափ, եթե տված կետի շուրջը 180°-ով պտտելիս նրա յուրաքանչյուր մասն այնպիսի տեղ է գրավում, որն առաջ բռնված էր նրա ուրիշ մասով։ O կետը, որի շուրջը տեղի յե ունենում պտտումը 180°-ով, կոչվում է համաչափության կենտրոն։

4. Զուգահեռագիծը կենտրոնահամաչափ պատկեր է, և նրա համաչափության կենտրոնը գտնվում է նրա անկյունագծերի փոխհատման կետում։

5. Զուգահեռագիծը համաչափության առանցքներ չունի։

§ 6. ԵՌԱՆԿՅԱՆ ՄԻՋԻՆ ԳԻԾԸ

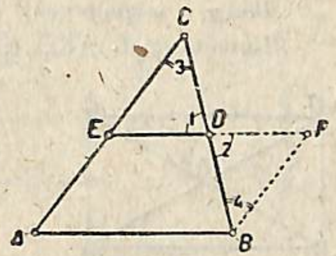
Այն հատվածը, որի ծայրերը եռանկյան երկու կողմերի միջնակետերն են, կոչվում է եռանկյան միջին գիծ։

Թեորեմ. Եռանկյան միջին գիծը զուգահեռ է երրորդ կողմին և կազմում է սրա կեսը։

Տված են՝ ABC-ն եռանկյուն է, AE=EC և BD=DC (Նկ. 118)

Պետք է ապացուցել՝ ED ∥ AB և $ED=\frac{1}{2}AB$.

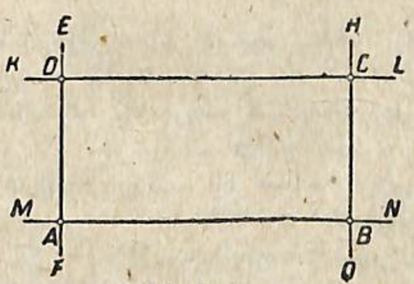
Ապացուցում։ ED-ի շարունակության վրա կդնենք նրա հավասար DE հատվածը և F կետը կմիացնենք B-ի հետ։ Կստանանք BDF եռանկյունը, որը հավասար կլինի △CED-ին, որովհետև CD=DB, ED=DF և $\angle 1=\angle 2$։ Եռանկյունների հավասարությունից բղխում է, որ $\angle 3=\angle 4$, ուստի և BF ∥ AC, բացի դրանից, BF=EC=AE. Նշանակի, ABFE քառանկյունը զուգահեռագիծ է, որովհետև նրա մեջ BF և AE հանդիպակաց կողմերը հավասար են և զուգահեռ։ Հետևաբար, EF ∥ AB և EF=AB, բայց EF=ED+DF=2ED=AB ուստի և $ED=\frac{1}{2}AB$։



Նկ. 119.

§ 7. ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ. ՆՐԱ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

1. Եթե տանենք KL ու MN երկու զուգահեռ ուղիղները (Նկ. 119) և այդ ուղիղները հատենք նրանց ուղղահայաց երկու զուգահեռ ուղիղներով՝ EF-ով ու HQ-ով, ապա զուգահեռ ուղիղների միջև զուգահեռ հատվածները կառաջացնեն ABCD զուգահեռագիծը, որի մեջ անկյուններն ուղիղ են. այսպիսի զուգահեռագիծը կոչվում է ուղղանկյուն։ Այսպես ուրեմն,



Նկ. 119.

ուղղանկյունը նույն է, ինչ որ ուղղանկյուն զուգահեռագիծը։

Քանի որ ուղղանկյունը միաժամանակ նաև զուգահեռագիծ է, ապա նա ունի վերջինիս բոլոր հատկությունները։

Ուղղանկյան մեջ 1) հանդիպակաց կողմերը հավասար են. 2) հան-

դիպակաց անկյունները միահավասար են, և յուրաքանչյուրը հավասար է մի ուղիղ անկյան. 3) անկյունագիծը այն բաժանում է յերկու միահավասար ուղղանկյուն յեռանկյունների. 4) անկյունագծերը փոխադարձաբար կիսվում են. 5) նրա անկյունագծերի հատման կետը նրա համաչափության կենտրոնն է:

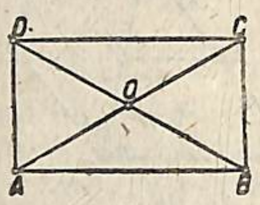
Ուղղանկյան կողմերից մեկը կոչվում է նրա հիմք, *իսկ սրան հարևան կողմերից մեկը՝* բարձրություն։

2. Թեորեմ. Ուղղանկյան անկյունագծերը միահավասար են:

Տված են՝ ABCD-*ն ուղղանկյուն է.* AC-*ն ու* BD-*ն անկյունագծեր են (նկ. 120)*

Պետք է ապացուցել՝ AC=BD.

Ապացուցում. ABD *և* ACD *յեռանկյունները ուղղանկյուն են և իրար հավասար, վորովհետև էջերը համապատասխանաբար միահավասար են, այն է՝* AD-*ն ընդհանուր էջ է, և* AB=CD *իբրև ուղղանկյան հանդիպակաց կողմեր։ Յեռանկյունների հավասարությունից հետևում է, վոր* AC=BD, *այսինքն ուղղանկյան անկյունագծերը միահավասար են։*



Նկ. 120.

Յեթե զուգահեռագծի անկյունները ուղիղ չեն, այս հատկությունը տեղի չունի՝ նրա անկյունագծերն անհավասար են, և այն անկյունագիծը, վորը միացնում է սուր անկյունների գագաթները, ավելի մեծ է քան բութ անկյունների գագաթները միացնող անկյունագիծը։

§ 8. ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ

Զուգահեռագծի կառուցման համար պետք է իմանալ նրա տարրերից յերեքը։ Իսկ ուղղանկյան կառուցման համար բավական է իմանալ նրա յերկու գծային տարրերը միայն, վորովհետև յերրորդ տարրը՝ կողմերի միջև գտնված անկյունը, միշտ տված է վորպես ուղիղ անկյուն։

Ուղղանկյունը կարելի յե կառուցել, յեթե տված են 1) յերկու հարևան կողմեր՝ a *ու* b, *2) անկյունագիծը՝* m, *և կողմերից մեկը, 3) կողմերից մեկը և սրա ու անկյունագծի կազմած անկյունը, 4) անկյունագիծը* m, *և յերկու անկյունագծերի կազմած* α *անկյունը։*

Խնդիր. Կառուցել ուղղանկյուն, յեթե տված են անկյունագիծը՝ $m=8$ սմ, և անկյունագծերի կազմած անկյունը՝ $\alpha=30°$:

Կառուցում. O *կետով կտանենք յերկու ուղիղներ՝* MN *և* KL, *վորոնք իրար հետ* $\alpha=30°$*-ի անկյուն կազմեն. այնուհետև* O *կետից այս ուղիղների վրա դեպի յերկու կողմը կվերցնենք* $\frac{m}{2}=\frac{8}{2}=4$ սմ

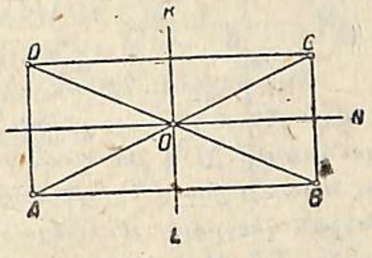
յերկարության հատվածներ և սրանց ծայրերը կմիացնենք ուղիղներով։

Այսպիսի կառուցումով ստացված քառանկյունը մի ուղղանկյուն է։

§ 9. ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՆՑՔՆԵՐԸ

Յեթե ABCD *ուղղանկյան* AC *ու* BD *անկյունագծերի հատման* O *կետից (նկ. 121) տանենք* KL *ու* MN *ուղիղներն այնպես, վոր համապատասխանաբար ուղղահայաց լինեն ուղղանկյան կողմերին, և այնուհետև գծագիրը ծալենք ըստ* KL *կամ ըստ* MN *ուղիղի, ապա գծագրի մի մասը լրիվին կհամատեղվի գծագրի մյուս մասի հետ, հետևաբար.*

1) KL *և* MN ուղիղները, վորոնք ուղղահայաց են ուղղանկյան կողմերին և անցնում են անկյունագծերի հատման կետով, ծառայում են իբրև ուղղանկյան համաչափության առանցքներ:



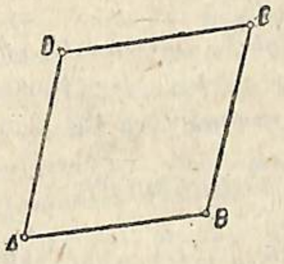
Նկ. 121.

2) Ուղղանկյունն ունի յերկու համաչափության առանցքներ։

Ուղղանկյան համաչափության առանցքի հատկությունից հետևում է, վոր նա ուղղանկյան հանդիպակաց կողմերը կիսում է. այն հատվածը, վորը միացնում է ուղղանկյան հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը, կոչվում է նրա միջին գիծ. *միջին գիծը հավասար է ուղղանկյան այն կողմին, վորին նա զուգահեռ է։*

§ 10. ՇԵՂԱՆԿՅՈՒՆԸ ՅԵՎ ՆՐԱ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

1. *Այն զուգահեռագիծը, վորի բոլոր կողմերը հավասար են, կոչվում է* շեղանկյուն (ռոմբ). շեղանկյունը հավասարակողմ զուգահեռագիծ է։



Նկ. 122.

Շեղանկյան սահմանումից հետևում է (նկ. 122)

1) $AB \parallel CD$ *և* $AD \parallel BC$,

2) $AB=BC=CD=AD$.

Շեղանկյան հատկությունները. *Շեղանկյունն, իբրև հավասարակողմ զուգահեռագիծ ունի զուգահեռագծի բոլոր հատկությունները։*

Շեղանկյան մեջ 1) հանդիպակաց անկյունները հավասար են. 2) վորևէ կողմին առընթեր յերկու անկյունների գումարը 2d է. 3) անկյունագիծը բաժանում է շեղանկյունը յերկու հավասար և այն էլ հավասա-

ռաստուն եռանկյունների, 4) անկյունագծերը փոխադարձաբար կիսվում են. 5) նրա անկյունագծերի հատման կետը ծառայում է իբրև նրա համաչափության կենտրոն:

3) Թեորեմ. Շեղանկյան անկյունագծերը 1) փոխհատվում են ուղիղ անկյունով, այսինքն փոխուղղահայաց են. 2) նրա անկյունները կիսում են. 3) նրա համաչափության առանցքներն են. 4) շեղանկյունը բաժանում են 4 հավասար ուղղանկյուն եռանկյունների:

Տված են՝ ABCD-ն շեղանկյուն է, AC-ն և BD-ն նրա անկյունագծերն են (նկ. 123)

Պետք է ապացուցել՝ 1) $AC \perp BD$, 2) $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$,

3) AC *և* BD *համաչափության առանցքներն են*

4) $\triangle AOB=\triangle BOC=\triangle COD=\triangle DOA$:

Ապացուցում: *Դիտենք ABD եռանկյունը: Նա հավասարասրուն է, որովհետև ըստ պայմանի AB=AD: Քանի որ շեղանկյան AC անկյունագիծը ADB եռանկյան BD կողմի միջնակետով է անցնում, ապա նա ներկայացնում է այդ հավասարասրուն եռանկյան միջնագիծը, A անկյան կիսորդը, եռանկյան բարձրությունը, նրա համաչափության առանցքը և բաժանում է այդ եռանկյունը երկու հավասար եռանկյունների, որոնք են AOB և AOD:*

Այսպես ուրեմն, 1) $AC \perp BD$, 2) $\angle 1=\angle 2$, 3) *AC-ն շեղանկյան համաչափության առանցքն է.* 4) $\triangle AOB=\triangle AOD$:

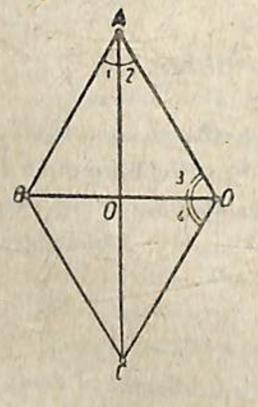
Դիտելով ADC հավասարասրուն եռանկյունը, որի մեջ AD=DC և DO-ն անցնում է AC կողմի միջնակետով, եզրակացնում ենք, որ

1) $OD \perp AC$, 2) $\angle 3=\angle 4$,

3) *DB-ն շեղանկյան համաչափության առանցքն է.* 4) $\triangle AOD=\triangle DOC$:

Քանի որ $\triangle AOB=\triangle AOD$, $\triangle AOD=\triangle DOC$, $\triangle DOC=\triangle COB$, $\triangle AOB=\triangle AOD=\triangle DOC=\triangle COB$:

4. Շեղանկյունը կառուցելիս օգտվում են անկյունագծերի այն հատկությունից, որ նրանք իրար կիսում են և իրար ուղղահայաց են:



Նկ. 123

§ 11. ՇԵՂԱՆԿՅԱՆ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ

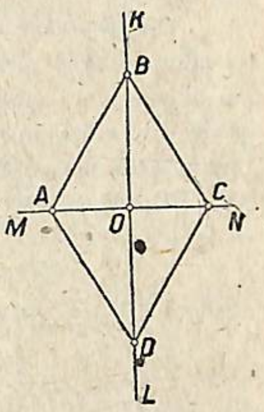
1. Խնդիր *1. Կառուցել շեղանկյունը, եթե տված է կողմը՝ a, և մի անկյունը՝ A:*

Կառուցում. *Կկառուցենք ∠A-ն և գագաթից նրա կողմերի վրա կվերցնենք* միհավասար *հատվածներ՝* AB=AD=a: B *և* D

ծայրերը միացնելով, կլրացնենք ստացած ABD եռանկյունը մինչև շեղանկյուն դառնալը:

Խնդիր 2. Կառուցել շեղանկյունը, եթե տված են նրա անկյունագծերը՝ m և n:

Կառուցում: *Տանում ենք իրար հավասար ուղղահայաց երկու ուղիղներ՝ MN ու KL (նկ. 124) և նրանց հատման O կետն ընդունելով իբրև շեղանկյան անկյունագծերի հատման կետ, այդ ուղիղների վրա O կետից դեպի երկու կողմը վերցնում ենք զույգ առ զույգ հավասար հատվածներ, որոնք համապատասխանաբար հավասար են անկյունագծերից յուրաքանչյուրի կեսին՝* $OA=OC=\frac{m}{2}$ *և* $OB=OD=\frac{n}{2}$*. այնուհետև միացնում ենք հատվածների ծայրերը. կառուցած ABCD քառանկյունը շեղանկյուն է:*



Նկ. 124.

2. Շեղանկյան կառուցման համար բավական է իմանալ նրա տարրերից երկուսը 1) կողմը և անկյունը. 2) երկու անկյունագծերը, 3) մի անկյունագիծը և կողմը, 4) մի անկյունագիծը և մի անկյունը:

§ 12. ՔԱՌԱԿՈՒՍԻՆ ՅԵՎ ՆՐԱ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Քառակուսին կարելի յե դիտել թե իբրև ուղղանկյան և թե իբրև շեղանկյան մասնավոր դեպքը: Այդ կներկայացնենք այստեղ երկու սյունակով.

Այն ուղղանկյունը, որի մեջ երկու հարևան կողմերը միահավասար են, կոչվում է քառակուսի *(նկ. 125):*

Ուղղանկյան մեջ հանդիպակաց կողմերը միահավասար են. քառակուսու մեջ թե հանդիպակաց կողմերն են միահավասար և թե հարևան կողմերը, այսինքն բոլոր կողմերը միահավասար են՝

AB=BC=CD=AD.

Հետևաբար, քառակուսին մի ուղղանկյուն է, որը հավասար կողմեր ունի, այսինքն քառակուսին մի հավասարակողմ ուղղանկյուն է.

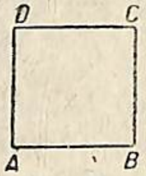
Այն շեղանկյունը, որի մեջ անկյուններն ուղիղ են, կոչվում է քառակուսի *(նկ. 125): Շեղանկյան մեջ հանդիպակաց անկյունները միահավասար են. քառակուսու մեջ և՛ հանդիպակաց անկյուններն են միահավասար, և՛ մի կողմին առընթեր անկյունները, այսինքն բոլոր անկյուններն էլ ուղիղ են՝*

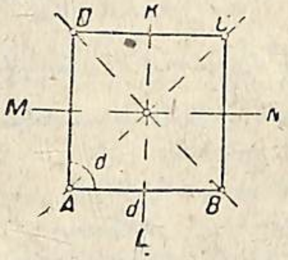
$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=d$.

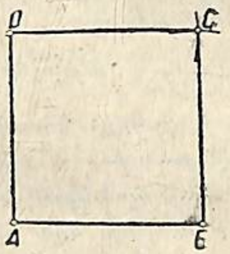
Հետևաբար, քառակուսին մի շեղանկյուն է, որը հավասար անկյուններ ունի, այսինքն քառակուսին մի հավասարանկյուն շեղանկյուն է։

Քառակուսին ունի ուղղանկյան և շեղանկյան բոլոր հատկությունները։

Քառակուսու մեջ (նկ. 126) 1) անկյունագծերն իրար կիսում են, 2) անկյունները իրար հավասար են, 3) միջին գիծը համաչափության առանցք է, 4) անկյունագծերն իրար ուղղահայաց են, 5) անկյունագծերը քառակուսու անկյունները կիսում են, 6) անկյունագծերը համաչափության առանցքներն են, 7) չորս համաչափության առանցքներ կան՝ AC, BD, MN և KL։


Նկ. 125.


Նկ. 126.


Նկ. 127.

§ 13. ՔԱՌԱԿՈՒՍՈՒ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ

Խնդիր 1. Կառուցել քառակուսին, եթե նրա կողմն է՝ a=2,5 սմ. (նկ. 127)։

Կառուցում։ Կառուցում ենք մի ուղիղ անկյուն և նրա կողմերի վրա գագաթից սկսած վերցնում ենք a=2,5 սմ. երկարության հատվածներ. այս երկու հատվածների ծայրերից գծում ենք աղեղների մի շառավղով, որը նույնպես հավասար է 2,5 սմ-ի, այնուհետև այս աղեղների հատման կետերը միացնում ենք հատվածների ծայրերի հետ։ Կառուցած քառանկյունը լինում է որոնած քառակուսին։

Եզրակացություն։ Քառակուսին կառուցելու համար բավական է իմանալ նրա կողմի երկարությունը։

Խնդիր։ Կառուցել քառակուսին, եթե նրա անկյունագիծն է m=6 սմ։

Կառուցում։ Տանում ենք երկու ուղիղներ, MN ու KL, որոնք փոխհատվում են ուղիղ անկյունով, և նրանց հատման O կետից դեպի երկու կողմը տանում ենք հավասար հատվածներ, այն է՝ $\frac{m}{2}=3$ սմ,

և իրար հետ միացնում ենք հատվածների ծայրերը։ Ստացած քառանկյունը կլինի որոնած քառակուսին։

Եզրակացություն։ Քառակուսին կառուցելու համար բավական է իմանալ նրա անկյունագծի երկարությունը։

Այսպես ուրեմն, քառակուսին կառուցելու համար բավական է իմանալ նրա կամ կողմի և կամ անկյունագծի երկարությունը միայն։

§ 14. ՍԵՂԱՆ

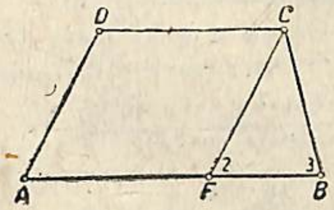
1. Այն քառանկյունը (ABCD, նկ. 128), որի երկու հանդիպակաց կողմերը զուգահեռ են, կոչվում է սեղան (трапец)։

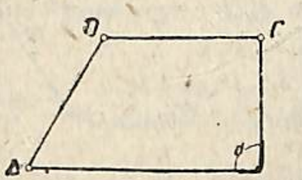
2. Սեղանի զուգահեռ կողմերը կոչվում են նրա հիմքեր, իսկ մյուս երկու կողմերը, AD ու CB, սեղանի կողմնային կողմեր։

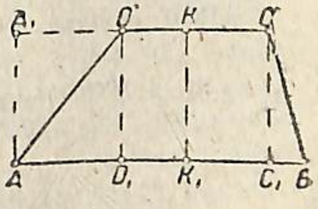
3. Այն սեղանը, որի կողմնային կողմերը միահավասար են, կոչվում է հավասարասրուն սեղան։

4. Այն սեղանը, որի անկյուններից մեկն ուղիղ է, կոչվում է ուղղանկյուն սեղան (նկ. 129), այս սեղանի մեջ AB ∥ CD և CB ⊥ AB։

5. Սեղանի հիմքերի միջև կարճագույն հեռավորությունը որոշվում է այն ուղղահայացի երկարությամբ, որը տարված է սեղանի հիմքի որևէ կետից դեպի մյուս հիմքը։ Այս ուղղահայացը միաժամանակ նաև սեղանի բարձրությունն է (նկ. 130)։ AA_1, DD_1, KK_1, CC_1 բարձրությունները միահավասար են, իբրև զուգահեռների հատվածներ զուգահեռների միջև։


Նկ. 128.


Նկ. 129.


Նկ. 130.

§ 15. ՀԱՎԱՍԱՐԱՍՐՈՒՆ ՍԵՂԱՆԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

1. Հավասարասրուն սեղանի մեջ ամեն մի հիմքին առընթեր անկյունները միահավասար են։

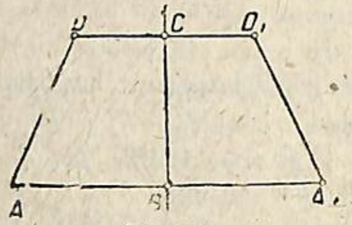
Տված է՝ ABCD-ն սեղան է, AD=BC (նկ. 128)

Պետք է ապացուցել՝ $\angle A=\angle B$ և $\angle C=\angle D$։

Ապացուցում. Տանում ենք CF ∥ AD, ստանում ենք CFB եռանկյունը, որը հավասարասրուն է, իրոք AD=CF իբրև զուգահեռների

միջև զուգահեռ հատվածներ, և AD=BC ըստ պայմանի. հետևաբար CF=BC. սրանից բղխում է, վոր $\angle 2=\angle 3$ իբրև հավասարասրուն յեռանկյան հիմքի մոտի անկյուններ։ Բայց $\angle 2=\angle 1$ իբրև համապատասխան անկյուններ AD և CF զուգահեռների մոտ, ուստի $\angle 1=\angle 3$։

2. Յեթե ABCD ուղղանկյուն սեղանի մեջ (նկ. 131), ուր CB⊥AB, CB-ն ընդունենք իբրև համաչափության առանցք և կառուցենք այդ սեղանին համաչափ CBA_1D_1 սեղանը, ապա այդպիսի կառուցումով ստացված պատկերը՝ AA_1D_1D, կլինի հավասարասրուն սեղան։ Այս սեղանի B և C կետերն AA_1 և DD_1 հիմքերի միջնակետերն են. CB ուղիղը, վորը միացնում է այդ կետերը, հանդիսանում է AA_1D_1D հավասարասրուն սեղանի համաչափության առանցքը։



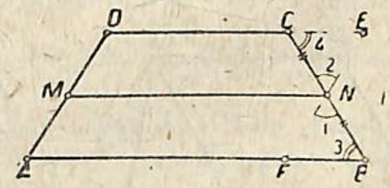
Նկ. 131.

Հավասարասրուն սեղանը մեկ համաչափության առանցք ունի. այն անցնում է այդ սեղանի հիմքերի միջնակետերով և ուղղահայաց է հիմքերին. ուրիշ խոսքով, հավասարասրուն սեղանի զուգահեռ կողմերի միջնակետերը միացնող ուղիղը այդ սեղանի համաչափության առանցքն է։

§ 16. ՍԵՂԱՆԻ ՄԻՋԻՆ ԳԻԾԸ

1. Սեղանի միջին գիծ այն հատվածն է, վորի համար իբրև ծայրեր ծառայում են սեղանի կողմնային կողմերի միջնակետերը։

ABCD սեղանի մեջ (նկ. 132) M կետն AD կողմի միջնակետն է, N կետը BC-ի միջնակետը, այսինքն AM=MD և BN=NC, իսկ MN-ը սեղանի միջին գիծն է։



Նկ. 132.

Թեորեմ: Սեղանի միջին գիծը զուգահեռ է նրա հիմքերին և հավասար է նրանց կիսագումարին։

Տված է՝ ABCD-ն սեղան է և MN-ը միջին գիծն է (նկ. 132)

Պետք է ապացուցել՝ 1) MN ∥ AB ∥ DC, *2)* $MN=\frac{AB+DC}{2}$.

Ապացուցում. *1) Կշարունակենք DC կողմը և CB կողմի N միջնակետով կտանենք EF ուղիղը զուգահեռ AD-ին, կստանանք CNE և FNB յեռանկյունները, վորոնք հավասար են, վորովհետև 1)* CN=NB *ըստ պայմանի, 2)* $\angle 1=\angle 2$ *իբրև հակադիր անկյուններ, 3)* $\angle 3=\angle 4$ *իբրև ներքին խաչադիրներ զուգահեռների մոտ։*

Յեռանկյունների հավասարությունից հետևում է, վոր CE=FB

և EN=NF. հետևաբար $EN=\frac{EN}{2}$. բայց EF հատվածը հավասար է AD-ին և նրան զուգահեռ. ուստի $EN=\frac{AD}{2}=MD$։ Այսպես ուրեմն, EN=MD և EN ∥ MD. հետևաբար MDEN քառանկյունը զուգահեռագիծ է, վորտեղից հետևում է, վոր DE ∥ MN։

Սեղանի մեջ DC ∥ AB և ըստ ապացուցածի DC ∥ MN, ուստի MN ∥ AB։ Այսպես ուրեմն MN ∥ AB ∥ DC։ Թեորեմի առաջին մասն ապացուցված է։

2) Դիտենք AMNF և DMNE զուգահեռագծները. սրանց մեջ

$$MN=AF=AB-FB$$
$$MN=DF=DC+CE$$
$$2MN=AF+DE=AB+DC-FB+CE$$

բայց FB=CE, ուստի 2 MN=AB+DC կամ $MN=\frac{AB+DC}{2}$։

Դիտողություն. *Սեղանի միջին գիծը հավասար է յերկու հիմքերի միջին թվաբանականին։ Այսպես, յեթե սեղանի հիմքերը համապատասխանաբար հավասար են՝* a=14 սմ *և* b=8 սմ, *ապա սեղանի միջին գիծը կլինի՝* $m=\frac{a+b}{2}=\frac{14+8}{2}=11$ սմ։

§ 17. ՍԵՂԱՆԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ

1. Սեղանը վորոշվում է չորս տարրերով, վորոնց թվում կարող են լինել հիմքին առընթեր անկյուններից մեկը կամ յերկուսը. սեղանը վորոշվում է որինակ՝

1) իր չորս կողմերով,

2) յերկու հիմքերով, մեկ կողմնային կողմով և անկյուններից մեկով.

3) յերկու հիմքերով, մեկ կողմնային կողմով և մեկ անկյունագծով.

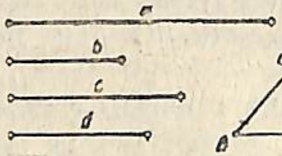
4) յերկու հիմքերով, մեկ կողմնային կողմով և բարձրությամբ.

5) մեկ հիմքով, նրան առընթեր յերկու անկյուններով և բարձրությամբ։

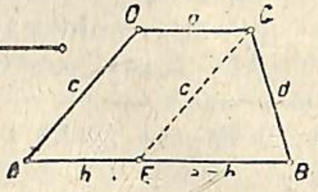
2. Հավասարասրուն և ուղղանկյուն սեղանի կառուցման համար թվածներից միայն յերեք տարր է անհրաժեշտ, վորոնց թվում կարող է նաև մեկն անկյուն լինել. չորրորդ տարրն արդեն նրանով է տված, վոր հավասարասրուն սեղանի մեջ նրա կողմնային կողմերը, ինչպես և հիմքին առընթեր անկյունները, միահավասար են, իսկ ուղղանկյուն սեղանի մեջ նրա յերկու անկյուններն ուղիղ են։

3. Խ ն դ ի ր: Կառուցել սեղանը նրա չորս կողմերով՝ a, b, c և d, վորոնցից a-ն և b-ն հիմքերն են, իսկ c-ն և d-ն կողմնային կողմերը (նկ. 133 և 134):

Կառուցում. Յենթադրենք, վոր ABCD սեղանը (նկ. 134) կառուցված ե: AD կողմն իրեն զուգահեռ թողնելով տեղափոխենք CE դիրքը. այն ժամանակ սեղանը կբաժանվի ABCE զուգահեռագծին և BCE յեռանկյանը, վորոնց կառուցումը մենք կարող ենք կատարել, վորովհետև դրա համար բոլոր անհրաժեշտ տվյալները կան, այն ե՝ յեռանկյան համար հայտնի յեն բոլոր կողմերը՝ CE=c, CB=d. BE=a—b, իսկ զուգահեռագծի համար՝ AD=c, AE=b և ∠E-ն:



Նկ. 133.



Նկ. 134.

Այս հետազոտությունից հետո անցնում ենք կառուցման: Խնդրի տվյալներով կառուցում ենք BCE յեռանկյունը. BE-ն շարունակելով, վերցնում ենք BA=a հատվածը. A կետից տանում ենք AD ∥ CE, իսկ C կետից CD ∥ AB և ստանում ենք վորոնած սեղանը՝ ABCD:

Խնդիրը հնարավոր ե, յեթե $c-d < a-b < c+d$.

§ 18. ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆԸ ՎՈՐՈՇՈՂ ՏԱՐՐԵՐԻ ԹԻՎԸ

1. Տված յերեք տարրերով կարելի յե անթիվ բազմությամբ յեռանկյուններ կառուցել, վորոնք իրար հավասար են և իրարից միայն իրենց դիրքով են տարբերվում և վոչ տեսքով կամ մեծությամբ, նրանք բոլորն ել հանդիսանում են միևնույն յեռանկյան պատճենները: Այսպիսի դեպքում ասում են, վոր կարելի յե միայն մեկ յեռանկյուն կառուցել: Պարզ ե, վոր այդպիսի յեռանկյունից կարելի յե անթիվ բազմությամբ պատճեններ հանել:

Հայտնի յե, վոր յեռանկյունը կարելի յե կառուցել, յեթե տված են նրա հետևյալ յերեք հիմնական տարրերը:

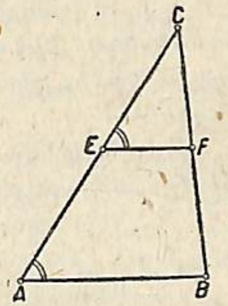
1) մի կողմը և նրան առընթեր յերկու անկյունները (վորոնց գումարը փոքր պետք ե լինի 2d-ից).

2) յերկու կողմերը և նրանցով կազմված անկյունը (վոր փոքր պետք ե լինի 180°-ից).

3) յերեք կողմերը (վորոնցից ամենամեծը պետք ե փոքր լինի մյուս յերկուսի գումարից):

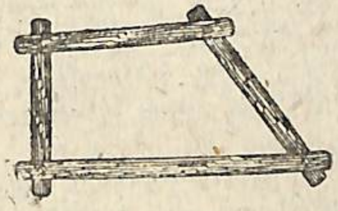
Յերկու հիմնական տարրերով չի կարելի վորոշյալ չափսեր ունեցող յեռանկյուն կառուցել: Այսպես. որինակի համար, տվյալ յերկու

կողմերով կամ տվյալ կողմով և անկյունով կարելի յե անթիվ բազմությամբ յեռանկյուններ կառուցել, վորոնք իրարից զանազանվում են և՛ իրենց տեսքով, և՛ իրենց չափսերով, իսկ տված յերկու անկյուններով կարելի յե անթիվ բազմությամբ յեռանկյուններ կառուցել, վորոնք իրարից տարբերվում են իրենց չափսերով: Դիցուք, որինակի համար, տված ե ABC յեռանկյունը (նկ. 135): Յեթե AC կողմի վորևե E կետից AB հիմքին զուգահեռ տանենք EF ուղիղը, ապա կստանանք CEF յեռանկյունը, վորի անկյունները համապատասխանաբար հավասար են ABC յեռանկյան անկյուններին. իրոք, C անկյունն ընդհանուր ե, ∠E=∠A և ∠F=∠B իբրև համապատասխան անկյուններ. ակներև ե, վոր այս յեռանկյուններն իրար հավասար չեն, նրանք իրարից տարբերվում են իրենց չափսերով, թեպետ և համապատասխանաբար հավասար անկյուններ ունեն:



Նկ. 135.

Այսպես ուրեմն, յերեք անկյուններով չի կարելի վորոշյալ չափսերի յեռանկյուն կառուցել: Յեռանկյան անկյուններն իրար հետ կապված են վորոշյալ առընչությամբ՝ ∠A+∠B+∠C=180°, այս պատճառով յեռանկյան անկյունները վորոշելու համար բավական ե իմանալ նրա յերկու անկյունը միայն, վորովհետև յերրորդ անկյունը նրանցով արդեն վորոշվում ե, որինակի համար ∠C=180°−(∠A+∠B): Այստեղից հետևում ե, վոր յեթե տված են յերեք անկյուններ, վորոնց գումարը 180° ե, ապա այս պայմանն ըստ յեության միայն յերկու անկախ տարր ե պարունակում՝ յերկու անկյունները, վորովհետև յերրորդ անկյունը նրանցով վորոշվում ե:



Նկ. 136.

Յեռանկյունը կարելի յե կառուցել յերեք անկախ տարրերով:

Կարող ե սակայն, պատահել, ինչպես կտեսնենք հետագայում, վոր նաև յերեք անկախ տարրերով հնարավոր լինի կառուցել վոչ թե միայն մի յեռանկյուն, այլ տարբեր տեսքի և չափսերի յերկու յեռանկյուն: Այսպես, որինակի համար, տվյալ յերկու կողմերով և փոքր կողմի դիմացի անկյունով կարելի յե յերկու տարբեր յեռանկյուններ կառուցել: Իսկ յեթե կառուցման համար տված յերեք տարրերի մեջ կան նաև կախյալները, ապա կստացվեն անթիվ բազմությամբ տարբեր յեռանկյուններ:

Այս պատճառով յեռանկյունը կառուցելուց հետո անհրաժեշտ ե հետազոտել, թե խնդրի պայմանի մեջ տված տարրերը քանի՛ լուծում

են տալիս՝ մեկ թե մի քանի, և ինչպիսի տվյալների դեպքում խնդիրն ընդհանրապես անլուծելի յե, այսինքն կառուցումն անհնարին է։

2. Զուգահեռագծերի կառուցումն, ինչպես հայտնի յե, վերածվում է յեռանկյունների կառուցման, ուստի զուգահեռագծի կառուցման համար բավական է իմանալ նրան պատկանող յերեք անկախ տարրեր։

3. Ուղղանկյան կառուցման համար բավական է իմանալ նրան պատկանող յերկու գծային տարր. յերրորդ տարրը՝ նրա անկյունը, տալու կարիք չկա, վորովհետև ուղղանկյան մեջ բոլոր անկյուններն ուղիղ են։

4. Շեղանկյուն կառուցելու համար էլ պահանջվում է գիտենալ նրա յերկու անկախ տարրերը։

5. Քառակուսին կառուցելու համար բավական է իմանալ նրա միայն մի գծային տարրերը՝ կողմը կամ անկյունագիծը։

6. Սեղանի կառուցման համար, նայած նրա տեսքին, պահանջվում են տարբեր թվով անկախ տարրերը՝

1) հավասարասրուն սեղանի համար 3 տարր.

2) ուղղանկյուն սեղանի համար 3 տարր.

3) սեղանի համար (յեթե հավասարասրուն չե և վոչ էլ ուղղանկյուն) 4 տարր։

7. Քառանկյունը կառուցելու համար անհրաժեշտ են հինգ անկախ տարրեր։

Իրոք յեթե վերցնենք մի հոդակապավոր քառանկյուն (նկ. 136), ապա անփոփոխ պահելով նրա բոլոր կողմերի յերկարությունները և փոփոխելով կողմերով կազմված անկյունների մեծությունները, կարելի յե ստանալ տարբեր քառանկյունների մի անվերջ բազմություն. այստեղից հետևում է, վոր 4 կողմերը դեռևս չեն տալիս մի վորոշյալ քառանկյուն. վորպեսզի քառանկյունը վորոշված լինի, անհրաժեշտ է տալ նաև մի հինգերորդ տարր՝ կամ անկյուններից մեկը, կամ նրա յերկու անկյունագծերից մեկը։

Իրոք, յեթե քառանկյան մեջ տանենք նրա անկյունագծերից մեկը, վորը կմիացնի իրար հետ նրա յերկու գագաթները, ապա կունենանք մի վորոշակի քառանկյուն, վորովհետև նա ստացվում է այն յերկու յեռանկյունների կառուցումով, վորոնք վորոշվում են քառանկյան մի անկյունագծով և կողմերով։

Այսպիսով անկյունագիծը քառանկյանը տալիս է վորոշակի, կամ, ինչպես ասում են, կոշտ ձև։

Քառանկյունը կարելի յե կառուցել, յեթե տված են որինակի համար, նրա հետևյալ հինգ տարրերը. 1) 4 կողմերը և մի անկյունագիծը, 2) 4 կողմերը և մի անկյունը, 3) 3 կողմերը և յերկու անկյունագծերը, 4) 3 կողմերը և անկյուններից յերկուսը, 5) կողմերից 2-ը և անկյուններից 3-ը և այլն։

8. Քառանկյունը փոխում է իր ձևը, յեթե կողմերի յերկարությունները պահպանելով փոփոխում ենք նրա անկյունների մեծությունը։ Այդպես չի յեռանկյան նկատմամբ։ Կողմերի յերկարությունները պահպանելու դեպքում յեռանկյան ձևն անհնարին է փոխել։ Այս կարևոր հատկության շնորհիվ, վոր յեռանկյունն իր ձևը չի փոխում, յերբ կողմերի յերկարություններն անփոփոխ են, յեռանկյունը կոչվում է ամրապինդ կամ կոշտ պատկեր։

Յեռանկյան այս հատկությունը բացառիկ կարևոր նշանակություն ունի տեխնիկայում և շինարարության մեջ։

Յեռանկյան ձևն ոգտագործում են ծպեղներ, կամրջի ֆերմեր, ամբարձիկ կռունկներ, մեքենաների բազմաթիվ մասեր և շատ ուրիշ առարկաներ պատրաստելիս։ Քառանկյունը, սակայն կոշտ պատկեր չէ։

Քառանկյանը կոշտ ձև տալու համար նրա յերկու վոչ հարևան գագաթները ամրապես միացնում են անկյունագծով, վորի շնորհիվ նա վերածվում է յերկու յեռանկյունների, իսկ սրանցից յուրաքանչյուրն արդեն ներկայացնում է մի կոշտ, կայուն պատկեր։

Քառանկյունը կոշտ ձև է ստանում նաև այն դեպքում, յերբ նրա կողմերի յերկարություններն անփոփոխ թողնելով, նրա յերկու հարևան կողմերի միջև մի անկյունարդ է ամրացվում։

§ 19. ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆ։ ՆՐԱ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

1. n կողմերից բաղկացած փակ բեկյալով սահմանափակված հարթամասը կոչվում է n-անկյուն. n-ը կարող է ամեն մի ամբողջ թիվ լինել, վորը 3-ից փոքր չէ։

Հետագայում դիտարկում ենք միայն ուռուցիկ բազմանկյունները, այսինքն այնպիսի բազմանկյունները, վորոնց մեջ յուրաքանչյուր ներքին անկյունը փոքր է $2d$-ից։

2. Թեորեմ. n-անկյան ներքին անկյունների գումարը հավասար է $2d\,(n-2)$, կամ $180^\circ\,(n-2)$։

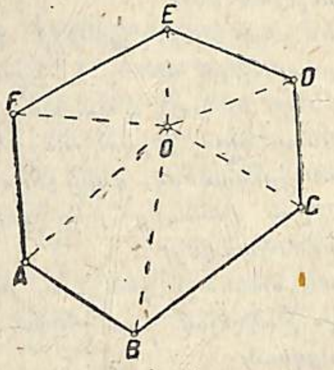
Ապացուցում. Բազմանկյան ներսը վերցնենք վորևէ O կետ և այդ կետն ուղիղներով միացնենք բազմանկյան բոլոր գագաթների հետ. կստանանք n յեռանկյուններ, այսինքն այնքան յեռանկյուններ, վորքան վոր բազմանկյան կողմերի թիվն է։ Այդ n յեռանկյունների բոլոր ներքին անկյունների գումարն է $2d \cdot n$. այդ անկյունների թվումն են նաև այն բոլոր անկյունները, վորոնք դասավորված են O ընդհանուր գագաթի շուրջը և վորոնց գումարն է $4d$, բազմանկյան ներքին անկյունների գումարն ստանալու համար պետք է n յեռանկյունների ներքին անկյուններից հանել O կետի շուրջը դասավորված անկյունների գումարը, վորով կունենանք՝

$2dn-4d=2d(n-2)$, կամ $180°\,(n-2)$։

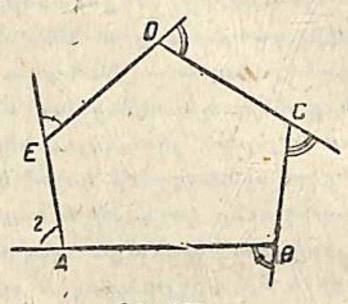
Այսպես ուրեմն,

n-անկյան ներքին անկյունների գումարը հավասար է 2d-ի, բազմապատկած նրա կողմերի թվով առանց երկուսի:

3. *Եթե ABCDE բազմանկյան մեջ (նկ. 138) շարունակենք նրա կողմերից մեկը, ասենք AB-ն, ապա այդ կողմի շարունակությունը հարևան BC կողմի հետ կկազմի մի անկյուն, որը կոչվում է բազմանկյան* արտաքին անկյուն:



Նկ. 137.



Նկ. 138.

Շարունակելով ABCDE *բազմանկյան բոլոր կողմերը (նկ. 138) կստանանք այնքան արտաքին անկյուններ, որքան կողմեր կամ անկյուններ ունի բազմանկյունը։*

4. Թեորեմ. Ուռուցիկ բազմանկյան բոլոր արտաքին անկյունների գումարը 4d է կամ 360°։

Տված է՝ մի n-անկյուն (նկ. 138)

Պետք է ապացուցել՝ n-անկյան արտաքին անկյունների գումարը 4d է։

Ապացուցում. *Բազմանկյան յուրաքանչյուր գագաթի մոտ ներքին անկյան և արտաքին անկյան գումարը կազմում է 2d. բոլոր n գագաթների համար ունենում ենք՝ 2d. n, բայց n-անկյան բոլոր ներքին անկյունների գումարը հավասար է՝ 2dn—4d. հետևաբար n-անկյան բոլոր արտաքին անկյունների գումարն ստանալու համար պետք է 2dn-ից հանել 2dn—4d. կունենանք՝* $2dn-(2dn-4d)=2dn-2dn+4d=$ $=4d$, *կամ 360°։*

Այսպես ուրեմն, ուռուցիկ բազմանկյան բոլոր արտաքին անկյունների գումարը 4d է: *Այդ գումարը կախված չէ բազմանկյան կողմերի թվից։*

ՀԱՐՑԵՐ ԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. *Ինչու բազմանկյան ներքին անկյունների գումարը չի կարող հավասար լինել 7d-ի կամ 1d-ի, ընդհանրապես՝ կենտ թիվ անգամ d-ի։*

2. ABCD *քառանկյան* AC *անկյունագիծը, որի երկարությունն է* n=6,4 սմ *այդ քառանկյունը բաժանում է երկու եռանկյունների, որոնց պարագծերը համապատասխանաբար հավասար են՝ 16,8 սմ և 20,2 սմ։ Որոշել* ABCD *քառանկյան պարագիծը։*

3. *Կառուցումով որոշել* B *և* Q *ուժերի* R *համազորի մեծությունը և ուղղությունը, եթե հայտնի է որ 1)* P=8 *կգ,* Q=6 *կգ,* ∢(P,Q)=60°։

4. *Կառուցումով որոշել* P *և* Q *բաղադրիչ ուժերի ուղղությունը և մեծությունը, եթե հայտնի է որ նրանց համազորը՝* R=20 *կգ և համապատասխան ուժերի հետ կազմում է* ∢(P,R)=30° *և* (Q,R)=90°։

5. *Կառուցել զուգահեռագիծը հետևյալ տվյալներով (*a *և* b *նշանակում են կողմերը, իսկ* m *և* n *անկյունագծերը).*

1) a=4,5 սմ, b=3,2 սմ, ∢A=40°,

2) a=7 սմ, b=5,3 սմ, ∢B=110°,

3) a=6,3 սմ, b=4,7 սմ, m=8սմ,

4) m=8 սմ, n=6,4, *նրանց կազմած անկյունը՝* β=45°.

5) a=7 սմ. ∠A=130° *և* α *անկյունը, որը կազմված է զուգահեռագծի մի անկյունագծով և* a *կողմով, հավասար է 40°-ի։*

6) a=8 սմ, b=6 սմ, *բարձրությունը՝* h=4 սմ.

6. *Կառուցել ուղղանկյունը, եթե տված են՝*

1) *նրա երկու կողմերը՝* a=6,4 սմ *և* b=4,3 սմ,

2) *կողմը՝* a=5,7 սմ *և անկյունագիծը՝* m=7,5 սմ,

3) *անկյունագիծը՝* m=8,4 սմ *և այդ անկյունագծի ու մի կողմի միջև կազմված անկյունը՝* α=40°։

4) *անկյունագիծը՝* 8 սմ *և* ∠β=60° *(անկյունագծերի միջև).*

5) *կողմը՝* b=5սմ *և* ∠β=110° *(անկյունագծերի միջև).*

7. *Կառուցել շեղանկյունը, եթե տված են՝*

1) *կողմը՝* a=4սմ *և անկյունը՝* α=40° *(երկու կողմերի միջև)։*

2) *կողմը՝* a=5սմ *և անկյունագիծը՝* m=5 սմ *և որոշել նրա անկյունները՝*

3) *անկյունագիծը՝* m=6 սմ *և անկյունը՝* α=120° *(երկու կողմերի միջև).*

4) *երկու անկյունագծերը* m=5 սմ *և* n=8 սմ.

5) *կողմը՝* a=5սմ *և բարձրությունը՝* h=3 սմ.

8. *Կառուցել քառակուսին, եթե տված են՝*

1) *կողմը՝* a=3,5 սմ.

2) *անկյունագիծը՝* m=4,5սմ։

9. *Ապացուցել, որ* հավասարասրուն սեղանի մեջ անկյունագծերը միահավասար են յեվ հիմքերի հետ հավասար անկյուններ են կազմում։

10. *Ապացուցել, որ* հավասարասրուն սեղանի մեջ անկյունագծերը սեղանը բաժանում են 4 այնպիսի յեռանկյունների, վորոնցից յերկուսը, վորոնք առընթեր են հիմքերին, հավասարասրուն են, իսկ յերկուսը, վորոնք առընթեր են կողմնային կողմերին, միահավասար են:

11. *Մի հավասարասրուն սեղանի մեջ անկյունագծերն իրար ուղղահայաց են։ Սեղանի բարձրությունն է 10 սմ։ Հաշվել միջին գծի երկարությունը։*

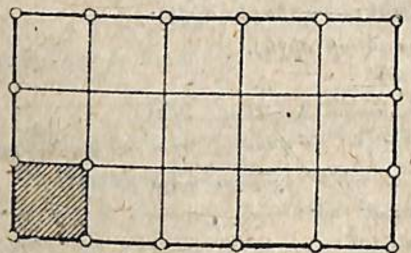
IX. ՈՒՂՂԱԳԻԾ ՊԱՏԿԵՐՆԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐԸ

§ 1. ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐԻ ՉԱՓՈՒՄԸ

1. Մակերեսը չափել՝ նշանակում է գտնել տվյալ մակերեսի հարաբերությունը ուրիշ մակերեսի, որն ընդունված է որպես միավոր։

Իբրև մակերեսի չափի միավոր ընդունված է այն քառակուսու մակերեսը, որի կողմը հավասար է որևէ գծային միավորի, օրինակի համար, 1 միլիմետրի, 1 սանտիմետրի, 1 մետրի և այլն. չափի այդպիսի միավորը կոչվում է քառակուսի միավոր:

2. *Քառակուսի միավորներն այսպես են նշանակվում՝ 1 ք. մմ կամ 1 մմ², 1 ք. սմ կամ 1 սմ², 1 ք. մ կամ 1 մ² և այլն։ Մակերեսի չափի միավորը ընտրելուց հետո չափում են պատկերի մակերեսը, այսինքն իմանում են, թե քանի քառակուսի միավոր է պարունակում չափելի մակերեսը։*



Նկ. 139.

3. *Պատկերի մակերեսը որոշելու համար սովորաբար* անմիջական չափում չեն կատարում, *այսինքն իբրև միավոր ընդունված մակերեսն ուղղակի չեն վերադրում տված պատկերի վրա, ինչպես այդ արված է 139-րդ նկարում։ Պատկերի մակերեսի մեծությունը սովորաբար որոշում են* անուղղակի չափումով, *որի համար չափում են պատկերի կողմերը և առանձին օժանդակ գծեր, որոնք տարվում են պատկերի մեջ, և այնուհետև ստացած թվերով հաշվում են մակերեսը։*

§ 2. ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՅԵՎ ՔԱՌԱԿՈՒՍՈՒ ՄԱԿԵՐԵՍԸ

Թեորեմ: Ուղղանկյան մակերեսը հավասար է նրա հիմքի և բարձրության արտադրյալին։

Տված են՝ ABCD-ն *մի ուղղանկյուն է (նկ. 140)*
AB=a *հիմքն է,* CB=h *բարձրությունն է։*

Պետք է ապացուցել՝ ABCD-*ի մակերեսը* $S=a\cdot h$։

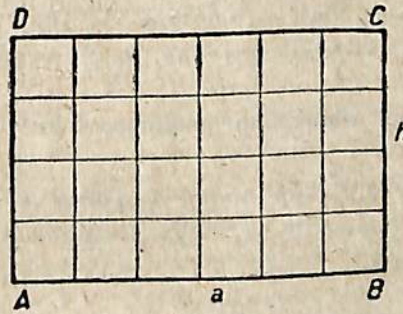
Զատ զատ քննենք այն դեպքերը, երբ միևնույն միավորով չափված հիմքը և բարձրությունը արտահայտվում են 1) ամբողջ թվերով և 2) կոտորակային թվերով։

Ապացուցում. I դեպք: *Դիցուք հիմքը՝* AB=a *սմ և բարձրությունը՝* B=h *սմ, որտեղ* a-*ն և* h-*ը ամբողջ թվեր են։* AB *հիմքը բաժանում ենք* a *հավասար մասերի, որոնցից յուրաքանչյուրը կլինի 1 սմ, իսկ* CB *բարձրությունն* h *նույնպիսի մասերի, և բաժանման կետերով տանենք ուղղանկյան կողմերին զուգահեռ ուղիղներ. այդպիսով ուղղանկյունը կբաժանվի քառակուսիների, որոնցից յուրաքանչյուրի մակերեսն է 1 սմ²։ Այս քառակուսիների թիվը հավասար է* a·h, *որովհետև* AB *հիմքին զուգահեռ ուղիղներն ուղղանկյունը բաժանում են* h *շերտերի, իսկ* CB *բարձրությանը զուգահեռ ուղիղները բաժանում են այդ շերտերից յուրաքանչյուրը* a *քառակուսիների, որոնցից յուրաքանչյուրի մակերեսը 1 սմ² է։*

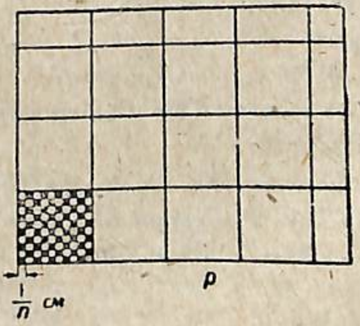
Այսպես ուրեմն, ABCD *ուղղանկյան մակերեսը բաժանվում է* a·h *քառակուսիների, որոնցից յուրաքանչյուրի մակերեսն է 1 սմ². այս կարելի յե բանաձևով այսպես գրել*

$$S=a\cdot h \text{ սմ}^2,$$

Այսինքն ուղղանկյան մակերեսը հավասար է քառակուսի միավորների այնպիսի թվի, որը կստացվի, յերբ նրա հիմքն ու բարձրությունը նույնանուն գծային միավորներով չափող թվերը բազմապատկենք իրար։



Նկ. 140.



Նկ. 141.

II դեպք։ *Հիմքը՝* AB=a սմ *և բարձրությունը՝* CD=h սմ, *որտեղ* a-*ն և* h-*ը կոտորակային թվեր են։ Դիցուք այդ կոտորակային թվերը, մի հայտարարի բերելուց հետո, հավասար են* $a=\frac{p}{n}$ *և* $h=\frac{q}{n}$։

a և h հատվածների համար իբրև ընդհանուր չափ ընդունենք մի հատված, որի երկարությունն է $\frac{1}{n}$ սմ. այս ընդհանուր չափն a-ի մեջ կմտնի p անգամ և h-ի մեջ q անգամ. բաժանման կետերով կտանենք ուղղանկյան կողմերին զուգահեռ ուղիղներ, այն ժամանակ ուղղանկյունը կբաժանվի p·q փոքրիկ քառակուսիների, որոնցից յուրաքանչյուրի կողմը կլինի $\frac{1}{n}$ սմ (նկ. 141). այդպիսի քառակուսյակներ 1 սմ²-ու մեջ պարունակվում է $n\cdot n=n^2$ հատ. այսպես, եթե 1 սմ երկարություն կողմ ունեցող քառակուսու հարևան կողմերից յուրաքանչյուրը բաժանենք 10 հավասար մասերի և բաժանման կետերից զուգահեռներ տանենք կողմերին, ապա այդ քառակուսին կբաժանվի $10\cdot10=10^2=100$ քառակուսյակների, և նրանցից յուրաքանչյուրը կկազմի 1 սմ² մակերես ունեցող քառակուսու $\frac{1}{100}$ մասը:

Այսպես ուրեմն, եթե 1 սմ²-ու մեջ n^2 քառակուսյակներ են պարունակվում, ապա նրանցից յուրաքանչյուրի մակերեսը կազմում է 1 սմ²-ում $\frac{1}{n^2}$ մասը: Տված ուղղանկյան մեջ պարունակվեցին p·q փոքրիկ քառակուսիներ, որոնց մակերեսների գումարն այսպիսով կազմում է $\frac{p\cdot q}{n^2}$ սմ² կամ $\frac{p}{n}\cdot\frac{q}{n}$ սմ². բայց $\frac{p}{n}=a$ և $\frac{q}{n}=h$, ուստի կարող ենք գրել, որ $\frac{p}{n}\cdot\frac{q}{n}=a\cdot h$ սմ². այս նշանակում է, որ ուղղանկյան մակերեսը հավասար է նրա հիմքի և բարձրության արտադրյալին:

Թեորեմը պահպանում է իր ուժը նաև այն դեպքում, երբ ուղղանկյան մեկ կողմը կամ երկու հարևան կողմերն էլ իռացիոնալ թվերով են արտահայտվում:

Հետևանքներ 1. Քառակուսու մակերեսը հավասար է նրա կողմի քառակուսուն:

Քառակուսին մի ուղղանկյուն է, որի բոլոր կողմերը միահավասար են: Քառակուսու կողմը նշանակենք a, այն ժամանակ նաև բարձրությունը՝ h-ը կլինի a, ուստի

$$S=a\cdot a=a^2 \text{ քառ. միավոր:}$$

2. Երկու ուղղանկյունների մակերեսների հարաբերությունը հավասար է նրանց հիմքերի հարաբերության և բարձրությունների հարաբերության արտադրյալին:

$$S_1=a_1h_1 \text{ և } S_2=a_2h_2,$$

որտեղից

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a_1h_1}{a_2h^2}=\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{h_1}{h_2}:$$

3. Երկու ուղղանկյունների մակերեսները հարաբերում են ինչպես նրանց բարձրությունները, եթե նրանց հիմքերը հավասար են, և հարաբերում են ինչպես հիմքերը, եթե բարձրությունները են հավասար:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{ah_1}{ah_2}=\frac{h_1}{h_2},\quad \frac{S_1}{S_2}=\frac{a_1h}{a_2h}=\frac{a_1}{a_2}:$$

4. Երկու քառակուսիների մակերեսները այնպես են հարաբերում ինչպես նրանց կողմերի քառակուսիները:

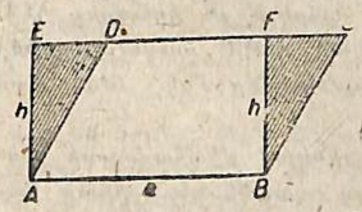
$$S_1=a_2 \text{ և } S_2=b^2$$

որտեղից

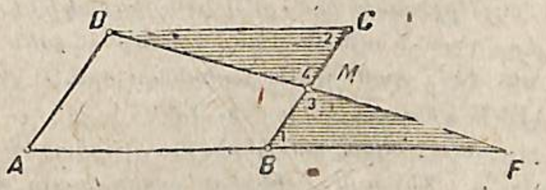
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a^1}{b_2}:$$

§ 3. ՀԱՎԱՍԱՐ, ՀԱՎԱՍԱՐԱԲԱՂԱԴԻՐ ԵՎ ՀԱՎԱՍԱՐԱՄԵԾ ՊԱՏԿԵՐՆԵՐ

1. ABCD զուգահեռագծի մեջ (նկ. 142) նրա A և B գագաթներից կտանենք AE և BF բարձրությունները. կստանանք երկու միահավասար ուղղանկյուն եռանկյուններ՝ ADE և BCF. այս եռանկյուն-



Նկ. 142:



Նկ. 143.

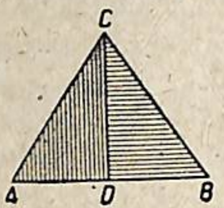
ների հավասարությունը նրանից է բխում, որ AD=BC և ED=FC:

Եթե այնուհետև ABCD զուգահեռագծից BFC եռանկյունը կտրենք և այնպես կցագրենք զուգահեռագծի AD կողմին, որ AD ու BC կողմերը համընկնեն, ապա կստանանք ABFE ուղղանկյունը, որը նույն մասերից է բաղադրված (կազմված) ինչ որ ABCD զուգահեռագիծը, այն է՝ ABFD ուղղանկյուն սեղանից և եռանկյունից:

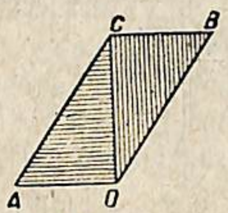
2. Վերցնենք ABCD զուգահեռագիծը (նկ. 143): Տանենք նրա D գագաթից BC կողմի M միջնակետով DM ուղիղը և շարունակենք մինչև AB կողմի շարունակության հետ հատվելը F կետում. կստանանք երկու հավասար եռանկյուններ՝ △DMC և △BMF. սրանց մեջ MB=MC, ∠3=∠4 իբրև հակադիր անկյուններ, ∠B=∠C իբրև խաչադիր անկյուններ DC ու AB զուգահեռների մոտ:

Դիցուք ABCD զուգահեռագիծը և ADF յեռանկյունը, յեզրակացնում ենք, վոր նրանք յերկուսն էլ հավասար մասերից են բաղադրված՝ ABMD սեղանից ու յեռանկյունից:

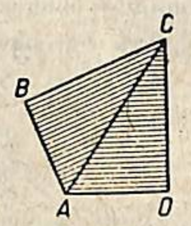
3. Դիտենք նաև ABC հավասարասրուն յեռանկյունը (նկ. 144), CD



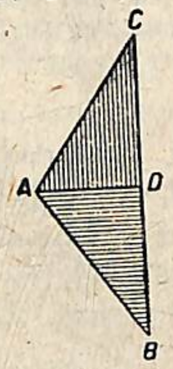
Նկ. 144



Նկ. 145



Նկ. 146



Նկ. 147

բարձրությամբ նա բաժանվում է յերկու հավասար յեռանկյունների. այս յեռանկյունները վերադրման ժամանակ համատեղվում են և հետևաբար, միահավասար մակերեսներ ունեն: Այս յերկու յեռանկյուններից, յեթե մեկին կցադրենք մյուսը միահավասար կողմերով, կարելի յէ կազմել տարբեր պատկերներ, վորոնք կունենան ըստ մեծության միևնույն մակերեսը, թեյեւ և իրարից կտարբերվեն իրենց ձևով:

Որինակի համար, CBD յեռանկյունը կարելի յէ կցադրել ACD յեռանկյանն այնպես, վոր նրանք կազմեն կամ ADBC զուգահեռագիծը (նկ. 145), կամ ABC հավասարասրուն յեռանկյունը (նկ. 146) կամ ADCB քառանկյունը (նկ. 147):

Այս բոլոր պատկերները, բաղկացած լինելով միահավասար մասերից, միևնույն մակերեսն ունեն, բայց այդ պատկերներն իրար հավասար չեն, վորովհետև վերադրման ժամանակ չեն համատեղվում:

4. 1) Հավասար մասերից բաղկացած պատկերները կոչվում են հավասարաբաղադիր:

2) Հավասար մակերեսներ ունեցող պատկերները կոչվում են հավասարամեծ:

3) Յերկու միահավասար պատկերներ հավասարամեծ են:

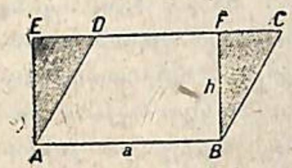
4) Յերկու հավասարաբաղադիր պատկերներ հավասարամեծ են:

5) Պետք է նկատել, վոր յերկու հավասարամեծ բազմանկյուններ միշտ կարող են կազմվել միևնույն թվով հավասար մասերից, այսինքն հավասարաբաղադիր են:

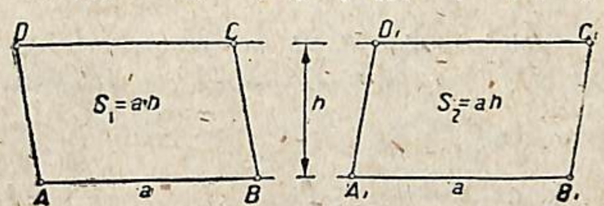
§ 4. ԶՈՒԳԱՀԵՌԱԳԾԻ ՄԱԿԵՐԵՍԸ

Թեորեմ: Զուգահեռագծի մակերեսը հավասար է նրա հիմքի և բարձրության արտադրյալին:

Ապացուցում: Տանելով զուգահեռագծի մեջ (նկ. 148) նրա բարձրությունները, կստանանք յերկու միահավասար ուղղանկյուն յեռանկյուններ՝ ADE և BCF: Տված ABCD զուգահեռագիծը և ABFE ուղղանկյունը հավասարամեծ են, իբրև հավասարաբաղադիր պատկերներ:



Նկ. 148



Նկ. 149

ABFE ուղղանկյան մակերեսը $=ah$, հետևաբար նաև ABCD զուգահեռագծի մակերեսը $=ah$:

$$S=a\cdot h \text{ քառ. միավ.:}$$

Հետևանքներ 1. Այն զուգահեռագծերը, վորոնք հավասար հիմքեր և հավասար բարձրություններ ունեն, հավասարամեծ են:

ABCD և $A_1B_1C_1D_1$ զուգահեռագծերը (նկ. 149) հավասար բարձրություն և հավասար հիմք ունեն՝ $AB=A_1B_1=a$: Նրանց մակերեսներն են՝ $S_1=ah$ և $S_2=ah$, հետևաբար, $S_1=S_2=a\cdot h$, հետևաբար զուգահեռագծերը հավասարամեծ են:

ABCD և $A_1B_1C_1D_1$ զուգահեռագծերը հավասար չեն. վերադրման ժամանակ չեն համընկնի, վորովհետև անկյունները տարբեր մեծություններ ունեն:

2. Հավասար հիմք ունեցող զուգահեռագծերի մակերեսներն այնպես են հարաբերում, ինչպես համապատասխան բարձրությունները. հավասար բարձրություն ունեցող զուգահեռագծերի մակերեսներն այնպես են հարաբերում, ինչպես համապատասխան հիմքերը:

§ 5. ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ՄԱԿԵՐԵՍԸ

1. Թեորեմ: Յեռանկյան մակերեսը հավասար է նրա հիմքի և բարձրության արտադրյալի կեսին:

Տված են՝ △ABC, c-ն հիմքն է, h-ը բարձրությունն (նկ. 150)

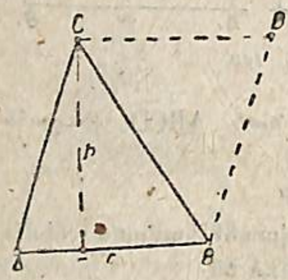
Պետք է ապացուցել՝ մակ. $\triangle ABC=S=\frac{1}{2}c\cdot h$:

Ապացուցում: Տված ABC յեռանկյունը կլրացնենք մինչև ABDC զուգահեռագիծ, տանելով BD ∥ AC և CD ∥ AB: Դիտենք, վոր ABDC զուգահեռագծի մակերեսը հավասար է $c\cdot h$. բայց ABC յեռանկյան մակերեսը կազմում է ABDC զուգահեռագծի մակերեսի կեսը. հետևաբար

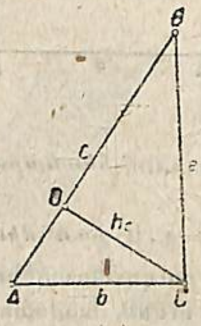
ABC յեռանկյան մակերեսը հավասար է $\frac{1}{2}$ $c\cdot h$: Այսպես ուրեմն,

$$S=\frac{1}{2}c\cdot h \text{ ք. միավոր:}$$

Հետևանքներ: Յեթե ուղղանկյուն յեռանկյան էջերը նշանակենք (նկ. 151) a ու b, ներքնաձիգը c և դեպի ներքնաձիգը տարած բարձրությունը h_c, ապա ուղղանկյուն յեռանկյան մակերեսը կարելի յե յերկու կերպ արտահայտել.



Նկ. 150.



Նկ. 151.

1) $S=\frac{1}{2}$

2) $S=\frac{1}{2}c\cdot h_c$

Հետևաբար $S=\frac{1}{2}$

$ab=\frac{1}{2}ch_c$, կամ $ab=ch_c$

Այսպես ուրեմն,

1) Ուղղանկյուն յեռանկյան մակերեսը հավասար է նրա էջերի արտադրյալի կեսին:

2) Ուղղանկյուն յեռանկյան էջերի արտադրյալը հավասար է ներքնաձիգի ու նրա համապատասխան բարձրության արտադրյալին:

3) Հավասար հիմքեր ունեցող յեռանկյունների մակերեսները միմյանց հարաբերում են ինչպես համապատասխան բարձրությունները, իսկ յերբ բարձրություններն են հավասար, ապա յեռանկյունների մակերեսներն իրար այնպես են հարաբերում, ինչպես համապատասխան հիմքերը:

4) Վորևե յերկու յեռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը հավասար է նրանց հիմքերի հարաբերության և բարձրությունների հարաբերության արտադրյալին:

$$S_1=\frac{1}{2}a_1\cdot h_1 \text{ և } S_2=\frac{1}{2}a_2\cdot h_2,$$

վորտեղից

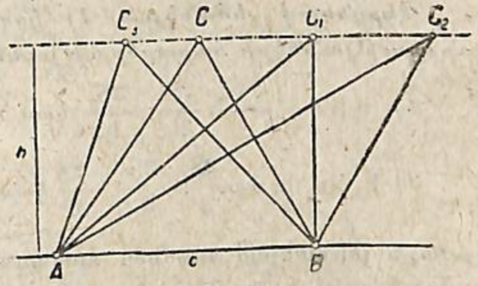
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a_1h_1}{a_2h_2}=\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{h_1}{h_2}:$$

5) Հավասար հիմք և հավասար բարձրություն ունեցող յեռանկյունները հավասարամեծ են:

Տված է △ABC: Յեթե նրա C գագաթը տեղափոխենք AB հիմքին զուգահեռ ուղիղի վրա (նկ. 152), հիմքը թողնելով անփոփոխ, ապա կստանանք մի շարք յեռանկյուններ՝ ABC_1, ABC_2 և այլն. Նրանցից յուրաքանչյուրի մակերեսը հավասար է $\frac{1}{2}$ $c\cdot h$, հետևաբար, նրանք հավասարամեծ են:

6) Շեղանկյան մակերեսը, իբրև զուգահեռագծի մակերես, հավասար է նրա հիմքի ու բարձրության արտադրյալին, այսինքն $S=a\cdot h$: Բացի դրանից,

Շեղանկյան մակերեսը հավասար է նրա անկյունագծերի արտադրյալի կեսին:



Նկ. 152.

Իրոք, ABCD շեղանկյան անկյունագծերը (նկ. 153) փոխադարձաբար ուղղահայաց են, հետևաբար,

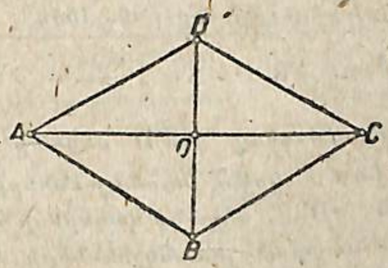
$$\text{մակերես } \triangle ADC=\frac{1}{2}AC\cdot DO$$

$$\text{մակերես } \triangle ABC=\frac{1}{2}AC\cdot OB$$

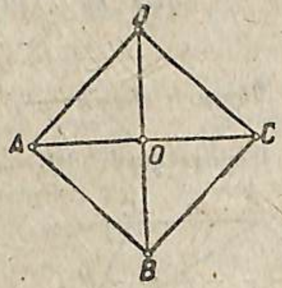
$$\text{մակերես } ABCD=\frac{1}{2}AC(DO+OB)=\frac{1}{2}AC\cdot BD.$$

7) Քառակուսու մակերեսը հավասար է նրա անկյունագծի քառակուսու կեսին:

Քառակուսու մեջ անկյունագծերը փոխուղղահայաց են և միա-



Նկ. 153



Նկ. 154.

հավասար (նկ. 154), հետևաբար, ABCD քառակուսու մակերեսը հավասար է $\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}AC^2$:

2. Յեռանկյան մակերեսը կարելի յե արտահայտել նրա յուրաքանչյուր կողմով ու նրա համապատասխան բարձրությամբ.

$$S\triangle=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c \text{ :}$$

Այստեղից հետևում է՝

$$1)\ a=\frac{2S}{h_3},\ b=\frac{2S}{h_b},\ c=\frac{2S}{h_c};$$

$$2)\ h_a=\frac{2S}{a},\ h_b=\frac{2S}{b},\ h_c=\frac{2S}{c};$$

Վերցնելով յեռանկյան 1) կողմերի հարաբերությունները և 2) բարձրությունների հարաբերությունները, կստանանք՝

$$1)\ a:b:c=\frac{2S}{h_a}:\frac{2S}{h_b}:\frac{2S}{h_c}\ \text{կամ}\ a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}$$

$$2)\ h_a:h_b:h_c=\frac{2S}{a}:\frac{2S}{b}:\frac{2S}{c}\ \text{կամ}\ h_a:h_b:h_c=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$$

այսինքն յեռանկյան կողմերը հակադարձ համեմատական են համապատասխան բարձրություններին։

3. Կողմերի և բարձրությունների միջև նույնպես առնչություն տեղի ունի զուգահեռագծի մեջ։ Իսկ շեղանկյան մեջ, վորի կողմերը միահավասար են, բարձրությունները ևս միահավասար են, վորովհետև նրա կողմերի հարաբերությունները հավասար են 1-ի։

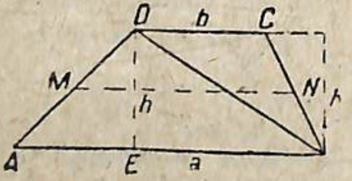
§ 6. ՍԵՂԱՆԻ ՄԱԿԵՐԵՍԸ

Թեորեմ։ Սեղանի մակերեսը հավասար է հիմքերի կիսագումարի և բարձրության արտադրյալին, կամ միջին գծի և բարձրության արտադրյալին։

Տված են՝ ABCD-ն սեղան է՝ a-ն և b-ն հիմքերն են, h-ը՝ բարձրությունը (նկ. 155)

Պետք է ապացուցել՝ մակ. $ABCD=S=\frac{a+b}{2}.h.$

Ապացուցում: DB անկյունագծով ABCD սեղանը բաժանվում է յերկու յեռանկյունների՝ △ABD և △DBC. սեղանի մակերեսը հավասար է ստացված յեռանկյունների մակերեսների գումարին, այսինքն մակ. ABCD= մակ. ABD+մակ. BDC=



Նկ. 155.

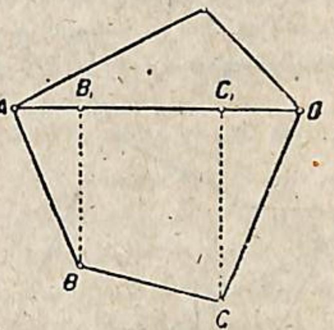
$$\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh=\frac{a+b}{2}.h$$

$$S=\frac{a+b}{2}.h=mh\ \text{քառ. միավ.}$$

վորտեղ $m=\frac{a+b}{2}=MN$, վորը սեղանի միջին գիծն է։

§ 7. ԲԱԶՄԱՆԿՅԱՆ ՄԱԿԵՐԵՍԸ

Բազմանկյան մակերեսը սովորաբար վորոշում են բաժանելով այն՝ յեռանկյունների և սեղանների։ Առաջին դեպքում նրա մի գագաթից տանում են բոլոր անկյունագծերը և զատ-զատ հաշվում են ստացված յեռանկյունների մակերեսները. բոլոր յեռանկյունների մակերեսների գումարը տալիս է բազմանկյան մակերեսը։



Նկ. 156.

Յերկրորդ դեպքում տանում են մի անկյունագիծ և բազմանկյան գագաթներից այդ անկյունագծին տարած ուղղահայացներով բազմանկյունը բաժանում են ուղղանկյուն յեռանկյունների և սեղանների (նկ. 156)։ Ստացված յեռանկյունների և սեղանների մակերեսների գումարը տալիս է բազմանկյան մակերեսը։

§ 8. ՊՅՈՒԹԱԳՈՐԱՍԻ ԹԵՈՐԵՄԸ

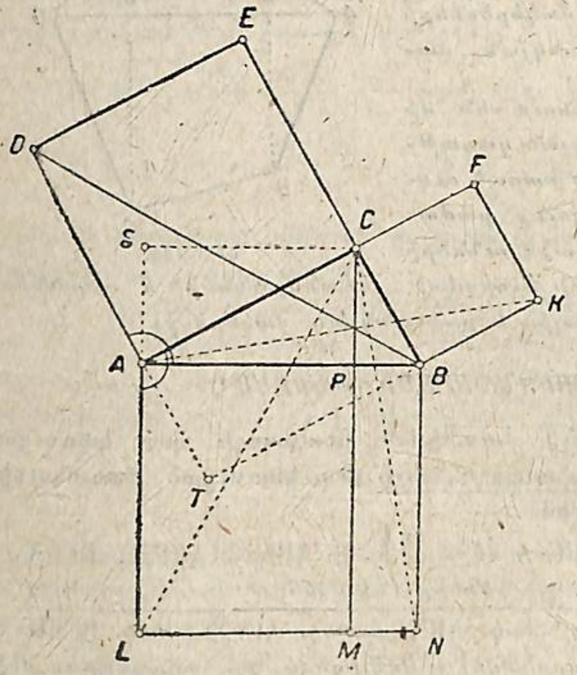
Թեորեմ: Ուղղանկյուն յեռանկյան ներքնաձիգի վրա կառուցած քառակուսու մակերեսը հավասար է էջերի վրա կառուցած քառակուսիների մակերեսների գումարին:

Տված են՝ △ABC-ի մեջ ∠C=d; ABNL, ACED, BCFK. քառակուսիները (նկ. 157)

Պետք է ապացուցել՝ մակ. ABNL=մակ. ACED+մակ. BCFK.

Առաջին ապացույց, վոր տվել է Եվկլիդեսն իր «Տարրերի» մեջ։ Տանում ենք CM⊥LN, CM-ը բաժանում է ABNL քառակուսին յերկու ուղղանկյունների APML և PBNM։ Ապացուցենք, վոր նրանցից յուրաքանչյուրը հավասարամեծ է էջերի վրա կառուցած քառակուսիներից մեկին։ Այսպես, APML ուղղանկյունը հավասարամեծ է ACED քառակուսուն։ Իրոք, միացնելով D-ն B-ի հետ և C-ն L-ի հետ, կստանանք յերկու յեռանկյուն՝ △ABD և △ACL, վորոնք հավասար են, վորովհետև AD=AC, AB=AL և ∠DAB=∠CAL իբրև այնպիսի անկյուններ, վորոնք բաղկացած են ուղիղ անկյունից և ABC յեռանկյան A անկյունից։ Բայց ABD յեռանկյան մակերեսը հավասար է ACED քառակուսու մակերեսի կեսին, վորովհետև վերջինիս հետ ունի ընդհանուր AD հիմքը, և նրա BT բարձրությունը հավասար է քառակուսու DE բարձրությանը։ Նույնպես և ACL յեռանկյան մակերեսը հավասար է APML ուղղանկյան մակերեսի կեսին, վորովհետև վերջինիս հետ ունի AL ընդհանուր հիմքը, և նրա CS բարձրությունը հավասար է ուղղանկյան ML բարձրությանը։ △ABD=△ACL, ուստի և

$\frac{1}{2}$ մակերես APML$=\frac{1}{2}$ մակերես ACED կամ մակ. APMC=մակ. ACED, այսինքն APML ուղղանկյան մակերեսը հավասար է ACED քառակուսու մակերեսին: Այնուհետև միացնելով A-ն K-ի և C-ն N-ի հետ, մենք նույն ձևով կապացուցենք, որ BNMP ուղղանկյան մակերեսը հավասար է BCFK քառակուսու մակերեսին: Այսպես ուրեմն՝



Նկ. 157

մակ. APML=մակ. ACED և մակ. BNMP=մակ. BCFK, հետևաբար,

մակ. APML+մակ. BNMP=մակ. ACED+մակ. BCFK, որտեղից

մակ. ABNL=մակ. ACED+մակ. BCFK:

Թեորեմն ապացուցված է:

Երկրորդ ապացույց. Տված է ABC ուղղանկյուն յեռանկյունը: Կատարենք 158-րդ նկարում նշած կառուցումը և B կետը միացնենք M կետի հետ: Կստանանք CDMB ուղղանկյուն սեղանը, որի հիմքերն են՝ a ու b, և բարձրությունը՝ CD=a+b: Այս նույն սեղանը բաղկացած է յերեք ուղղանկյուն յեռանկյուններից՝ 1, 2 և 3:

մակ. △1+մակ. △2+մակ. △3=մակ CDMB, այսինքն՝

$$\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}=\frac{(a+b)(a+b)}{2},$$

կամ

$$2ab+c^2=a^2+2ab+b^2 \text{ կամ}$$
$$c^2=a^2+b^2,$$

այսինքն՝

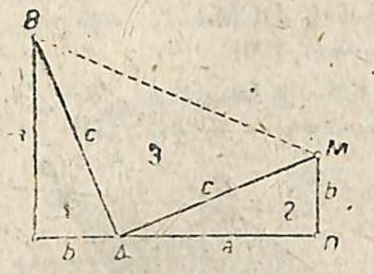
Ներքնաձիգի քառակուսին հավասար է էջերի քառակուսիների գումարին:

Խնդիր 1. Կառուցել այնպիսի քառակուսի, որի մակերեսը հավասար լինի a կողմը յեվ b կողմն ունեցող յերկու քառակուսիների մակերեսների գումարին:

Լուծում. Կառուցում ենք այն ուղղանկյուն յեռանկյունը, վորի համար իբրև էջեր ծառայում են a և b հատվածները: Այն ժամանակ Պյութագորասի թեորեմի համաձայն՝ $c^2=a^2+b^2$, այսինքն յեռանկյան c ներքնաձիգի վրա կառուցած քառակուսին հավասարամեծ է a և b կողմերն ունեցող տվյալ քառակուսիների գումարին:

Խնդիր 2. Կառուցել այն քառակուսին, վորի մակերեսը հավասար է տվյալ յերկու քառակուսիների մակերեսների տարբերությանը:

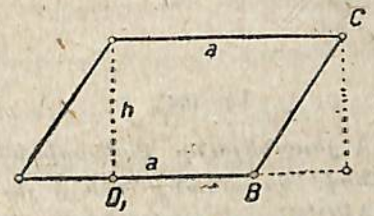
Լուծում: Դիցուք տվյալ քառակուսիներից մեծի կողմն է c, իսկ փոքրինը՝ a. կառուցում ենք մի ուղղանկյուն յեռանկյուն, ընդունելով c-ն իբրև ներքնաձիգ և a-ն իբրև էջերից մեկը. այն ժամանակ մյուս էջը՝ b-ն, կլինի վորոնած քառակուսու կողմը: b հատվածի վրա կառուցած քառակուսին կլինի հենց վորոնած քառակուսին:



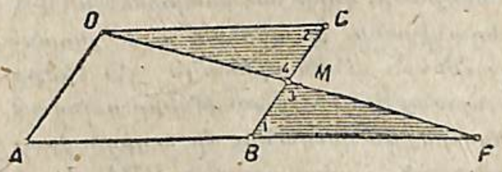
Նկ. 158.

§ 9. ՈՒՂՂԱԳԻԾ ՊԱՏԿԵՐՆԵՐԻ ՓՈԽԱՐԿՈՒՄԸ ՀԱՎԱՍԱՐԱՄԵԾ ՊԱՏԿԵՐՆԵՐԻ

Վորևե պատկերի փոխարկումը մի ուրիշ պատկերի, վորը նրան հավասարամեծ է, ներկայացնում է կառուցման խնդիր. լուծման ժամանակ օգտագործվում են պատկերների մակերեսներին վերաբերող թեորեմները:



Նկ. 159.



Նկ. 160.

Խնդիր 1. ABCD զուգահեռագիծը փոխարկել հավասարամեծ ուղղանկյան, հիմքը թողնելով անփոփոխ (նկ. 159):

Կառուցում: Դիցուք a-ն և h-ը ABCD զուգահեռագծի հիմքը և բարձրությունն են. նրա մակերեսը կլինի՝ S=ah. նույնպիսի մակերես պետք է ունենա նրան հավասարամեծ ուղղանկյունը:

Զուգահեռագծի տվյալ a հիմքի վրա կառուցում ենք DD_1C_1C ուղղանկյունը, վորը նույն բարձրությունն ունի. նա բավարարում է խնդրի պայմաններին, վորովհետև S=ah:

Խնդիր 2. ABCD զուգահեռագիծը փոխարկել հավասարամեծ յեռանկյան։

Կառուցում։ Տվյալ ABCD զուգահեռագծի մի կողմը (նկ. 160) առենք BC-ն, կիսում ենք և D գագաթից BC կողմի M միջնակետով տանում ենք DF ուղիղը մինչև AB կողմի շարունակության հետ հատվելը, F կետում։ Կստանանք ADF յեռանկյունը, վորը հավասարամեծ է ABCD տվյալ զուգահեռագծին։

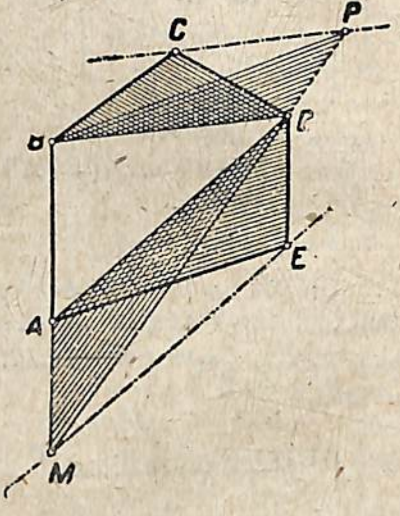
Իրոք

մակ. ABCD=մակ. ABMD+մակ. DCM.
մակ. ADF=մակ. ABMD+մակ. BMF,

բայց $\triangle$DCM=$\triangle$BMF, վորովհետև CM=BM, $\angle 1=\angle 2$ և $\angle 3=\angle 4$, ուստի մակ. ABCD=մակ. ADF, իսկ այս նշանակում է, վոր ADF յեռանկյունը հավասարամեծ է ABCD զուգահեռագծին։

Խնդիր 3. ABCDE բազմանկյունը փոխարկել հավասարամեծ յեռանկյան (նկ. 161)։

Կառուցում։ Տանում ենք AD անկյունագիծը. նա տված բազմանկյունից կտրում է ADE յեռանկյունը. E գագաթից տանում ենք ME ∥ AD, վորը BA կողմի շարունակությունը հատում է M կետում, M կետը միացնելով D գագաթի հետ, ստանում ենք DMA յեռանկյունը, վորը հավասարամեծ է DEA յեռանկյանը, վորովհետև այդ յեռանկյուններն ունեն միևնույն AD հիմքը և նրանց E ու M գագաթները գտնվում են հիմքին զուգահեռ մի ուղիղի վրա։ DEA յեռանկյունը փոխարինելով նրան հավասարամեծ DMA յեռանկյունով, կստանանք MDCB յեռանկյունը, վորը հավասարամեծ է տվյալ ABCDE բազմանկյանը, բայց վորի կողմերի թիվը մեկով պակաս է, քան տված բազմանկյան կողմերի թիվը։ Նման կառուցումը պետք է շարունակել այնքան, մինչև վոր տվյալ բազմանկյունը փոխարկվի հավասարամեծ յեռանկյան։ Նկարում տարված են AD ու BD անկյունագծերը. համապատասխան կառուցումներով ABCDE բազմանկյունը փոխարկված է MBP հավասարամեծ յեռանկյան։



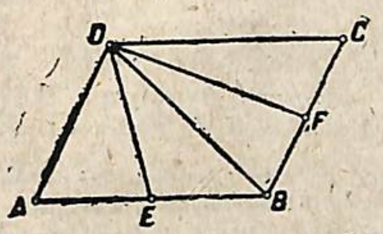
Նկ. 161

Խնդիր 4. Տվյալ յեռանկյունը բաժանել n հավասարամեծ մասերի այնպիսի ուղիղներով, վորոնք անցնում են յեռանկյան գագաթով։

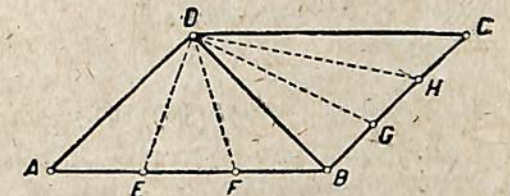
Կառուցում։ Հիմքը բաժանում ենք n հավասար մասերի և բաժանման կետերը միացնում ենք գագաթի հետ. կստանանք n յեռանկյուններ, վորոնց հիմքերը միահավասար են և գագաթն ընդհանուր, հետևաբար բարձրությունը միևնույնն է, ուստի և նրանք հավասարամեծ են։

Խնդիր 5. Տվյալ զուգահեռագիծը բաժանել մի գագաթից յելնող ուղիղներով 4 հավասարամեծ մասերի։

Կառուցում։ ABCD զուգահեռագիծը DB անկյունագծով բաժանվում է յերկու հավասար մասերի՝ $\triangle$ABD=$\triangle$BDC (նկ. 162)։ Միացնելով զուգահեռագծի AB և BC կողմերի E և F միջնակետերը D գագաթի հետ, կստանանք 4 հավասարամեծ յեռանկյուններ։



Նկ. 162.



Նկ. 163.

Խնդիր 6. Տվյալ զուգահեռագիծը բաժանել յերեք հավասարամեծ մասերի մի գագաթից յելնող ուղիղներով։

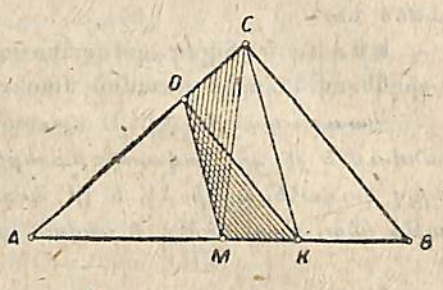
Կառուցում։ DB անկյունագծով (նկ. 163) ABCD զուգահեռագիծը բաժանում ենք յերկու հավասար յեռանկյունների։ AB ու BC կողմերը բաժանում ենք յերեքական հավասար մասերի և բաժանման կետերը՝ E, F, G ու H, միացնում ենք D գագաթի հետ, ստանում ենք 6 հավասարամեծ յեռանկյուններ, վորոնցից յուրաքանչյուրի մակերեսը հավասար է զուգահեռագծի մակերեսի $\frac{1}{6}$ մասին, հետևաբար, ADF յեռանկյան, BFDG քառանկյան և CDG յեռանկյան մակերեսներից յուրաքանչյուրը կազմում է զուգահեռագծի մակերեսի $\frac{1}{3}$ մասը։

Խնդիր 7. Յեռանկյան կողմի վրա վերցրած կամավոր կետից տանել այնպիսի ուղիղ, վոր յեռանկյունը բաժանի յերկու հավասարամեծ մասերի։

Կառուցում։ Տված է ABC յեռանկյան (նկ. 164) AB կողմի վրա մի վորևէ K կետ. K կետը միացնենք C գագաթի հետ և վերջինից տանենք CM միջնագիծը, վորը յեռանկյունը կբաժանի յերկու հավասարամեծ յեռանկյունների՝ CMA և CMB։ Տանենք MD ∥ CK և միացնենք D կետը K-ի հետ, կստանանք յերկու հավասարամեծ յեռանկյուններ՝ CMD և DMK, վորոնք ունեն DM ընդհանուր հիմքը և վորոնց C ու K գագաթները գտնվում են DM ուղիղին զուգահեռ CK ուղիղի վրա,

հետևաբար, CDM յեռանկյունը կարելի յե փոխարինել նրան հավասարամեծ DKM յեռանկյունով: Այսպիսով ACM յեռանկյան մակերեսը, վորը հավասար ե տվյալ յեռանկյան մակերեսի կեսին, փոխարինվում ե ADK յեռանկյան մակերեսով, վորը հավասար ե ACM յեռանկյան մակերեսին:

Այսպիսով ուրեմն, DK ուղիղը բաժանում ե տվյալ ABC յեռանկյունը յերկու հավասարամեծ մասերի՝ $\triangle ADK$ և քառանկյուն BCDK:



Նկ. 164.

ՀԱՐՑԵՐ ՅԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ.

1. Ի՞նչպես կփոխվի ուղղանկյան մակերեսը, յեթե հիմքը a թողնենք անփոփոխ, իսկ բարձրությունը՝ h 1) մեծացնենք 3 անգամ, 2) փոքրացնենք 2 անգամ:

2. Քանի՞ անգամ կմեծանա քառակուսու մակերեսը, յեթե նրա յուրաքանչյուր կողմը մեծացնենք յերեք անգամ:

3. Կարո՞ղ են հավասարամեծ լինել այնպիսի ուղղանկյունները, վորոնց և հիմքերը և բարձրությունները տարբեր են:

4. Ի՞նչ յերկարություն պետք ե ունենա 160 մ. լայնության ուղղանկյուն հողամասը, յեթե նրանով պետք ե փոխարինել մի քառակուսի հողամաս, վորի կողմն ե 200 մ:

5. Մի ուղղանկյուն և մի քառակուսի միահավասար պարագծեր ունեն: Ուղղանկյան կողմերից մեկը 90 սմ. ե, քառակուսու կողմը 60 սմ. ե: Նրանցից վորի՞ մակերեսն ե մեծ և ինչքանո՞վ:

6. Մի ուղղանկյուն և մի քառակուսի հավասարամեծ են: Ուղղանկյան կողմերից մեկը 120 սմ ե. քառակուսու կողմը 60 սմ ե: Վո՞րի պարագիծն ե փոքր և ի՞նչքանով:

7. Ապացուցել, վոր զուգահեռագծի մեջ անկյունագծերով կազմված չորս յեռանկյունները հավասարամեծ են:

8. Զուգահեռագծի մեջ փոքր անկյունագիծը՝ n=5 սմ, ուղղահայաց ե նրա կողմերից մեկին և հավասար ե սրան: Հաշվել զուգահեռագծի մակերեսը:

9. Այն քառանկյան մակերեսը, վորի համար իբրև գագաթներ ծառայում են տվյալ զուգահեռագծի կողմերի միջնակետերը, հավասար ե այդ զուգահեռագծի մակերեսի կեսին: Ապացուցել:

10. Մի հավասարասրուն սեղանի մեջ անկյունագծերը հատվում են ուղիղ անկյունով: Սեղանի բարձրությունն ե h: Ապացուցել, վոր սեղանի մակերեսն ե՝ $S=h^2$:

11. Սեղանը փոխարկել 1) հավասարամեծ զուգահեռագծի, 2) հավասարամեծ ուղղանկյան:

12. Մի սրանկյուն յեռանկյուն, վորի հիմքն ե a=5 սմ և բարձրությունն ե h=8 սմ, փոխարկել հավասարամեծ ուղղանկյան, վորը նույն հիմքն ունենա:

13. Տված ե ABCD սեղանը: Ապացուցել, վոր սեղանի զուգահեռ կողմերի K ու L միջնակետերը միացնող ուղիղը բաժանում ե սեղանը յերկու հավասարամեծ սեղանների:

14. Կառուցել այնպիսի քառակուսի, վորի մակերեսը յերկու անգամ մեծ ե տվյալ քառակուսու մակերեսից:

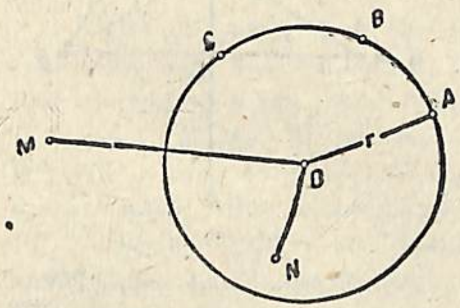
Ցուցմունք. Օգտագործել տվյալ քառակուսու անկյունագիծը:

X. ՅԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՏԵՂԵՐ

§. 1. ԳԻԾՆ ԻԲՐԵՎ ԿԵՏԵՐԻ ՅԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՏԵՂ

Շրջանագծի կետերն, ինչպես հայտնի յե, հետևյալ հատկությունն ունեն՝ նրանք մի կետից՝ շրջանագծի կենտրոնից, միևնույն հեռավորությունն ունեն և այս հեռավորությունը հավասար ե շրջանագծի շառավղին:

Հարթության վրա այդ հատկությունն ունեն միայն այն կետերը, վորոնք գտնվում են շրջանագծի վրա. այն կետերը, վորոնք գտնվելով նույն հարթության վրա, ինչ վոր տվյալ շրջանագիծը, չեն գտնվում վերջինիս վրա, այդ հատկությունը չունեն:



Նկ. 165.

Իրոք, յեթե տված ե մի շրջանագիծ, վորի շառավիղն ե r=3սմ և վորի կենտրոնը գտնվում ե O կետում (Նկ. 165), ապա ամեն մի կետ՝ A, B, կամ C, վորը կենտրոնից 3 սմ-ով ե հեռացած, գտնվում ե տվյալ շրջանագծի վրա:

Ամեն մի M կետ, վորի հեռավորությունն O կենտրոնից ավելի մեծ ե, քան շառավիղը, այսինքն յեթե OM>r, ապա M կետը գտնվում ե տվյալ շրջանագծից դուրս, իսկ N կետը, վորի ON հեռավորությունը O կենտրոնից փոքր ե քան շառավիղը, այսինքն ON<r, գտնվում ե շրջանագծի ներսը: Այսպես ուրեմն, 1) շրջանագծի վրա գտնվող բոլոր կետերը վորոշակի հատկություն ունեն՝ նրանք բոլորն էլ հավասարապես են հեռացած մի կետից՝ կենտրոնից, 2) այն կետերը, վորոնք տվյալ շրջանագծի վրա չեն գտնվում, այդ հատկությունը չունեն:

Այն գծերը, կամ գծերի համախումբը, վորոնց բոլոր կետերը մի վորոշակի ընդհանուր հատկություն ունեն, մինչդեռ նրանց վրա չգտնվող կետերն այդ հատկությունը չունեն, կոչվում են տվյալ հատկությունն ունեցող կետերի յերկրաչափական տեղ:

§ 2. ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՏԵՂԵՐ

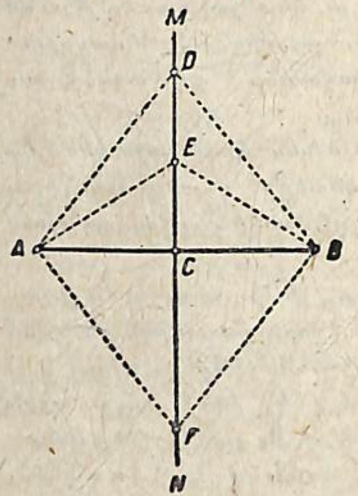
1. Շրջանագիծը հարթության վրա այն կետերի յերկրաչափական տեղն է, վորոնք հավասարահեռ են մի կետից՝ շրջանագծի կենտրոնից:

2. Թեորեմ. Հատվածի միջնուղղահայացն այն կետերի յերկրաչափական տեղն է, վորոնք հավասարահեռ են հատվածի ծայրերից:

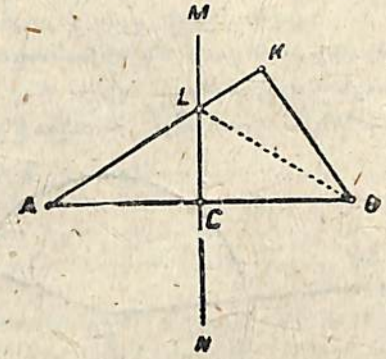
Տված են՝ AC=CB, MN⊥AB *և* D,E,F,... *կետերն* MN *ուղղահայացի վրա յեն (նկ. 166)*

Պետք է ապացուցել DA=DB, EA=EB, FA=FB...

Ապացուցում: D,E,F,... *կետերը միացնում ենք* AB *հատվածի* A *և* B *ծայրերի հետ, ստանում ենք* DA *և* DB, EA *և* EB, FA *և* FB... *հատվածները. այս հատվածները զուգաբար հավասար են, իբրև այնպիսի թեքեր, վորոնք միևնույն կետից են յելնում և*



Նկ. 166.



Նկ. 167.

ունեն AC *ու* CB *հավասար առաջաձգությունները. հետևաբար,* DA=DB, EA=EB, FA=FB *և այլն: Այսպիսով* AB *հատվածի միջնուղղահայացի ամեն մի կետը հավասարահեռ է այդ հատվածի* A *և* B *ծայրերից:*

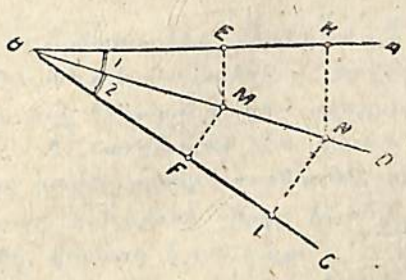
Վերցնենք վորևէ K *կետ, վորը չի գտնվում* AB *հատվածի* MN *միջնուղղահայացի վրա (նկ. 167). կարելի յե ցույց տալ վոր* KA*-ն հավասար չէ* KB*-ին: Իրոք* KA*-ի և* MN*-ի հատման* L *կետը միացնելով* B *կետի հետ, կունենանք, վոր* KB<KL+LB: *Փոխարինելով* LB *հատվածը նրան հավասար* AL *հատվածով, ստանում ենք՝* KB<KL+LA, *կամ* KB<KA: *Կնշանակի* AB *հատվածի* MN *միջնուղղահայացի ամեն մի կետը հավասարահեռ է հատվածի ծայրերից, մինչդեռ ամեն մի կետ, վորը չի գտնվում այդ միջնուղղահայացի վրա, այդ հատկությունը չունի, այսինքն անհավասարահեռ է հատվածի ծայրերից: Այսպես ուրեմն՝* AB *հատվածի* MN *միջնուղղահայացը ներկայացնում է այդ հատվածի ծայրերից հավասարահեռ կետերի յերկրաչափական տեղը:*

3. Թեորեմ: Անկյան կիսորդն այն կետերի յերկրաչափական տեղն է, վորոնք հավասարահեռ են անկյան կողմերից.

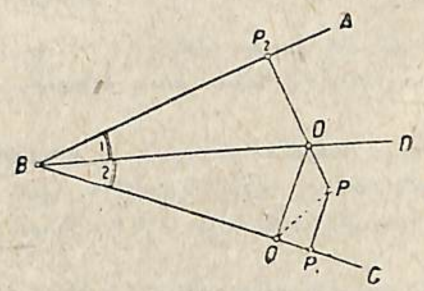
Տված են՝ BD*-ն կիսորդն է* ∠1=∠2 *(նկ. 168)* ME⊥AB *և* MF⊥BC, NK⊥AB *և* NL⊥BC *և այլն:*

Պետք է ապացուցել՝ ME=MF, NK=NL *և այլն:*

Ապացուցում: △MBE=△MBF, *վորովհետև նրանց մեջ* MB*-ն ընդհանուր ներքնաձիգ է,* ∠1=∠2: *Հետևաբար,* ME=MF: *Ճիշտ նույն ձևով կարելի յե ապացուցել վոր* NK=NL:



Նկ. 168.



Նկ. 169.

Յեթե վերցնենք մի P *կետ, վորը չի գտնվում* BD *կիսորդի վրա (նկ. 169), ապա նրա* PP_1 *և* PP_2 *հեռավորությունները անկյան* B *կողմից միահավասար չեն լինի: Իրոք, տանելով* PP_2*-ի և* BD *կիսորդի* O *հատման կետից* BC*-ին ուղղահայաց* OQ *ուղիղը, ունենում ենք՝* $OQ=OP_2$, *բայց* PP_1 *ուղղահայացը փոքր է* PQ *թեքից,* $PP_1<PQ$, *մյուս կողմից,* OPQ *յեռանկյունից ունենք՝* $PQ<PO+OQ$, *կնշանակի* $PP_1<PO+OQ$: *Վերջին անհավասարության մեջ* OQ*-ն փոխարինելով նրան հավասար* OP_2 *հատվածով, ստանում ենք՝* $PP_1<PO+OP_2$, *կամ* $PP_1<PP_2$:

Կնշանակի BD *կիսորդի վրա գտնվող ամեն մի կետ հավասարահեռ է* B *անկյան կողմերից, իսկ նրա վրա չգտնվող կետն այդ հատկությունը չունի: Այսպես ուրեմն.*

Անկյան կիսորդն անկյան կողմերից հավասարահեռ կետերի յերկրաչափական տեղն է:

Տվյալ ուղիղից հավասարահեռ կետերի յերկրաչափական տեղը յերկու ուղիղներ են, վորոնք զուգահեռ են տվյալ ուղիղին և դասավորված են նրա յերկու կողմերում նրանից միևնույն հեռավորության վրա:

5. Միևնույն հիմքը և միահավասար բարձրություններ ունեցող յեռանկյունների գագաթների յերկրաչափական տեղը յերկու ուղիղներ են, վորոնք զուգահեռ են տվյալ հիմքին և դասավորված են նրա

յերկու կողմերում նրանից այնպիսի հեռավորության վրա, վորը հավասար է յեռանկյան բարձրությանը:

ՀԱՐՑԵՐ

1. Վո՞րն է այն կետերի յերկրաչափական տեղը, վորոնք հավասարահեռ են յերկու փոխհատվող ուղիղներից:

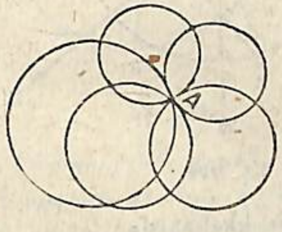
2. Վո՞րն է այն կետերի յերկրաչափական տեղը, վորոնք հավասարահեռ են յերկու զուգահեռ ուղիղներից:

§ 1. ՇՐՋԱՆԱԳԻԾ

Շրջանագիծը միանգամայն վորոշված է, յեթե տված են նրա կենտրոնը և շառավիղը. շառավիղը վորոշում է շրջանագծի մեծությունը, իսկ կենտրոնը՝ նրա դիրքը:

1. Հարթության վրա կարելի յե միևնույն A կետով անցնող անթիվ բազմությամբ շրջանագծեր տանել *(նկ. 170). Նրանցից յուրաքանչյուրի կենտրոնի դիրքը կարելի յե հարթության վրա վերցնել այնտեղ, վորտեղ կամենանք:*

2. Հարթության վրա A յեվ B յերկու կետերով նույնպես կարելի յե տանել անթիվ բազմությամբ շրջանագծեր *(նկ. 171), բայց նրանց կենտրոնները կամայական դասավորություն չեն ունենալ հարթության վրա, ինչպես առաջին դեպքում. նրանք դասավորված կլինեն A և B կետերը միացնող AB հատվածի միջնուղղահայացի վրա: Իրոք AB հատվածի ծայրերը՝ A և B կետերը, պետք է շրջանագծի վրա գտնվեն, հետևաբար, շրջանագծի կենտրոնը նրանցից հավասարահեռ է, իսկ հատվածի ծայրերից հավասարահեռ կետերի յերկրաչափական տեղը նրա միջնուղղահայացն է:*



Նկ. 170.

3. A, B և C յերեք կետերով *(նկ. 172)*, **վորոնք չեն գտնվում մի ուղիղի վրա, կարելի յե շրջանագիծ տանել յեվ այն էլ միայն մեկը:**

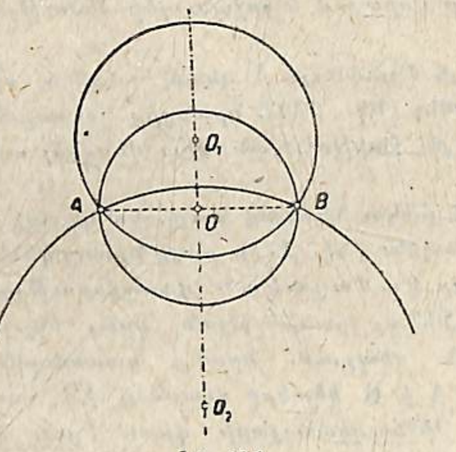
Նրա կենտրոնը, իբրև տվյալ յերեք կետերից հավասարահեռ կետ, գտնվում է այդ կետերը զուգաբար միացնող հատվածների միջնուղղահայացների, այն է՝ MN ի և KL-ի հատման կետում: MN և KL ուղիղները հատվում են, իբրև AB և BC փոխհատվող ուղիղներին ուղղահայացներ:

Դիցուկ MN և KL ուղղահայացների փոխհատման կետն է O կետը: O կետը շրջանագծի կենտրոնն է, վորովհետև նա հավասարահեռ է A, B և C կետերից, իսկ OA=OB=OC=շրջանագծի r շառավիղին: MN և KL յերկու ուղիղները միայն մի կետում են փոխհատվում, հետևա-

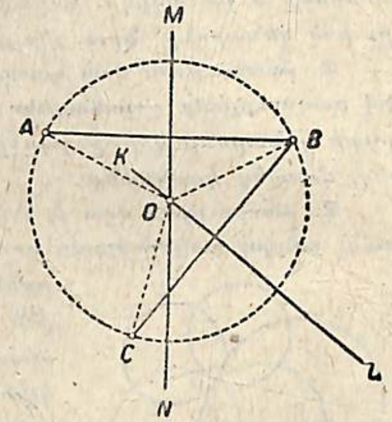
բար. A, B և C յերեք կետերով միայն մի շրջանագիծ կարելի յե տանել:

Մի ուղիղի վրա չգտնվող յերեք կետերը միանգամայն որոշում են շրջանագծի դիրքն ու մեծությունը:

4. Յեթե յերեք կետեր՝ A, B և C, մի ուղիղի վրա յեն գտնվում, ապա AB-ի ու BC-ի միջնուղղահայացները՝ MN և KL, զուգահեռ են, իբրև միևնույն ուղիղին տարած յերկու ուղղահայացներ, հետևաբար ընդհանուր կետ չունեն: Այստեղից բղխում է, որ մի ուղիղի վրա դասավորված A, B և C յերեք կետերով չի կարելի շրջանագիծ տանել: Կնշանակի, ուղիղը չի կարող շրջանագծի հետ յերեք ընդհանուր կետեր ունենալ:



Նկ. 171.



Նկ. 172.

Ուղիղը հատում է շրջանագիծը միայն յերկու կետերում:

§ 2. ԼԱՐԻՆ ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑ ՏՐԱՄԱԳԾԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ: ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ ՇՐՋԱՆԻ ՄԵՋ:

1. **Թեորեմ**: Լարին ուղղահայաց տրամագիծը կիսում է այդ լարը յեվ նրա ձգած աղեղները:

Տված են. DD_1-ը տրամագիծն է, AB-ն լար, $DD_1 \perp AB$ (Նկ. 173)

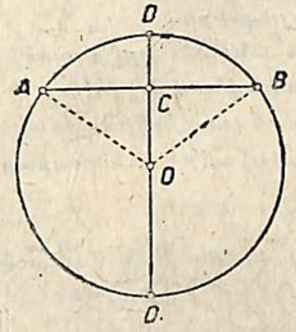
Պետք է ապացուցել 1) $AC=CB$, *2)* $\smile AD=\smile DB$,

3) $\smile AD_1=\smile BD_1$.

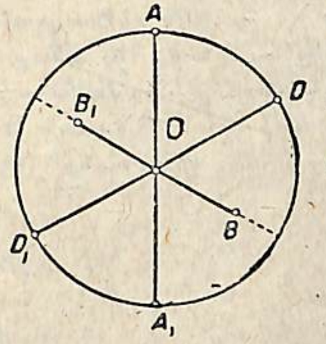
Ապացուցում. *AB լարի A և B ծայրերը, իբրև շրջանագծի կետեր, հավասարահեռ են O կենտրոնից, որը գտնվում է AB լարին ուղղահայաց DD_1 տրամագծի վրա: AOB յեռանկյունը հավասարասրուն է, և OC-ն որ ուղղահայաց է AB—ին, այդ յեռանկյան, համաչափության առանցքն է: Այստեղից հետևում է, որ CA=CB, այսինքն որ* AB լարը իրեն ուղղահայաց տրամագծով կիսվում է: *Ծալենք շրջանն ըստ DD_1 տրամագծի, այն ժամանակ շրջանագիծը նրանով կկիսվի, որովհետև DAD_1 աղեղի կետերը կհամընկնեն DBD_1 աղեղի կետերի հետ.* ուրեմն տրամագիծը շրջանագծի համաչափության առանցքն է: *Բացի դրանից, $\smile AD$-ն կհամընկնի $\smile BD$-ի և $\smile AD_1$-ը $\smile BD_1$-ի հետ, այսինքն լարով ձգված աղեղները լարին ուղղահայաց տրամագծով կիսվում են:*

2. Շրջանի մեջ կարելի յե անթիվ բազմությամբ տրամագծեր տանել. հետևաբար, շրջանն անթիվ բազմությամբ համաչափության առանցքներ ունի:

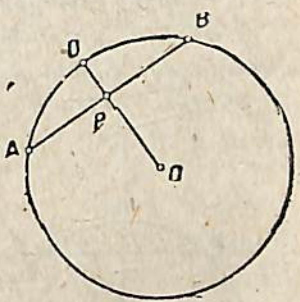
Բացի առանցքային համաչափությունից, *շրջանը և շրջանագիծը* նաև կենտրոնական համաչափություն *ունեն. վերջինս նրանում է կայանում, որ շրջանի մեջ և շրջանագծի վրա կան անթիվ բազմությամբ*



Նկ. 173.



Նկ. 174.



Նկ. 175.

կետազույգեր, որոնք համաչափ են դասավորված կենտրոնի նկատմամբ: *Այդպիսի կետերը գտնվում են կենտրոնով անցնող մի ուղիղի վրա և կենտրոնից հավասարահեռ են:*

Ամեն մի տրամագծի ծայրերը՝ A և A_1, D և D_1 (Նկ. 174) համաչափ են O կենտրոնի նկատմամբ. շրջանագծի ներսն ընկած B և B_1 կետերը համաչափ են O կենտրոնի նկատմամբ, որովհետև նրանք կենտրոնից հավասարահեռ են՝ $OB=OB_1$ և գտնվում են կենտրոնով անցնող մի ուղիղի վրա:

3. **Խնդիր**: Տված AB աղեղը կիսել *(Նկ. 175):*

Կառուցում: Կենտրոնից ուղղահայաց ենք տանում AB լարին և շարունակում այն մինչև AB ուղիղի հետ D կետում հատվելը. այն ժամանակ $\smile AD=\smile BD$: Յեթե կենտրոնի դիրքը չի նշված, AB լարին տանում ենք նրա OP միջնուղղահայացը, որը և AB աղեղը D կետում կիսում է:

§ 3. ԶՈՒԳԱՀԵՌ ԼԱՐԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ԸՆԿԱԾ ԱՂԵՂՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Թեորեմ: Զուգահեռ լարերի միջև ընկած աղեղները միահավասար են:

Տված են՝ AB և CE լարեր են, $AB \parallel CE$ (նկ. 176)
Պետք է ապացուցել՝ $\smile AC = \smile BE$.

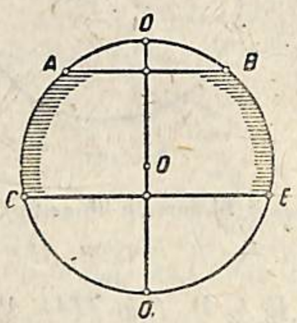
Ապացուցում։ Տանենք D_1D տրամագիծը՝ ուղղահայաց AB ու CE զուգահեռ լարերին։ Յեթե շրջանը ծալենք ըստ D_1D տրամագծի, ապա կհամընկնեն՝ A կետը B կետի հետ, C կետը E կետի հետ և AC աղեղը BE աղեղի հետ, հետևաբար $\smile AC = \smile BE$։

§ 4. ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ՅԵՎ ԱՂԵՂԻ ԿԵՆՏՐՈՆԸ ԳՏՆԵԼԸ։ ԱՂԵՂԻ ԿԻՍՈՒՄԸ։

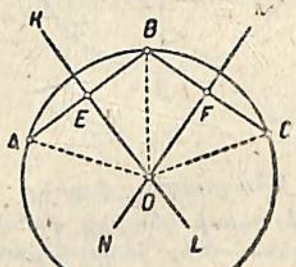
Խնդիր 1. Տված է մի շրջանագիծ, որի կենտրոնը չի նշանակված, գտնել նրա կենտրոնը։

Կառուցում։ Կվերցնենք տվյալ շրջանագծի վրա (նկ. 177) կամավորապես 3 կետեր՝ A, B և C, կտանենք AB ու BC լարերը և նրանց E ու F միջնակետերից KL ու MN միջնուղղահայացները։

Յերկու միջնուղղահայացներն էլ պետք է անցնեն շրջանագծի կենտրոնով. վորոնելի կենտրոնը միաժամանակ գտնվելով և MN-ի և KL-ի վրա, պետք է գտնվի նրանց հատման O կետում։ Վերջինս միացնելով A, B ու C կետերի հետ, կստանանք՝ $OA=OB=OC$, հետևաբար



Նկ. 176.



Նկ. 177.

O կետն իրոք շրջանագծի կենտրոնն է, վորովհետև շրջանագծի վրա կամավորապես վերցրած յերեք կետերը՝ A, B ու C, այդ O կետից հավասարահեռ են։

Խնդիր 2. Տված է մի աղեղ, գտնել նրա կենտրոնը։

Կառուցում։ Աղեղի կենտրոնը գտնելու համար նույնպիսի կառուցում է արվում, ինչպես և շրջանագծի կենտրոնը գտնելու համար։

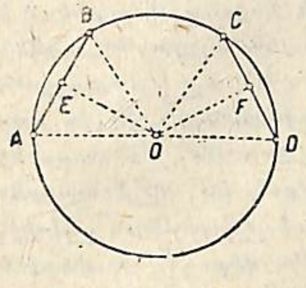
§ 5. ԿԱԽՈՒՄ ԼԱՐԵՐԻ ՅԵՎ ԱՂԵՂՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

Թեորեմ։ Մի շրջանի կամ հավասար շրջանների մեջ միահավասար լարերը ձգում են միահավասար աղեղներ և հակադարձաբար, միահավասար աղեղները ձգվում են միահավասար լարերով։

1) Տված է՝ լար AB=լար CD (նկ. 178)
Պետք է ապացուցել՝ $\smile AB = \smile CD$։

2) տված է՝ $\smile AB = \smile CD$
Պետք է ապացուցել՝ լար AB=լար CD։

Ապացուցում։ 1) AB և CD լարերի ծայրերը միացնում ենք O կենտրոնի հետ, ստանում ենք յերկու միահավասար յեռանկյուններ՝ AOB և COD, վորոնց մեջ $AB=CD$ ըստ պայմանի, $AO=OC$ և $BO=OD$ իբրև միևնույն շրջանագծի շառավիղներ։ Յեռանկյունների հավասարությունից հետևում է, վոր $\angle AOB=\angle COD$, բայց միահավասար կենտրոնական անկյուններին համապատասխանում են նաև միահավասար աղեղներ, ուստի $\smile AB = \smile CD$։



Նկ. 178.

2) $\smile AB = \smile CD$, ուստի միահավասար են նաև նրանց համապատասխանող կենտրոնական անկյունները, այսինքն $\angle AOB = \angle COD$։ Դիտելով AOB և COD յեռանկյունները, տեսնում ենք, վոր նրանց մեջ $AO=OC$, $BO=OD$ իբրև միևնույն շրջանագծի շառավիղներ, այլ և այդ հավասար կողմերի միջև ընկած անկյունները՝ $\angle AOB$ և $\angle COD$, միահավասար են. հետևաբար, $\triangle AOB = \triangle COD$, իսկ այստեղից հետևում է, վոր AB ու CD լարերը միահավասար են, այսինքն լար AB=լար CD։

§ 6. ԿԱԽՈՒՄ ԼԱՐԵՐԻ ՅԵՎ ՆՐԱՆՑ ԿԵՆՏՐՈՆԱԿԱՆ ՀԵՌԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՄԻՋԵՎ

1. Թեորեմ։ Մի շրջանի կամ միահավասար շրջանների մեջ միահավասար լարերը հավասարահեռ են կենտրոնից յեվ, հակադարձաբար կենտրոնից հավասարահեռ լարերը միահավասար են.

1) տված են՝ $AB=CD$, $OE \perp AB$ և $OF \perp CD$ (նկ. 178)
Պետք է ապացուցել՝ $OE=OF$։

Ապացուցում։ AOB և COD յեռանկյունների հավասարությունից հետևում է, վոր նրանց բարձրությունները հավասար են, այսինքն $OE=OF$։

2) Տված են՝ $OE \perp AB$ և $OF \perp CD$, $OE=OF$ (նկ. 178)
Պետք է ապացուցել՝ $AB=CD$։

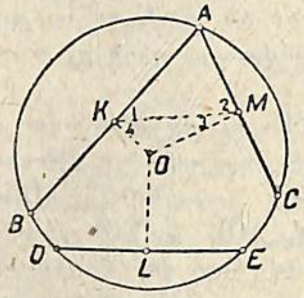
Ապացուցում։ AOE և COF ուղղանկյուն յեռանկյունների մեջ $AO=CO$, իբրև շառավիղներ, և $OE=OF$, ըստ պայմանի. ուստի $\triangle AOE = \triangle COF$, իսկ այստեղից հետևում է, վոր $AE=CF$, բայց յեթե $AE=CF$, այսինքն AB ու CD լարերի կեսերը միահավասար են, ապա հավասար են նաև լարերը. այսպես ուրեմն, $AB=CD$։

2. Թեորեմ: Մի շրջանի կամ հավասար շրջանների մեջ երկու լարերից փոքրը հեռու է կենտրոնից, իսկ մեծը մոտ է կենտրոնին:

Տված՝ O շրջանագծի մեջ լար $AB >$ լար DE (նկ. 179)

Ապացուցել՝ $OK < OL$:

Ապացուցում: AB լարի A ծայրից կտանենք DE լարին հավասար AC լարը. նրանց հեռավորությունները կենտրոնից, նախորդ թեորեմի համաձայն, միահավասար են, այսինքն $OM=OL$: Միացնենք K և M կետերը KM ուղիղով և դիտենք KAM եռանկյունը: Նրա մեջ $AK > AM$ իբրև անհավասար լարերի կեսեր, որոնցից մեծն AB-ն է և փոքրը AC-ն: Այս պատճառով անկ. $2 >$ անկ. 1 (եռանկյան մեջ մեծ կողմի դիմաց ընկած է մեծ անկյուն). KOM եռանկյան մեջ ունենք $\angle 3=90°-\angle 2$ և $\angle 4=90°-\angle 1$: Բաղդատելով այս հավասարությունների ձախ մասերը, տեսնում ենք, որ $90°\ \angle 2$՝ տարբերությունը, փոքր է քան $90°-\angle 1$ տարբերությունը, որովհետև $\angle 2$-ը մեծ է $\angle 1$-ից. այստեղից հետևում է, որ $\angle 3$-ը փոքր է $\angle 4$-ից, բայց եռանկյան մեջ փոքր անկյան դիմաց փոքր կողմ է գտնվում, ուստի $OK < OM$: Փոխարինելով OM-ը նրան հավասար OL հատվածով, ունենում ենք՝ $OK < OL$, որ և պետք էր ապացուցել:



Նկ. 179.

§ 7. ՈՒՂՂԻ ԶԱՆԱԶԱՆ ԴԻՐՔԵՐԸ ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ: ՀԱՏՈՂ ԵՎ ՇՈՇԱՓՈՂ

1. Ուղիղ գիծը, նայած շրջանագծի նկատմամբ ունեցած իր դիրքին, կարող է ունենալ շրջանագծի հետ ընդհանուր 1) երկու կետ, 2) միայն մի կետ, 3) և ոչ մի կետ:

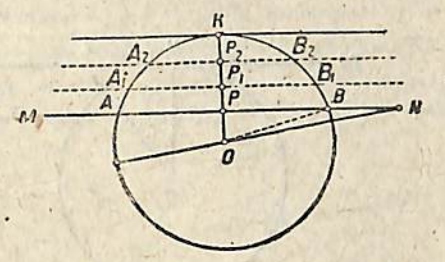
Ուղիղ գիծը շրջանագծի հետ չի կարող երկուսից ավելի ընդհանուր կետեր ունենալ, որովհետև մի ուղիղի վրա գտնվող երեք կետերով անհնարին է շրջանագիծ տանել:

2. MN ուղիղը (նկ. 180), որը կտրում է շրջանագիծը, վերջինիս հետ երկու ընդհանուր կետեր ունի՝ A և B, և կոչվում է հատող: MN հատողի AB հատվածը, որի ծայրերը գտնվում են շրջանագծի վրա, AB լարն է: MN հատողը կենտրոնից ունի OP հեռավորությունը, ընդ որում $OP \perp MN$ և $OP < r$:

Կենտրոնով անցնող հատողը կոչվում է կենտրոնական հատող և շրջանագծի համար համաչափության առանցք է:

3. Եթե MN հատողն իրեն զուգահեռ թողնելով տեղափոխենք ավելի ու ավելի հեռացնելով կենտրոնից, ապա 1) նրա ներքին մասը՝ AB լարը, ավելի ու ավելի կփոքրանա՝ $AB > A_1B_1 > A_2B_2 \ldots$ 2) նրա հեռավորությունը կենտրոնից ավելի ու ավելի կմեծանա՝ $OP < OP_1 < OP_2 \ldots$ 3) նրա և շրջանագծի հատման կետերը՝ A ու B ավելի ու ավելի կմոտենան:

MN հատողը զուգահեռ տեղափոխությամբ վերջիվերջո այնպիսի դիրք կընդունի, երբ նրա և շրջանագծի փոխհատման A ու B երկու կետերը կմիաձուլվեն K կետում և հատողի ներքին մասը՝ AB լարը, մի կետ կդառնա:



Նկ. 180.

Երբ MN հատողն այդպիսի դիրք է ընդունում (նկ. 181), ապա նա կոչվում է շոշափող, իսկ նրա և շրջանագծի ընդհանուր K կետը կոչվում է շոշափման կետ: Շոշափողի հեռավորությունը կենտրոնից՝ OK-ն, շրջանագծի շառավիղն է, այսինքն $OK=r$: Այսպես ուրեմն, շրջանագծի հետ միայն մեկ ընդհանուր կետ ունեցող ուղիղը կոչվում է շոշափող. նրա հեռավորությունը շրջանագծի կենտրոնից հավասար է շրջանագծի շառավղին:

4. Եթե MN ուղիղը (նկ. 182) շրջանագծի կենտրոնից ավելի մեծ հեռավորություն ունի, քան շառավղի երկարությունն է, տվյալ դեպքում $OL > r$, ապա նա շրջանագծի հետ ընդհանուր կետեր չունի և ամբողջովին շրջանագծից դուրս է դասավորված:

Այսպես ուրեմն, MN ուղիղի դիրքը կենտրոնի նկատմամբ որոշվում է նրա d հեռավորությամբ կենտրոնից, և հնարավոր են հետևյալ դեպքերը՝ 1) $d < r$, MN-ը հատող է, 2) $d=r$, MN-ը շոշափող է, 3) $d > r$, MN-ը գտնվում է շրջանագծից դուրս:

5. Թեորեմ: Շոշափողն ուղղահայաց է շոշափման կետով տարած շառավղին:

Տված են՝ MN-ը շոշափող է, K-ն շոշափման կետ (նկ. 181)

Պետք է ապացուցել՝ $OK \perp MN$:

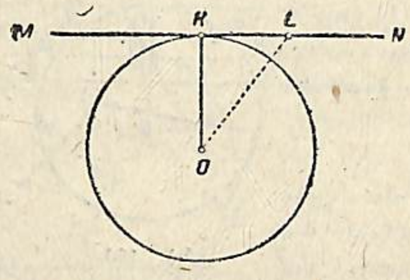
Ապացուցում: Վերցնենք MN շոշափողի վրա որևէ L կետ և միացնենք O կենտրոնի հետ: L կետը գտնվում է շրջանագծից դուրս, այս պատճառով նրա կենտրոնական հեռավորությունը շառավղից մեծ է և $OL > OK$: Այսպիսով OK-ն O կետի կարճագույն հեռավորությունն է շոշափողից, իսկ կետի կարճագույն հեռավորությունն ուղիղից ուղղահայացն է: Այսպես ուրեմն $OK \perp MN$:

Թեորեմ (հակադարձ). Ամեն մի ուղիղ, որն ուղղահայաց է շառավղին նրա այն ծայրում, որը գտնվում է շրջանագծի վրա, շոշափող է:

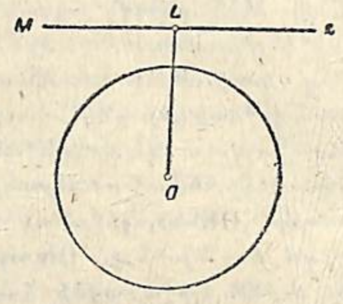
Տված է՝ $MN \perp OK$ (նկ. 181)

Պետք է ապացուցել՝ MN ը շոշափող է:

Ապացուցում: OK ուղղահայացը կարճ է ամեն մի ուրիշ OL ուղիղից, որը տարված է O կետից դեպի MN ուղիղը, ուստի $OL > OK$, և L կետը գտնվում է շրջանագծից դուրս, K-ն միակ կետն է MN ուղիղի վրա, որը միաժամանակ նաև շրջանագծի վրա է գտնվում, MN ուղիղը, որը շրջանագծի հետ միայն մի ընդհանուր K կետը ունի, շոշափող է:



Նկ. 181.



Նկ. 182.

§ 8. ՇՈՇԱՓՈՂՆԵՐ ՏԱՆԵԼԸ

Խնդիր 1. Տրված շրջանագծին տանել շոշափող նրա վրա տրված K կետով (*նկ. 181*):

Լուծում. *Տանում ենք OK շառավիղը և K կետով տանում ենք MN ուղիղը՝ ուղղահայաց OK-ին. հենց այդ ուղղահայացն էլ կլինի որոնած շոշափողը:*

Խնդիր 2. Տանել տրված շրջանագծին այնպիսի շոշափող, որը զուգահեռ լինի տրված AB ուղիղին (*նկ. 183*):

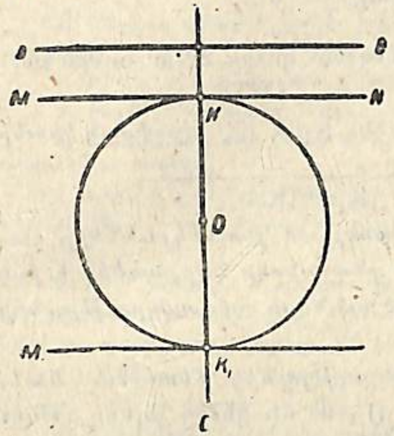
Լուծում: *O կենտրոնով տանենք $CD \perp AB$ այս CD ուղիղը շրջանագիծը կհատի յերկու կետերում՝ K և K_1, որտեղից այնուհետև կըտանենք MN և M_1N_1 ուղիղները՝ ուղղահայաց KK_1-տրամագծին: Այս յերկու ուղիղները կլինեն որոնած ուղիղները:*

Խնդիր 3. Տրված շրջանագծին տանել շոշափողներ շրջանագծից դուրս գտնվող A կետից (*նկ. 184*):

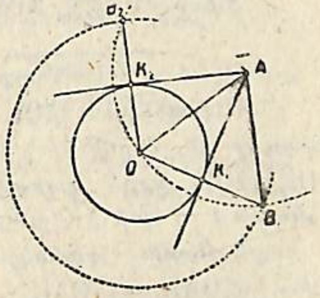
1) Լուծում. *Դիցուք խնդիրը լուծված է և տվյալ A կետից տըվյալ շրջանագծին, որի կենտրոնն է O, տարված է AK_1 շոշափողը: O կետը միացնելով K_1 կետի հետ, ստանում ենք AOK_1 ուղղանկյուն յեռանկյունը. OK_1 շառավիղի շարունակության վրա վերցնում ենք $K_1B_1 = OK_1 = r$: Միացնելով B_1-ն A-ի հետ, կստանանք AOB_1 հավասարասրուն յեռանկյունը, որի մեջ AK_1-ն իբրև բարձրություն է, հետևաբար, իբրև միջնագիծ է ծառայում: Այսպես ուրեմն, խնդիրը հանգում է AOB_1*

հավասարասրուն յեռանկյան B_1 գագաթը գտնելուն, մինչդեռ մյուս յերկու գագաթները՝ A-ն և O-ն, տված են: B_1 կետը գտնվում է մի կողմից այն շրջանագծի վրա, որի կենտրոնն է A կետը և որի շառավիղն է AO հատվածը, այսինքն տվյալ A կետի հեռավորությունը տվյալ շրջանագծի O կենտրոնից, և մյուս կողմից այն շրջանագծի վրա, որի կենտրոնն է O կետը և որի շառավիղն է OB_1-ը, որը հավասար է տվյալ շրջանագծի տրամագծին. այս պատճառով B_1 կետը ներկայացնում է այդ յերկու շրջանագծերի փոխհատման կետը:

2) Կառուցում: O-ն կենտրոն ընդունելով, տանում ենք մի շրջանագիծ, որի շառավիղը հավասար է տվյալ շրջանագծի տրամագծին, այնուհետև



Նկ. 183.



Նկ. 184.

տանում ենք մի ուրիշ շրջանագիծ, A կետն ընդունելով իբրև կենտրոն և A կետի հեռավորությունն O կենտրոնից, այսինքն AO-ն, իբրև շառավիղ: Այս յերկու օժանդակ շրջանագծերի հատման B_1 և B_2 կետերն ուղիղներով միացնում ենք O կենտրոնի հետ. OB_1 և OB_2 ուղիղները հատում են տվյալ շրջանագիծը K_1 և K_2 կետերում, որոնք հանդիսանում են A արտաքին կետից տվյալ շրջանագծին տարած AK_1 և AK_2 յերկու շոշափողների շոշափման կետերը:

3. Ապացուցում: *B_1 կետը միացնելով A կետի հետ. կստանանք AB_1O հավասարասրուն յեռանկյունը, որի մեջ $AO = AB_1$ իբրև միևնույն շրջանագծի շառավիղներ, որի կենտրոնն A կետում է. բացի դրանից. K_1 կետը OB_1-ի միջնակետն է, որովհետև ըստ կառուցման $OB_1 = 2OK_1$. այստեղից հետևում է, որ AK_1 ուղիղն AOB_1 հավասարասրուն յեռանկյան մեջ և՛ միջնագիծ է և՛ բարձրություն, այսինքն որ նա ուղղահայաց է OB_1-ին K_1 կետում: Այսպես ուրեմն, $AK_1 \perp OK_1$, այսինքն AK_1 ուղիղն ուղղահայաց է OK_1 շառավղին նրա K_1 ծայրում, որը գտնվում է շրջանագծի վրա, հետևաբար նա շոշափող է տվյալ շրջանագծին: Նույն դատողությունը վերաբերում է նաև AK_2 ուղիղին, այսինքն յերկրորդ շոշափողին, որը տարված է A արտաքին կետից տվյալ շրջանագծին:*

4. Յերկու շրջանագծերը հատվում են K_1 և K_2 յերկու կետերում, հետևաբար, տվյալ խնդիրը յերկու լուծում ունի, այսինքն՝ շրջանագծից դուրս գտնվող տվյալ A կետից տվյալ շրջանագծին կարելի յե տանել յերկու շոշափողներ՝ AK_1 և AK_2։

Իբրև շոշափողի յերկարություն ընդունվում է այն հատվածը, վորի ծայրերն են տվյալ A կետը և շոշափման K_1 կամ K_2 կետը։

§ 9. ՄԻՅԵՎՆՈՒՅՆ ԿԵՏԻՑ ՏԱՐՎԱԾ ՇՈՇԱՓՈՂՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

1. Թեորեմ: Շրջանագծից դուրս վերցրած կետից շրջանագծին տարված շոշափողները միահավասար են:

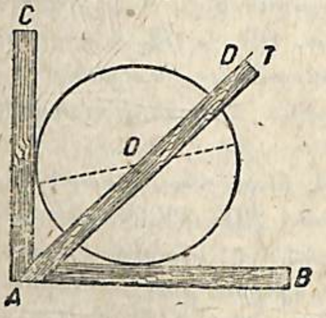
Տված են՝ AK_1 և AK_2 շոշափողներ են, K_1 և K_2 շոշափման կետեր (նկ. 184)

Պետք է ապացուցել՝ $AK_1=AK_2$։

Ապացուցում: AOK_1 և AOK_2 ուղղանկյուն յեռանկյունները հավասար են, վորովհետև նրանց մեջ OA-ն ընդհանուր ներքնաձիգ է, իսկ $OK_1=OK_2$ իբրև շառավիղներ։ Յեռանկյունների հավասարությունից հետևում է, վոր $AK_1=AK_2$։

2. Նույն յեռանկյունների հավասարությունից հետևում է նաև, վոր $\angle OAK_1=\angle OAK_2$։ այսինքն վոր OA-ն մի կետից յելնող յերկու շոշափողներով կազմված A անկյան կիսորդն է:

AO կենտրոնական հատողը այն A անկյան համաչափության առանցքն է, վորը կազմված է A արտաքին կետից տվյալ շրջանագծին տարած շոշափողներով:



Նկ. 185.

3. Կենտրոնախույս։ Շրջանի կենտրոնը վորոշելու համար յերբեմն գործ են ածում մի գործիք, վորը կոչվում է կենտրոնախույս: Նրա կազմությունը ցույց է տված 185-րդ նկարում։ Նա բաղկացած է AB և AC յերկու քանոններից, վորոնք ամրացված են իրար հետ այնպես վոր ուղիղ անկյուն կազմեն, և AD յերրորդ քանոնից, վորի մի յեզրը համընկնում է ուղիղ անկյան կիսորդի հետ։ Այս գործիքը նրա վրա յե հիմնված, վոր յերկու շոշափողներով կազմված անկյան կիսորդը շրջանի կենտրոնով է անցնում։

Կենտրոնախույսը յերկու անգամ կցարդելով այն շրջանին, վորի կենտրոնը պետք է գտնել, և ամեն անգամ AD քանոնի T յեզրի յերկարությամբ ուղիղ գիծ քաշելով, գտնում ենք O կենտրոնը իբրև քաշած յերկու ուղիղների հատման կետը։

Կենտրոնախույսի գագաթից մինչև շոշափման կետը յեղած հեռավորությունը հավասար է շրջանի շառավիղին, վորովհետև այն շառավիղները, վորոնք տարված են դեպի կենտրոնախույսի կողմերի ու շրջանի շոշափման կետերը, կենտրոնախույսի կողմերի հետ միասին քառակուսի յեն կազմում։

Հարցեր յեվ վարժություններ։

1. Ի՞նչպես պետք է գտնել շրջանագծի A կետի համար նրա կենտրոնահամաչափ կետը։
2. Ինչո՞վ է տարբերվում շոշափողը հատողից։
3. Ինչի՞ յե հավասար յերկու զուգահեռ շոշափողների հեռավորությունը։
4. Ապացուցել, վոր լարին զուգահեռ շոշափողը շոշափման կետում կիսում է այդ լարով ձգված աղեղը։
5. Վ՞րն է այն շրջանագծերի կենտրոնների յերկրաչափական տեղը, վորոնք անցնում են A կետով և վորոնց շառավիղը հավասար է 3 սմ-ի։ Գծագիրը պատրաստել։
6. 4 սմ յերկարության շառավիղ ունեցող շրջանագծի մեջ կառուցել դարձյալ 4 սմ յերկարության այնպիսի լար, վորն անցնի շրջանագծի վրա տված A կետով։ Քանի՞ այդպիսի լարեր կարելի յե կառուցել։
7. O կենտրոնն ունեցող շրջանի ներսը վերցրած A կետից տանել այնպիսի MN լար, վորն A կետում կիսվի։
8. Շրջանագծի A կետից տարված են յերկու փոխուղղահայաց և միահավասար լարեր, վորոնք կենտրոնից հեռացած են 3 սմ-ով։ Վորոշել նրանց յերկարությունը։
9. Տանել այնպիսի շրջանագիծ, վորը MN ուղիղը շոշափի սրա P կետում։ Հետազոտել, թե քանի՞ շրջանագիծ կարելի յե տանել և նշել, թե վորտեղ կգտնվեն նրանց կենտրոնները։
10. Տված է ABCD քառակուսին, վորի կողմն է՝ $a=5$ սմ։ Տանել յերկու այնպիսի շրջանագծեր, վոր քառակուսու կողմերը ծառայեն մեկի համար իբրև լարեր և մյուսի համար իբրև շոշափողներ։
11. Գծել յերկու համակենտրոն շրջանագծեր 3 սմ և 5 սմ յերկարության շառավիղներով։ Այնուհետև մեծ շրջանագծի մեջ կառուցել յերկու այնպիսի լարեր, վորոնք շոշափող լինեն փոքր շրջանագծին, և ցույց տալ, վոր այդ լարերն իրար հավասար են։
12. A կետը գտնվում է շրջանագծից դուրս. 1) Կառուցմամբ գտնել նրա փոքրագույն և մեծագույն հեռավորությունները շրջանագծից։

Ցուցմունք։ Կետի փոքրագույն հեռավորություն շրջանագծից կոչվում է կենտրոնական հատողի այն հատվածը, վորի ծայրերն են տվյալ կետը և հատողի ու շրջանագծի փոխհատման այն կետը, վորն ավելի մոտ է տվյալ կետին։

2) A կետի մեծագույն հեռավորությունը մինչև r շառավիղն ունեցող շրջագիծը վ՞րքանով է մեծ կարճագույն հեռավորությունից։

3) Կառուցել այն կետերի յերկրաչափական տեղը, վորոնք $r=5$ սմ շառավիղ ունեցող շրջանագծից հեռացած են 2 սմ-ով։

13. Վ՞րն է այն շրջանագծերի կենտրոնների յերկրաչափական տեղը, վորոնք շոշափում են տվյալ յերկու ուղիղները՝ AB ու CD, յեթե այս ուղիղները 1) զուգահեռ են և 2) փոխհատվող են։
14. Տանել $r=5$ սմ շառավիղ ունեցող շրջանագծին այնպիսի շոշափող, վորն

ուղղահայաց լինի տվյալ MN ուղղին։ Հետազոտել թե քանի շոշափող կարելի յե տանել և ինչքան է նրանց հեռավորությունը.

15. O շրջանագծին տարված է MN շոշափողը: Ապացուցել, վոր յեթե վորյեվե AB տրամագծի A յեվ B ծայրերից շոշափողին տանենք $AC=a$ յեվ $BD=b$ ուղղահայացները, ապա այդ ուղղահայացների գումարը հավասար է տրամագծին, այսինքն $a+b=2r$:

16. Վորն է տվյալ շրջանագծի միահավասար լարերի միջնակետերի յերկրաչափական տեղը։

XII. ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՉԱՓՈՒՄԸ

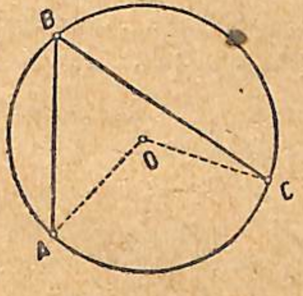
§ 1. ԱՆԿՅՈՒՆ, ՎՈՐԻ ԳԱԳԱԹԸ ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ՎՐԱ ՅԵ, ՅԵՎ ՆՐԱ ՉԱՓՈՒՄԸ

1. Այն անկյունը, վորի գագաթը շրջանագծի կենտրոնում է, կենտրոնական անկյուն է և չափվում է կողմերի միջև գտնվող աղեղով։

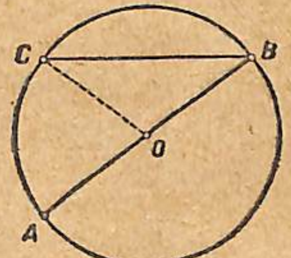
Դիտարկենք այն անկյունները, վորոնց գագաթները գտնվում են վոչ թե շրջանագծի կենտրոնում, այլ շրջանագծի վրա, նրանից դուրս և կամ նրա ներսը, բայց վոչ կենտրոնում։

2. Այն անկյունը, վորի գագաթը գտնվում է շրջանագծի վրա յեվ վորի համար իբրև կողմեր ծառայում են լարերը, կոչվում է ներգծյալ (ներգծած) անկյուն։

∠ABC-ն ներգծյալ անկյուն է (նկ. 186) նա հենվում է շրջանագծի AC աղեղի վրա. AC աղեղին համապատասխանում է AOC կենտրոնական անկյունը։



Նկ. 186



Նկ. 187

3. Թեորեմ։ Ներգծյալ անկյունը հավասար է իր հենման աղեղին համապատասխանող կենտրոնական անկյան կեսին և չափվում է այդ աղեղի կեսով։

Տված են՝ ∠ABC-ն ներգծյալ անկյուն է, AB-ն լար է, BC-ն լար է (նկ. 186)

Պետք է ապացուցել՝ $\angle ABC=\frac{\angle AOC}{2}$; *∠ABC-ն չափվում է* $\frac{AC}{2}$ *ով։*

Ապացուցում: Դիտարկենք զատ-զատ յերեք հնարավոր դեպքեր.

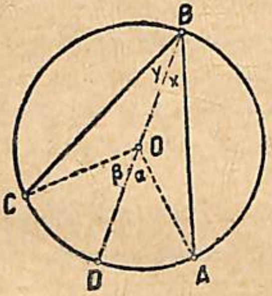
1) Ներգծյալ անկյան կողմերն են AB տրամագիծը և BC լարը (նկ. 187). C կետը միացնենք O կենտրոնի հետ, կստանանք BCO հավասարասրուն յեռանկյունը (OB=OC=r). AO կենտրոնական անկյունը BOC յեռանկյան համար արտաքին անկյուն է, ուստի $\angle AOC=\angle B+\angle C$, բայց $\angle B=\angle C$, հետևաբար, $\angle AOC=2\angle B$ կամ

$$\angle ABC=\frac{\angle AOC}{2}.$$

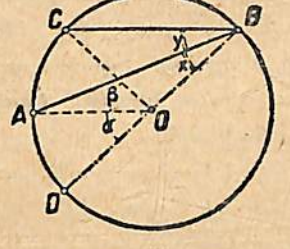
AOC կենտրոնական անկյունը չափվում է AC աղեղով, բայց ներգծյալ անկյունը հավասար է կենտրոնական անկյան կեսին, հետևաբար, նա չափվում է այն աղեղի կեսով, վորի վրա նա հենվում է՝

$$\angle ABC\text{-ն չափվում է } \frac{\smile AC}{2}\text{ով:}$$

2) ABC ներգծյալ անկյան կողմերն են AB և BC լարերը, վորոնց միջև գտնվում է շրջանագծի O կենտրոնը (նկ. 188):



Նկ. 188



Նկ 189

Տանում ենք BD տրամագիծը, վորով ներգծյալ անկյունը բաժանվում է x ու y անկյունների, իսկ կենտրոնական անկյունը՝ α ու β անկյունների: Ինչպես գիտենք,

$$\angle x=\frac{\angle \alpha}{2} \text{ և } \angle y=\frac{\angle \beta}{2}$$

կնշանակի՝

$$\angle x+\angle y=\frac{\angle \alpha}{2}+\frac{\angle \beta}{2}=\frac{\angle \alpha+\angle \beta}{2}$$

Այսպես ուրեմն,

$$\angle ABC=\frac{\angle AOC}{2}, \angle ABC\text{-ն չափվում է } \frac{\smile AC}{2}\text{ով:}$$

3) ABC ներգծյալ անկյան կողմերն են AB և BC լարերը, վորոնք դասավորված են շրջանագծի O կենտրոնի մի կողմում (նկ. 189):

$$\angle ABC=\angle CBD-\angle ABD \text{ և } \angle AOC=\angle COD-\angle AOD,$$

բայց

$$\angle CBD=\frac{\angle COD}{2} \text{ և } \angle ABD=\frac{\angle AOD}{2},$$

ուստի

$$\angle CBD-\angle ABD=\frac{\angle COD}{2}-\frac{\angle AOD}{2}=\frac{\angle COD-\angle AOD}{2},$$

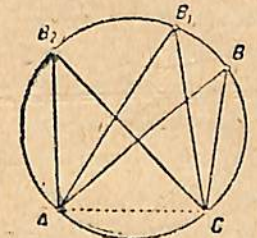
Այսպես ուրեմն,

$$\angle ABC=\frac{\angle AOC}{2}, \angle ABC\text{-ն չափվում է } \frac{\smile AC}{2}\text{-ով:}$$

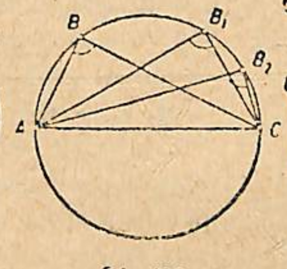
Ներգծյալ անկյան մեծությունը կախված չէ նրանից, թե ինչպես են դասավորված նրա կողմերը շրջանագծի կենտրոնի նկատմամբ, միշտ հավասար է իր հենման աղեղին համապատասխանող կենտրոնական անկյան կեսին և միշտ չափվում է իր հենման աղեղի կիսով.

Հետևանքներ: Միևնույն աղեղի վրա հենվող ներգծյալ անկյունները միահավասար են (նկ. 190):

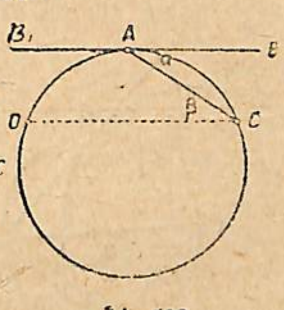
$\angle B$, $\angle B_1$, $\angle B_2$ և այլն հենվում են միևնույն աղեղի վրա. նրանցից յուրաքանչյուրը չափվում է այդ աղեղի կեսով, հետևաբար նրանք իրար հավասար են՝ $\angle B=\angle B_1=\angle B_2$ և այլն:



Նկ. 190



Նկ. 191



Նկ. 192

A և C կետերը միացնենք AC լարով: Այս լարն, ինչպես ասում են, ABC աղեղի յուրաքանչյուր կետից միևնույն B անկյունով է յերևում:

II. Տրամագծի վրա հենվող ներգծյալ անկյունն ուղիղ է:

$\angle B=\angle B_1=\angle B_2=d$ (նկ. 191), վորովհետև նրանցից յուրաքանչյուրը հենվում է 180°-ի աղեղի վրա, չափվում է նրա կեսով և, հետևաբար, հավասար է 90°-ի:

4. Թեորեմ: Շոշափողով և շոշափման կետից տարած լարով կազմված անկյունը չափվում է կողմերի միջև գտնվող աղեղի կեսով:

Տված են՝ AB-ն շոշափող է, AC-ն լար (նկ. 192)

Պետք է ապացուցել $\angle BAC$ չափվում է $\frac{\smile AC}{2}$ով

$$\angle B_1AC \text{ չափվում է } \frac{\smile ADC}{2}.$$

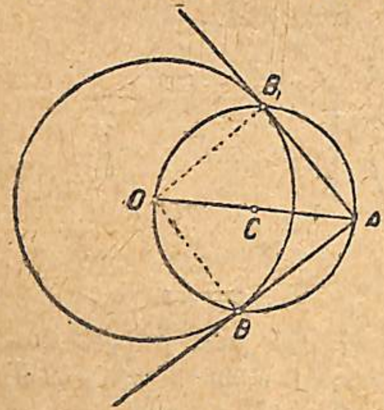
Ապացուցում։ Տանում ենք (նկ. 192) $CD \parallel AB$։ Այն ժամանակ $\angle\alpha=\angle\beta$, իբրև խաչադիր անկյուններ և $\smile AD=\smile AC$ իբրև աղեղներ, որոնք գտնվում են զուգահեռ ուղիղների միջև։

Բայց $\angle\beta$-ն չափվում է $\frac{\smile AD}{2}$-ով, ուրեմն նրան հավասար α անկյունն էլ չափվում $\frac{\smile A}{2}$-ով, կամ նրան հավասար $\frac{\smile AC}{2}$-ով։

B_1AC անկյունը լրացնում է α անկյունը մինչև 180°, ինչպես և $\frac{\smile ADC}{2}$-ը լրացնում է $\frac{\smile AC}{2}$-ը մինչև 180°, հետևաբար $\angle B_1AC$-ն չափվում է նրա կողմերի միջև ընկած ADC աղեղի կեսով։

5. **Խնդիր։** Տվյալ շրջանագծին նրանից դուրս վերցրած A կետից տանել շոշափողներ (*երկրորդ եղանակ*) (նկ. 193)։

Կառուցում։ A կետը միացնում ենք O կենտրոնի հետ և OA-ն տրամագիծ ընդունելով տանում ենք օժանդակ շրջանագիծ. նա հատում է տվյալ շրջանագիծը B և B_1 կետերում. տանելով A ու B և A B_2 կետերով անցնող ուղիղները, ստանում ենք որոնած շոշափողները՝ AB և AB_1։ Իրոք, $AB \perp OB$ և $AB_1 \perp OB_1$, այսինքն AB և AB_1 ուղիղները ուղղահայաց են տվյալ շրջանագծի շառավիղներին, որովհետև B և B_1 անկյուններն ուղիղ անկյուններ են իբրև ներգծյալ անկյուններ, որոնք C կենտրոնով շրջանագծի մեջ հենվում են OA տրամագծի վրա։



Նկ. 193

6. **Խնդիր։** Տվյալ AB հատվածի վրա կառուցել այնպիսի բացատ, որը բովանդակի տվյալ α անկյունը (նկ. 194)։

1) Լուծում։ Դիցուք խնդիրը լուծված է և տվյալ AB հատվածի վրա, իբրև լարի վրա, կառուցված է ACB բացատը, որը բովանդակում է α անկյունը։ A կետում կտանենք AD շոշափողը, կտանենք $\angle BAD=\angle ACB=\angle\alpha$, որովհետև նրանք չափվում են միևնույն AB աղեղի կեսով։ Այն շրջանի կենտրոնը, որին պատկանում է ACB բացատը, գտնվում է AD-ին շոշափման A կետում տարած AO ուղղահայացի և AB հատվածի EO միջնուղղահայացի հատման կետում։

2) Կառուցում։ Տվյալ AB հատվածի ծայրում (նկ. 194) կառուցում ենք $\angle DAB=a$. տանում ենք $AO \perp AD$, այլև AB հատվածի EO միջնուղղահայացը՝ AO, EO ուղղահայացների հատման կետը որոնած շրջանագծի կենտրոնն է։ Այնուհետև տանելով OA շառավղով շրջանագիծը, ստանում ենք ACB որոնելի բացատը։ ACB աղեղի յուրաքանչյուր կետը ծառայում է իբրև այնպիսի անկյան գագաթ, որը հավասար է տվյալ անկյան։

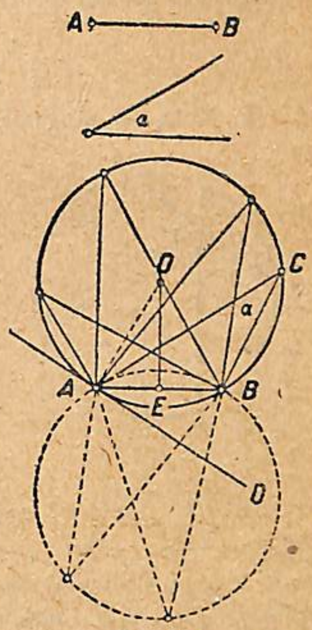
3) Ամեն մի անկյուն, որի գագաթը գտնվում է ACB աղեղի վրա, չափվում է AB աղեղի կեսով, ուստի հավասար է տվյալ α անկյան։

4) Եթե տվյալ α անկյունը կառուցենք AB հատվածի ծայրում նրա մյուս կողմից, ապա կառուցումը կտա այնպիսի բացատ, որը համաչափ է դասավորված արդեն կառուցած բացատի հետ AB հատվածի նկատմամբ։

5) Խնդրի լուծումից հետևյալ եզրակացությանն ենք հանգում.

Այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնցից տվյալ AB հատվածը երևում է տվյալ α անկյունով, երկու համաչափ բացատների աղեղներն են. այդ բացատները կառուցված են AB հատվածի վրա, իբրև լարի վրա, և բովանդակում են տվյալ անկյունը։

6) Այն բացատը, որը բովանդակում է տվյալ սուր անկյունը, մեծն է շրջանի այն երկու բացատներից, որոնք ստացվում են տվյալ AB լարով։



Նկ. 194

Եթե տվյալ անկյունը բութ է, ապա որոնելի բացատը, որը բովանդակում է այդ բութ անկյունը, կլինի փոքրըն այն երկու բացատներից, որոնք ստացվում են տվյալ AB լարով։

Ուղիղ անկյան դեպքում տվյալ AB հատվածը տրամագիծ կլինի, և երկու բացատները հավասար կլինեն, այսինքն երկրաչափական տեղը կլինի AB տրամագիծն ունեցող շրջանագիծը։

§ 2. ԱՅՆ ԱՆԿՅԱՆ ՉԱՓՈՒՄԸ, ՈՐԻ ԳԱԳԱԹԸ ԳՏՆՎՈՒՄ Է ՇՐՋԱՆԻ ՆԵՐՍԸ

1. **Թեորեմ։** Այն անկյունը, որի գագաթը շրջանագծի ներսն է, չափվում է իր կողմերի ու նրանց շարունակությունների միջև ընկած աղեղների կիսագումարով։

Տված է՝ $\angle AMC$, որի գագաթը շրջանի ներսն է (նկ. 195)

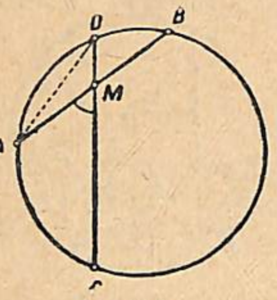
Ապացուցել, որ $\angle AMC$-ն չափվում է $\frac{\smile AC+\smile BD}{2}$-ով

Ապացուցում։ AMC անկյան կողմերը շարունակենք, մինչև որ նրանք հատվեն շրջանագծի հետ B ու D կետերում, և տանենք AD

լարը. կստանանք ADM յեռանկյունը, վորի համար $\angle AMC$-ն արտաքին անկյուն է։ Բայց $\angle AMC=\angle A+\angle D$, և վորովհետև $\angle A$-ն չափվում է $\frac{\smile BD}{2}$-ով, $\angle D$-ն էլ $\frac{\smile AC}{2}$-ով, ապա $\angle AMC$-ն չափվում է

$$\frac{\smile AC}{2}+\frac{\smile BD}{2}=\frac{\smile AC+\smile BD}{2}\text{-ով։}$$

2. Ամեն մի անկյուն, վորի գագաթը գտնվում է շրջանի ներսը, կարելի յե դիտել վորպես այն անկյուններից մեկը, վորոնք կազմված են յերկու լարերի փոխհատումից։



Նկ. 195

Այն դեպքում, յերբ լարերի փոխհատման կետը համընկնում է կենտրոնի հետ, անկյունը միաժամանակ նաև կենտրոնական է լինում, հետևաբար, կարելի յե ասել, վոր կենտրոնական անկյունն էլ է չափվում իր կողմերի ու նրանց շարունակությունների միջև ընկած աղեղների կիսագումարով,

Յեթե լարերի փոխհատման կետը տեղափոխվելով մոտենում է շրջանագծին, ապա լարերի միջև գտնվող աղեղներից մեկը փոքրանում է և այն ժամանակ, յերբ լարերի հատման կետը շրջանագծի վրա յե լինում, ապա այդ աղեղը զերո յե դառնում. այս պատճառով այն թեորեմը, վորը վերաբերում է լարերով կազմված անկյուններին, իրավացի յե մնում նաև այս դեպքում։

§ 3. ԱՅՆ ԱՆԿՅԱՆ ՉԱՓՈՒՄԸ, ՎՈՐԻ ԳԱԳԱԹԸ ԳՏՆՎՈՒՄ Է ՇՐՋԱՆԻՑ ԴՈՒՐՍ

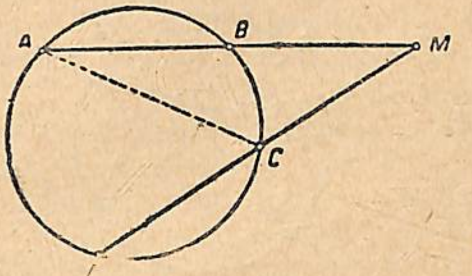
1. **Թեորեմ:** Այն անկյունը, վորի գագաթը գտնվում է շրջանից դուրս և վորի կողմերը հատողներ են կամ շոշափողներ, չափվում է կողմերի միջև ընկած աղեղների կիսատարբերությամբ։

Ապացուցում: *Քննության առնենք հնարավոր յերեք դեպքերը։*

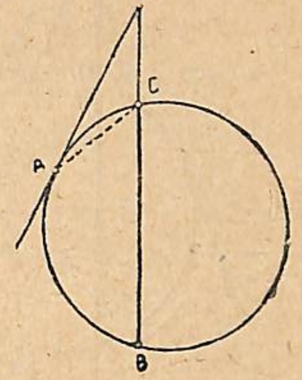
1-ին դեպք. *(Նկ. 196). M անկյունը կազմված է MA և MD հատողներով, ապացուցել, վոր նա չափվում է AD և BC աղեղների կիսատարբերությամբ։ Կտանենք AC օժանդակ լարը. կստանանք AMC յեռանկյունը, վորի համար $\angle ACD$-ն արտաքին է. այստեղից հետևում է, վոր $\angle M=\angle ACD-\angle A$. բայց ACD անկյունը չափվում է $\frac{\smile AD}{2}$-ով և $\angle A$-ն $\frac{\smile BC}{2}$ հետևաբար $\angle M$-ը չափվում է $\frac{\smile AD-\smile BC}{2}$-ով։*

2-րդ դեպք *(Նկ. 197)։ M անկյունը կազմված է MA շոշափողով և MB հատողով, ապացուցել, վոր նա չափվում է AB և AC*

աղեղների կիսատարբերությամբ։ Կտանենք AC լարը և M անկյունը կնկատենք վորպես ACB և CAM անկյունների տարբերություն, այսինքն $\angle M=\angle ACB-\angle CAM$։ Բայց $\angle ACB$-ն չափվում է $\frac{\smile AB}{2}$-ով, իսկ $\angle CAM$-ը $\frac{\smile AC}{2}$-ով, հետևաբար $\angle M$-ը չափվում է $\frac{\smile AB-\smile AC}{2}$-ով։



Նկ. 196



Նկ. 197

Այս դեպքը կարելի յե նկատել վորպես նախորդ դեպքի մի մասնավորությունը. յեթե MA շոշափողը դիտենք վորպես մի հատող, վորի և շրջանագծի փոխհատման յերկու կետերը միաձուլվել են մի A կետում։

3-րդ դեպք *(Նկ. 198)։ Դիցուք ME և MF հատողները պտտվելով M կետի շուրջը, գրավում են MA և MB շոշափողների դիրքը. այս դեպքում EF աղեղը աճելով դառնում է ACB աղեղի չափ, իսկ E_1F, աղեղը ADB աղեղի չափ, և այն ժամանակ $\angle M$-ը, վոր կազմված է շոշափողներով, կչափվի $\frac{\smile ACB-\smile ADB}{2}$-ով։*

Յերկու շոշափողներով կազմված անկյունը կոչվում է արտագծյալ (արտագծած) անկյուն։

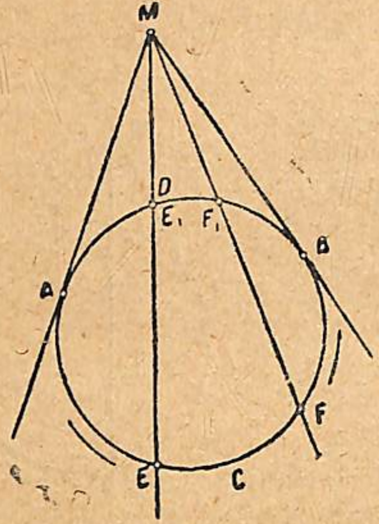
2. (Նկ. 199). Յեթե ունենք յերեք անկյուններ, վորոնց կողմերի միջև ընդհանուր AC աղեղն է գտնվում, և վորոնցից մեկի M գագաթը շրջանից դուրս է գտնվում, մյուսի B գագաթը շրջանագծի վրա և յերրորդի N գագաթը շրջանի ներսը, ապա առաջին անկյունը փոքր է յերկրորդից և սա յել փոքր է յերրորդից։ Իրոք,

1) $\angle M$-ը չափվում է $\frac{\smile AC-KL}{2}$-ով։

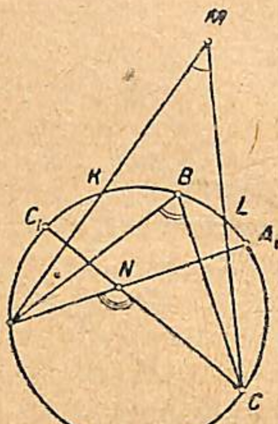
2) $\angle B$-ն չափվում է $\frac{\smile AC}{2}$-ով։

3) $\angle N$-ը չափվում է $\frac{\smile AC + \smile A_1C_1}{2}$-ով։

4) $\frac{\smile AC - \smile KL}{2} < \frac{\smile AC}{2}$; $\frac{\smile AC}{2} < \frac{\smile AC + \smile A_1C_1}{2}$.



Նկ. 198

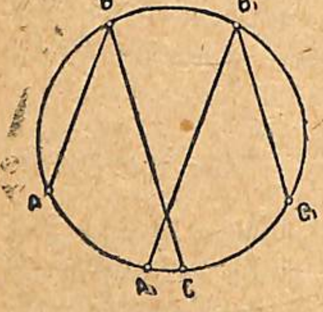


Նկ. 199

այստեղից հետևում է, որ $\angle M < B < \angle N$։

ՀԱՐՑԵՐ ԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. ABC եռանկյան գագաթները գտնվում են շրջանագծի վրա։ Որոշել նրա անկյունները, եթե հայտնի է, որ $\smile AB = 70°$ և $\smile BC = 60°$



Նկ. 200

2. Շրջանագիծը բաժանված է 5 : 8 : 11 հարաբերություններով։ Որոշել այն եռանկյան անկյունները, որի համար իբրև գագաթներ ծառայում են բաժանման կետերը։

3. Տված է $\angle ABC = a$։ Շրջանագծի օգնությամբ կառուցել այնպիսի անկյուն, որը հավասար լինի 1) տվյալ անկյան կեսին, 2) տվյալ անկյան կրկնապատկին։

4. B և B_1 երկու ներգծյալ անկյունների կողմերը համապատասխանաբար զուգահեռ են (Նկ. 200)։ Ապացուցել, որ $\smile AC = A_1C_1$։

5. Հաշվել, թե ինչ սուր անկյուններով են փոխհատվում շրջանի մեջ AB և CD լարերը, եթե A, B C և D կետերը շրջանագիծը բաժանում են 2:3:6:7 հարաբերություններով։

6. Երկու շառավիղների կազմած անկյունը 110°-ի է։ Որոշել այդ շառավիղների ծայրերից տարած շոշափողներով կազմված անկյունը։

XIII. ԵՐԿՈՒ ՇՐՋԱՆԱԳԾԵՐԻ ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԴԻՐՔԸ

§ 1. ՀԱՄԱԿԵՆՏՐՈՆ ԵՎ ՏԱՐԱԿԵՆՏՐՈՆ ՇՐՋԱՆԱԳԾԵՐ

1. Երկու շրջանագծեր կարող են կամ միևնույն ընդհանուր կենտրոնն ունենալ և կամ տարբեր կենտրոններ։

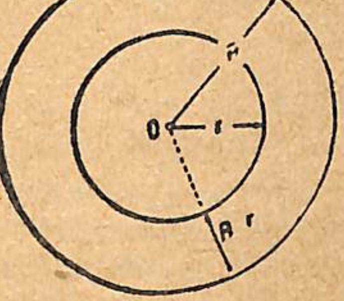
Մի ընդհանուր կենտրոն ունեցող շրջանագծերը կոչվում են համակենտրոն շրջանագծեր և իրարից տարբերվում են իրենց R և r շառավիղների յերկարությամբ (Նկ. 201)։

Երկու համակենտրոն շրջանագծերի միջև պարփակված հարթամասը կոչվում է շրջանային օղ. Նրանց շառավիղների R և r տարբերությունը որոշում է շրջանային օղի լայնությունը։

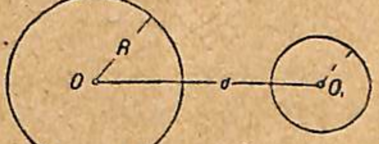
Տարբեր կենտրոններ ունեցող շրջանագծերը կոչվում են տարակենտրոն շրջանագծեր։

2. OO_1 ուղիղը (Նկ. 202), որն անցնում է յերկու շրջանագծերի կենտրոններով, կոչվում է կենտրոնների գիծ կամ կենտրոնագիծ.

Երկու շրջանագծերի կենտրոնագիծը նրանց համաչափության առանցքն է։



Նկ. 201



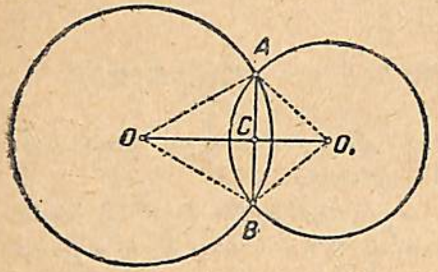
Նկ. 202

$OO_1 = d$ հատվածը, այսինքն O և O_1 կենտրոնների հեռավորությունը, նույնպես սովորաբար կենտրոնների գիծ (կենտրոնագիծ) է կոչվում։ Համակենտրոն շրջանագծերի կենտրոնագիծը կետ է, և նրա յերկարությունը հավասար է զերոյի։

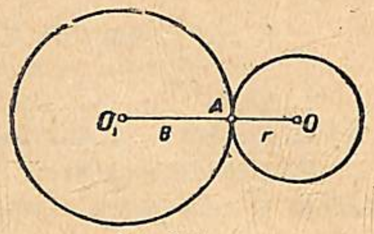
3. Այն շրջանագծերը, որոնք միայն մի ընդհանուր կետ ունեն, կոչվում են շոշափող շրջանագծեր, նրանց ընդհանուր կետը կոչվում է

շոշափման կետ: Եթե երկու շրջանագծեր իրար շոշափում են և նրանցից մեկը մյուսից դուրս է գտնվում, ապա տեղի ունի արտաքին շոշափում (Նկ. 203). իսկ եթե մի շրջանագիծը շոշափող է մյուսին և գտնվում է նրա ներսը, ապա տեղի ունի ներքին շոշափում (Նկ. 205):

Այն շրջանագծերը, որոնք երկու ընդհանուր կետ ունեն, փոխհատվում են (Նկ. 203). հատման կետերը միացնող ուղիղը նրանց ընդհանուր լարն է:



Նկ. 203



Նկ. 204

Երկու տարբեր շրջանագծեր երկուսից ավելի ընդհանուր կետեր ունենալ չեն կարող, ուրիշ խոսքով, այն շրջանագծերը, որոնք երկուսից ավելի ընդհանուր կետեր ունեն, համընկնում են, այսինքն միևնույն շրջանագիծն են ներկայացնում և ոչ թե տարբեր շրջանագծեր:

Տեխնիկայում շոշափող շրջաններն օգտագործում են շարժումը ֆրիկցիոն անիվների և ատամնանիվների միջոցով փոխանցելու համար: Արտաքին շոշափման դեպքում այդպիսի անիվները պտտվում են հակադիր ուղղություններով, իսկ ներքին շոշափման դեպքում՝ միևնույն ուղղությամբ:

§ 2. ԵՐԿՈՒ ՇՐՋԱՆԱԳԾԵՐԻ ՓՈԽԱԴԱՐՁ ԴԻՐՔԸ

1. Թեորեմ: *Եթե երկու տարբեր շրջանագծեր ընդհանուր կետ ունեն իրենց կենտրոնագծի մի կողմում, ապա նրանք մի ուրիշ ընդհանուր կետ էլ ունեն կենտրոնագծի մյուս կողմում, այսինքն այդ շրջանագծերը հատվում են (Նկ. 203):*

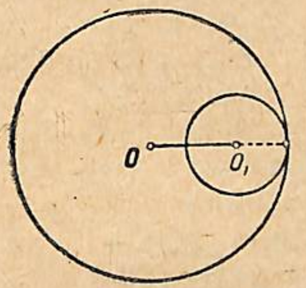
Իրոք, կենտրոնագիծը ներկայացնում է երկու շրջանագծերի համաչափության առանցքը: Կառուցենք A կետին համաչափ B կետը և այն միացնենք շրջանագծերի O և O_1 կենտրոնների հետ, այն ժամանակ $OA=OB$ և $O_1A=O_1B$ համաչափության հետևանքով, ուստի B-ն պատկանում է թե՛ մեկ և թե՛ մյուս շրջանագծին, շրջանագծերը հատվում են, և AB-ն նրանց ընդհանուր լարն է:

Հետևանք: Եթե երկու տարբեր շրջանագծեր ընդհանուր կետ ունեն կենտրոնագծի վրա, ապա նրանք իրար շոշափում են, այսինքն նրանց համար ընդհանուր է միայն այն կետը, որը գտնվում է կենտրոնագծի վրա:

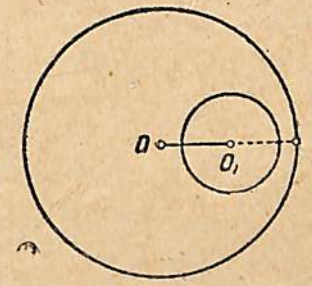
Իրոք, եթե ընդունենք սրան հակառակը, այսինքն ընդունենք, որ այդ երկու շրջանագծերը մի ուրիշ ընդհանուր կետ էլ ունեն, որը չի գտնվում կենտրոնագծի վրա, ապա, ապացուցած թեորեմի հիման վրա, նրանք պետք է մի երրորդ ընդհանուր կետ էլ ունենան, որը երկրորդին համաչափ լինի կենտրոնագծի նկատմամբ, այս դեպքում այդ շրջանագծերը երեք ընդհանուր կետեր կունենան, բայց այդ անհնարին է, որովհետև երեք ընդհանուր կետեր ունեցող շրջանագծերը համընկնում են, իսկ այդ հակասում է պայմանին: Այսպես ուրեմն՝

Երկու շրջանագծեր, որոնք ընդհանուր կետ ունեն կենտրոնագծի վրա, իրար շոշափում են *(Նկ. 204. և 205):*

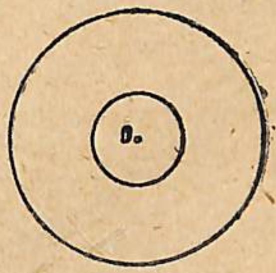
2. *Տված են R և r տարբեր շառավիղներն ունեցող երկու շրջանագծեր, որոնք իրար չեն շոշափում և որոնցից մեկը մյուսից դուրս է գտնվում: Եթե R շառավիղն ունեցող շրջանագիծն անշարժ ենք թողնում և r շառավիղն ունեցող շրջանագծի կենտրոնը տեղափոխում կենտրոնագծի վրա, ապա շրջանագծերն իրար նկատմամբ զանազան դիրքեր են գրավում:*



Նկ. 105



Նկ. 106



Նկ. 107

1) Շրջանագծերը չեն փոխհատվում, իրար չեն շոշափում և մեկը գտնվում է մյուսից դուրս (Նկ. 202): Նրանց կենտրոնների հեռավորությունը՝ $OO_1=d$, մեծ է նրանց շառավիղների գումարից, այսինքն $d>R+r$:

2) Շրջանագծերն արտաքին շոշափում *ունեն A կետում (Նկ. 203). այս դեպքում $d=R+r$:*

3) շրջանագծերը փոխհատվում են *և, հետևաբար, ունեն երկու ընդհանուր կետեր A և B (Նկ. 204): Որպեսզի գտնենք $OO_1=d$ կենտրոնագծի և R ու r շառավիղների կախումը, դիտենք AOO_1 եռանկյունը, որի մեջ $OO_1=d$, $AO=R$ և $AO_1=r$: Եռանկյան մեջ յուրաքանչյուր կողմը փոքր է մյուս երկու կողմերի գումարից, բայց մեծ է*

նրանց տարբերությունից, ուստի կարող ենք գրել՝ $d<R+r$ և $d>R-r$

4) Շրջանագծերը ներքին շոշափում ունեն (նկ. 205)։ Այս դեպքում $d=R-r$։

5) Մի շրջանագիծը գտնվում է մյուսի մեջ և նրանց կենտրոնները են համընկնում (նկ. 206)։ Այս դեպքում $d<R-r$։

6) Մի շրջանագիծը գտնվում է մյուսի մեջ, և նրանց կենտրոնները չեն համընկնում (նկ. 207)։ Կենտրոնների հեռավորությունը հավասար է զերոյի՝ $d=0$։

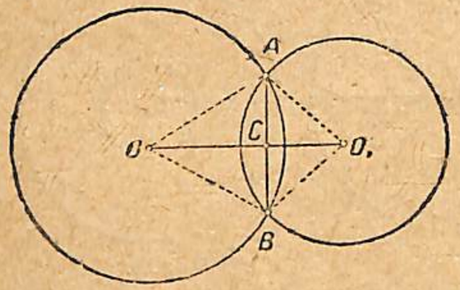
§ 3. ԵՐԿՈՒ ՓՈԽՀԱՏՎՈՂ ՇՐՋԱՆԱԳԾԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԼԱՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Թեորեմ։ Երկու փոխհատվող շրջանագծերի ընդհանուր լարն ուղղահայաց է նրանց կենտրոնագծին և նրանով կիսվում է։

Տված են՝ O և O_1 շրջանագծերը (նկ. 203 կամ 208) AB-ն ընդհանուր լար է, OO_1-ը կենտրոնագիծ

Պետք է ապացուցել՝ 1) $AB \perp OO_1$ և 2) $AC=CB$։

Ապացուցում։ Շրջանագծերի փոխհատման A և B կետերը միացնենք O և O_1 կենտրոնների հետ. կստանանք AOB և AO_1B հավասարասրուն եռանկյունները և բացի դրանից, երկու եռանկյուններ՝ AOO_1 և BOO_1, որոնք հավասար են, որովհետև նրանց մեջ OO_1-ն ընդհանուր կողմ է, $OA=OB=R$ և $O_1A=O_1B=r$։



Նկ. 208

Եռանկյունների հավասարությունից հետևում է անկյունների հավասարությունը՝

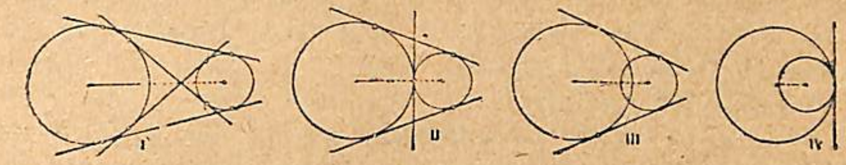
$\angle AOO_1=\angle BOO_1$ և

2) $\angle AO_1O=\angle BO_1O$

հետևաբար OO-ն O և O_1 անկյունների կիսորդն է։ AOB և AO_1B հավասարասրուն եռանկյունների մեջ OO_1 կենտրոնագիծը նրանց կիսորդն է, ուստի 1) $AB \perp OO_1$ և 2) $AC=CB$։

§ 4. ԵՐԿՈՒ ՇՐՋԱՆԱԳԾԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՇՈՇԱՓՈՂՆԵՐԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ

1. Ընդհանուր շոշափողների թիվը, որ կարելի է տանել երկու շրջանագծերի, կախված է շրջանագծերի փոխադարձ դիրքից 209-րդ նկարի I–IV գծագրերում բերված են երկու շրջանագծերի ընդհանուր շոշափողների դիրքի հնարավոր բոլոր դեպքերը։



Նկ. 209

Ստորև բերված աղյուսակում տրված է երկու շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորության և նրանց ընդհանուր շոշափողների թվի կախումը այդ երկու շրջանագծերի փոխադարձ դիրքից։

№ ըստ կարգի	d—երկու շրջանագծերի կենտրոնների հեռավորությունը	Երկու շրջանագծերի փոխադարձ դիրքը	Շոշափողների թիվը
1	$d>R+r$	Շրջանագծերը չեն փոխհատվում, իրար չեն շոշափում և մեկը գտնվում է մյուսից դուրս	4
2	$d=R+r$	Շրջանագծերն ունեն արտաքին շոշափում	3
3	$\begin{cases} d<R\mp r \\ d>R-r \end{cases}$	Շրջանագծերն փոխհատվում են	2
4	$d=R-r$	Շրջանագծերն ունեն ներքին շոշափում	1
5	$o<d<Rr$	Մի շրջանագիծն ընկնում է մյուսի ներսը. նրանց կենտրոնները չեն համընկնում	0
6	$d=o$	Շրջանագծերն համակենտրոն են	0

2. **Խնդիր։** Կառուցել R և r տարբեր շառավիղներ ունեցող երկու շրջանագծերի ընդհանուր շոշափողները, երբ $d>R+r$։

Դիտենք երկու հնարավոր դեպքեր։

1-ին դեպք *(նկ. 210։)*

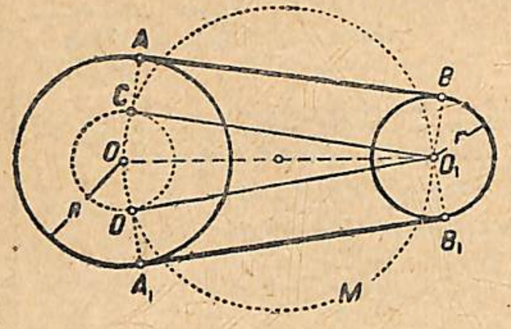
Կառուցում։ R-r շառավղով տանում ենք տվյալ շրջանագծերից մեծին համակենտրոն շրջանագիծ և սրան՝ O_1 կետից O_1C շոշափողը։ Շոշափման C կետով տանում ենք OC շառավիղը և շարունակում վերջինիս մինչև տվյալ շրջանագծի հետ D կետում հատվելը. O_1 կենտրոնից տանում ենք $O_1E \parallel OD$. ուղիղ գծով միացնելով D և E կետերը, ստանում ենք որոնած DE շոշափողը. Նույնպիսի կառուցումով ստանում ենք D_1E_1 շոշափողը։

Ապացուցում: Ըստ կառուցման $CD=O_1E$ և $CD \parallel O_1E$ բացի դրանից, $\angle C=d$, հետևաբար, DEO_1C քառանկյունը մի ուղղանկյուն է, ուստի և D ու E անկյուններն ուղիղ անկյուններ են. այսպես ուրեմն,

դեպի շոշափման կետերը տարած OD և O_1E շառավիղները DE ուղիղի հետ ուղիղ անկյուններ են կազմում, հետևաբար, DE-ն յերկու շրջանագծերի ընդհանուր շոշափողն է։

2-րդ դեպք *(նկ. 211)*

Կառուցում։ R+r շառավղով տանում ենք օժանդակ շրջանագիծ, կենտրոն ընդունելով տվյալ շրջանագծերից մեծի կենտրոնը. այդ օժանդակ շրջանագծին տանում ենք O_1C շոշափողը. C շոշափման կետով տանում ենք OC շառավիղը, վորով տվյալ շրջանագիծը հատվում է D կետում. այնուհետև O_1 կենտրոնից տանում ենք O_1E շառավիղը՝ զուգահեռ OC-ին, միացնելով D և E կետերը, ստանում ենք վորոնած DE շոշափողը։

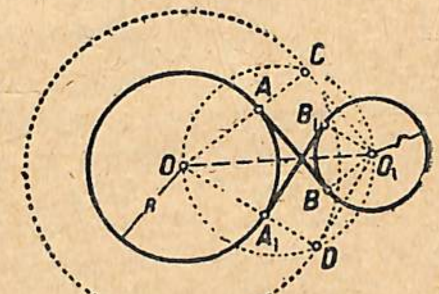


Նկ. 210

Նույնպիսի կառուցումով գտնում ենք յերկրորդ ընդհանուր շոշափողը՝ D_1E_1։

Ապացուցում։ Ըստ կառուցման CD=OE և CD ∥ O_1E, բացի դրանից, ∠C=d. հետևաբար, $CDEO_1$ քառանկյունը մի ուղղանկյուն է, ∠D և ∠E ուղիղ անկյուններ են. իսկ այս նշանակում է, վոր OE ու OD շառավիղները, վորոնք տարածված են դեպի E ու D կետերը, ուղղահայաց են DE ուղիղին. այստեղից հետևում է, վոր DE-ն յերկու շրջանագծերի համար ընդհանուր շոշափող է։

Առաջին դեպքում շոշափողները կոչվում են արտաքին, յերկրորդ դեպքում՝ ներքին։

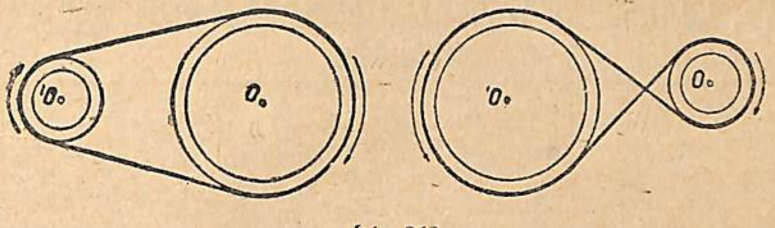


Նկ. 211

3. Ներքին և արտաքին շոշափողները հանդիպում են փոկանիվների փոկային փոխանցման մեջ (նկ. 212)։ Յեթե անծայր փոկն ըստ արտաքին շոշափողների յե գնում, ապա փոկանիվները միևնույն ուղղությամբ են պտտվում, իսկ յեթե փոկն ըստ ներքին շոշափողների յե ընթանում, ապա փոկանիվները հակադիր ուղղություններով են պտտվում։

Հարցեր յեվ վարժություններ

1. Ի՞նչպես կարելի յե կառուցել հավասար շառավիղներ ունեցող յերկու շրջանագծերի ընդհանուր շոշափողները։



Նկ. 212

2. Տված է մի շրջանագիծ, վորի շառավիղն է R=6 սմ։ Վո՞րն է այն շրջանագծերի կենտրոնների յերկրաչափական տեղը, վորոնց շառավիղներն են r=2 սմ, և վորոնք շոշափում են տվյալ շրջանագիծը։ Ի՞նչ դեպքեր են հնարավոր։

3. Գծել յերկու համակենտրոն շրջանագծեր, վորոնց շառավիղներն են՝ 8 սմ և 5 սմ. այնուհետև կառուցել մի քանի շրջանագծեր, վորոնք շոշափեն այդ շրջանագծերը։ Ինչ մեծություն ունեն նոր կառուցված շրջանագծերի շառավիղները Ինչի՞ յե հավասար շրջանային օղի լայնությունը։

4. Ապացուցել, վոր ներքին կամ արտաքին ընդհանուր շոշափողները, վորոնք տարված են յերկու շրջանագծերի, միահավասար են յեվ փոխհատվում են կենտրոնագծի վրա։

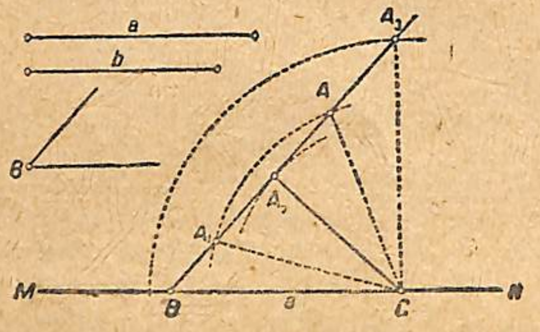
5. Ապացուցել, վոր յերկու շրջանագծերի արտաքին շոշափման դեպքում ընդհանուր արտաքին շոշափողները յեվ ներքին շոշափողի այն հատվածը, վորն ընկած է արտաքին շոշափողների միջեվ, միահավասար են։

XIV. ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՅԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՏԵՂԵՐԻ ՄԵԹՈԴՈՎ

§ 1. ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

1. Կառուցման խնդիրը լուծել նշանակում է կարկինի և քանոնի միջոցով այնպիսի յերկրաչափական պատկեր կառուցել, վորն ունի խնդրի մեջ նշված վորոշակի հատկությունները։

Կառուցման խնդրի լրիվ լուծումը բաղկացած է հետևյալ չորս մասերից. 1) խնդրի վերլուծումը (անալիզը). *2)* կառուցման *կատարումը. 3)* ապացուցումը, *վոր կառուցած պատկերը բավարարում է խնդրի բոլոր պայմաններին. 4) այն պայմանների* հետազոտումը, *վորոնց դեպքում խնդրի լուծումը հնարավոր է, այլ և խնդրի հնարավոր լուծումների թվի վորոշումը։*



Նկ. 213

2. Խնդիր 1. Կառուցել յեռանկյուն, յերբ տված են նրա a կողմը, նրան առընթեր B անկյունը և այդ անկյան *դիմացի* b կողմը *(Նկ. 213)։*

Լուծում. *1)* Խնդրի վերլուծումը։ *Մենք գիտենք, թե ինչպես պետք է կառուցել B անկյունը յեռանկյան a=BC կողմի B ծայրում. կնշանակի, մեզ հայտնի յեն յեռանկյան յերկու գագաթները՝ B ու C, և ∠B-ն։ Յերրորդ գագաթը՝ A, պետք է գտնվի A անկյան BA կողմի վրա այն շրջանագծի վրա, վորի կենտրոնն է C կետը և վորի շառավիղը հավասար է յեռանկյան մյուս տված կողմին, այսինքն b-ին։*

2) Կառուցում։ Կամայապես վերցրած MN ուղիղի վրա կըտրենք a-ին հավասար BC հատվածը և նրա B ծայրում կկառուցենք B անկյունը։ Այնուհետև C ընդունելով իբրև կենտրոն, b-ին հավասար շառավղով կտանենք շրջանագիծ։ Այս շրջանագիծը B անկյան AB կողմը կհատի A և A_1 կետերում։ Այսպիսով մենք ունենում ենք A գագաթի համար յերկու դիրք A և A_1, և, հետևաբար, յերկու յեռանկյուններ՝ ABC ու A_1BC։

3) Ապացուցում։ *Յերկու յեռանկյուններն էլ բավարարում են խնդրում տված պայմաններին։*

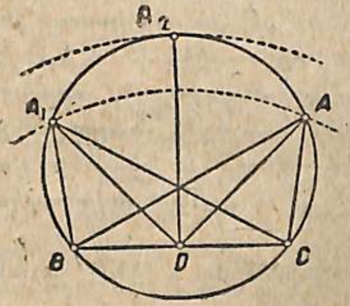
4. Հետազոտում։ *C կետից տանենք B անկյան BA կողմին CA_2 ուղղահայացը։ C կենտրոնով շրջանագիծը կշոշափի BA կողմը, յեթե նրա շառավիղը հավասար լինի BA_2-ի. յեթե յեռանկյան b կողմը հավասար լինի CA_2-ին, ապա միայն մի լուծում կունենանք, այս դեպքում b<a։ Յեթե b մեծ լինի CA_2-ից, բայց փոքր a-ից, ապա շրջանագիծը BA կողմը կհատի A և A_1 յերկու կետերում, և մենք կունենանք յերկու լուծում։*

1) △ABC, *վորի կողմերն են՝* a, b=CA *և* AB=c, *իսկ անկյուններն՝* B, BAC *և* ACB.

2) △A_1BC, *վորի կողմերն են՝* a, b=CA_1 *և* A_1B=c. *իսկ անկյուններն են՝* B, $BA_1C=180°-A$ *(վորովհետև* $\angle A=\angle AA_1C$, *իբրև* A_1CA *հավասարասրուն յեռանկյան հիմքին առընթեր անկյուններ), և* $\angle A_1CB=\angle A-\angle B$։ *Յեթե* b=a, *ապա միայն մեկ լուծում ենք ունենում, և վորոնելի յեռանկյունը հավասարասրուն է լինում. յեթե* b>a, *ապա շրջանագիծը BA կողմը կհատի միայն մի կետում՝* A_3 *և վորոնելի յեռանկյունը լինում է* A_3BC*-ն։*

Յեթե վերջապես, $b<CA_2$, *այսինքն յեթե b կողմը փոքր է, քան C կետի հեռավորությունը BA կողմից, ապա շրջանագիծը չի շոշափի BA կողմը, վոչ էլ կհատվի նրա հետ, ուստի այս դեպքում վոչ մի լուծում չի լինի։*

Խնդիր 2. Կառուցել յեռանկյունը, յերբ տված են նրա a հիմքը, նրան հանդիպակաց A=a անկյունը և m_a միջնագիծը *(Նկ. 214).*



Նկ. 214

Լուծում. Խնդրի վերլուծումը. *Դիցուք խնդիրը լուծված է և վորոնելի ABC յեռանկյունը կառուցված է։ BC նրա հիմքն է, AD-ն միջնագիծը։ Տվյալ հիմքը BC=a վորոշում է ABC յեռանկյան B և C գագաթները։ Յերրորդ A գագաթից տվյալ BC=a հիմքը յերևում է տվյալ a անկյունով։ Այն կետերի յերկրաչափական տեղը, վորոնցից տվյալ BC հատվածը յերևում է տվյալ a անկյունով, ներկայացնում է BAC բացատի աղեղը, վորը կառուցված է BC=a տվյալ հատվածի վրա և բովանդակում է տվյալ a անկյունը։ Կնշանակի A կետը պետք է գտնվի BAC բացատի աղեղի վրա։ A գագաթը BC հիմքի D միջնակետից ունի* $AD=m_a$ *հեռավորությունը. D կետից հավասարահեռ կետերի յերկրաչափական տեղը այն շրջանագիծն է, վորը տարված է* $AD=m_a$ *շառավղով D կենտրոնի շուրջը։ Կնշանակի, A կետը պետք է*

այդ շրջանագծի վրա գտնվի։ Այսպես ուրեմն, A կետը՝ ABC յեռանկյան յերրորդ գագաթը, պետք է պատկանի՛ և՛ մեկ և՛ մյուս յերկրաչափական տեղին՝ BAC բացատի աղեղին և D կենտրոնն ունեցող շրջանագծին. A գագաթն այդ յերկրաչափական տեղերի հատման կետն է։

Կառուցում։ BC=a տվյալ հատվածի վրա, իբրև լարի վրա, կառուցում ենք BAC բացատը, վորը բովանդակում է տվյալ A=α անկյունը։ Այնուհետև տանում ենք շրջանագիծ, վորի կենտրոնը գտնվում է BC հատվածի D միջնակետում և վորի շառավիղը հավասար է տվյալ m_a միջնագծին։ BAC բացատի աղեղի և m_a շառավղով շրջանագծի հատման կետը յեռանկյան յերրորդ (A) գագաթն է։ A կետը միացնելով B-ի ու C-ի հետ, ստանում ենք վորոնելի ABC յեռանկյունը։

Ապացուցում։ Կառուցած ABC յեռանկյունը բավարարում է խնդրի պայմաններին BC=a նրա հիմքն է, ∠BAC=α և ∠AD=m_a։

Հետազոտում։ A կետը մի շրջանագծի և մի բացատի աղեղի փոխհատման կետ է, ուստի անհրաժեշտ է հետազոտել՝ արդյոք տվյալ պայմաններում միշտ կփոխհատվեն այդ գծերը։

BAC բացատի աղեղը կառուցելուց հետո մենք տանում ենք DA=m_a շառավղով շրջանագիծ, D-ն ընդունելով կենտրոն (նկ. 214). այդ ժամանակ հնարավոր են հետևյալ յերեք դեպքերը. 1) շրջանագիծը և բացատի աղեղը շոշափում են իրար A_2 կետում, այսինքն միայն մի ընդհանուր կետ ունեն. հետևաբար, կարելի յե միայն մի A_2BC յեռանկյուն կառուցել. այս յեռանկյունը հավասարասրուն է, և A_2D միջնագիծը նրա համար նաև բարձրություն է։

2) Յեթե տվյալ m_a միջնագիծը փոքր է A_2D-ից, ապա շրջանագիծը և բացատի աղեղը հատվում են A և A_1 յերկու կետերում և խնդիրը յերկու լուծում է ունենում, ստանում ենք յերկու հավասար յեռանկյուններ՝ ABC և A_1BC. 3) յեթե տվյալ m_a միջնագիծը մեծ է A_2D-ից և կամ փոքր է կամ հավասար BD-ին, ապա շրջանագիծը և բացատի աղեղը չեն հատվի իրար հետ. յեռանկյուն կառուցել հնարավոր չի լինի, ուստի և խնդրի լուծումն անհնարին է։ Պետք է նկատել, վոր BC-ի մյուս կողմում ևս կարելի յե կառուցել α անկյունը բովանդակող բացատ և տված են համաչափ յեռանկյուն։

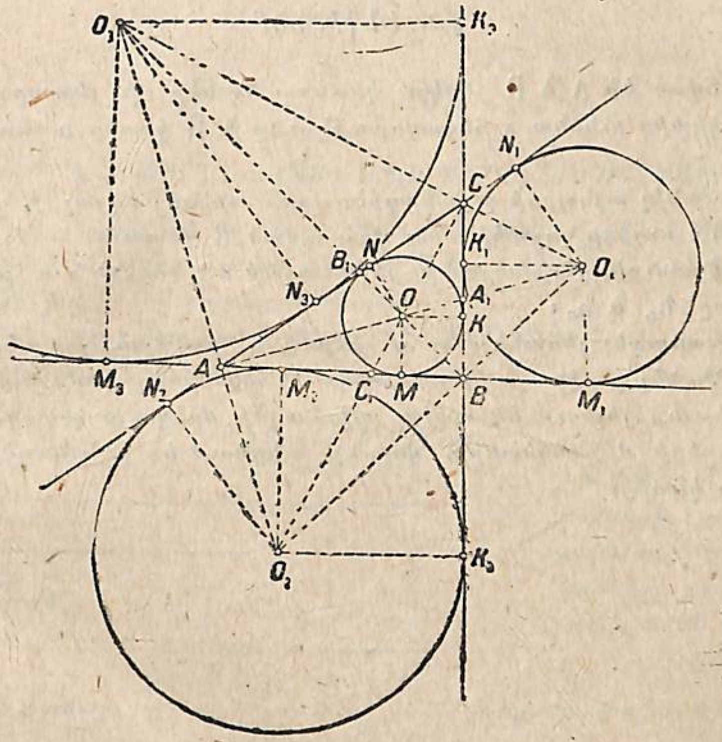
Խնդիր 3. Գտնել այն կետը, վորը հավասարահեռ է ABC յեռանկյան AB, AC և CB կողմերից (նկ. 215)։

Լուծում. AB և AC ուղիղները A կետի մոտ կազմում են յերկու զույգ հակադիր անկյուններ։ Յեռանկյան կողմերից հավասարահեռ կետը գտնվում է կամ անկյուններից մի զույգի ընդհանուր կիսորդի կամ մյուս զույգի կիսորդի վրա։ Նախ կանգ առնենք տվյալ յեռանկյան A ներքին անկյան կիսորդի վրա։

Տանում ենք AA_1 կիսորդը, վորի վրա պետք է գտնվի վորոնելի կետը. այնուհետև տանում ենք B անկյան BB_1 կիսորդը, վորի վրա ևս

պետք է գտնվի վորոնելի կետը, քանի վոր նա հավասարահեռ է BA և BC կողմերից։ Վորոնելի կետը, գտնվելով յերկու կիսորդների վրա, համընկնում է նրանց փոխհատման O կետին։

Կիսորդի հատկության համաձայն OM=ON և OM=OK, վորտեղից հետևում է, վոր ON=OK.



Նկ. 215

Յեռանկյան կողմերից հավասարահեռ կետը գտնվում է նրա ներսը և համընկնում է յուրաքանչյուր յերկու կիսորդների հատման կետի հետ։

C կետը միացնելով O կետի հետ, տեսնում ենք, վոր CON և COK յեռանկյունները հավասար են, վորովհետև նրանք ունեն OC ընդհանուր ներքնաձիգը և ըստ ապացուցածի ON=OK. յեռանկյունների հավասարությունից բխում է, վոր ∠OCN=∠OCK. իսկ այս նշանակում է, վոր <C-ն CO ուղիղով կիսվում է. այսինքն վոր CO-ն կիսորդ է։ Այսպես ուրեմն, յերրորդ կիսորդ CO-ն էլ է անցնում O կետով։

Յեռանկյան կիսորդները փոխհատվում են մի կետում։ Բացի O կետից, վոր հավասարահեռ է ABC յեռանկյան կողմերից, ելի յերեք կետեր կան, վորոնք նույն հատկությունն ունեն։

Իրոք, յեթե շարունակենք, օրինակ, B և C անկյունների կողմերը և տանենք ստացած յերկու զույգ արտաքին անկյունների կիսորդները,

ապա նրանց փոխհատման կետը՝ O_1 կետը, հավասարահեռ կլինի BC կողմից և AB ու AC կողմերի շարունակություններից։

Նման կառուցումով գտնում ենք, ինչպես երևում է 215-րդ նկարից, երկու կետեր ևս՝ O_2 և O_3։

§ 2. ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Տված են A և B երկու կետերը։ Գտնել մի երրորդ C կետ, որն A կետից ունենա a հեռավորությունը և B կետից b հեռավորությունը։

2. Տանել այնպիսի շրջանագիծ, որն անցնի տվյալ A կետով և տվյալ MN ուղիղը շոշափի նրա վրա տված B կետում։

3. Կառուցել եռանկյունը, եթե տված են կողմը՝ a և բարձրությունները՝ h_b և h_c։

4. Կառուցել եռանկյունը a հիմքով, h_a բարձրությամբ և $\angle A$-ով։

5. Գտնել երկրաչափական տեղը 1) այն բոլոր լարերի միջնակետերի, որոնք ելնում են տվյալ շրջանագծի միևնույն կետից. 2) այն բոլոր լարերի միջնակետերի, որոնք անցնում են շրջանագծի ներսի միևնույն կետից։

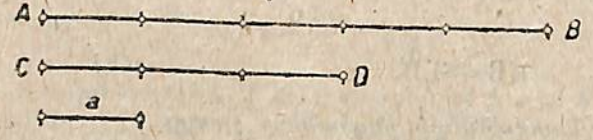
XV. ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐ

§ 1. ԵՐԿՈՒ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՉԱՓԸ

Տվյալ երկու հատվածների ընդհանուր չափը կոչվում է այնպիսի հատվածը, որն ամբողջ թիվ անգամ մտնում է տվյալ հատվածներից յուրաքանչյուրի մեջ առանց մնացորդի։

Տված են երկու հատվածներ՝ AB և CD (նկ. 216). a հատվածը AB հատվածի մեջ մտնում է 5 անգամ, իսկ CD հատվածի մեջ 3 անգամ՝

$$AB=5a \text{ և } CD=3a.$$



Նկ. 216

a-ն AB ու CD հատվածների ընդհանուր չափն է։ Երկու հատվածների ընդհանուր չափի ամեն մի մասը, օրինակի համար, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots \frac{1}{10}, \ldots$ մասը. նույնպես նրանց համար ընդհանուր չափ է, որովհետև նա հատվածներից յուրաքանչյուրի մեջ մտնում է ամբողջ թիվ անգամ առանց մնացորդի. այստեղից հետևվում է, որ եթե երկու հատվածներ մի ընդհանուր չափ ունեն, ապա նրանք ունեն անթիվ բազմությամբ ընդհանուր չափեր, որոնցից մեկը մեծագույնն է։

ԵՐԿՈՒ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐ, ՈՐՈՆՔ ՈՒՆԵՆ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՉԱՓ, ԿՈՉՎՈՒՄ ԵՆ ՀԱՄԱՉԱՓԵԼԻ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐ

Խնդիր. Գտնել երկու համաչափելի հատվածների ընդհանուր չափը։ Տված են երկու հատվածներ՝ AB և CD, ընդորում $AB>CD$ (նկ. 217)

Լուծում. Փոքր հատված CD-ն մի քանի անգամ դնում ենք AB մեծ հատվածի վրա։ Դիցուք մտավ երեք անգամ և մնաց KB հատվածը, որի մեջ CD-ն այլևս չի մտնում ամբողջ անգամ, այսինքն $KB<CD$։ Այսպիսով՝

$$AB=3CD+KB. \qquad (1)$$

Եթե CD հատվածը AB հատվածի մեջ ուղիղ յերեք անգամ մըտներ, ապա CD հատվածը յերկու հատվածների ընդհանուր չափը կլիներ և AB-ի մեջ կպարունակվեր յերեք անգամ, իսկ իր մեջ մեկ անգամ։

Նկ. 217

Դիցուք այնուհետև KB հատվածը, այսինքն առաջին մնացորդը CD հատվածի մեջ մտնում է չորս անգամ և, բացի դրանից, ստացվում է LD մնացորդը (վորը փոքր է KB-ից). այն ժամանակ

$$CD=4KB+LD. \qquad (2)$$

Այնուհետև LD հատվածը, յերկրորդ մնացորդը, դնում ենք KB հատվածի վրա. դիցուք LD-ն KB-ի մեջ մտավ ուղիղ յերեք անգամ, այն ժամանակ

$$KB=3LD, \qquad (3)$$

և LD-ն լինում է յերկու հատվածների ընդհանուր չափը։

KB-ի արժեքը (3) հավասարությունից. տեղադրելով (2) հավասարության մեջ և վերջինից ել CD-ի արժեքը տեղադրելով (1) հավասարության մեջ, ստանում ենք՝

$$CD=4 \cdot 3LD+LD=13LD$$
$$AB=3 \cdot 13LD+3LD=42LD$$

Այսպես ուրեմն, AB=42LD և CD=13LD. կնշանակի LD-ն AB և CD հատվածների ընդհանուր չափն է:

Եթե LD հատվածն ամբողջ անգամ չմտներ KB հատվածի մեջ, ապա ընդհանուր չափ գտնելու գործողությունը հարկ կլիներ շարունակելու, մինչև վոր ստացվող մնացորդներից վերջինը նախավերջինի մեջ մտներ ամբողջ թիվ անգամ. իսկ այս պետք է անպատճառ տեղի ունենա, վորովհետև, ըստ պայմանի, AB և CD հատվածները համաչափելի յեն։

Յերկու հատվածների ընդհանուր չափը գտնելիս մենք տեսնում ենք, վոր նրանց ընդհանուր չափն ամբողջ թիվ անգամ մտնում է նաև ստացվող յուրաքանչյուր մնացորդի մեջ, այնպես վոր ընդհանուր չափը չի կարող մեծ լինել այդ մնացորդներից և վոչ մեկից։

Կարող են, սակայն, յերկու այնպիսի հատվածներ լինել, վորոնք

ընդհանուր չափ չունեն. Այն հատվածները, վորոնք ընդհանուր չափ չունեն, կոչվում են անհամաչափելի հատվածներ։

Անհրաժեշտ է նկատել, վոր պատահաբար վերցրած յերկու հատվածներ սովորաբար անհամաչափելի յեն և միայն բացառիկ դեպքերում են համաչափելի։

Չափողական գործիքների և մեր աչքի անկատարությունը թույլ չեն տալիս նկատելու վորոշ չափից փոքր մնացորդները, վորոնք ստացվում են ընդհանուր չափը գտնելիս. այս պատճառով յերկու հատվածների ընդհանուր չափը գտնելը մեզ մատչելի ճշտությամբ գործնականապես միշտ ել հնարավոր է լինում. սակայն դատողությունների միջոցով կարելի յե ապացուցել անհամաչափելի հատվածների գոյությունը։

Օրինակ. Քառակուսու կողմը և անկյունագիծն անհամաչափելի են։

Տված է ABCD քառակուսին, վորն ունի a կողմը և d անկյունագիծը (Նկ. 218)։

ABC հավասարասրուն յեռանկյունից ունենք՝

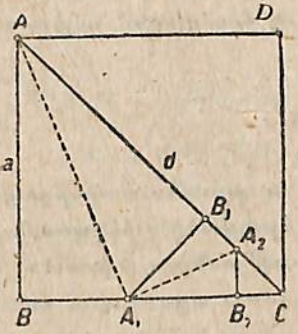
$$a<d<2a.$$

AB-ն (a-ն) պարունակվում է AC-ի (d-ի) մեջ մեկ անգամ, և ստացվում է մնացորդ $B_1C=a_1$. այսպիսով

$$d=a+a_1:$$

Տանելով $B_1A_1 \perp AC$ և միացնելով A և A_1 կետերը, կստանանք $A_1B_1=A_1B$, իբրև համապատասխան եզեր A_1B_1A և A_1BA հավասար ուղղանկյուն յեռանկյունների մեջ։ A_1B_1C յեռանկյունն ուղղանկյուն է և հավասարասրուն, վորովհետև $\angle A_1CB_1=45°$։ Հետևաբար, $B_1C=B_1A_1$, բայց վորովհետև $B_1A_1=BA_1$, ապա կունենանք՝

$$C=a=BA_1$$



Նկ. 218

$B_1C=a_1$ մնացորդը պարունակվում է $BC=a$ կողմի մեջ յերկու անգամ, քանի վոր $BA_1=a_1$ և $a_1<A_1C<2a_1$, և, բացի դրանից, ստացվում է $B_2C=a_2$ մնացորդը։ Ուրեմն $a=2a_1+a_2$.

A_2B_2C յեռանկյունը ևս ուղղանկյուն է և հավասարասրուն, ուստի նրա նկատմամբ կիրառելով նույն դատողությունները, կստանանք՝

$$a_1=2a_2+a_3 \text{ և այլն։}$$

Այսպիսով դուրս է գալիս, վոր հաջորդ մնացորդներից վոչ մեկը չի մտնում նախորդ մնացորդի մեջ ամբողջ թիվ անգամ, ուստի a և d հատվածներն անհամաչափելի յեն։

§2. ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

1. Հատվածը չափել նշանակում է, գտնել նրա հարաբերությունը մի ուրիշ հատվածի, վորն ընդունված է իբրև չափի միավոր. հատվածների չափման արդյունքը հանդիսանում է թիվը, վորը ցույց է տալիս, թե իբրև չափի միավոր ընդունված հատվածը քանի անգամ է մտնում չափելի հատվածի մեջ։

Այսպես, յեթե a հատվածն ընդունենք իբրև չափի միավոր (նկ. 216), ապա AB հատվածը չափող թիվը հավասար կլինի 5-ի, իսկ CD հատվածը չափող թիվը 3-ի. հասկանալի յե, վոր a հատվածը չափող թիվը կլինի 1-ը։

2. Յերկու հատվածներ, ինչպես և յերկու թվեր, կարելի յե բաղդատել յերկու յեղանակներով։ Կարելի յե իմանալ, թե մի հատվածը մյուսից 1) ինչքանո՞վ է մեծ կամ փոքր, 2) քանի՞ անգամ է մեծ կամ փոքր, ուրիշ խոսքով, քանի՞ անգամ է մի հատվածը պարունակվում մյուսի մեջ։

Հատվածները յերկրորդ յեղանակով բաղդատելիս մենք գտնում ենք յերկու հատվածների քանորդական հարաբերությունը կամ պարզապես, հարաբերությունը։

Մի հատվածի հարաբերությունը մյուսին կոչվում է՝ մի հատվածը որևէ միավորներով չափող թվի հարաբերությունը մյուս հատվածը նույն միավորներով չափող թվին։

3. Յերկու հատվածների հարաբերությունը գտնելիս յերկու դեպք է հնարավոր։

1. Հատվածները համաչափելի յեն, նրանց հարաբերությունը ռացիոնալ թիվ է՝ ամբողջ կամ կոտորակային։ Տված են յերկու հատվածներ AB=5a և CD=3a (նկ. 216)։ Նրանց ընդհանուր չափն է a։ Վորպեսզի գտնենք AB և CD հատվածների հարաբերությունը, AB հատվածն a հատվածով չափելուց ստացված թիվը բաժանում ենք CD հատվածը նույն a հատվածով չափելուց ստացված թվի վրա. ունենում ենք՝

$$\frac{AB}{CD}=\frac{5}{3}, \text{ կամ } AB:CD=5:3։$$

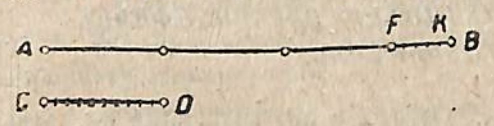
Յերկու հատվածների այս հարաբերությունն այսպես է կարդացվում. AB հատվածն այնպես է հարաբերում CD հատվածին, ինչպես 5-ը 3-ին կամ AB և CD հատվածների հարաբերությունը հավասար է $\frac{5}{3}$-ի։

II. Հատվածներն անհամաչափելի յեն, նրանց հարաբերությունը մոտավոր թիվ է։ Տված են AB և CD հատվածները (նկ. 219)։ Փոքր հատվածը՝ CD ընդունենք իբրև չափի միավոր։ CD հատվածը դնում ենք

AB-ի վրա. դիցուք նա տեղավորվեց AB հատվածի վրա 3 անգամ և ստացվեց FB մնացորդը, վորը փոքր է CD-ից։ Յեթե գրենք $\frac{AB}{CD}\cong 3$ վորտեղ $\cong$ նշանը նշանակում է և կարդացվում է՝ «մոտավորապես հավասար է», ապա մենք չենք ունենա AB և CD հատվածների ճշգրիտ հարաբերությունը, այլ միայն մոտավոր հարաբերությունը և այն էլ պակասորդով, վորովհետև արդյունքը կլորացնելու համար մենք դեն ձգեցինք FB մնացորդը։

Վորպեսզի ստանանք AB և CD հատվածների ավելի ճշգրիտ հարաբերությունը, CD-ն կբաժանենք 10 հավասար մասերի և 0,1CD-ն կընդունենք իբրև չափի նոր միավոր։ Դիցուք այս նոր միավորն AB-ի մեջ մտնում է 34 անգամ և տալիս է, բացի դրանից, KB մնացորդը, վորը փոքր է 0,1CD-ից։

Գրում ենք՝ $3,4CD<AB<3,5CD$ կամ $\frac{AB}{CD}\cong 3,4$ պակասորդով և $\frac{AB}{CD}\cong 3,5$ հավելորդով։ 3,4 և 3,5 հարաբերությունները հաշված են վերցրած չափի միավորի մինչև 0,1 ճշտությամբ։ Ինչպես թվերի բաժանման դեպքում, այնպես էլ հատվածների հարաբերությունը հաշվելիս՝ արդյունքը վերցվում է պակասորդով, յեթե մնացորդը փոքր է վերցրած չափի միավորի կեսից, և հավելորդով, յեթե մնացորդը մեծ է վերցրած չափի միավորի կեսից։ Վորպեսզի AB և CD հատվածների էլ ավելի ճշգրիտ հարաբերություն ստանանք, CD-ն կբաժանենք 100 հավասար մասերի։ Դիցուք 0,01CD-ն KB մնացորդի վրա տեղավորվեց 3 անգամ և մնաց մի մնացորդ. վորը փոքր է 0,01CD-ից։



Նկ. 219

Գրում ենք՝ $3,43CD<AB<3,44CD$, կամ $\frac{AB}{CD}\cong 3,43$ պակասորդով կամ $\frac{AB}{CD}\cong 3,44$ հավելորդով։

3,43 և 3,44 թվերը AB և CD հատվածների հարաբերություններն են, յերկուսն էլ հաշված մինչև 0,01 ճշտությամբ, առաջինը պակասորդով, յերկրորդը հավելորդով։

Յեթե չափի այն միավորը, վոր ընտրել ենք, բաժանենք էլ ավելի մանր տասնորդամասերի, օրինակի համար 1000 կամ 10000 մասերի, ապա կստանանք հատվածների հարաբերությունը, արտահայտած անվերջ վոչ պարբերական տասնորդական կոտորակով։

Այսպիսով յերկու անհամաչափելի հատվածների հարաբերությունն իռացիոնալ թիվ է։

Անհամաչափելի հատվածների յերկու հարաբերությունները հավասար են համարվում, յեթե հավասար են այդ հարաբերությունների մոտավոր թվային արժեքները, վորոնք հաշված են կամավորապես վերցրած, բայց միևնույն աստիճանի ճշտությամբ, յերկուսն էլ պակասորդով կամ յերկուսն էլ հավելորդով: Որինակի համար, յեթե

$$\frac{a}{b} \cong 7,5 \text{ և } \frac{c}{d} \cong 7,5$$

$$\frac{a}{b} \cong 7,52 \text{ և } \frac{c}{d} \cong 7,52$$

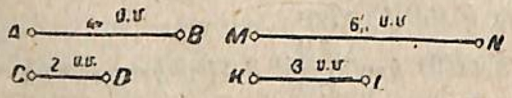
$$\frac{a}{b} \cong 7,524 \text{ և } \frac{c}{d} \cong 7,524 \text{ և այլն, ապա}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Այսպես ուրեմն, յերկու հատվածների հարաբերությունը մի ռացիոնալ կամ իռացիոնալ թիվ է, վորով պետք է բազմապատկել յերկրորդ հատվածը, վորպեսզի ստացվի առաջինը:

§ 3. ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐ: ՅԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹՅՈՒՆ

Տված են չորս հատվածներ, AB=a=4 սմ, CD=b=2 սմ, MN=c=6 սմ, KL=d=3 սմ, (նկ 219a): Նրանցից AB-ի ու CD-ի հարաբերությունը հավասար է $\frac{AB}{CD}=\frac{4}{2}=2$, նույնպես և մյուս յերկուսի՝ MN-ի ու KL-ի, հարաբերությունը հավասար է $\frac{MN}{KL}=\frac{6}{3}=2$:



Նկ. 219a

Այս հարաբերություններից յուրաքանչյուրը հավասար է 2-ի, հետևաբար, այս հարաբերությունները միահավասար են, ուստի

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{KL},$$

Յերկու քանորդական հարաբերությունների միացումը հավասարության նշանով՝ կոչվում է յերկրաչափական կամ քանորդական համեմատություն (պրոպորցիա):

$\frac{AB}{CD}=\frac{MN}{KL}$ հավասարությունը յերկրաչափական համեմատություն է: Այս գրությունն այսպես է կարդացվում՝ AB-ն այնպես է հարաբերում CD-ին, ինչպես MN-ը KL-ին:

Յերկրաչափական համեմատությունը բաղկացած է չորս անդամից:

Ամեն չորս հատվածներ յերկրաչափական համեմատություն չեն կազմում. որինակի համար, 4 սմ, 5 սմ, 8 սմ և 10 սմ յերկարության հատվածները յերկրաչափական համեմատություն են կազմում, վորովհետև $\frac{8}{4}=\frac{10}{5}$, իսկ 4 սմ, 5 սմ, 6 սմ և 7 սմ յերկարության հատվածները յերկրաչափական համեմատություն չեն կազմում, վորովհետև նրանցից հնարավոր չէ կազմել յերկու հավասար հարաբերություններ:

Չորս հատվածներ կոչվում են համեմատական, յերբ նրանց չափող թվերը յերկրաչափական համեմատություն են կազմում:

Այսպես ուրեմն, յեթե a, b, c և d չորս հատվածները համեմատական են, ապա իրավացի յե հետևյալ հավասարությունը՝ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ կամ $a:b=c:d$:

§ 4. ՅԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹՅԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ: ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍԱԿՆԵՐԸ:

1. Յերկրաչափական համեմատության հիմնական հատկությունն այն է, վոր նրա արտաքին անդամների արտադրյալը հավասար է ներքին անդամների արտադրյալին:

2. Յերկրաչափական համեմատության մեջ կարելի յե տեղափոխել 1) արտաքին անդամները իրար հետ, 2) ներքին անդամները իրար հետ 3) Միաժամանակ և արտաքին և ներքին անդամները:

3. Յերկրաչափական համեմատության մեջ կարելի յե ներքին անդամները դնել արտաքին անդամների տեղ յեվ արտաքինները ներքինների տեղ:

4. Անընդհատ համեմատություն. Այնպիսի յերկրաչափական համեմատությունը, վորի մեջ կամ արտաքին և կամ ներքին անդամները միահավասար են, կոչվում է անընդհատ (անընդմիջվող):

Անընդհատ յերկրաչափական համեմատության հավասար անդամներից յուրաքանչյուրը կոչվում է մյուս յերկու անդամների միջին յերկրաչափականը կամ միջին համեմատականը:

$a:b=b:c$ և $b:a=c:b$ համեմատություններն անընդհատ են:

Համեմատության հիմնական հատկության համաձայն ունենք՝ $b^2=ac$ վորտեղից $b=\sqrt{ac}$:

Յերկու թվերի միջին յերկրաչափականը հավասար է նրանց արտադրյալի քառակուսի արմատին:

5. Ածանցյալ համեմատություններ. Յեթե $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ համեմատության յերկու մասերին ավելացնենք կամ յերկու մասերից հանենք 1, ապա հավասարումը դրանից չի խախտվի. այսպես,

$$\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1,\ \text{կամ}\ \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d},\ \text{այսինքն}$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\ (I)\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\ (II).$$

Եթե (I) ածանցյալ համեմատությունն անդամ առ անդամ բաժանենք (II)-ի վրա, ապա կստանանք մի ածանցյալ համեմատություն ևս՝

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

որ այսպես է կարդացվում.

Առաջին հարաբերության անդամների գումարն այնպես է հարաբերում նրանց տարբերության, ինչպես երկրորդ հարաբերության անդամների գումարը նրանց տարբերության:

6. Հավասար հարաբերությունների շարքի հատկությունը:

Թեորեմ։ Եթե տված է հավասար հարաբերությունների մի շարք, ապա հարաբերությունների նախորդ անդամների գումարն այնպես է հարաբերում հետնորդ անդամների գումարին, ինչպես ամեն մի նախորդ անդամն իր հետնորդին:

Տված է՝ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$.

Պետք է ապացուցել՝ $\frac{a+c+m+p}{b+d+n+q}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\dots$

Ապացուցում։ *Դիցուք* $\frac{a}{b}=k$, *այն ժամանակ նաև* $\frac{c}{d}=k$, $\frac{m}{n}=k$, $\frac{p}{q}=k$. *այստեղից* $a=bk$, $c=dk$, $m=nk$, $p=qk$։ *Անդամ առ անդամ գումարելով այս վերջին հավասարությունների ձախ և աջ մասերը և աջ մասում* k *ընդհանուր բազմապատկիչը դուրս հանելով փակագծերից, ունենում ենք՝*

$$a+c+m+p=k\,(b+d+n+q),\ \text{որտեղից}$$

$$K=\frac{a+c+m+p}{b+d+n+q}\ \text{բայց}\ K=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}=\frac{p}{q},$$

$$\text{ուստի}\ \frac{a+c+m+p}{b+d+n+q}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\dots$$

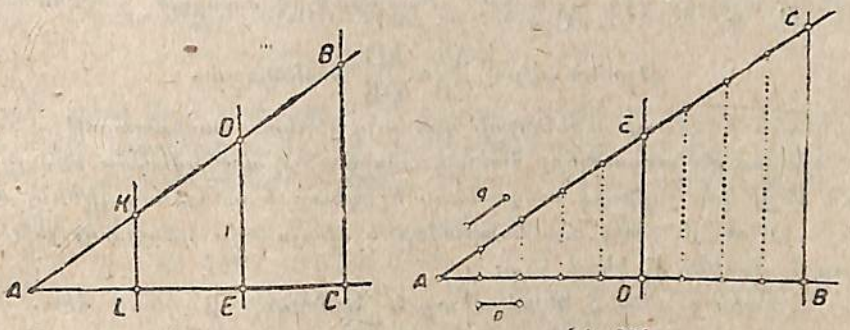
§ 5. ԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԸ ՀԱՏՈՂ ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

BAC *անկյան կողմերը հատենք զուգահեռ ուղիղներով՝* BC, DE, KL *և այլն (նկ. 220). այն հատվածները, որոնք անկյան կողմերի վրա միատեսակ են դասավորված միևնույն զուգահեռների նկատմամբ, կոչվում են* **համապատասխանաբար դասավորված (համապատասխան):**

Թեորեմ։ Եթե անկյան կողմերը հատենք երկու զուգահեռ ուղիղներով, ապա նրա մի կողմի վրա առաջացած որևէ երկու հատվածներ կհարաբերեն իրար այնպես, ինչպես մյուս կողմի վրա առաջացած համապատասխան հատվածները։

Տված են $\angle BAC$, $BC \parallel ED$ *(նկ. 221)*

Պետք է ապացուցել՝ 1) $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$ 2) $\frac{AC}{EC}=\frac{AB}{DB}$. 3) $\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}$



Նկ. 221.

Ապացուցում: *Դիցուք մի* q *հատված* AC *կողմի* AE *ու* EC *հատվածների համար ընդհանուր չափ է. այն ժամանակ* $AE=mq$, $EC=nq$, *և* $AC=(m+n)q$։ AC *կողմի բաժանման կետերից տանենք* BC*-ին զուգահեռ ուղիղներ. պարզ է, որ նրանք զուգահեռ կլինեն նաև* DE*-ին։* AB *կողմի* AD *և* DB *հատվածները նույնպես կբաժանվեն համապատասխանաբար* m *և* n *միահավասար մասերի. նրանցից յուրաքանչյուրի երկարությունը նշանակենք* p. *այն ժամանակ* $AD=mp$, $DB=np$ *և* $AB=(m+n)p$։ *Հետևաբար.*

$$\text{I.}\ \frac{AE}{EC}=\frac{mq}{nq}=\frac{m}{n},\ \frac{AD}{DB}=\frac{mp}{np}=\frac{m}{u}\ \text{և}\ \frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}.$$

$$\text{II.}\ \frac{AC}{EC}=\frac{(m+n)q}{nq}=\frac{m+n}{n},\ \frac{AB}{DB}=\frac{(m+n)p}{np}=\frac{m+n}{n}\ \text{և}\ \frac{AC}{EC}=\frac{AB}{DB}.$$

$$\text{III.}\ \frac{AC}{AE}=\frac{(m+n)q}{mq}=\frac{m+n}{m},\ \frac{AB}{AD}=\frac{(m+n)p}{mp}=\frac{m+n}{m}\ \text{և}\ \frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}.$$

Թեորեմը պահպանում է իր ուժը նաև այն դեպքում, երբ անկյան կողմերի վրա զուգահեռ ուղիղներով կտրված հատվածներն ընդհանուր չափ չունեն. թեորեմի այս մասը տալիս ենք առանց ապացուցման։

Թեորեմ *(հակադարձ)*։ **Եթե անկյան կողմերը երկու ուղիղներով հատելիս մի կողմի վրա առաջացած որևէ երկու հատվածներ հարաբերում են իրար այնպես, ինչպես մյուս կողմի վրա առաջացած համապատասխան հատվածները, ապա այդ ուղիղները զուգահեռ են:**

և DE-ն հատում են BAC *անկյան*

կողմերը $\frac{AE}{E}=\frac{AD}{DB}$ (նկ. 222)

Պետք է ապացուցել՝ BC ∥ DE.

Ապացուցում: Ենթադրենք, որ BC-ն զուգահեռ չէ DE-ին, այն ժամանակ C կետից պետք է անցնի մի CF ուղիղ, որը զուգահեռ է DE ուղիղին և որը հատում է AB կողմը F կետում: Ուղիղ թեորեմի համաձայն BAC անկյան կողմերի վրա կստացվեն համեմատական հատվածներ, այնպես որ $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DF}$: Բաղդատելով ստացած համեմատությունը տվյալ $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$ համեմատության հետ և նկատի ունենալով, որ այդ յերկու համեմատությունների յերեքական անդամները համապատասխանաբար հավասար են, գտնում ենք, որ չորրորդ անդամներն էլ պետք է հավասար լինեն, այսինքն DF=DB. բայց այս հնարավոր է միայն այն դեպքում, յեթե F կետը համընկնի B կետի հետ:

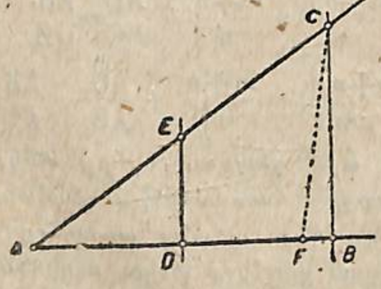
Այսպես ուրեմն F կետը պետք է համընկնի B կետի հետ. իսկ այս նշանակում է, որ մեր յենթադրությունը, թե BC-ն զուգահեռ չէ DE-ին, սխալ է, հետևաբար, BC ∥ DE:

Թեորեմ: Եթե զուգահեռ ուղիղները հատում են անկյան կողմերը, ապա այդ զուգահեռների այն հատվածները, որոնք գտնվում են անկյան կողմերի միջև, հարաբերում են իրար այնպես, ինչպես նրանց համապատասխան ծայրերի հեռավորությունները անկյան գագաթից:

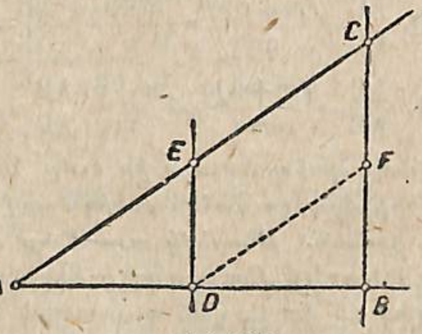
Տված են ∠BAC, BC ∥ DE նկ. 223)

Պետք է ապացուցել՝ $\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$

Ապացուցում: Տանում ենք DE ուղիղը՝ զուգահեռ AC-ին. այն ժամանակ DE=FC (նկ. 223): Դիտենք ABC անկյունը. նա կտրված է AC և



Նկ. 222



Նկ. 223

DE զուգահեռ ուղիղներով, հետևաբար, $\frac{BC}{FC}=\frac{BA}{DA}$. փոխարինելով FC-ն

նրան հավասար DE հատվածով, կստանանք

$\frac{BC}{DE}=\frac{BA}{DA}$, բայց $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$, ուստի $\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}$ Այսպես ուրեմն,

$$\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}.$$

Թեորեմն ուժի մեջ է նաև այն դեպքում, յերբ հատվածները անհամաչափելի յեն:

§ 6. ՓՆՋԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՆԵՐԸ ՀԱՏՈՂ ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Թեորեմ: Եթե ճառագայթների փունջը հատեն զուգահեռ ուղիղներով, ապա ճառագայթների վրա առաջացած համապատասխան հատվածները և զուգահեռների համապատասխան հատվածները համեմատական են:

Տված են՝ ճառագայթների մի փունջ, որի կենտրոնն է O, AM ∥ BN (նկ. 224)

Պետք է ապացուցել՝ 1) $\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}=\frac{OE}{EF}=\frac{OM}{MN}$,

2) $\frac{BD}{AC}=\frac{DF}{CE}=\frac{FN}{EM}=\frac{ON}{OM}$.

Ապացուցում: Դիտենք փնջի ճառագայթներով կազմված BOD, DOF և FON անկյունները: Այս անկյունների կողմերը կտրված են BN և AM զուգահեռ ուղիղներով. հետևաբար այդ կողմերի վրա առաջանում են համեմատական հատվածներ. ուստի

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD},\quad \frac{OC}{CD}=\frac{OE}{EF},\quad \frac{OE}{EF}=\frac{OM}{MN}.$$

Բաղդատելով իրար հետ այս համեմատությունները, ստանում ենք՝

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}=\frac{OE}{EF}=\frac{OM}{MN}.$$

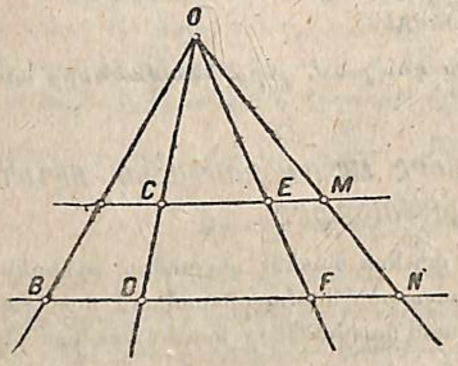
Թեորեմի առաջին մասն ապացուցված է, յերկրորդ մասն ապացուցելու համար կազմենք այնպիսի համեմատություններ, որոնց մեջ մտնեն փնջի ճառագայթները հատող զուգահեռ ուղիղների հատվածները. կստանանք՝

$$\frac{BD}{AC}=\frac{BO}{AO}=\frac{DO}{CO};\quad \frac{DF}{CE}=\frac{DO}{CO}=\frac{FO}{EO};\quad \frac{FN}{EM}=\frac{FO}{EO}=\frac{NO}{MO}$$

բաղդատելով այս համեմատությունները գտնում ենք՝

$$\frac{BD}{AC}=\frac{DF}{CE}=\frac{FN}{EM}=\frac{NO}{MO}$$

Այսպիսով ապացուցված է թեորեմի նաև յերկրորդ մասը։



Նկ. 224.

§ 7. ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ՆԵՐՔԻՆ ԱՆԿՅԱՆ ԿԻՍՈՐԴԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

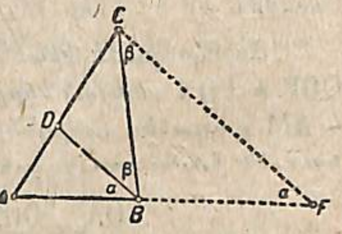
Թեորեմ. Յեռանկյան ներքին անկյան կիսորդը բաժանում է այդ անկյան դիմացի կողմն այնպիսի մասերի, վորոնք համեմատական են մյուս յերկու կողմերին։

Տված են՝ $\triangle ABC$-*ի մեջ* BD-*ն կիսորդ է,* $\angle\alpha=\angle\beta$ *(նկ. 225)*

Պետք է ապացուցել՝ AD:DC=AB:BC։

Ապացուցում: C *գագաթից տանում ենք* CF ∥ BD *մինչև* CF-*ի հատ. կողմի շարունակության* F *կետում։*

BD *և* CF *զուգահեռ ուղիղներով* A *անկյան կողմերը բաժանվում են համեմատական հատվածների, ուստի* AD:DC=AB:BF. *ցույց տանք, վոր* BF=BC, *և թեորեմն ապացուցված կլինի։* BCF *յեռանկյան մեջ ունենք՝* $\angle F=\angle\alpha$ *իբրև համապատասխան անկյուններ* BD *և* FC *զուգահեռների մոտ, վորոնք կտրված են* AF *ուղիղով, և* $\angle\beta=\angle BCF$ *իբրև ներքին խաչադիր անկյուններ նույն զուգահեռների մոտ, վորոնք կտրված են* BC *հատողով։ Բայց* $\angle\alpha=\angle\beta$, *հետևաբար,* $\angle F=\angle BCF$, *քանի վոր այս անկյունները, վորոնք պատկանում են* BCF *յեռանկյան, միահավասար են, ապա* BCF *յեռանկյունը հավասարասրուն է, այսինքն* BF=BC։ *Յեթե մեր համեմատության մեջ* BF *հատվածը փոխարինենք նրան հավասար* BC *հատվածով, վորը* ABC *յեռանկյան կողմն է, կստանանք՝* AD:DC=AB:BC։



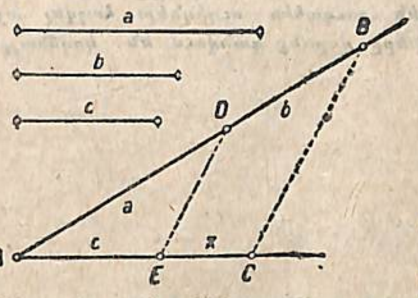
Նկ. 225

§ 8. ՉՈՐՐՈՐԴ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ

Խնդիր. Տված են յերեք հատվածներ՝ a, b և c *(նկ. 226)*։ Կառուցել նրանց համեմատական չորրորդ հատվածը։

Կառուցում։ Պետք է այնպիսի x *հատված կառուցել, վորը բավարարի այս համեմատության՝* a:b=c:x։ *Վերցնենք վորևե* ABC *անկյուն և նրա կողմերից մեկի վրա* A *գագաթից սկսած դնենք հաջորդաբար*

այս հատվածները՝ AD=a, DB=b, *իսկ մյուս կողմի վրա՝* AE=c *հատվածը.* D *և* E *կետերը միացնելով* DE *ուղիղով կտանենք* BC ∥ DE, *այն ժամանակ* EC=x *հատվածը կլինի վորոնած չորրորդ համեմատական հատվածը։ Իրոք, քանի վոր* BC ∥ ED, *ապա* a:b=c:x։



Նկ. 226.

§ 9. ՀԱՏՎԱԾԻ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ ՏՎՅԱԼ ՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅԱՄԲ

Խնդիր AB=a հատվածը *(նկ. 227)* բաժանել յերկու այնպիսի հատվածների՝ AC ու CB. վորոնց հարաբերությունը հավասար լինի m և n տված յերկու թվերի հարաբերությանը։

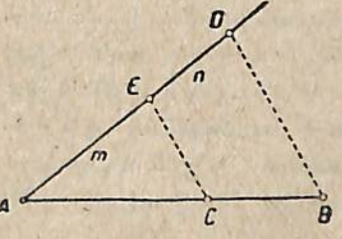
Կառուցում. Խնդրի պայմանի համաձայն AC:CB=m:n։

Դիցուք m=4 *և* n=3 *միավորի։ Վերցնում ենք կամավոր մեծության* BAD *անկյունը, նրա մի կողմի վրա դնում ենք գագաթից սկսած* AB=a *հատվածը, իսկ մյուսի վրա հաջորդաբար՝* AE=m *և* ED=n *հատվածները։*

Ուղիղ գծով միացնելով B *և* D *կետերը.* E *բաժանման կետից կտանենք* EC ∥ BD *վորն* AB *կողմի հետ կհատվի* C *կետում։ Այս* C *կետով* AB-*ն կբաժանվի* m:n *հարաբերությամբ։*

Իրոք. EC ∥ BD, *ուստի և*

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AE}{ED}=\frac{m}{n}։$$



Նկ. 227.

Հարցեր յեվ վարժություններ

1. Համեմատական կլինե՞ն հատվածները, յեթե նրանցից յերկուսի հարաբերությունը հավասար է 62,1 : 18, իսկ մյուս յերկսի հարաբերությունն է 41,4:12։

2 ABC *յեռանկյան կողմերից մեկի վրա գտնել այնպիսի* M *կետ վորում այդ կողմը բաժանվում է մյուս յերկու կողմերին համեմատական մասերի։*

3. ABC *հավասարասրուն յեռանկյան հիմքը հարաբերում է սրունքին ինչպես 1:4։ Յեռանկյան պարագիծն է* P=4,5 *սմ։ Գտնել կողմերը։*

4. Կազմել բոլոր հնարավոր համեմատությունները հետևյալ հավասար արտադրյալներից՝

1) x. y=m. n 2) 12. 8=16.6

5. Տված է ուղղանկյունն իր կողմերով՝ a=6 *սմ. և* b=8 *սմ։ Կառուցել*

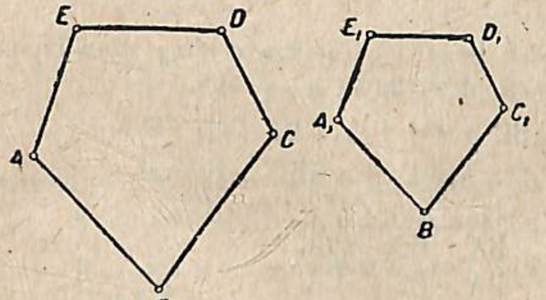
նրան հավասարամեծ մի այլ ուղղանկյուն, վորի մի կողմն է c=6 սմ, մյուս կողմի յերկարությունը վորոշելով կառուցմամբ։

6. Տված է մի յեռանկյուն, վորի հիմքն է՝ a=16 սմ։ Նրա կողմնային կողմը, հաշվելով հիմքից, բաժանված է յերեք մասերի 2:3:5 հարաբերություններով, և բաժանման կետերից տարված են հիմքին զուգահեռ ուղիղներ։ Հաշվել այդ ուղիղների այն հատվածների յերկարությունները, վորոնք գտնվում են կողմնային կողմերի միջև։

XVI. ՊԱՏԿԵՐՆԵՐԻ ՆՄԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

§ 1. ՆՄԱՆ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

1. Վորևէ հողամասի հատակագիծը գծելիս կամ մեքենայի մասերի տեխնիկական գծագիրը պատրաստելիս հողամասի յեզրագիծը կամ մեքենայի մասը վերարտադրում են փոքրացրած տեսքով, վորի ժամանակ իր բոլոր մանրամասնություններով անփոփոխ են թողնում պատկերի ձևը։



Նկ· 228

Միևնույն թիվ անգամ փոքրացնելով պատկերի բոլոր գծային չափերը և միաժամանակ անփոփոխ թողնելով նրա բոլոր անկյունների մեծությունները, մենք պահպանում ենք պատկերի ձևը և ստանում ենք փոքրացրած տեսքով նրա նկարը, վորը պատկերից տարբերվում է միայն իր մեծությամբ։

2. 228-րդ նկարում տված են յերկու բազմանկյուններ՝ ABCDE *և* $A_1B_1C_1D_1E_1$, *վորոնց կողմերի թիվը նույնն է. Նրանց անկյունները համապատասխանաբար հավասար են՝* $A=A_1$, $B=B_1$, $C=C_1$, $D=D_1$, $E=E_1$, *բացի դրանից, հավասար են նաև այն կողմերի հարաբերությունները, վորոնց առընթեր ընկած են համապատասխանաբար հավասար անկյուններ՝*

$$\frac{AB_1}{A_1B}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{E_1A_1}{EA}=K\cdot$$

Այսպիսի յերկու բազմանկյունները կոչվում են **նման**: *Նման բազմանկյունների մեջ այն կողմերը, վորոնց առընթեր գտնվում են համապատասխանաբար հավասար անկյուններ, կոչվում են* **համապատասխան**։

Երկու բազմանկյունները նման են կոչվում, յերբ նրանց կողմերի թիվը նույնն է, անկյունները համապատասխանաբար հավասար են և համապատասխան կողմերը համեմատական են։

Պատկերների նմանությունը նշանակում են ∽ նշանով։

$A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$ *գրությունը այսպես է կարդացվում.* $A_1B_1C_1D_1E_1$ *բազմանկյունը նման է* $ABCDE$ *բազմանկյունը։*

Յերկու նման բազմանկյունների համապատասխան կողմերի հարաբերությունը կոչվում է նմանության գործակից։

Յեթե բազմանկյունների նմանության գործակիցը հավասար է 1-ի, ապա բազմանկյունները միահավասար են, այստեղից յեզրակացնում ենք, վոր հավասարությունը նմանության մասնավոր դեպքն է։

§ 2. *ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՆՄԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ*

Յեռանկյունները նման են կոչվում, յերբ նրանց մեջ անկյունները համապատասխանաբար հավասար են և համապատասխան կողմերը համեմատական։

Յեռանկյունների համապատասխան կողմերը գտնվում են հավասար անկյունների դիմաց։

Թեորեմ։ Յեռանկյան վորևէ կողմին զուգահեռ ուղիղը յեռանկյունից կտրում է մի նոր յեռանկյուն, վորը նման է տվածին։

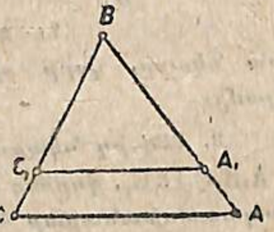
Տված է՝ $\triangle ABC$*-ի մեջ* $C_1A_1 \parallel CA$ *(նկ. 229).*

Պետք է ապացուցել՝ $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$, *այսինքն*

1) $\angle A=\angle A_1 \angle C=\angle C_1$,

2) $\frac{BA_1}{BA}=\frac{BC_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}$.

Ապացուցում։ *Տանում ենք* $C_1A_1 \parallel CA$, *ստանում ենք* $\triangle A_1BC_1$*-ը, վորի անկյունները հավասար են* $\triangle ABC$*-ի անկյուններին. իրոք, B անկյունն ընդհանուր է,* $\angle A_1=\angle A$ *և* $\angle C_1=\angle C$, *իբրև համապատասխան անկյուններ զուգահեռների մոտ։ Ճառագայթների փնջին վերաբերող թեորեմի հիման վրա ունենք՝*



Նկ. 229

$$\frac{BA_1}{BA}=\frac{BC_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}$$

Հետևաբար յեռանկյունները նման են՝ $\triangle A_1BC_1 \backsim \triangle ABC$.

§ 3. ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՆՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ՅԵՐԵՔ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸ

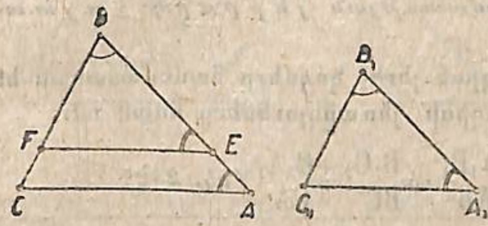
1. *Յեռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշը։*

Թեորեմ։ Յեթե մի յեռանկյան յերկու անկյունները համապատասխանաբար հավասար են մյուսի յերկու անկյուններին, ապա այդպիսի յեռանկյունները նման են։

Տված է՝ $\triangle ABC$ *և* $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle A_1=\angle A$ *և* $\angle B_1=\angle B$ *(նկ. 230)։*

Պետք է ապացուցել՝ $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$.

Ապացուցում։ *Ըստ պայմանի* $\angle A_1=\angle A$ *և* $\angle B_1=\angle B$. *հետևաբար,* $\angle C_1=\angle C$, *վորովհետև նրանք տվյալ անկյունների գումարը լրացնում են մինչև 2 d։ Վերցնենք BA կողմի վրա B գագաթից* $BE=B_1A_1$ *և տանենք* $FE \parallel CA$, *կստանանք վոր* $\triangle EBF \backsim \triangle ABC$. *բայց* $\triangle A_1B_1C_1=\triangle EBF$, *վորովհետև նրանց մեջ* $BE=B_1A_1$, $\angle B=\angle B_1$ *ըստ պայմանի և* $\angle E=\angle A=\angle A_1$. *քանի վոր EBF յեռանկյունը նման է ABC յեռանկյան, ապա նրան հավասար* $A_1B_1C_1$ *յեռանկյունը ևս նման է ABC յեռանկյան։*



Նկ. 230.

Հետևանքներ։ *1.* Այն ուղղանկյուն յեռանկյունները, վորոնք ունեն մեկական հավասար սուր անկյուն, նման են։

2. Այն հավասարասրուն յեռանկյունները, վորոնք ունեն մեկական հավասար անկյուն գագաթի կամ հիմքի մոտ, նման են։

3. Հավասարակողմ յեռանկյունները նման են։

2. *Յեռանկյունների նմանության յերկրորդ հայտանիշը.*

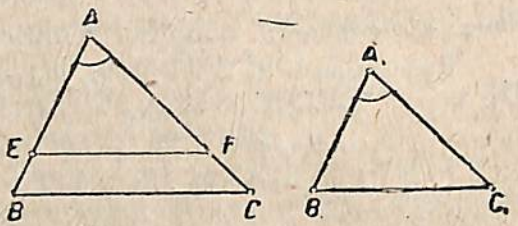
Թեորեմ։ Յեթե յեռանկյան յերկու կողմերը համեմատական են մյուսի յերկու կողմերին, և այս կողմերի միջև ընկած անկյունները հավասար են, ապա յեռանկյունները նման են։

Տված է՝ $\triangle ABC$ *և* $\triangle A_1B_1C_1$: $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1C_1}{AC}$ *և* $\angle A_1=\angle A$ *(նկ. 231).*

Պետք է ապացուցել՝ $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$.

Ապացուցում: AB *կողմի վրա* A *գագաթից կդնենք* $AE=A_1B_1$ *հատվածը և կտանենք* $EF \parallel BC$. *կստանանք* $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$. *այստեղից հետևում է՝* $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$ *(1), այս համեմատության մեջ AE-ն փոխարինելով* A_1B_1*-ով, ստանում ենք՝* $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{AF}{AC}$ *(2)։*

Բաղդատելով (2) հավասարությունը պայմանում տված համեմատության հետ, նկատում ենք վոր նրանց մեջ յերեք անդամները միահավասար են, հետևաբար, պետք է չորրորդ անդամներն էլ հավասար լինեն, այսինքն $AF=A_1C_1$, $\triangle A_1B_1C_1=\triangle AEF$, վորովհետև նրանց մեջ $\angle A_1=\angle A$ ըստ պայմանի, $AE=A_1B_1$ ըստ կառուցման և $AF=A_1C_1$ ըստ ապացուցածի. ունենք, վոր $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$, հետևաբար, նաև նրան հավասար $\triangle A_1B_1C_1$-ն է նման $\triangle ABC$-ին։



Նկ. 231

Հետևանք։ Ուղղանկյուն յեռանկյունները նման են, յերբ նրանց էջերի հարաբերությունները հավասար են։

3. *Յեռանկյունների նմանության յերրորդ հայտանիշը.*

Թեորեմ: Յերբ մի յեռանկյան յերեք կողմերը համեմատական են մյուսի յերեք կողմերին, ապա այդպիսի յեռանկյունները նման են։

Տված են՝ $\triangle ABC$ և $\triangle A_1B_1C_1$, $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}$ (նկ. 232)

Պետք է ապացուցել՝ $\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle ABC$,

Ապացուցում։ AB կողմի վրա A գագաթից դնենք $AE=A_1B_1$ հատվածը և տանենք $EF\parallel BC$, այն ժամանակ $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$։ Յեռանկյունների նմանությունից հետևում է, վոր $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$ (1)։

Առաջին հարաբերության մեջ AE-ն փոխարինելով A_1B_1-ով, կստանանք՝ $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$ (2)։ Բաղդատելով հավասար հարաբերությունների այս շարքը պայմանում տվածի հետ, յեզրակացնում ենք, վոր $\frac{AF}{AC}=\frac{A_1C_1}{AC}$, վորտեղից $AF=A_1C_1$, և $\frac{EF}{BC}=\frac{B_1C_1}{BC}$, վորտեղից $EF=B_1C_1$։

Այսպես ուրեմն, AEF յեռանկյան յերեք կողմերը համապատասխանաբար հավասար են $A_1B_1C_1$ յեռանկյան յերեք կողմերին՝ կնշանակի $\triangle AEF=\triangle A_1B_1C_1$, բայց $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$, հետևաբար նաև $\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangledown ABC$.

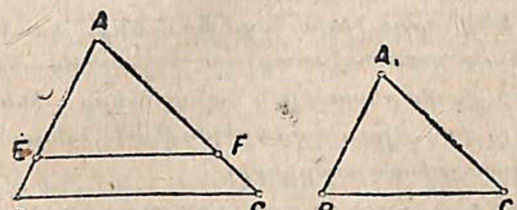
Հետևանք։ Հավասարասրուն յեռանկյունները նման են, յերբ մի յեռանկյան հիմքը և սրունքը համեմատական են մյուսի հիմքին և սրունքին։

4. Թեորեմ։ Յերկու ուղղանկյուն յեռանկյուններ նման են, յերբ մի յեռանկյան ներքնաձիգն ու մի էջը համեմատական են մյուսի ներքնաձիգին ու էջին։

Տված՝ $\triangle ABC$ և $\triangle A_1B_1C_1$ $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}$ (նկ. 233)

Ապացուցել՝ $\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle ABC$։

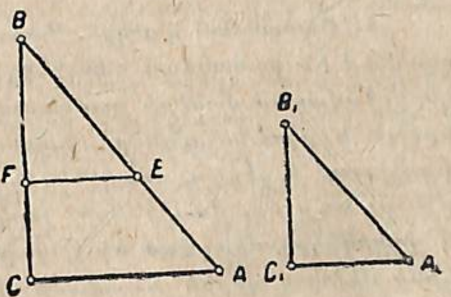
Ապացուցում։ AB ներքնաձգի վրա B գագաթից դնում ենք $BE=B_1A_1$ հատվածը և տանում $EF\parallel AC$. քանի վոր $\triangle BEF\backsim\triangle ABC$, ապա $\frac{BE}{BA}=\frac{BF}{BC}$. այս համեմատությունը բաղդատելով տվածի հետ, յեզրակացնում ենք, վոր $BF=B_1C_1$, հետևաբար. $\triangle EBF=\triangle A_1B_1C_1$ իբրև ուղղանկյուն յեռանկյուններ, վորոնց մեջ ներքնաձիգն ու մեկական էջը հավասար են։ Բայց $\triangle EBF\backsim\triangle ABC$, հետևաբար, նրան հավասար $\triangle A_1B_1C_1$-ը ևս նման է $\triangle ABC$-ին։



Նկ. 232.

§ 4. ՆՄԱՆ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԲԱՐՁՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՅԵՎ ԿՈՂՄԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

1. Թեորեմ։ Նման յեռանկյունների բարձրությունները համեմատական են համապատասխան կողմերին։



Նկ. 233

Տված՝ $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$, BD և B_1D_1 բարձրություններն են (նկ. 234)

Ապացուցել՝ $\frac{B_1D_1}{BD}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}$.

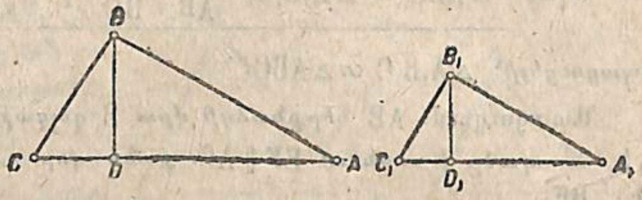
Ապացուցում։ ABD և $A_1B_1D_1$ ուղղանկյուն յեռանկյունները նման են, վորովհետև ունեն մեկական միահավասար սուր անկյուն՝ $\angle A=\angle A_1$։ Նրանց նմանությունից հետևում է, վոր $\frac{B_1D_1}{BD}=\frac{A_1B_1}{AB}$, բայց

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}.$$ ուստի նաև

$$\frac{B_1D_1}{BD}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}$$

Այսինքն՝ նման յեռանկյունների բարձրությունները համեմատական են համապատասխան կողմերի յուրաքանչյուր զույգին:

2. **Նման յեռանկյունների մեջ համապատասխան կիսորդները յեվ միջնագծերը համեմատական են համապատասխան կողմերին:**



Նկ. 234.

3. Յերբ յերկրաչափական խնդիրը լուծելիս օգտվում ենք յեռանկյունների նմանությունից, հաճախ նպատակահարմար է համեմատությունն այնպես կազմել, վոր մի հարաբերության անդամները լինեն մի յեռանկյան գծային տարրերը, իսկ մյուս հարաբերության անդամները՝ մյուս յեռանկյան համապատասխան տարրերը:

§ 5. ՆՄԱՆ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱ ՀԻՄՆՎԱԾ ԳՈՐԾԻՔՆԵՐ

1. **Բաժանման կարկին.** *Գծագրական աշխատանքներ կատարելիս օգտվում են* բաժանման կարկինից *(նկ. 235): Նա ծառայում է հատվածները հավասար մասերի բաժանելու համար. Նրա կազմությունը հիմնված է յեռանկյունների նմանության վրա: Բաժանման կարկինը բաղկացած է յերկու վոտիկներից՝* AD *ու* CB, *վորոնց յերկու ծայրերն էլ սուր են. վոտիկների յերկարությամբ ճեղքեր են արված և վոտիկները միացված են* O *շարժման հոդակապով: Բաժանման կարկինի միջոցով վորևէ հատվածի վորևէ մասը, որինակի համար* MN *հատվածի յերրորդ մասը, գտնելու համար՝* O *հոդակապն այնպես են հարմարեցնում, վոր* BO-*ն 3 անգամ մեծ լինի* OC-*ից: Ցուցմունքը կարդալու համար վոտիկների վրա բաժանումներ են նշանակված:* O *հոդակապն ամրացնելով, վոտիկների* B *և* D *ծայրերը դնում են հատվածի* M *և* N *կետերում, և այն ժամանակ* C *և* A *ծայրերի միջև հեռավորությունը հավասար է լինում* $\frac{1}{3}$ MN *ի:*

Նկ. 235.

Իրոք, $\triangle COA \backsim \triangle BOD$, *վորտեղից* $\frac{CA}{BD}=\frac{OC}{OB}$,

բայց $CO=\frac{1}{3}OB$, *հետևաբար,* $\frac{CA}{BD}=\frac{1}{3}$, *ուստի*

$CA=\frac{1}{3}BD$, *կամ* $CA=\frac{1}{3}MN$, *վորովհետև* $BD=MN$:

2. **Լայնական մասշտաբ.** *Գծային մասշտաբը հնարավորություն չի տալիս մասշտաբային միավորի մանր մասերը վերցնելու. այս անհարմարությունը վերացվում է* լայնական մասշտաբի *միջոցով, վորը հնարավորություն է տալիս վերցնել միավորի տասնորդական և հարյուրերորդական մասերը: Լայնական մասշտաբի կազմությունը տված է 236-րդ նկարում:*

Նկ. 236.

Նրա մեջ իբրև չափի միավոր ծառայում է BA-*ն. վերցնում ենք* $CA=0,1\ BA$. *դիտարկելով* AOC *յեռանկյունը, վորի մեջ* AC-*ին զուգահեռ ուղիղներ են տարված, տեսնում ենք, վոր* $KL=0,1\ CA=0,01BA$. *նույն յեռանկյան մեջ մյուս զուգահեռ հատվածները համապատասխանաբար հավասար են* BA *չափի միավորի 0,02;0,03;... 0,09 և 0,10 մասին:*

Լայնական մասշտաբի բանեցումը: *Դիցուք հարկավոր է վերցնել* $x=2,35\ AB$ *հատվածը: Կարկինի մի սայրը (սուր ծայրը) դնում ենք* M *կետում, իսկ մյուսը* N *կետում. այն ժամանակ* $NM=x=2,35$:

Իրոք, $NM=DM+ED+NE$, *վորտեղ* $MD=2BA$, $NE=0,3BA$, $ED=0,05\ BA$, *վորովհետև* $\triangle OAC \backsim \triangle ODE$, *վորտեղից* $\frac{OD}{OA}=\frac{ED}{CA}=\frac{5}{10}$,

հետևաբար, $ED=\frac{5}{10}CA$. *բայց* $CA=0,1BA$, *ուստի* $ED=0,05\ BA$.

Այսպես ուրեմն, $NM=2+0,3+0,05=2,35$:

§ 6. ՆՄԱՆ ՈՒՂՂԱԳԻԾ ՊԱՏԿԵՐՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ

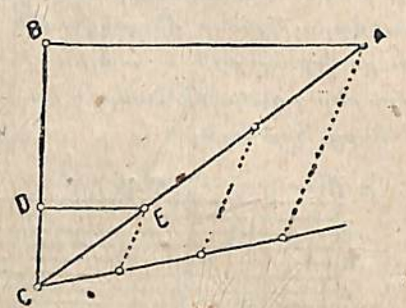
Խնդիր 1. Կառուցել այնպիսի յեռանկյուն, վորը նման լինի ABC յեռանկյանը *(նկ. 237)* **և վորի կողմերը յերեք անգամ փոքր լինեն ABC յեռանկյան կողմերից:**

Կառուցում: ABC *յեռանկյան կողմերից մեկը, որինակի համար* AC-*ն բաժանում ենք յերեք հավասար մասերի և* E *բաժանման կետից տանում ենք* ED *ուղիղը՝ զուգահեռ* ABC *յեռանկյան* AB *կողմին. ստանում ենք* EDC *յեռանկյունը, վորը նման է* ABC *յեռանկյանը, քանի վոր նրանց համապատասխան անկյունները հավասար են:*

Խնդիր 2. Տրված a հատվածի վրա կառուցել այնպիսի եռանկյուն, որը նման լինի տրված ABC եռանկյանը *(նկ. 238)*։

Կառուցում։ a հատվածը համապատասխանեցնենք ABC եռանկյան CA կողմին։

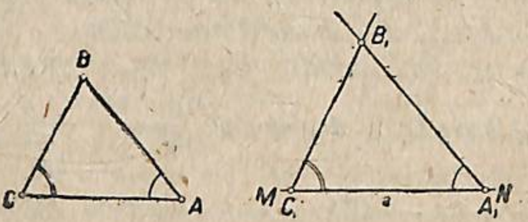
MN ուղիղի վրա վերցնում ենք $C_1A_1=a$ հատվածը և A_1 կետի մոտ կառուցում ենք $\angle A_1=\angle A$, C_1 կետի մոտ՝ $\angle C_1=\angle C$. ստանում ենք $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$. իրոք, այս եռանկյունները նման են, որովհետև նրանց մեջ երկուական անկյուններ համապատասխանաբար հավասար են։



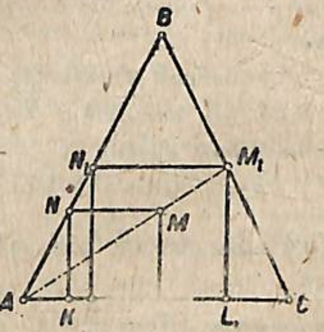
Նկ. 237.

Խնդիր 3. Տրված ABC եռանկյան մեջ *(նկ. 239)* ներգծել այնպիսի քառակուսի, որի երկու գագաթները գտնվեն եռանկյան հիմքի վրա, իսկ մյուս երկու գագաթները եռանկյան կողմնային կողմերի վրա։

Լուծում։ Եռանկյան AB կողմի վրա N կետից կտանենք NK-ն ուղղահայաց AC-ին, և կկառուցենք KLMN քառակուսին, որի կողմն է NK։ Եռանկյան A գագաթից կտանենք քառակուսու M գագաթով



Նկ. 238.



Նկ. 239.

անցնող AM_1-ուղիղը, մինչև BC կողմի հետ M_1 կետում հատվելը. այնուհետև կտանենք $M_1L_1 \perp AC$, $M_1N_1 \parallel AC$ և $N_1K_1 \perp AC$ և կստանանք որոնելի քառակուսին։

Ապացուցում։ Իրոք $K_1L_1M_1N_1$-ն ուղղանկյուն զուգահեռագիծ է։ AL_1M_1 և ALM եռանկյունների նմանությունից ունենք՝ $\frac{M_1L_1}{ML}=\frac{M_1A}{MA}$, այնուհետև AM_1N_1 և AMN եռանկյունների նմանությունից ունենք՝ $\frac{M_1N_1}{MN}=\frac{M_1A}{MA}$. հետևաբար, $\frac{M_1L_1}{ML}=\frac{M_1N_1}{MN}$.

ըստ կառուցման ML=MN որպես քառակուսու կողմեր, ուստի $M_1L_1=$

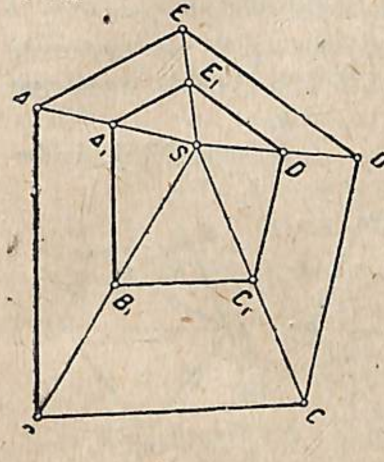
$=M_1N_1$, այսինքն $K_1L_1M_1N_1$-ը քառակուսի է։

§ 7. ՆՄԱՆԱԴԻՐ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ։ ՆՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆ

Խնդիր։ Կառուցել տրված բազմանկյանը նման բազմանկյուն։

Կառուցում։ Վերցնենք տրված ABCDE բազմանկյան ներսը որևէ S կետ և նրանից տանենք ճառագայթներ դեպի բազմանկյան գագաթները (նկ. 240)։

Ճառագայթներից մեկի, օրինակի համար SA-ի, վրա վերցնենք A_1 կետը (այս կետը կարելի է ընտրել տրված բազմանկյան թե ներսում և թե նրանից դուրս) և տանենք $A_1B_1 \parallel AB$, մինչև որ նա հատվի SB ճառագայթի հետ B_1 կետում. B_1 կետից տանենք $B_1C_1 \parallel BC$ մինչև SC ճառագայթի հետ C_1 կետում հատվելը. այնուհետև տանենք $C_1B_1 \parallel CD$, $D_1C_1 \parallel DE$ և միացնենք E_1-ն A_1-ի հետ. կստանանք $A_1B_1C_1D_1E_1$ բազմանկյունը, որը նման կլինի տրված ABCDE բազմանկյանը։



Նկ. 240.

Իրոք, ճառագայթափնջի վերաբերյալ թեորեմի հիման վրա ունենք՝

$$\frac{SA_1}{SA}=\frac{SB_1}{SB}=\frac{SC_1}{SC}=\frac{SD_1}{SD}=\frac{SE_1}{SE}.$$

Կնշանակի, $E_1A_1 \parallel EA$, որովհետև

$$\frac{SA_1}{SA}=\frac{SE_1}{SE}.$$

$A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$ և այլն, հետևաբար, $\angle A_1=\angle A$, $\angle B_1=\angle B$, $\angle C_1=C$ և այլն, որպես զուգահեռ կողմեր ունեցող անկյուններ, և $\frac{SA_1}{SA}=\frac{A_1B_1}{AB}=$

$$=\frac{SB_1}{SB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{SC_1}{SC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{SD_1}{SD}=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{SE_1}{SE}=\frac{E_1A_1}{EA}.$$

Այս հարաբերությունների հավասարությունից հետևում է, որ

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{A_1E_1}{AE}.$$

$A_1B_1C_1D_1E_1$ և ABCDE բազմանկյուններն ունեն համապատասխանաբար հավասար անկյուններ և նրանց համապատասխան կողմերը համեմատական են. հետևաբար նրանք նման են։

S կետը կոչվում է նմանության կենտրոն, իսկ բազմանկյունները կոչվում են նմանադիր։ Եթե մի բազմանկյունը մյուսի նկատ-

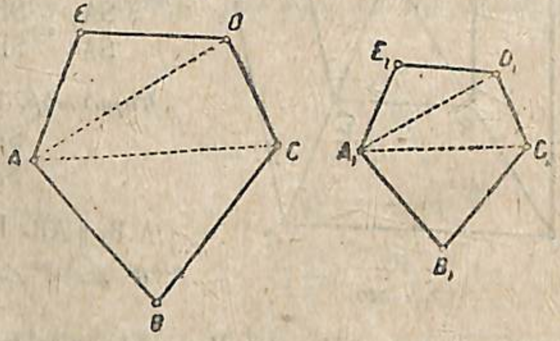
ժամը տեղաշարժենք, օրինակ նրանցից մեկը պտտենք, ապա բազմանկյունների նմանությունը չի խախտվելը կխանգարվի, սակայն նրանց նմանադրությունը, այն է՝ նրանց համապատասխան կողմերը զուգահեռ չեն լինի և համապատասխանաբար հավասար անկյունների գագաթները միացնող ճառագայթները միևնույն կետով չեն անցնի. բազմանկյունները կկորցնեն նմանության կենտրոնը:

Բազմանկյունների նմանության անհրաժեշտ պայմաններն են՝ 1) նրանց համապատասխան անկյունների հավասարությունը, 2) նրանց համապատասխան կողմերի համեմատականությունը: Նմանադիր բազմանկյունները, որոնից զատ, պետք է ունենան նաև նմանության կենտրոն:

§ 8. ՆՄԱՆ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Որևէ հատակագիծ զանազան մասշտաբներով ներկայացնելու համար օգտակար է տվյալ հատակագիծն առանձին մասերի բաժանել և ապա այդ մասերը մեկը մյուսի հետևից վերագծագրել: Հատակագիծը սովորաբար յեռանկյունների յեն բաժանում: Այսպիսի վերագծագրման հիմք են կազմում հետևյալ յերկու թեորեմները.

1. Թեորեմ: Երկու նման և նմանադիր բազմանկյունների համապատասխանաբար հավասար անկյունների գագաթներից տարած անկյունագծերը բաժանում են այդ բազմանկյունները միևնույն թվով նման և նմանադիր յեռանկյունների:



Նկ. 241.

Տված՝ $A_1B_1C_1D_1E_1 \sim ABCDE$ (նկ. 241), այսինքն 1) $\angle A_1=\angle A$, $\angle B_1=\angle B$ և այլն.

2) $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\ldots$,

3) A_1D_1 և AD, A_1C_1 և AC համապատասխան անկյունագծեր են

Ապացուցել՝ 1) $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$,

2) $\triangle A_1C_1D_1 \sim \triangle ACD$,

3) $\triangle A_1D_1E_1 \sim \triangle ADE$.

Ապացուցում: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$, վորովհետև ըստ պայմանի $\angle B = \angle B$ և $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}$, նրանց նմանությունից հետևում է, վոր $\angle A_1C_1B_1=\angle ACB$, բայց $\angle C_1=\angle C$, ուստի $\angle A_1C_1D_1=\angle ACD$, բացի դրանից, $\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{A_1C_1}{AC}$, բայց $\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}$, ուստի $\frac{A_1C_1}{AC}=\frac{C_1D_1}{CD}$: բայց յեթե

$$\angle A_1C_1D_1=\angle ACD \text{ և } \frac{A_1C_1}{AC}=\frac{C_1D_1}{CD},$$

ապա $\triangle A_1C_1D_1 \sim \triangle ACD$:

Նույն ձևով ապացուցվում է, վոր

$$\triangle A_1D_1E_1 \sim \triangle ADE.$$

Հետևանք: Նման բազմանկյունների համապատասխան անկյունագծերը համեմատական են համապատասխան կողմերին՝

$$\frac{A_1B}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{A_1C_1}{AC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{A_1D_1}{AD} \text{ և այլն.}$$

2. Թեորեմ: (հակադարձ). Եթե յերկու բազմանկյուններ համապատասխան անկյունագծերով բաժանվում են միևնույն թվով նման և նմանադիր յեռանկյունների, ապա այդպիսի բազմանկյուններ նման են:

Տված՝ $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ | և նման են դասավորված
$\triangle A_1C_1D_1 \sim \triangle ACD$ |
$\triangle A_1D_1E_1 \sim \triangle ADE$ | (նկ. 241)

Ապացուցել՝ $A_1B_1C_1D_1E_1 \sim ABCDE$, այսինքն

1) $\angle A=\angle A_1$ $\angle B=\angle B_1$ և այլն.

2) $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}$ և այլն:

Ապացուցում. $A_1B_1C_1$ և ABC յեռանկյունների նմանությունից հետևում է, վոր $\angle B_1=\angle B$ և $\angle A_1C_1B_1=\angle ACB$ (1): $A_1C_1D_1$ և ACD յեռանկյունների նմանությունից հետևում է, վոր $\angle A_1C_1D_1=\angle ACD$ (2). անդամ առ անդամ գումարելով (1) և (2) հավասարությունները ստանում ենք, վոր $\angle C_1=\angle C$. նման ձևով ապացուցվում է բազմանկյունների մնացած անկյունների հավասարությունը.

$A_1B_1C_1$ և ABC յեռանկյունների նմանությունից հետևում է նրանց կողմերի համեմատականությունը, այն է՝ $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{A_1C_1}{AC}$. $A_1C_1D_1$ և ACD յեռանկյունների նմանությունից ունենք $\frac{A_1C_1}{AC}=\frac{C_1D_1}{CD}$. բաղդատելով վերջին յերկու հավասարությունները, ստանում ենք $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}$: Նույն ձևով ապացուցում ենք յերկու բազմանկյունների մյուս կողմերի համեմատականությունը:

Այսպես ուրեմն՝ $A_1B_1C_1D_1E_1 \sim ABCDE$.

§ 9. ՆՄԱՆ ՊԱՏԿԵՐՆԵՐԻ ՊԱՐԱԳԾԵՐԻ ՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Թեորեմ։ Նման բազմանկյունների պարագծերն այնպես են հարաբերում իրար, ինչպես նրանց համապատասխան կողմերը։

Տված՝ $A_1B_1C_1D_1E_1 \sim ABCDE$ *(նկ. 241)*

Ապացուցել՝ $\frac{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1+E_1A_1}{AB+BC+CD+DE+EA}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\dots$

Ապացուցում. ABCDE *և* $A_1B_1C_1D_1E_1$ *բազմանկյունների նմանությունից ունենք՝*

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{E_1A_1}{EA}=K.$$

Հավասար հարաբերությունների շարքի հատկության հիման վրա ունենք՝

$$\frac{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1+E_1A_1}{AB+BC+CD+DE+EA}=K=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\dots$$

կամ $\frac{p_1}{p}=\frac{A_1B_1}{AB}$, *որտեղ* p_1*-ը և* p*-ն տվյալ բազմանկյունների պարագծերն են.*

Թեորեմն իրավացի է. բոլոր նման բազմանկյունների համար, որքան էլ լինի կողմերի թիվը n*-ը նա իրավացի է նաև այն դեպքում, երբ* $n=3$, *այսինքն նման եռանկյունների համար։*

§ 10. ՆՄԱՆ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐԻ ՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

1. Թեորեմ. Մեկական հավասար անկյուն ունեցող երկու եռանկյունների մակերեսներն իրար այնպես են հարաբերում, ինչպես այդ անկյունը կազմող կողմերի արտադրյալները։

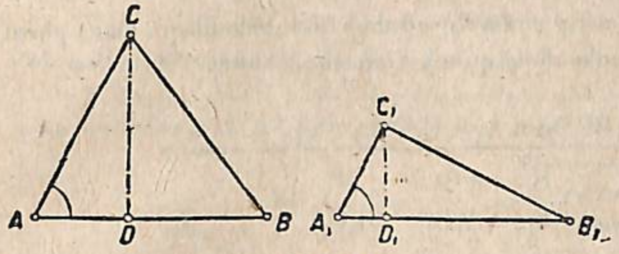
Տված՝ $\triangle ABC$ *և* $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$ *(նկ. 242).*

Ապացուցել՝ $\frac{S}{S_1}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}$.

Ապացուցում. *Տանելով տվյալ եռանկյունների մեջ* CD *և* C_1D_1 *բարձրությունները, ունենում ենք՝*

$$\frac{\text{մակ. } ABC}{\text{մակ. } A_1B_1C_1}=\frac{S}{S_1}=\frac{AB\cdot CD}{A_1B_1\cdot C_1D_1}=\frac{AB\cdot CD}{A_1B_1C_1D_1} \quad (1)$$

$\triangle ACD \sim \triangle A_1C_1D_1$, *որովհետև նրանք ուղղանկյուն են և ունեն մեկական հավասար սուր անկյուն՝* $\angle A=\angle A_1$, *նրանց նմանությունից հետևում է, որ* $\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$; (2)



Նկ. 242.

Փոխարինելով (1) հավասարության մեջ $\frac{CD}{C_1D_1}$ *հարաբերությունը. նրան հավասար* $\frac{AC}{A_1C_1}$ *հարաբերությամբ ստանում ենք՝*

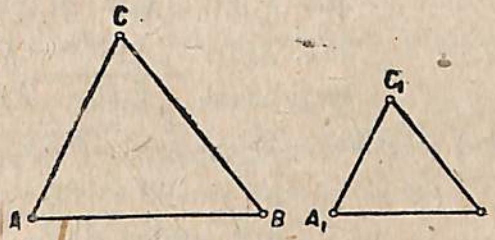
$$\frac{S}{S_1}=\frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}$$

Թեորեմը տեղի ունի նաև այն դեպքում, երբ $\angle A+\angle A_1=2d$.

2. Թեորեմ. Նման եռանկյունների մակերեսներն այնպես են հարաբերում, ինչպես համապատասխան կողմերի քառակուսիները։

Տված՝ $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ *(նկ. 243).*

Ապացուցել՝ $\frac{S}{S_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{AC^2}{A_1C_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2}$.



Նկ. 243.

Ապացուցում. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, *հետևաբար,* $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, *ուստի*

$$\frac{S}{S_1}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}=\frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{AC}{A_1C_1} \quad (1)$$

Եռանկյունների նմանությունից հետևում է, որ

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}. \quad (2)$$

փոխարինելով, օրինակ՝ (1) հավասարության մեջ $\frac{AC}{A_1C_1}$ *հարաբերությունը (2) շարքի հարաբերություններից* $\frac{AB}{A_1B_1}$*-ով, կստանանք՝*

$$\frac{S}{S_1}=\frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2},$$ *բայց ըստ (2)-ի*

$$\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2=\left(\frac{AC}{A_1C_1}\right)^2=\left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2.$$

$$\frac{S}{S_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{AC^2}{A_1C_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2}.$$

3. Թեորեմ. Նման բազմանկյունների մակերեսները հարաբերում են, ինչպես համապատասխան կողմերի քառակուսիները։

Տված՝ $ABCDE \backsim A_1B_1C_1D_1E_1$ *(նկ. 243 ա)*

Ապացուցել՝ $\frac{S}{S_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{BC}{B_1C_1^2}=\dots$

Ապացուցում. *A և A_1 համապատասխան գագաթներից տարված անկյունագծերով տվյալ բազմանկյունները բաժանվում են միևնույն թվով համապատասխանաբար նման յեռանկյունների՝ ABC և $A_1B_1C_1$, ACD և $A_1C_1D_1$, ADE և $A_1D_1E_1$: Յեռանկյունների նմանությունից հետևում է՝*

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\text{մակ. } ABC}{\text{մակ. } A_1B_1C_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2},\ \frac{\text{մակ. } ACD}{\text{մակ. } A_1C_1D_1}=\frac{CD^2}{C_1D_1^2}\\ \frac{\text{մակ. } AED}{\text{մակ. } A_1E_1D_1}=\frac{ED^2}{E_1D_1}=\frac{AE^2}{A_1E_1^2}\end{array}\right| \quad (1)$$

Իսկ բազմանկյունների նմանությունից ունենք՝

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EA}{E_1A_1},$$

կամ

$$\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2}=\frac{CD^2}{C_1D_1^2}=\frac{DE^2}{D_1E_1^2}=\frac{EA^2}{E_1A_1^2}. \quad (2)$$

Բաղդատելով (1) և (2) շարքերի հարաբերությունները, ունենում ենք՝

$$\frac{\text{մակ.} ABC}{\text{մակ.} A_1B_1C_1}=\frac{\text{մակ.} ACD}{\text{մակ.} A_1C_1D_1}=\frac{\text{մակ.} AED}{\text{մակ.} A_1E_1D_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\dots$$

Հավասար հարաբերությունների շարքի հատկության հիման վրա ստանում ենք՝

$$\frac{\text{մակ.} ABC+\text{մակ.} ACD+\text{մակ.} AED}{\text{մակ.} A_1B_1C_1+\text{մակ.} A_1C_1D_1+\text{մակ.} A_1E_1D_1}=$$
$$=\frac{\text{մակ.}\ ABCDE}{\text{կակ.}\ A_1B_1C_1D_1E_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2}=\dots$$

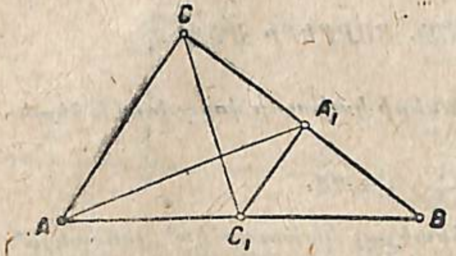
Հարցեր յեվ վարժություններ.

1. Ինչու համապատասխանաբար ուղղահայաց և կամ զուգահեռ կողմեր ունեցող յեռանկյունները նման են։

2. Ինչու ուղղանկյունը և քառակուսին չեն կարող նման պատկերներ համարվել, թեև նրանց անկյունները հավասար են իբրև ուղիղ անկյուններ։

3. Ինչու a կողմն ունեցող քառակուսին և 2 a կողմն ունեցող շեղանկյունը նման պատկերներ չեն, թեև նրանց կողմերը համեմատական են։

4. Յերկու յեռանկյունների նմանության համար բավական է, որ կամ նրանց անկյունները համապատասխանաբար հավասար լինեն և կամ կողմերը համեմատական։ Բավարա՞ր է արդյոք այս պայմաններից մեկը, որպեսզի նույն թվով կողմեր ունեցող յերկու բազմանկյուններ նման լինեն։



Նկ. 244.

5. Վերցնել փոքր ABC յեռանկյուն և ճառագայթափնջի յեղանակով կառուցել նրա նմանը, նմանության գործակիցը վերցնել K=1,5։

6. ABC յեռանկյան մեջ կողմերն են՝ AB= 6 սմ, BC=8 սմ, AC= 9 սմ։ Հաշվել նման յեռանկյան կողմերը, յեթե K=2,5։

7. Սեղանի անկյունագծերն իրարով այնպիսի մասերի յեն բաժանվում, որոնք համեմատական են հիմքերին։ Ապացուցել։

8. ABC յեռանկյան մեջ տարված են AA_1 և CC_1 միջնագծերը *(նկ. 244)*։ Ապացուցել, վոր C_1A_1 ուղիղը տվյալ յեռանկյունից կտրում է նրան նման մի յեռանկյուն, յեվ վոր AA_1 ու CC_1 միջնագծերը բաժանվում են 2:1 հարաբերությամբ։

9. Տված են յերեք յեռանկյուններ, վորոնց կողմերը հավասար են, 1) 10, 8 և 12, 2) 7,5, 6 և 7,2, 3) 25, 20 և 24։

Վորոշել, թե այս յեռանկյուններից վորո՞նք են նման։

10. Յեռանկյան մեջ, վորի հիմքն է a=10 սմ., բարձրությունն է h=15 սմ, ներգծած է մի քառակուսի, վորի յերկու գագաթները գտնվում են յեռանկյան հիմքի վրա, իսկ մյուս յերկու գագաթները գտնվում են յեռանկյան կողմերի վրա։ Գտնել քառակուսու կողմի յերկարությունը։

11. Անկյան մեջ ներգծած են արտաքին շոշափում ունեցող յերկու շրջանագծեր, վորոնց կենտրոններն անկյան գագաթից հեռավորված են 9 սմ և 3 սմ։ Վորոշել այդ շրջանագծերի շառավիղները։

12. ABCD *ուղղանկյան ներսը գտնվում է մի ուրիշ* $A_1B_1C_1D_1$ *ուղղանկյուն, վորի կողմերը զուգահեռ են առաջինի կողմերին և սրանցից հավասարահեռ են։ Նման են այդ ուղղանկյունները։*

XVII. ՉԱՓԱԿԱՆ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԻ ՄԵՋ

§ 1. ԿԱԽՈՒՄԸ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

1. Ամեն մի յեռանկյան անկյունների կախումը վորոշվում է հետևյալ հավասարությամբ.

$$\angle A+\angle B+\angle C=2d։$$

2. Յեռանկյան կողմերի միջև հետևյալ կախումը կա՝ յեռանկյան վորևէ կողմը փոքր է նրա մյուս յերկու կողմերի գումարից և մեծ է նրանց տարբերությունից.

$$a<b+c \text{ և } a>b-c \text{ կամ } b-c<a<b+c.$$

3. Յեռանկյան կողմերի և անկյունների միջև տեղի ունի հետևյալ կախումը՝

Յեռանկյան մեծ կողմի դիմաց ընկած է մեծ անկյուն և, ընդհակառակը, յեռանկյան մեծ անկյան դիմաց ընկած է մեծ կողմ. յեթե $AC>BC$, *ապա* $\angle B>\angle A$. *յեթե* $\angle B>\angle A$, *ապա* $AC>BC$։

Վերը թված թեորեմները վորոշակի թվական կախումներ չեն տալիս յեռանկյան կողմերի և նրանց հետ կապված տարրերի՝ բարձրության, կողմերի առաջաձգությունների, միջնագծի և այլնի միջև, այլև յեռանկյան կողմերի ու նրա անկյունների միջև։

Ստորև բերված թեորեմները լրացնում են այդ բացը և թվական կախում են հաստատում յեռանկյան գծային տարրերի միջև. ինչ վերաբերում է յեռանկյան կողմերի և անկյունների թվական կախմանը, ապա վերջինս քննության է առնվում մաթեմատիկայի մի հատուկ բաժնում՝ յեռանկյունաչափության մեջ։

§ 2. ՉԱՓԱԿԱՆ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

1. Թեորեմ. Ուղղանկյուն յեռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից ներքնաձիգին տարած բարձրությունը բաժանում է յեռանկյունը յերկու

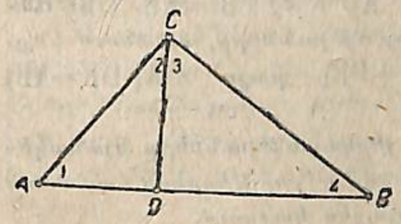
յեռանկյունների, վորոնք նման են թե՛ իրար և թե՛ տված յեռանկյանը։

Տված՝ $\triangle ABC, \angle ACB=d.\ CD\perp AB$ *(նկ. 245)*

Ապացուցել՝ $\triangle ADC \backsim \triangle BDC \backsim ABC.$

Ապացուցում։ *Դիտարկենք ուղղանկյուն յեռանկյունների հետևյալ զույգերը.*

1) $\triangle ACD$ *և* $\triangle ABC$։ *Նրանց մեջ* $\angle 1$-*ը ընդհանուր է, կնշանակի նրանց անկյունները համապատասխանաբար հավասար են, ուստի նրանք նման են* $\triangle ACD \backsim \triangle ABC$։



2 4

2) $\triangle BCD$ *և* $\triangle ABC$։ *Նրանց մեջ* $\angle 4$-*ն ընդհանուր է, ուստի նրանք նման են՝* $\triangle CBD \backsim \triangle BCD$։

3) $\triangle ACD$ *և* $\triangle CBD$։ *Այս յեռանկյուններից յուրաքանչյուրը նման է տվյալ* ABC *յեռանկյան, ուստի նրանք էլ նման են* $\triangle ACD \backsim \triangle ABC$ *և* $\triangle BCD \backsim \triangle ABC$. *հետևաբար.* $\triangle ACD \backsim \triangle BCD$.

Թեորեմ։ Ուղղանկյուն յեռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից ներքնաձիգին տարած բարձրությունը միջին համեմատական է էջերի՝ ներքնաձիգի վրա ընկած առաջաձգությունների նկատմամբ։

Տված՝ $\triangle ABC, \angle ACB=d,\ CD\perp AB$ *(նկ. 245).*

Ապացուցել՝ $AD:CD:DB$

Ապացուցում։ $\triangle ACD$-*ի և* $\triangle CBD$-*ի նմանությունից հետևվում է նրանց համապատասխան կողմերի համեմատականությունը, այսինքն* $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB}$ *կամ* $CD^2=AD\cdot DB$, *վորտեղից* $CD=\sqrt{AD\cdot BD}$. *այստեղ, ինչպես և հետագայում, վերցվում է արմատի միայն թվական արժեքը, վորովհետև նկատի յե ունեցվում հատվածի միայն յերկարությունը և վոչ թե նաև ուղղությունը։*

3. Թեորեմ։ Էջերից յուրաքանչյուրը միջին համեմատական է ներքնաձիգի և այդ էջի ներքնաձիգի վրա ընկած առաջաձգության նկատմամբ։

Ապացուցում։ *1)* ACD *և* ABC *յեռանկյունների նմանությունից (նկ. 245) հետևում է՝* $AB:AC=AC:AD$-*ի կամ* $AC^2=AB\cdot AD$, *վորտեղից* $AC=\sqrt{AB\cdot AD}$

2) CBD *և* ABC *յեռանկյունների նմանությունից հետևում է՝* $AB:CB=CB:DB$ *կամ* $CB^2=AB\cdot DB$, *վորտեղից* $CB=\sqrt{AB\cdot DB}$։

Հետևանք։ Էջերի քառակուսիներն իրար այնպես են հարաբերում ինչպես նրանց առաջաձգությունները ներքնաձիգի վրա։

Իրոք, $AC^2=AB\cdot AD$ և $CB = AB\cdot DB$։

Մի հավասարությունն անդամ առ անդամ բաժանելով մյուսի վրա, ստանում ենք՝

$$\frac{AC^2}{CB^2}=\frac{AB\cdot AD}{AB\cdot DB}=\frac{AD}{DB}$$

4. **Թեորեմ։** (Պյութագորաս). Ներքնաձիգի քառակուսին հավասար է էջերի քառակուսիների գումարին։

Տված՝ $\triangle ABC$, $\angle C=d$.

Ապացուցել՝ $AC^2+CB^2=AB^2$.

Ապացույց (յերրորդ). *1)* $AC^2=AB\cdot AD$ *և 2)* $CB^2=AB\cdot DB$։ *Անդամ առ անդամ գումարելով այս հավասարությունները, ստանում ենք,* $AC^2+CB^2=AB\cdot AD+AB\cdot DB=AB\ (AD+DB)$. *բայց* $AD+DB=AB$, *ուստի* $AC^2+CB^2=AB\cdot AB=AB^2$։

Ուղղանկյուն յեռանկյան կողմերի յերկարությունները նշանակելով համապատասխանաբար a, b *և* c *տառերով, տվյալ թեորեմը համառոտ այսպես են գրում՝* $ab^2+b^2=c^2$ *և լրիվ այսպես կարդում.*

Էջերի յերկարություններն արտահայտող թվերի քառակուսիների գումարը հավասար է ներքնաձիգի յերկարությունն արտահայտող թվի քառակուսուն:

Հետևանք։ Էջի քառակուսին հավասար է ներքնաձիգի և մյուս էջերի քառակուսիների տարբերությանը:

$a^2+b^2=c^2$, *վորտեղից* $a^2=c^2-b^2$, *կամ* $a=\sqrt{c^2-b^2}$ *և* $b^2=c^2-a^2$., *կամ* $b=\sqrt{c^2-a^2}$։

5. **Թեորեմ** (հակադարձ)։ Յեթե յեռանկյան a, b և c կողմերի միջև գոյություն ունի $a^2+b^2=c^2$ կախումը, ապա յեռանկյունն ուղղանկյուն է,

Տված՝ *a-ն, b-ն ու c-ն յեռանկյան կողմերն են և* $a^2+b^2=c^2$.

Ապացուցել՝ յեռանկյունն ուղղանկյուն է։

Ապացուցում։ *Կկառուցենք այն ուղղանկյուն յեռանկյունը, վորի էջերն են* a *ու* b, *և նրա ներքնաձիգը կնշանակենք* m*-ով։ Այն ժամանակ Պյութագորասի թեորեմի համաձայն* $a^2+b^2=m^2$։ *Բաղդատելով այս հավասարությունը տվյալ* $a^2+b^2=c^2$ *հավասարության հետ յեզրակացնում ենք վոր* $c^2=m^2$, *կամ* $c=m$։ *Կնշանակի, տվյալ յեռանկյունը և կառուցած ուղղանկյուն յեռանկյունը հավասար են ըստ յերեք կողմերի, ուստի տվյալ յեռանկյունը ևս ուղղանկյուն յեռանկյուն է։*

6. Քննության առած թեորեմը, ինչպես և նրա հակադարձը, յերկրաչափության կարևորագույն թեորեմներից մեկն է. այդ թեորեմը վերագրվում է հույն փիլիսոփա Պյութագորասին, ուստի և կոչվում է «Պյութագորասի թեորեմ»։ Հաստատված է, վոր ուղղանկյուն յեռանկյան կողմերի միջև այն թվական կախումը, վոր վորոշված է տվյալ

թեորեմով, հայտնի յեր արդեն յեգիպտացիներին՝ Պյութագորասի ուսուցիչներին։ Այն ուղղանկյուն յեռանկյունը, վորի կողմերն են, 3, 4 և 5, կոչվում է յեգիպտական *յեռանկյուն։*

Հին հողաչափները ուղիղ անկյունը կառուցելու համար հետևյալ յեղանակն էին գործում—հանգույցների միջոցով պարանը նրանք բաժանում էին 12 հավասար մասերի, կապում էին իրար հետ պարանի ծայրերը և ձգում էին այն գետնի վրա ցցերի միջոցով, տալով նրան այնպիսի յեռանկյան տեսք, վորի կողմերն ունեն 3, 4 և 5 բաժանումներ. այն ժամանակ ուղիղ անկյուն եր ստացվում այն կողմերի միջև, վորոնք 3 և 4 բաժանումներ են պարունակում։

Այն ուղղանկյուն յեռանկյունները, վորոնց կողմերն ամբողջ թվերով են չափվում, կոչվում են Պյութագորյան յեռանկյուններ, *իսկ թվերն իրենք՝ Պյութագորյան թվեր։ Այսպես, օրինակի համար, Պյութագորյան թվեր են հետևյալները. 3, 4 և 5; 5, 12 և 13; 6, 8 և 10; 7, 24 և 25; 8, 15, և 17; 8, 12, 15; 10, 24, 26 և այլն։*

§ 3. ՉԱՓԱԿԱՆ ԿԱԽՈՒՄԸ ԽՈՏՈՐԱՆԿՅՈՒՆ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

1. **Թեորեմ:** Յեռանկյան մեջ սուր անկյան դիմացի կողմի քառակուսին հավասար է մյուս յերկու կողմերի քառակուսիների գումարին, հանած կողմերից մեկի և այն առաջաձգության կրկնապատիկ արտադրյալը, վոր մյուս կողմը նետում է այդ կողմի վրա։

Տված՝ $\triangle ABC$, $\angle A$*-ն սուր է. m-ը c-ի առաջաձգությունն է b-ի վրա (նկ. 246)*

Ապացուցել՝ $a^2=b^2+c^2-2bm$։

Ապացուցում։ B *գագաթից տանենք* $BD=h$ *բարձրությունը. ստանում ենք յերկու ուղղանկյուն յեռանկյուններ՝* ABD *և* BDC, $AD=m$ *ներկայացնում է* AB *կողմի առաջաձգությունը* AC *կողմի վրա։*

BDC *յեռանկյունից ունենք՝*

$$a^2=h^2+(b-m^2). \qquad (1)$$

ABD *յեռանկյունից ունենք՝*

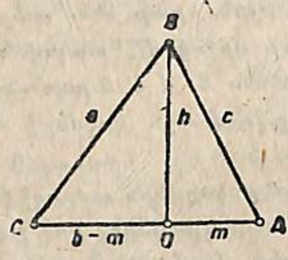
$$h^2=c^2-m^2. \qquad (2)$$

Անդամ առ անդամ գումարելով (1) և (2) հավասարությունները, կատարենք անհրաժեշտ ձևափոխությունները, հաջորդաբար ստանում ենք,

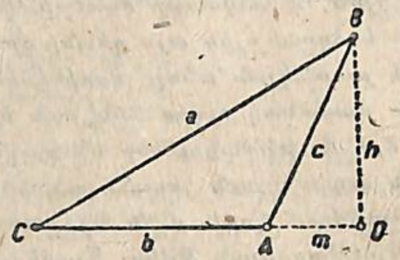
$$a^2+h^2=h^2+(b-m)^2+c^2-m^2;\ a^2=(b-m)^2+c^2-m^2;$$

$$a^2=b^2-2bm+m^2+c^2-m^2 \text{ կամ } a^2=b^2+c^2-2bm.$$

2. **Թեորեմ։** Բութանկյուն եռանկյան մեջ բութ անկյան դիմացի կողմի քառակուսին հավասար է մյուս երկու կողմերի քառակուսիների գումարին, ավելացրած այդ կողմերից մեկի և այն առաջաձգության կրկնապատիկ արտադրյալը, որ մյուս կողմը նետում է այդ կողմի շարունակության վրա։



Նկ. 246



Նկ. 247

Տված՝ $\triangle ABC$: *$\angle A$-ն բութ անկյուն է (Նկ. 247)*

Ապացուցել՝ $a^2=b^2+c^2+2bm$.

Ապացուցում: *B գագաթից իջեցնում ենք AC հիմքի շարունակության վրա BD=h բարձրությունը. ստանում ենք երկու ուղղանկյուն եռանկյուններ, BCD և ADB; AD=m ներկայացնում է AB կողմի առաջաձգությունը AC կողմի շարունակության վրա. CD=b+m.*

BCD *եռանկյունից ունենք՝*

$$a^2=h^2+(b+m)^2 \qquad (1)$$

ADB *եռանկյունից ունենք՝*

$$h^2=c^2-m^2. \qquad (2)$$

Անդամ առ անդամ գումարելով (1) և (2) հավասարումները, կատարենք անհրաժեշտ ձևափոխումները. հաջորդաբար ստանում ենք՝

$$a^2+h^2=h^2+(b+m)^2+c^2-m^2,$$
$$a^2=(b+m)^2+c^2-m^2,$$
$$a^2=b^2+2bm+m^2+c^2-m^2,$$

կամ

$$a^2=b^2+c^2+2bm.$$

3. Բաղդատելով սուր անկյան դիմացի կողմի քառակուսու բանաձևը բութ անկյան դիմացի կողմի քառակուսու բանաձևի հետ, նկատում ենք, որ նրանք իրարից տարբերվում են միայն վերջին անդամով։ Երկու բանաձևերը կարելի յէ միացնել մեկի մեջ և կստանանք՝

$$a^2=b^2+c^2\pm2bm,$$

որտեղ m-ը c կողմի առաջաձգությունն է B կողմի կամ նրա շարունակության վրա, մինուս նշանն այն ժամանակ է վերցվում, յերբ վորոշելի կողմը սուր անկյան դիմաց է ընկած, իսկ պլյուս նշանն այն ժամանակ, յերբ նա բութ անկյան դիմաց է գտնվում։

4. Յեթե ABC սրանկյուն յեռանկյան մեջ (Նկ. 246) AB կողմը պտտենք B կետի շուրջը ժամացույցի սլաքի շարժման ուղղությամբ, ապա A անկյունը կմեծանա, իսկ m առաջաձգությունը կփոքրանա, յերբ A անկյունն ուղիղ անկյուն կդառնա, այն ժամանակ m առաջաձգությունը զերոյի կհավասարվի, և մենք կստանանք Պյութագորասի թեորեմը։ Իրոք, $a^2=b^2+c^2-2bm$ հավասարությունից, յերբ $m=0$, ստանում ենք՝ $a^2=b^2+c^2$։ Իսկ յեթե ABC բթանկյուն յեռանկյան մեջ (Նկ. 247) BA կողմը պտտենք B կետի շուրջը ժամացույցի սլաքի շարժման հակադիր ուղղությամբ, ապա և A անկյունը և m առաջաձգությունը կփոքրանան. և յերբ A անկյունն ուղիղ անկյուն կդառնա, ապա m առաջաձգությունը կետի կվերածվի և հավասար կլինի զերոյի. դարձյալ կստանանք Պյութագորասի թեորեմը՝ $a^2=b^2+c^2$։ Այսպես ուրեմն, Պյութագորասի թեորեմը վերջին յերկու թեորեմների մասնավոր դեպքն է։

5. Պյութագորասի թեորեմը և վերջին յերկու թեորեմները թույլ են տալիս յեռանկյան տվյալ կողմերով վորոշել նրա տեսակն անկյունների նկատմամբ։

Յեթե ABC յեռանկյան մեջ a-ն ամենամեծ կողմն է, և

1) $a^2<b^2+c^2$. *ապա յեռանկյունը սրանկյուն է.*

2) $a^2=b^2+c^2$. *ապա յեռանկյունն ուղղանկյուն է.*

3) $a^2>b^2+c^2$, *ապա յեռանկյունը բթանկյուն է։*

Յուրաքանչյուր առանձին դեպքում բավական է ամենամեծ կողմի քառակուսին բաղդատել մյուս յերկու կողմերի քառակուսիների գումարի հետ։

6. **Խնդիր։** Վորոշել յեռանկյան տեսակը, յերբ նրա կողմերն են՝ 13 սմ, 9 սմ և 4 սմ:

Լուծում. *$13^2>9^2+4^2$, հետևաբար յեթե յեռանկյուն գոյություն ունի, ապա նա բթանկյուն է։*

Սակայն խնդրի տվյալներով չի կարելի յեռանկյուն կառուցել, վորովհետև չի պահպանված յեռանկյան կառուցման համար անհրաժեշտ պայմանը, ըստ վորի ամենամեծ կողմը պետք է փոքր լինի մյուս յերկու կողմերի գումարից, տվյալ խնդրի մեջ $13=9+4$, այսինքն մեծ կողմը հավասար է մյուս յերկու կողմերի գումարին, հետևաբար, յեռանկյուն չի ստացվում։

Տվյալ խնդրի վերլուծությունը ցույց է տալիս, վոր յեռանկյան տեսակի մասին նրա կողմերով դատելուց առաջ անհրաժեշտ է հավաստիանալ՝ հնարավոր է արդյոք յեռանկյան կառուցումը խնդրի տվյալներով։

Այսպես ուրեմն, $13^2>9^2+4^2$ պայմանն անհրաժեշտ պայման է բթանկյուն յեռանկյան գոյության համար, բայց բավարար պայման չէ: Յերկու պայմանները միասին պետք է տեղի ունենան, վորպեսզի իրավունք ունենանք ասելու, թե յեռանկյունը բթանկյուն է։

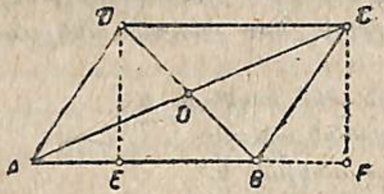
§ 4. ԿԱԽՈՒՄԸ ԶՈՒԳԱՀԵՌԱԳԾԻ ԱՆԿՅՈՒՆԱԳԾԵՐԻ ՅԵՎ ԿՈՂՄԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

Թեորեմ: Զուգահեռագծի անկյունագծերի քառակուսիների գումարը հավասար է նրա կողմերի քառակուսիների գումարին։

Տված՝ ABCD-ն *զուգահեռագիծ է,* $AB \parallel CD$ *և* $AD \parallel BC$ *(նկ. 248)*

Ապացուցել՝ $AC^2+BD=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$.

Ապացուցում: ABCD *զուգահեռագծի* B *և* C *գագաթներից կտանենք* DE *և* CF *բարձրությունները. ստանում ենք* DAE *և* CBF *ուղղանկյուն յեռանկյունները. այս յեռանկյունները հավասար են, վորովհետև* $DA=CB$ *և* $\angle A=\angle CBF$. *այստեղից յերևում է, վոր* $AF=BF$։



Նկ. 248

ABC *յեռանկյունից ունենք՝*

$$AC^2=AB^2+BC^2+2AB\cdot AF \qquad (1)$$

ABD *յեռանկյունից ունենք՝*

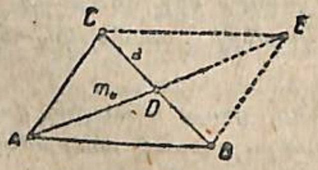
$$BD^2=DA^2+AB^2-2AB\cdot AE \qquad (2)$$

Վերջին հավասարության մեջ DA^2*-ին փոխարինելով* BC^2*-ով և* AE*-ն* BF*-ով, այնուհետև անդամ առ անդամ գումարելով յերկու հավասարությունները, կստանանք՝*

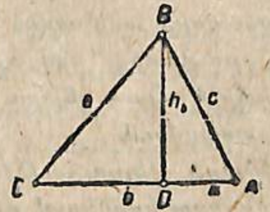
$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2AB^2+2BC^2։$$

§ 5. ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ՄԻՋՆԱԳԾԻ ՅԵՎ ԲԱՐՁՐՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

Խնդիր 1. Հաշվել յեռանկյան m_a միջնագիծը նրա յերեք կողմերով a, b *և* c *(նկ. 249)*։



Նկ. 249



Նկ. 250

Լուծում: ABC *յեռանկյան մեջ տանում ենք* $AD=m_a$ *միջնագիծը, նրա շարունակության վրա դնում ենք* $DE=AD$ *և* E *կետը միացնում ենք* B *ու* C *կետերի հետ, ստանում ենք* ABEC *զուգահեռագիծը, վորի կողմերն են* b *և* c, *իսկ անկյունագծերը՝* $BC=a$ *և* $AE=2m_a$:

Զուգահեռագծի անկյունագծերի և կողմերի հատկության հիման վրա ունենք՝

$$(2m_a)^2+a^2=b^2+b^2+c^2+c^2,$$

կամ $4m_a^2+a^2=2b^2+2c^2$, *կամ* $4m_a^2=2b^2+2c^2-a^2$,

վորտեղից

$$m_a^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}, \text{ կամ } m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

Նմանապես կգտնենք՝

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2} \text{ և } m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

Խնդիր 2. Հաշվել յեռանկյան h_b բարձրությունը նրա յերեք կողմերով a, b *և* c *(նկ. 250)*

Լուծում. *Յեռանկյան* B *գագաթից կտանենք* $BD=h_b$ *բարձրությունը և* AD*-ն կնշանակենք* m*-ով*։

$\triangle ABD$*-ից ունենք՝*

$$h_b^2=c^2-m^2. \qquad (1)$$

m*-ը պետք է փոխարինել այնպիսի արտահայտությամբ, վորը պարունակում է յեռանկյան* a, b *և* c *կողմերը,*

$\triangle ABC$*-ից ունենք՝*

$$a^2=b^2+c^2-2bm,$$

վորտեղից գտնում ենք՝

$$m=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}. \qquad (2)$$

m*-ի արժեքը (2) հավասարությունից կտեղադրենք (1) հավասարության մեջ և կստանանք՝*

$$h_b^2=c^2\,\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{(2b)^2}, \text{ կամ } h_b^2=\frac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{(2b)^2}. \qquad (3)$$

(3) կոտորակի համարիչը վերլուծելով արտադրիչների, ստանում ենք,

$$h_b^2=\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)\cdot(2bc-b^2-c^2+a^2)}{(2b)^2},$$

կամ

$$h_b^2=\frac{[(b+c)^2-a^2]\cdot[a^2-(b-c)^2]}{(2b^2)}$$

Միջակ փակագծերում դրված արտահայտություններից յուրաքանչյուրը վերլուծելով բազմապատկիչների, ստանում ենք՝

$$h_b^2=\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b} \qquad (4)$$

Յեռանկյան պարագիծը նշանակենք 2p, այսինքն $a+b+c=2p$, այն ժամանակ

$$\left.\begin{array}{l} b+c=2p-a,\ b+c-a=2p-a-a=2(p-a);\\ a+b=2p-c,\ a+b-c=2p-c-c=2(p-c);\\ a+c=2p-b,\ a+c-b=2p-b-b=2(p--b) \end{array}\right\} \qquad (5)$$

(4) հավասարության մեջ բազմապատկիչները փոխարինելով (5) արտահայտություններով, ունենում ենք՝

$$h_b^2=\frac{2p\cdot(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c)}{4b},$$

վորտեղից՝

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad (6)$$

h_c-ի և h_a-ի համար հանգունաբար (անալոգիայով) ունենում ենք՝

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\quad h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Այժմ ցույց տանք, վոր $p-a$, $p-b$, $p-c$ արտադրիչներից վոչ մեկը բացասական չե, վորից կհետևի, վոր արմատատակ թիվը դրական ե, և ուրեմն h-ը՝ իրական։

Ամեն մի յեռանկյան մեջ մի կողմը փոքր ե մյուս յերկսի գումարից, ուստի $a<b+c$։ Այս անհավասարության յերկու մասերին ավելացնելով a, ունենում ենք՝ $2a<a+b+c$ կամ, $2a<2p$, վորտեղից $a<p$. ուստի $p-a$ թիվը դրական ե. նույն ձևով ցույց կտանք, վոր $p-b$ և $p-c$ թվերն ել են դրական, կնշանակի արմատատակ արտահայտությունը դրական ե։

§ 6. ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ՄԱԿԵՐԵՍԻ ՎՈՐՈՇՈՒՄԸ ՆՐԱ ՅԵՐԵՔ ԿՈՂՄԵՐՈՎ։ ՀԵՐՈՆԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ

Խնդիր. Գտնել ABC յեռանկյան մակերեսը նրա յերեք կողմերով, a, b և c։

Լուծում. ABC յեռանկյան մակերեսը նշանակենք $S_\triangle$. այն ժամանակ $S_\triangle=\frac{1}{2}a\cdot h_a$, բայց $h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, վորտեղ p-ն յեռանկյան կիսապարագիծն ե, հետևաբար՝

$$S_\triangle=\frac{1}{2}a\cdot\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

կրճատումից հետո կստանանք՝

$$S_\triangle=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$ քառ. միավորների։

Այս բանաձևը կոչվում ե Հերոնի բանաձև, նույն մաթեմատիկոս Հերոն Ալեքսանդրացու անունով։

Հարցեր յեվ վարժություններ

1. Կարելի՞ յե ուղղանկյուն յեռանկյունը կառուցել, իմանալով ա) միայն նրա ներքնաձիգի յերկարությունը, բ) այն հատվածները, վորոնք առաջանում են ներքնաձիգի վրա ուղիղ անկյան գագաթից տարած բարձրության չնորհիվ։

2. Անկյունների տեսակներին նայած՝ ինչպիսի յեռանկյուններ են այն յեռանկյունները, վորոնց կողմերն են՝ ա) 4 սմ, 5 սմ, 6 սմ, բ) 10 սմ, 6 սմ, 4 սմ։

3. Ուղղանկյուն յեռանկյան մեջ h_c բարձրությունը հավասար ե 8 սմ-ի, իսկ էջերից մեկի առաջաձգությունը ներքնաձիգի վրա՝ 6 սմ-ի։ Վորոշել յեռանկյան կողմերը։

4. Յերկու ուժեր, վորոնց մեծություններն են 3,2 կգ և 2,4 կգ, ազդում են մի կետում, իսկ նրանց ուղղությունների իրար հետ ուղիղ անկյուն են կազմում։ Գտնել նրանց հավասարազորի մեծությունը։

5. Յեռանկյան կողմերը հավասար են 8 սմ-ի, 10 սմ-ի և 11 սմ-ի։ Հաշվել միջնագծերը և բարձրությունները։

XVIII. ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐ ՇՐՋԱՆԻ ՄԵՋ

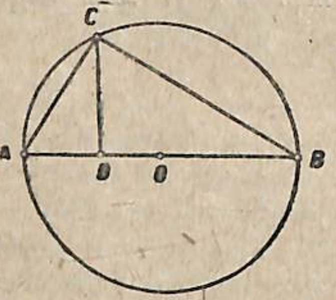
§ 1. ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ԿԵՏԻՑ ՏՐԱՄԱԳԾԻ ՎՐԱ ԻՋԵՑՐԱԾ ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

1. **Թեորեմ**: Շրջանագծի վորևէ կետից տրամագծի վրա իջեցրած ուղղահայացը միջին համեմատական է տրամագծի հատվածների նկատմամբ. իսկ այն յերկու լարերից յուրաքանչյուրը, վորոնք շրջանագծի այդ կետը միացնում են տրամագծի ծայրերի հետ, միջին համեմատական է տրամագծի և այդ լարի այն առաջաձգության նկատմամբ, վոր նա նետում է տրամագծի վրա:

Տված՝ AB-ն *տրամագիծ է.* CD ⊥ AB, AC *և* CB *լարեր են. (Գծ. 251)*

Ապացուցել՝ 1) $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB}$, 2) $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}$, 3) $\frac{AB}{CB}=\frac{CB}{DB}$.

Ապացուցում. ABC *յեռանկյունն ուղղանկյուն է, վորովհետև* C *անկյունը հենվում է տրամագծի վրա.* CD-*ն նրա բարձրությունն է,* AD-*ն և* DB-*ն լարերի (էջերի) առաջաձգություններն են տրամագծի (ներքնաձիգի) վրա, ուստի՝*



Նկ. 251

1) $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD}$, 2) $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}$, 3) $\frac{AB}{CB}=\frac{CB}{BD}$.

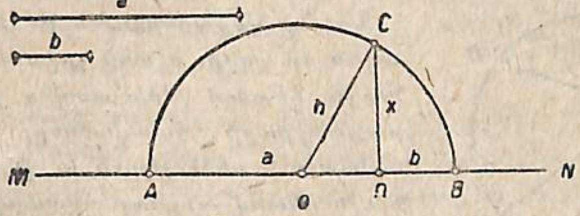
2. **Խնդիր 1.** Կառուցել x հատվածը, վորը լինի a և b տվյալ յերկու հատվածների միջին համեմատականը *(Նկ 252)*:

Կառուցում. MN *ուղիղի վրա* A *կետից հաջորդաբար դնում ենք* AD=a *և* DB=b *հատվածները: Ընդունելով* AB-*ն իբրև տրամագիծ. գծում ենք կիսաշրջանագիծ և* D *կետում* AB-*ին ուղղահայաց ենք տանում և շարունակում մինչև վոր նա* C *կետում հատվի շրջանագծի հետ. այն ժամանակ* CD=x *կլինի վորոնելի հատվածը:*

Իրոք, a:x=x:b, *կամ* $x^2=ab$ *և* $x=\sqrt{ab}$

Խնդիր 2. Ապացուցել, վոր a և b յերկու անհավասար թվերի միջին թվաբանականը մեծ է նույն թվերի միջին յերկրաչափականից:

Լուծում. *Վերցնենք յերկու հատվածներ, վորոնք համապատասխան են* a *և* b *թվերին (Նկ. 252): Կառուցենք* a *և* b *թվերի միջին յերկրաչափականը:* $CD=\sqrt{ab}$:



Նկ. 252

Իսկ նույն թվերի միջին թվաբանականը, ինչպես յերևում՝ է նկարից, հավասար է $\frac{AD+DB}{2}=AO=r$: *Հետևաբար,* $\frac{a+b}{2}=r$: *Բայց* CO-*ն նույնպես հավասար է* r-*ի:* COD *ուղղանկյուն յեռանկյունից յերևում է, վոր* CO>CD, *բայց* $CO=\frac{a+b}{2}$ *և* $CD=\sqrt{ab}$, *ուստի* $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$, *այսինքն*

Յերկու անհավասար թվերի միջին թվաբանականը մեծ է նույն թվերի միջին յերկրաչափականից:

Յեթե b=a, *ապա նաև* CD=CO, *վորովհետև այն ժամանակ* $\frac{a+a}{2}=\sqrt{aa}$ *կամ* a=a:

§ 2. ՓՈԽՀԱՏՎՈՂ ԼԱՐԵՐԻ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Թեորեմ. Յերբ շրջանի ներսը վերցրած մի կետից տարված են լարեր և տրամագիծ, ապա այդ լարերից յուրաքանչյուրի հատվածների արտադրյալը հավասար է միևնույն հաստատուն մեծությանը. վորը հավասար է այդ կետով անցնող տրամագծի հատվածների արտադրյալին:

Տված՝ AB *և* CD *լարեր են,* EF-*ը տրամագիծ,* P-*ն շրջանի ներսի կետ է (Նկ. 253)*

Ապացուցել՝ PA·PB=PC·PD=PE·PF.

Ապացուցում. *Կատարենք* AC *և* BD *օժանդակ լարերը. կստանանք յերկու յեռանկյուններ՝* APC *և* BPD, *վորոնք նման են, վորովհետև նրանց մեջ* ∠A=∠D *և* ∠C=∠B *իբրև միևնույն աղեղների վրա հենված ներգծյալ անկյուններ. յեռանկյունների նմանությունից հետևում է՝*

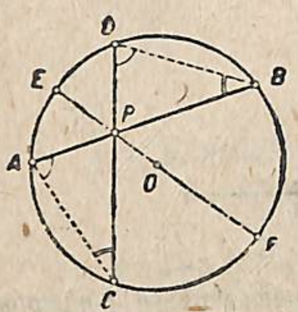
$$PA:PC=PD:PB,$$

կամ

$$PA \cdot PB=PC \cdot PD.$$

Դիտելով AB լարը և EF տրամագիծը որպես երկու փոխհատվող լարեր, արդեն ապացուցածի հիման վրա ունենում ենք՝

$$PA \cdot PB=PE \cdot PF։$$



Նկ. 253

Նույնը վերաբերում է P կետով անցնող ամեն մի լարի, ուստի շրջանի ներսի միևնույն կետում փոխհատվող լարերից յուրաքանչյուրի հատվածների արտադրյալը հաստատուն մեծություն է, որը հավասար է նույն կետով անցնող տրամագծի հատվածների արտադրյալին։

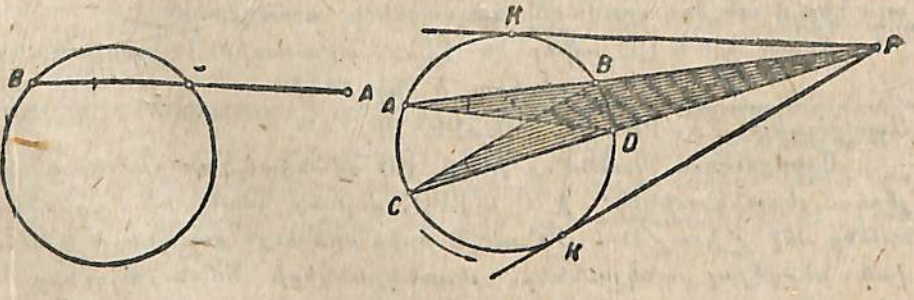
§ 3. ՇՐՋԱՆԻՑ ԴՈՒՐՍ ՓՈԽՀԱՏՎՈՂ ՀԱՏՈՂՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

1. Շրջանի A արտաքին կետից տարված է AB հատողը (նկ. 254)։ Հատողի այն մասը, որն ընկնում է շրջանագծի ներսը, BC լարն է. նրա շարունակությունը շրջանագծից դուրս մինչև A արտաքին կետը կոչվում է հատողի արտաքին մաս։ *Այդ երկու հատվածների գումարը՝* BC+CA=AB, *ընդունվում է իբրև հատողի երկարություն։*

2. **Թեորեմ.** Եթե շրջանից դուրս վերցրած մի կետից տարված են այդ շրջանին շոշափող և մի քանի հատողներ, ապա յուրաքանչյուր հատողի և նրա արտաքին մասի արտադրյալը տալիս է միևնույն հաստատուն մեծությունը, որը հավասար է շոշափողի քառակուսուն։

Տված՝ PA *և* PC *հատողներ են,* PK-*ն շոշափող,* P-*ն նրանց փոխհատման կետը (նկ. 255)*

Ապացուցել՝ PA· PB=PC· PD=PK^2.



Նկ. 255

Ապացուցում. PA-*ն և* PC-*ն հատողներ են,* PB *և* PD-*ն՝ նրանց արտաքին մասերը։ Կտանենք* AD *և* BC *օժանդակ լարերը, որով կստանանք* ADP *և* BCP *եռանկյունները։ Այս եռանկյուններն ունեն համապատասխանաբար հավասար անկյուններ՝* $\angle A=\angle C$ *իբրև ներգծյալ անկյուններ, որոնք հենվում են միևնույն* AD *աղեղի վրա, իսկ* P *անկյունն էլ ընդհանուր է. հետևաբար այդ երկու եռանկյունները նման են։ Նրանց նմանությունից հետևում է՝* $\frac{PA}{PD}=\frac{PC}{PB}$, *կամ* PA·PB=PC.PD։

Եթե PC *հատողը պտտենք* P *կետի շուրջը, մինչև որ նա* PK *շոշափողի դիրքն ընդունի, ապա* C *և* D *հատման կետերը իրար կմոտենան,* PC *հատողը կփոքրանա և նրա* PD *արտաքին մասը կմեծանա շոշափման* K *կետում թե նրա արտաքին մասը հավասար կլինեն* PK *շոշափողին, ուստի* AP· PB=PB· PD *հավասարության մեջ* PC *և* PD *հատվածներից յուրաքանչյուրը փոխարինելով* PK *հատվածով, կստանանք՝* PA·PB=PK·PK *կամ* PA.PB=PK.

Այսպես ուրեմն,

$$PA \cdot PB=PC \cdot PD=PK^2,$$

Նույնը վերաբերում է P *կետից տարած ամեն մի հատողի, այս պատճառով տվյալ շրջանից դուրս վերցրած կետից տարած հատողներից յուրաքանչյուրի և նրա արտաքին մասի արտադրյալը հավասար է մնում միևնույն հաստատուն մեծությանը, այն է՝ այդ նույն կետից շրջանագծին տարած շոշափողի քառակուսուն։*

3. **Հետևանք.** Շրջանից դուրս գտնվող կետից շրջանին տարած շոշափողը միջին համեմատական է նույն կետից տարած որևէ հատողի և նրա արտաքին մասի նկատմամբ։

Իրոք, $PA \cdot PB=PK^2$, *հետևաբար,* PA:PK=PK:PB։

§ 4. ՀԱՏՎԱԾԻ ԲԱԺԱՆՈՒՄՆ ԱՐՏԱՔԻՆ ՑԵՎ ՄԻՋԻՆ ՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅԱՄԲ

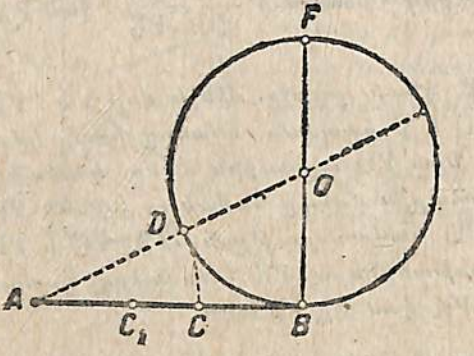
1. Հատվածը բաժանել արտաքին ու միջին հարաբերությամբ նշանակում է գտնել հատվածի այն կետը, որի միջոցով հատվածի վրա առաջացած մեծ մասը միջին համեմատական է ամբողջ հատվածի և նրա փոքր մասի նկատմամբ։

2. **Խնդիր.** Տվյալ հատվածը բաժանել արտաքին և միջին հարաբերությամբ։

Լուծում. AB=a *թող լինի տվյալ հատվածը։ Դիցուք* C *կետը որոնելի կետն է (նկ. 256)։ Հատվածի մեծ մասը՝* AC, *նշանակենք* x, *այն ժամանակ փոքր մասը՝* CB=a−x։ *Խնդրի պայմանի համաձայն*

$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$ կամ $x^2=a(a-x)$, կամ $x^2=a^2-ax$։

Այս հավասարումն այսպես արտագրենք՝ $a^2=x^2+ax$, որտեղից $a^2=x(a+x)$։ Ընդունենք AB=a հատվածն իբրև մի շրջանագծի շոշափող, a+x-ն իբրև հատող և x-ն իբրև սրա արտաքին մասը. բացի դրանից ընդունենք, որ հատողը կենտրոնով է անցնում, այն ժամանակ a-ն շրջանագծի տրամագիծն է։



Նկ. 256

Կառուցում։ AB=a-ն ընդունելով իբրև շոշափող և B կետը իբրև շոշափման կետ, տանում ենք B կետում AB-ի շոշափողը և սրա վրա վերցնում ենք BE=a հատվածը, որը հավասար է շրջանագծի տրամագծին։ BF-ը կիսելով, գտնում ենք O կենտրոնը և OB շառավղով շրջանագիծ ենք տանում, այնուհետև O կենտրոնով տանում ենք AE հատողը. այն ժամանակ այս հատողի AD արտաքին մասը հավասար է x-ի՝ AD=x։ Դնելով AB հատվածի վրա AC=AD, կստանանք AB-ի վրա որոնելի C կետը, որով AB հատվածը կբաժանվի արտաքին և միջին հարաբերությամբ։

Իրոք, $AE\cdot AD=AB^2$։ Բայց $AE=a+x$, $AD=x$ և $AB=a$, ուստի $(a+x)x=a^2$, կամ $ax+x^2=a^2$, որտեղից $x^2=a^2-ax$ կամ $x^2=a(a-x)$, այսինքն $a:x=x:(a-x)$։

Եթե AB հատվածին շոշափող շրջանագիծը կառուցենք նրա A ծայրում, ապա AB-ի վրա կգտնենք մի C_1 կետ ևս, որը նույնպես տվյալ AB հատվածը կբաժանի արտաքին և միջին հարաբերությամբ։

Այսպես ուրեմն, AB հատվածի վրա յերկու կետեր կան, որոնք այդ հատվածը բաժանում են արտաքին և միջին հարաբերությամբ։ Այդ կետերը՝ C և C_1, համաչափ են դասավորված AB հատվածի միջնակետի նկատմամբ։ Վերն ստացած $a^2=x^2+ax$ հավասարությունը կարելի է այսպես արտագրել՝ $x^2+ax-a^2=0$. լուծելով այս հավասարությունն x-ի նկատմամբ, ստանում ենք $x_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$։

Մի կողմ թողնելով հավասարման բացասական արմատը, քանի որ մենք նկատի ունենք x հատվածի միայն յերկարությունը և ոչ թե նաև ուղղությունը, ունենում ենք՝

$$x=-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}, \text{ կամ } x=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}-\frac{a}{2}.$$

կնշանակի x հատվածն ստանալու համար պետք է այն ուղղանկյուն յեռանկյան ներքնաձիգից, որի էջերն են $\frac{a}{2}$ և a (△ABO), հանել տվյալ a հատվածի կեսը (OD-ն) այսինքն $x=AO-OD=AD=AC$ (նկ. 256)։

Ձևափոխելով x-ի համար գտած արտահայտությունը, ստանում ենք՝

$$x=\frac{a}{2}\sqrt{5}-\frac{a}{2}=a\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

կամ $x\cong 0{,}62a$։ Կնշանակի $AC:CB\cong 5:3$։

Հարցեր յեվ վարժություններ

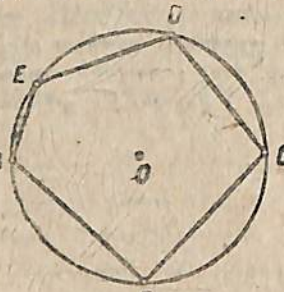
1. Շրջանագծի տրամագիծը P կետով բաժանվում է այնպիսի մասերի, որոնք հավասար են 4 սմ-ի և 6 սմ-ի։ Ինչու չի կարելի այդ նույն կետով այնպիսի լար տանել, որի մասերից մեկը հավասար լինի 3 սմ-ի.
2. Յերկու փոխհատվող լարերից մեկի հատվածներն են 6 սմ և 25 սմ, մյուսի հատվածների հարաբերությունն է 1:2։ Գտնել յերկրորդ լարի յերկարությունը։
3. Լարի յերկարությունն է 5 սմ։ Ի՞նչքան պետք է շարունակել այդ լարը, որպեսզի շարունակված հատվածի ծայրից տարած շոշափողը հավասար լինի 6 սմ-ի։
4. R շառավղով շրջանի մեջ տարված է մի լար, որը շառավղին ուղղահայաց է նրա միջնակետում։ Գտնել լարի յերկարությունը և որոշել թե շրջանագծի որ մասն է կազմում այդ լարով ձգված աղեղը։

XIX. ՆԵՐԳԾՅԱԼ ՅԵՎ ԱՐՏԱԳԾՅԱԼ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

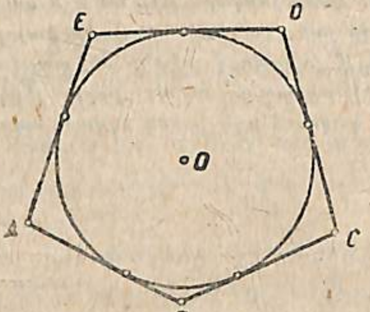
§ 1. ՆԵՐԳԾՅԱԼ ՅԵՎ ԱՐՏԱԳԾՅԱԼ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

1. Այն բազմանկյունը, վորի բոլոր գագաթները գտնվում են շրջանագծի վրա, կոչվում է ներգծյալ բազմանկյուն, իսկ շրջանագիծն ինքը կոչվում է արտագծյալ։ *257-րդ նկարում ABCDE-ն ներգծյալ հնգանկյուն է։ Նրա կողմերը՝ AB, BC,... տվյալ շրջանագծի լարեր են։*

Այն բազմանկյունը, վորի բոլոր կողմերը շոշափում են շրջանագիծը, կոչվում է արտագծյալ բազմանկյուն, իսկ շրջանագիծն ինքը՝ ներգծյալ։



Նկ. 257



Նկ. 258

258-րդ նկարում ABCDE-ն արտագծյալ հնգանկյուն է։ Նրա կողմերը՝ AB, BC... շրջանագծի շոշափողներ են։

2. **Թեորեմ.** Ամեն յեռանկյան յերեք գագաթներով կարելի յե շրջանագիծ տանել և միայն մեկը։

Իրոք յեռանկյան գագաթները կարող են դիտել իբրև յերեք կետեր, վորոնք չեն գտնվում միևնույն ուղիղի վրա. իսկ մեզ հայտնի յե, վոր յերեք այդպիսի կետերով կարելի յե շրջանագիծ տանել և միայն մեկը։

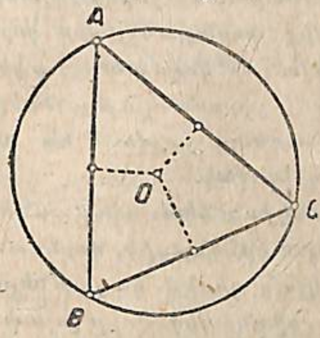
Յեռանկյան շուրջը արտագծած շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է յեռանկյան վորևէ յերկու կողմերի միջնուղղահայացների հատման կետում։

Յերրորդ կողմի միջնուղղահայացը նույնպես անցնում է արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնով։

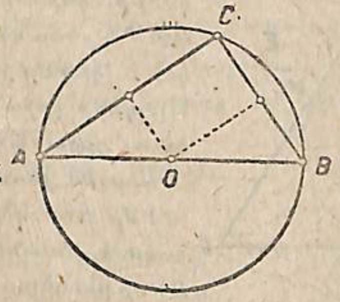
Հետևանք. Յեռանկյան կողմերի միջնուղղահայացները փոխհատվում են մի կետում՝ արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնում։

Արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է՝

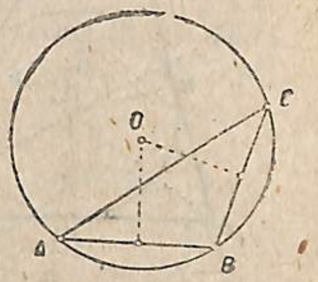
1) յեռանկյան ներսը, յեթե յեռանկյունը սրանկյուն է (Նկ. 259), 2) ներքնաձիգի վրա, նրա միջնակետում, յեթե յեռանկյունն ուղղանկյուն է (Նկ. 260), 3) յեռանկյունից դուրս, յեթե յեռանկյունը բութանկյուն է (Նկ. 261)։



Նկ. 259



Նկ. 260



Նկ. 261

Թեորեմ. Ամեն յեռանկյան մեջ կարելի յե ներգծել շրջանագիծ և միայն մեկը։

Տված՝ △ABC *(Նկ. 262)*

Ապացուցել՝ ABC *յեռանկյան մեջ կարելի յե ներգծել շրջանագիծ և միայն մեկը։*

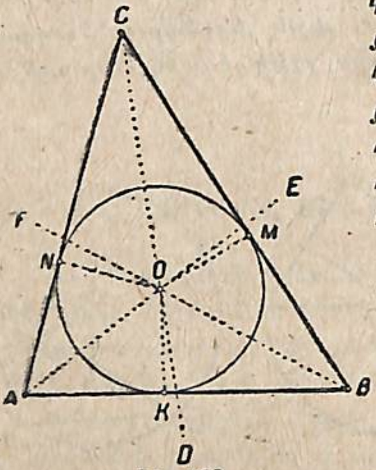
Ապացուցում. *Յեռանկյան մեջ շրջանագիծ ներգծելու համար պետք է գտնել շրջանագծի կենտրոնը և նրա շառավղի յերկարությունը։* ABC *յեռանկյան կողմերը շոշափողներ են վորոնելի շրջանագծին, իսկ միևնույն շրջանագծի շոշափողները կենտրոնից հավասար հեռավորության վրա յեն գտնվում, և այդ հեռավորությունը հավասար է շառավղին. ուստի ներգծյալ շրջանագծի կենտրոնը գտնելու համար պետք է գտնել այնպիսի կետ, վորը հավասարահեռ լինի յեռանկյան կողմերից։*

Յեռանկյան կողմերից հավասարահեռ կետը նրա վորևէ յերկու կիսորդների հատման O *կետն է. վերջինս հանդիսանում է յեռանկյան մեջ ներգծած շրջանագծի կենտրոնը. այս շրջանագծի համար իբրև շառավիղ ծառայում է* OK, OM *և* ON *ուղղահայացներից վորևէ մեկը, վորոնք կենտրոնից իջեցված են յեռանկյան կողմերի վրա։ Յեռանկյան կողմերը, վորոնք ուղղահայաց են* OK, OM *և* ON *շառավիղներին և վորոնք անցնում են շառ շառավիղների այն ծայրերով, վորոնք գտնըվում են շրջանագծի վրա, շրջանագծի շոշափողներն են։*

Նույն ABC *յեռանկյան մեջ ուրիշ շրջանագիծ ներգծել չի լինի, վորովհետև յեռանկյան յերկու անկյունների կիսորդները միայն մի կետում են փոխհատվում։*

O կետը, իբրև հավասարահեռ BC և AC կողմերից, գտնվում է նաև C անկյան կիսորդի վրա։

4. Հայտնի է, որ բացի O կետից դարձյալ երեք կետեր կան, որոնք հավասարահեռ են եռանկյան երեք կողմերից և գտնվում են եռանկյունից դուրս։ Այս երեք կետերը ծառայում են իբրև կենտրոններ երեք շրջանագծերի, որոնցից յուրաքանչյուրը շոշափում է եռանկյան մի կողմը և մյուս երկու կողմերի շարունակությունները։ Այսպիսի շրջանագծերը կոչվում են արտագծյալ շրջանագծեր (նկ. 215)։



Նկ. 262.

Ուրեմն եռանկյան նկատմամբ ունենք 1) մի արտագծյալ շրջանագիծ, որն անցնում է եռանկյան երեք գագաթներով, 2) մի ներգծյալ շրջանագիծ, որը շոշափում է եռանկյան երեք կողմերը և 3) երեք արտագծյալ շրջանագծեր։

§ 2. ՆԵՐԳԾՅԱԼ ՔԱՌԱՆԿՅԱՆ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

1. **Թեորեմ.** Ամեն մի ներգծյալ քառանկյան մեջ հանդիպակաց անկյունների գումարը հավասար է 2d-ի։

Տված՝ ABCD-ն ներգծյալ քառանկյուն է (նկ. 253)

Ապացուցել՝ $\angle A+\angle C=2d$ և $\angle B+\angle D=2d$։

Ապացույց. A անկյունը չափվում է $\frac{\smile DCB}{2}$-ով, իսկ C անկյունը $\frac{\smile BAD}{2}$-ով, իբրև ներգծյալ անկյուններ, հետևաբար, A և C անկյունների գումարը չափվում է $\frac{\smile DCB}{2}+\frac{\smile DAB}{2}$ գումարով, կամ $\frac{\smile DCB+BAD}{2}$-ով, այսինքն կիսաշրջանագծով. ուստի $\angle A+\angle C=180°$ կամ 2d։

Ճիշտ նույն ձևով ապացուցում ենք, որ $\angle B+\angle D=2d$.

2. **Թեորեմ** (հակադարձ). Եթե քառանկյան մեջ հանդիպակաց անկյունների գումարը հավասար է 2d-ի, ապա նրա գագաթներով կարելի է շրջանագիծ տանել։

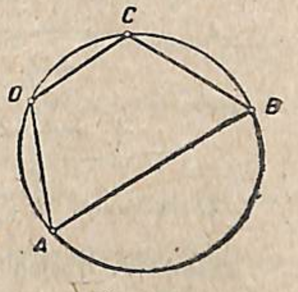
Տված՝ ABCD-ն քառանկյուն է (նկ. 263), $\angle A+\angle C=2d$ և $\angle B+\angle D=2d$.

Ապացուցել՝ ABCD քառանկյան A, B, C և D գագաթներով կարելի է շրջանագիծ տանել։

Ապացույց. ABCD քառանկյան A, B և C գագաթներով կտանենք շրջանագիծ։ Ապացուցենք, որ այդ շրջանագիծը կանցնի նաև D գագաթով։ Իրոք, եթե ընդունենք, որ D կետը շրջանագծի վրա չի գտնվում, այլ նրանցից դուրս և կամ նրա ներսը, ապա $\angle D$-ն չեր չափվի ABC աղեղի կիսով և, հետևաբար, B և D անկյունների գումարը չեր հավասարվել 180°-ի, բայց այս կհակասեր տված պայմանին, ուստի D կետը պետք է գտնվի շրջանագծի վրա, իսկ այս նշանակում է, A. B և C կետերով անցնող շրջանագիծն անցնում է նաև D կետով։ ABCD քառանկյունն այսպիսով ներգծյալ քառանկյուն է։

3. Ուղղանկյունը, քառակուսին և հավասարասրուն սեղանը կարող են ներգծյալ լինել, որովհետև նրանց մեջ հանդիպակաց անկյունների գումարը հավասար է 2d-ի։

§ 3. ԱՐՏԱԳԾՅԱԼ ՔԱՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ



Նկ 263

Թեորեմ. Արտագծյալ քառանկյան մեջ երկու հանդիպակաց կողմերի գումարը հավասար է մյուս երկու կողմերի գումարին։

Տված՝ ABCD-ն արտագծյալ քառանկյուն է (նկ. 264)

Ապացուցել, AD+BC=AB+DC։

Ապացույց. Արտագծյալ քառանկյան կողմերը շրջանագծի շոշափողներ են։ Միևնույն կետից շրջանագծին տարած երկու շոշափողներն իրար հավասար են. ուստի AN=AK, BL=BK, CL=CM, DN=DM. անդամ առ անդամ գումարելով այս հավասարումները, ստանում ենք՝

$$AN+DN+BL+CL=AK+BK+CM+DM,$$

$$AD+BC=AB+DC.$$

2. Շրջանագիծ կարելի է ներգծել այնպիսի քառանկյան մեջ, որի երկու հանդիպակաց կողմերի գումարը հավասար է մյուս երկու կողմերի գումարին։

Բոլոր զուգահեռագծերից միայն շեղանկյան և քառակուսու մեջ կարելի է ներգծել շրջանագիծ։

§ 4. ԱՐՏԱԳԾՅԱԼ ԲԱԶՄԱՆԿՅԱՆ ՄԱԿԵՐԵՍԸ

I. **Թեորեմ.** Արտագծյալ բազմանկյան մակերեսը հավասար է նրա պարագծի և ներգծյալ շրջանագծի շառավղի արտադրյալի կեսին։

Տված՝ ABCDE-ն արտագծած n անկյուն է,
r ը՝ ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը,

P_n-ը՝ n-անկյան պարագիծը (նկ. 265)

Ապացուցել՝ բազմանկյան մակերեսն է՝ $S_n = \frac{1}{2} p_n \cdot r$։

Ապացուցում. Շրջանագծի O կենտրոնը միացնելով ABCD բազմանկյան գագաթների հետ, բազմանկյունը բաժանում ենք n յեռանկյունների։

$$\text{մակ.}\ \triangle AOB = \frac{1}{2} AB \cdot r,$$

$$\text{մակ.}\ \triangle BOC = \frac{1}{2} BC \cdot r,$$

. . . .

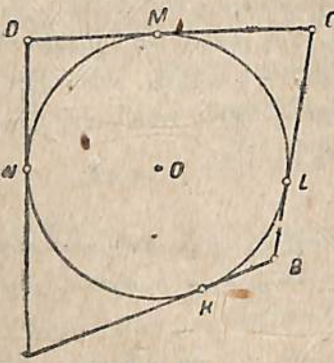
$$\text{մակ.}\ \triangle EOA = \frac{1}{2} EA \cdot r$$

$$\text{մակ.}\ \triangle AOB + \text{մակ.}\ \triangle BOC + \dots +$$

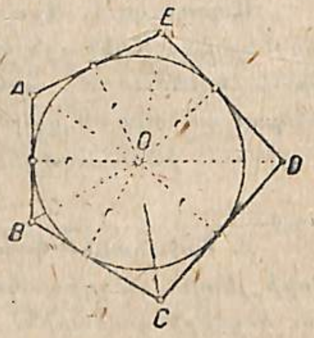
$$+ \text{մակ.}\ \triangle EOA = \frac{1}{2} r\,(AB + BC + \dots + EA).$$

հետևաբար, $S_n = \frac{1}{2} r \cdot P_n$, կամ $S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot r$. ք. ե. դ.

Հետեվանք. Արտագծյալ յեռանկյան մակերեսն է, $S\triangle = p \cdot r$, վորտեղ p-ն յեռանկյան կիսապարագիծն է:



Նկ. 264.



Նկ. 265

2. Խնդիր. Յեռանկյան կողմերն են՝ a, b և c: Վորոշել ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը՝ r։

Լուծում. $S\triangle = p \cdot r$, հետևաբար, $r = \frac{S\triangle}{p}$. բայց ըստ Հերոնի բանաձևի

$$S\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Հարցեր յեվ վարժություններ

1. Ինչու չի կարելի շրջանագիծ տանել այնպիսի քառանկյան բոլոր գագաթներով, վորի անկյունները հերթականությամբ իրար այնպես են հարաբերում, ինչպես 2:3:4:5։

2. Ինչու չի կարելի շրջանագիծ ներգծել այնպիսի քառանկյան մեջ, վորի կողմերը հերթականությամբ իրար այնպես են հարաբերում, ինչպես 1:2:3.4։

3. Կառուցել ABC յեռանկյունը, յեթե տված են նրա b ու c կողմերը և արտագծյալ շրջանագծի R շառավիղը։

4. Կառուցել ABC յեռանկյունը, յեթե տված են նրա a կողմը, B անկյունը և արտագծյալ շրջանագծի R շառավիղը։

5. Կառուցել ABC յեռանկյունը, յեթե տված են նրա C կողմը, A անկյունը և ներգծյալ շրջանագծի r շառավիղը։

6. Կառուցել ABC անկյունը, յեթե տված են նրա A ու B անկյունները և ներգծյալ շրջանագծի r շառավիղը։

7. Կառուցել հավասարասրուն յեռանկյունը նրա a հիմքով և արտագծյալ շրջանագծի R շառավղով։

8. Կառուցել շեղանկյունը նրա a կողմով և ներգծյալ շրջանագծի r շառավղով։

9. Արտագծյալ քառանկյան յերեք կողմերը հաջորդական կարգով հավասար են 6 սմ-ի, 4 սմ-ի և 5 սմ-ի։ Վորոշել նրա չորրորդ մասը։

10. Ամեն մի յեռանկյան մեջ $a \cdot b = 2Rh_c$, վորտեղ R-ն արտագծած շրջանագծի շառավիղն է։ Ապացուցել:

11. Ոգտվելով $ab = 2Rh_c$ բանաձևից, ցույց տալ, վոր $R = \frac{abc}{4S}$, կամ $S = \frac{abc}{4R}$, վորտեղ S-ը յեռանկյան մակերեսն է:

XX. ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

§ 1. ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

1. Այնպիսի բազմանկյունը, վորի 1) բոլոր կողմերը հավասար են և 2) բոլոր անկյունները հավասար են, կոչվում է կանոնավոր:

Հավասարակողմ յեռանկյունը և քառակուսին կանոնավոր բազմանկյունների օրինակներ են: Անհավասարակողմ ուղղանկյունը և խոտորանկյուն շեղանկյունը կանոնավոր բազմանկյուններ չեն, վորովհետև առաջինի մեջ բոլոր անկյունները հավասար են, բայց կողմերը միահավասար չեն, իսկ յերկրորդի մեջ բոլոր կողմերը միահավասար են, բայց անկյունները միահավասար չեն:

2. n-անկյան ներքին անկյունների գումարը հավասար է $2d(n-2)$, *հետևաբար, կանոնավոր n-անկյան յուրաքանչյուր ներքին անկյունը հավասար է* $\frac{d(n-2)}{n}$: *Ամեն բազմանկյան արտաքին անկյունների գումարը* $4d$ *է, ուստի կանոնավոր n անկյան արտաքին անկյուններից յուրաքանչյուրը հավասար է* $\frac{4d}{n}$*-ի:*

Կանոնավոր n անկյան ներքին անկյունը կարելի յե հաշվել նաև նրան կից արտաքին անկյունով՝ ներքին անկյունը հավասար է

$$2d-\frac{4d}{n}=2d\left(1-\frac{2}{n}\right):$$

3. Յեթե n-անկյան կողմը հավասար է a-ի, ապա նրա պարագիծը՝ $p=an$:

Միևնույն թվով կողմեր ունեցող բազմանկյունները կոչվում են **նույնանուն:**

Կանոնավոր նույնանուն բազմանկյունները հավասար են, յերբ հավասար են նրանց կողմերը:

§ 2. ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ՆԵՐԳԾՅԱԼ ՅԵՎ ԱՐՏԱԳԾՅԱԼ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ

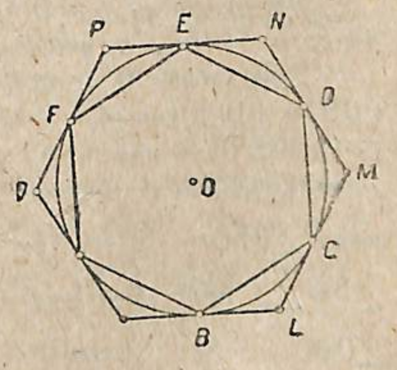
1. Թեորեմ. Յերբ շրջանագիծը բաժանված է վորևե թվով հավասար մասերի, ապա 1) բաժանման կետերը հաջորդաբար միացնող լարերը կազմում են կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյուն. 2) բաժանման կետերով տարած շոշափողները կազմում են կանոնավոր արտագծյալ բազմանկյուն.

Տված՝ A, B, C... կետերում O շրջանագիծը բաժանվում է n հավասար մասերի (նկ. 266).

Ապացուցել՝ 1) AB, BC, CD... լարերը կազմում են կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյուն և 2) KL, LM, MN... շոշափողները կանոնավոր արտագծյալ բազմանկյուն:

Ապացուցում. *1) Շրջանագծի բաժանման կետերը հաջորդական կարգով միացնելով լարերի միջոցով; կստանանք ABCDEF ներգծյալ բազմանկյունը: AB, BC, CD... աղեղները միահավասար են, ուստի նրանց ձգող լարերը ևս հավասար են՝ AB=BC=CD... բացի դրանից ∠A=∠B=∠C=... իբրև ներգծյալ անկյուններ, վորոնք չափվում են միահավասար աղեղներով. այստեղից հետևում է, վոր ABCDEF բազմանկյունը, վորի թե կողմերն են հավասար և թե անկյունները, կանոնավոր է:*

2) Շրջանագծի A, B, C, D... բաժանման կետերով տանելով շոշափողներ, կստանանք KLMNPQ արտագծյալ բազմանկյունը: AKB, BLC, CMD... յեռանկյուններն ունեն հավասար հիմքեր՝ AB, BC, CD... նրանց այն անկյունները, վորոնք առընթեր են հիմքերին, նույնպես հավասար են՝ ∠KAB = ∠KBA, . ∠LCB = ∠LBC..., վորովհետև միահավասար աղեղներով են չափվում. կնշանակի, յեռանկյունները 1) հավասարասրուն են և 2) իրար հավասար են:



Նկ. 266

Յեռանկյունների հավասարությունից հետևում է՝ KA=KB=BL=LC=MC=MD=... *կամ* KL=LM=MN=..., *այլ և, վոր* ∠K=∠L=∠M=...

Այսպես ուրեմն, KLMNPQ արտագծյալ բազմանկյան կողմերն էլ

են հավասար, անկյուններն էլ, կնշանակի նա կանոնավոր է։

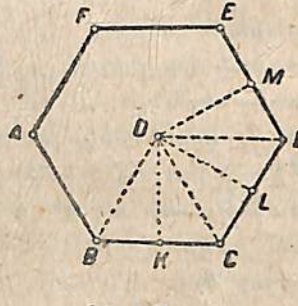
2. *Կանոնավոր ներգծյալ և արտագծյալ բազմանկյունների կառուցումը վերածվում է շրջանագիծը հավասար մասերի բաժանելուն։*

3. Թեորեմ. **1)** *Ամեն մի կանոնավոր բազմանկյան մեջ կարելի է ներգծել շրջանագիծ և* **2)** *ամեն մի կանոնավոր բազմանկյան շուրջը կարելի է արտագծել շրջանագիծ։*

Տված՝ ABCDEF-*ը կանոնավոր բազմանկյուն է (նկ. 267)։*

Ապացուցել՝ 1) կանոնավոր բազմանկյան մեջ կարելի է ներգծել շրջանագիծ, 2) կանոնավոր բազմանկյան շուրջը կարելի է արտագծել շրջանագիծ։

Ապացուցում. *1) Բազմանկյան մեջ շրջանագիծ ներգծելու համար պետք է իմանալ նրա կենտրոնի դիրքը և նրա շառավղի երկարությունը։ Ներգծյալ շրջանագծի կենտրոնը հավասարահեռ է բազմանկյան բոլոր կողմերից։ AB և BC կողմերից հավասարահեռ կետերը գտնվում են B անկյան կիսորդի վրա, BC և CD կողմերից հավասարահեռ կետերը գտնվում են C անկյան կիսորդի վրա. հետևաբար, երկու կիսորդների հատման O կետը հավասարահեռ է AB, BC և CD կողմերից։*



Նկ. 267

Ապացուցենք, որ O կետը հավասարահեռ է նաև CD և DE կողմերից և, հետևաբար գտնվում է D անկյան կիսորդի վրա։

Դրա համար O կետը կմիացնենք D գագաթի հետ և կդիտենք COD *ու* BOC *եռանկյունները։ Նրանք հավասար են, որովհետև նրանց մեջ* OC*-ն ընդհանուր կողմ է,* $BC=CD$ *և* $\angle OCB=\angle OCD$*։ Այս եռանկյունների հավասարությունից հետևում է, որ* $\angle OBC=\angle ODC$. *բայց* $\angle OBC=\frac{\angle B}{2}$, *հետևաբար, նաև* $\angle ODC=\frac{\angle D}{2}$, *որովհետև* $\angle D=\angle B$ *իբրև կանոնավոր բազմանկյան անկյուններ, իսկ եթե* $\angle ODC=\frac{\angle D}{2}$, *ապա* OD*-ն* D *անկյան կիսորդն է։*

Նույն ձևով ապացուցում ենք, որ OE*-ն,* OF*-ը և* OA*-ն էլ բազմանկյան անկյունների կիսորդներն են. իսկ այս նշանակում է, որ* O *կետը, բազմանկյան բոլոր անկյունների կիսորդների հատման կետը, հավասարահեռ է բոլոր կողմերից և հետևաբար ծառայում է իբրև կենտրոն ներգծյալ շրջանագծի համար։* $OK=OL=OM=\ldots=r$, *այսինքն հավասար են վերոնիշյալ շրջանագծի շառավիղին։*

2) BOC, COD... *եռանկյունների հավասարությունից հետևում է, որ* $OB=OC=\ldots$ *այս նշանակում է, որ* O *կետը հավասարահեռ է բազմանկյան բոլոր գագաթներից և ծառայում է իբրև կենտրոն արտագծած շրջանագծի համար, որի շառավիղն է՝* $R=OB=OC=\ldots$

Կանոնավոր բազմանկյան շուրջն արտագծած յեվ նրա մեջ ներգծած շրջանագծերի կենտրոնները համընկնում են։ Նրանց ընդհանուր կենտրոնը կոչվում է կանոնավոր բազմանկյան կենտրոն։ O *կետի* OK, OL,... *հեռավորությունը կանոնավոր բազմանկյան կողմերից՝ կոչվում է նրա* նարքագիծ (ապոթեմ)*։ Բազմանկյան հարթագիծը միաժամանակ նաև ներգծյալ շրջանագծի շառավիղն է։ Կանոնավոր բազմանկյան շուրջն արտագծած շրջանագծի շառավիղը կոչվում է նաև այդ կանոնավոր* բազմանկյան շառավիղ։

§ 3. *ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ՆՈՒՅՆԱՆՈՒՆ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ*

1. **Կանոնավոր նույնանուն բազմանկյունները նման են,** *որովհետև նրանց անկյունները հավասար են և կողմերը համեմատական։*

2. Թեորեմ. **Կանոնավոր նույնանուն բազմանկյունների կողմերն այնպես են հարաբերում, ինչպես արտագծյալ և ներգծյալ շրջանագծերի շառավիղները։**

Տված՝ n*-ը բազմանկյան կողմերի թիվն է (նկ. 268).*

AB*-ն և* A_1B_1*-ը բազմանկյունների կողմերն են.* OA*-ն,* OB*-ն ... և* O_1A_1*-ը,* O_1B_1... *արտագծյալ շրջանագծերի շառավիղներն են.* OM*-ը և* O_1M_1*-ներգծյալ շրջանագծերի շառավիղներն են։*

Ապացուցել $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{OA}{O_1A_1}=\frac{OM}{O_1M_1}$*։*

Ապացուցում. $A_1O_1B_1$ *և* AOB *հավասարասրուն եռանկյունների մեջ* $\angle O_1=\angle O$, *որովհետև նրանցից յուրաքանչյուրը հավասար է* $\frac{4d}{n}$*. հետևաբար այդ եռանկյունները նման են՝* $\triangle AOB\backsim\triangle A_1O_1B_1$

նրանց նմանությունից բղխում է՝

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{OA}{O_1A_1}=\frac{OM}{O_1M_1},$$

այսինքն կանոնավոր նույնանուն բազմանկյունների կողմերը համեմատական են արտագծած շրջանագծերի շառավիղներին կամ հարթագծերին։

Հետևանք. **Կանոնավոր նույնանուն բազմանկյունների պարագծերն իրար այնպես են հարաբերում, ինչպես արտագծյալ շրջանագծերի**

շառավիղները և բազմանկյունների հարթագծերը։

$ABCDEF$ $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ *կանոնավոր նույնանուն բազմանկյունները նման են և հետևաբար, նրանց համապատասխան կողմերը համեմատական են՝*

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\ldots$$ *այստեղից հետևում է՝*

$$\frac{AB+BC+CD+\cdots}{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+\cdots}=\frac{AB}{A_1B_1},$$ *կամ* $\frac{P}{P_1}=\frac{AB}{A_1B_1}$, *բայց որով-*

հետև $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AO}{A_1O_1}=\frac{OM}{O_1M_1}$, *ապա* $\frac{P}{P_1}=\frac{AO}{A_1O_1}=\frac{OM}{O_1M_1}$,

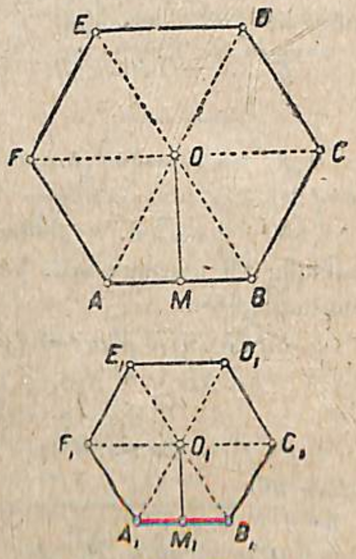
§ 4. *ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԲԱԶՄԱՆԿՅԱՆ ՄԱԿԵՐԵՍԸ*

Թեորեմ. Կանոնավոր բազմանկյան մակերեսը հավասար է նրա պարագծի և հարթագծի արտադրյալի կեսին։

Տված մի կանոնավոր՝ n-*անկյուն.* a_n-*ը նրա կողմն է,* n-*ը կողմերի թիվը.* $OP=h$-*ը հարթագիծը,* p_n-*ը պարագիծը (նկ. 269)*

Ապացուցելի՝ n-*անկյան մակերեսը հավասար է* $S_n=\frac{1}{2}P_n\cdot h$։

Ապացուցում. *Միացնելով կանոնավոր* n-*անկյան գագաթները նրա կենտրոնի հետ, կստանանք* n *միահավասար հավասարասրուն եռանկյուններ. Նրանցից յուրաքանչյուրի մակերեսն է՝* $S_\Delta=\frac{1}{2}a_n h$, *որտեղ* h-*ը եռանկյան բարձրությունն է և միաժամանակ բազմանկյան հարթագիծը. այստեղից ամբողջ բազմանկյան մակերեսն է՝* $S_n=n\cdot S_\Delta=\frac{1}{2}na_n h\cdot na_s h$. *բայց* $a_n\cdot n=p_n$, *ուստի* $S_n=\frac{1}{2}p_n\cdot h$։



Նկ. 268

Հետևանքներ. *1.* Կանոնավոր ներգծած բազմանկյան մակերեսը հավասար է նրա պարագծի ու հարթագծի արտադրյալի կեսին։

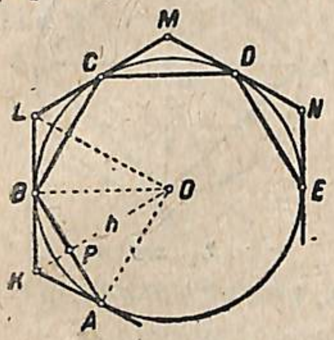
$$S_n=\frac{1}{2}p_n h։$$

2. Կանոնավոր արտագծյալ բազմանկյան մակերեսը հավասար է նրա

պարագծի ու շրջանագծի շառավղի արտադրյալի կեսին։

$$S_n=\frac{1}{2}p_n h=\frac{1}{2}p_n\cdot r.$$

3. Կանոնավոր նույնանուն բազմանկյունների մակերեսները իրար այնպես են հարաբերում ինչպես նրանց կողմերի քառակուսիները, կամ արտագծյալ կամ ներգծյալ շրջանագծերի շառավիղները։ (նկ. 268)։



Նկ. 269

$ABCDEF$-*ը և* $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$-*ը կանոնավոր նույնանուն բազմանկյուններ են.* AO-*ն և* A_1O_1-*ը նրանց շառավիղներն են,* OM-*ը և* O_1M_1-*ը նրանց հարթագծերը և* S-*ն ու* S_1-*ը նրանց մակերեսները։*

Կանոնավոր նույնանուն բազմանկյունները նման են, ուստի նրանց մակերեսները այնպես են հարաբերում, ինչպես նրանց կողմերի քառակուսիները՝

$$\frac{S_1}{S}=\frac{A_1B_1^2}{AB^2}. \qquad (1)$$

իսկ կանոնավոր նույնանուն բազմանկյունների կողմերն այնպես են հարաբերում, ինչպես ներգծյալ և կամ արտագծյալ շրջանագծերի շառավիղները՝

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{O_1A_1}{OA}=\frac{O_1M_1}{OM}. \qquad (2)$$

Բաղդատելով (1) և (2) հավասարությունները, յեզրակացնում ենք, որ

$$\frac{S_1}{S}=\frac{A_1B_1^2}{AB^2}=\frac{O_1A_1^2}{OA^2}=\frac{O_1M_1}{OM^2}.$$

§ 5. *ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ՄԵՋ ՆԵՐԳԾԱԾ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ։ ՆՐԱ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ ՅԵՎ ՆՐԱ ԿՈՂՄԻ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒՄԸ ՇԱՌԱՎՂԻ ՄԻՋՈՑՈՎ*

Խնդիր. R շառավղով շրջանագծի մեջ ներգծել քառակուսի և նրա a_4 կողմն արտահայտել շառավղի միջոցով։

1) Կառուցում. Շրջանագծի մեջ (նկ. 270) կտանենք յերկու իրար ուղղահայաց տրամագծեր՝ AC *և* BD. *սրանցով շրջանագիծը կբաժանվի չորս հավասար մասերի։ Հաջորդաբար միացնելով տրամագծերի ծայրերը, կստանանք կանոնավոր ներգծյալ քառանկյուն, այ-*

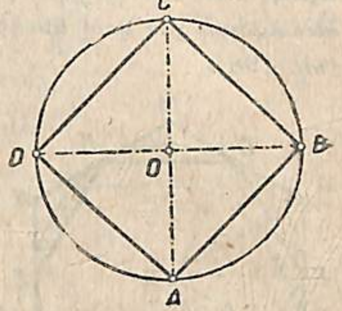
սինքն քառակուսի, վորովհետև այդ քառանկյան կողմերն, իբրև հավասար աղեղներ ձգող լարեր, միահավասար են, իսկ անկյուններից յուրաքանչյուրն, իբրև տրամագծի վրա հենված ներգծյալ անկյուն, ուղիղ անկյուն է։

2) Հաշվում։ AOB ուղղանկյուն յեռանկյունից գտնում ենք՝

$AB^2=AO^2+BO^2$, կամ $AB^2=2R^2$, վորտեղից $AB=R\sqrt{2}$։

Կանոնավոր ներգծյալ քառանկյան կողմը է՝

$$a_4=R\sqrt{2}.$$



Նկ. 270

§ 6. ՆԵՐԳԾՅԱԼ ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ՎԵՑԱՆԿՅՈՒՆ, ՆՐԱ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ ՅԵՎ ՆՐԱ ԿՈՂՄԻ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒՄԸ ՇԱՌԱՎՂԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

Խնդիր. R շառավղով շրջանագծի մեջ ներգծել կանոնավոր վեցանկյուն և նրա a_6 կողմն արտահայտել շառավղի միջոցով։

Լուծում. Վերլուծում. Դիցուկ AB-ն (նկ. 271) կանոնավոր ներգծյալ վեցանկյան կողմն է, այն ժամանակ $\angle AOB=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$; AOB յեռանկյունը հավասարասրուն է, $OA=OB=R$, $\angle A=\angle B$, և նրանցից յուրաքանչյուրը պարունակում է 60°։ Այսպիսով AOB յեռանկյունը հավասարասրուն է, ուստի

$$AB=AO=BO=R$$

Կանոնավոր ներգծած վեցանկյան կողմն է՝

$$a_6=R$$

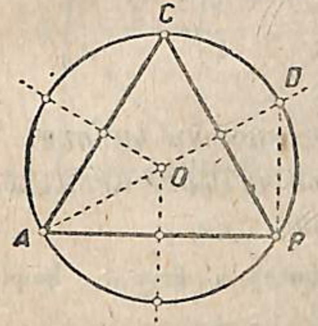
Նկ. 271

Կառուցում. Կարկինին տալով շրջանագծի շառավղի չափ բացվածք, շրջանագծի վրա վերցնում ենք այդ բացվածքով վեց հավասար աղեղներ մեկը մյուսի յետեվից. աղեղների ծայրերը հաջորդաբար միացնելով լարերով, կստանանք վորոնած կանոնավոր վեց անկյունը։

§ 7. ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ՆԵՐԳԾՅԱԼ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆ։ ՆՐԱ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ, ՆՐԱ ԿՈՂՄԻ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒՄԸ ՇԱՌԱՎՂԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

Խնդիր. R շառավղով շրջանագծի մեջ ներգծել կանոնավոր յեռանկյուն և արտահայտել նրա a_3 կողմը շառավղի միջոցով։

1) Կառուցում. Շրջանագիծը բաժանենք վեց հավասար մասերի։ Բաժանման կետերը մեկընդմեջ միացնենք լարերով. կստանանք ABC կանոնավոր յեռանկյունը (նկ. 272), վորի կողմերը հավասար են, իբրև հավասար աղեղներ ձգող լարեր։



Նկ. 272

2) Կողմի հաշվումը. Տանելով AD տրամագիծը և D կետը միացնելով B-ի հետ, կստանանք ABD ուղղանկյուն յեռանկյունը, վորի ուղիղ անկյունը B-ն է։ Այս ուղղանկյուն յեռանկյունից ունենք՝

$AB^2=AD^2-DB^2$, $AD=2R$ և $DB=R$,

ուստի $AB^2=a_3^2=4R^2-R^2=3R^2$

վորտեղից՝

$$a_3=R\sqrt{3}$$

§ 8. ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԱՐՏԱԳԾԱԾ ՅԵՎ ՆԵՐԳԾԱԾ ՇՐՋԱՆԱԳԾԵՐԻ, ՆՐԱ ԲԱՐՁՐՈՒԹՅԱՆ ՅԵՎ ՄԱԿԵՐԵՍԻ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒՄԸ ԿՈՂՄԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

Տված է ABC կանոնավոր յեռանկյունը (նկ. 273)։ Նրա կողմն է $AB=a=a_3$. ներգծյալ շրջանագծի շառավիղն է՝ $OM=r$. արտագծյալ շրջանագծի շառավիղն է՝ $OA=OC=R$. բարձրությունն է՝ $CM=h$, մակերեսն է՝ S։

1) R-ի հաշվումը. $AB=a_3=R\sqrt{3}$, վորտեղից հետևում է,

վոր $$R=\frac{a_3}{\sqrt{3}}=\frac{a_3\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

2) r-ի հաշվումը. AOM ուղղանկյուն յեռանկյան մեջ AO=R ներքնաձիգը ABC յեռանկյան A անկյան կիսորդն է, հետևաբար $\angle OAM=36^\circ$. ուստի OM=r էջը, իբրև 30°-ի անկյան դիմացի էջ, հավասար է ներքնաձիգի կեսին, այսինքն $r=\frac{R}{2}$։ Այսպես ուրեմն,

$$1) =\frac{R}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{6};\quad 2)\ R=2r.$$

3) h-ի հաշվումը. h *բարձրությունը*$=CM=CO+OM$, *բայց* $CO=R=2r$ *և* $OM=r=\frac{R}{2}$. *ուստի*

$$1)\ h=R+\frac{R}{2}=1{,}5\ K,\quad 2)\ h=2r+r=2r;$$

$$3)\ h=3r=3\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

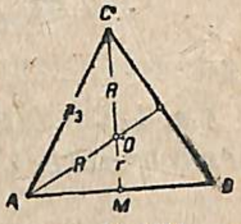
4) S-ի հաշվումը. *մակերես* $S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}a\frac{a\sqrt{3}}{2}=$

$$=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\ \text{քառ. մ.}$$

§ 9. ԱՐՏԱԳԾԱԾ ՔԱՌԱԿՈՒՍՈՒ ՅԵՎ ԱՐՏԱԳԾԱԾ ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ ՅԵՎ ՆՐԱՆՑ ԿՈՂՄԵՐԻ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒՄԸ ՇԱՌԱՎՂԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

Խնդիր 1. Կառուցել արտագծյալ քառակուսի և նրա b_4 կողմն արտահայտել ներգծյալ շրջանագծի r շառավղով:

Լուծում. *r շառավղով շրջանագծի մեջ ներգծում ենք քառակուսի (նկ. 274)։ Նրա գագաթներով շոշափողներ ենք տանում մինչև փոխհատվելը. ստանում ենք* KLMN *արտագծյալ քառակուսին։ Նրա կողմը՝* $KL=b_4$, *հավասար է* DB-*ի, այսինքն շրջանագծի տրամագծին, ուստի*



Նկ. 273

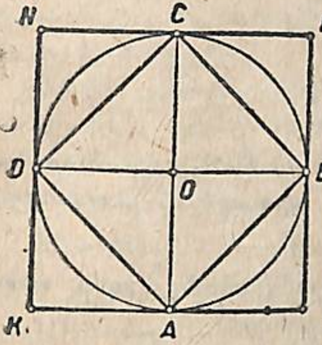
$$b_4=2r.$$

Խնդիր 2. Կառուցել կանոնավոր արտագծյալ յեռանկյուն յեվ նրա b_3 կողմն արտահայտել ներգծած շրջանագծի r շառավղով:

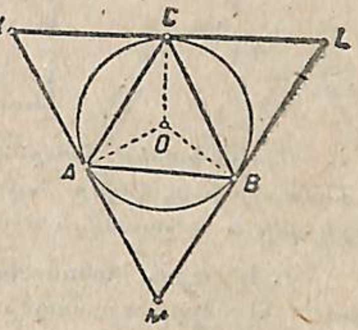
Լուծում. *r շառավղով շրջանագծի մեջ ներգծում ենք կանոնավոր յեռանկյուն (նկ. 275)։ Նրա գագաթներով տանում ենք շոշափողներ մինչև փոխհատվելը. ստանում ենք կանոնավոր արտագծյալ յեռանկյուն՝* KLM*։ Այս յեռանկյան մեջ* A *և* B *շոշափման կետերը* KM *և* LM *կողմերի միջնակետերն են, վորովհետև* $KA=AM$ *և* $LB=BM$. *այստեղից հետևում է, վոր* $AB=a_3$ *հատվածը* KLM *յեռանկյան միջին գիծն է։ Բայց* $AB=\frac{KL}{2}$, *կամ* $a_3=\frac{b_2}{2}$. *այստեղից՝* $b_2=2a_3$, *այսինքն*

Կանոնավոր արտագծյալ յեռանկյան կողմը յերկու անգամ մեծ է նույն շրջանի մեջ ներգծած կանոնավոր ներգծյալ յեռանկյան կողմից:

$$b_3=2r\sqrt{3}.$$



Նկ. 274.



Նկ. 275.

§ 10. ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԱՐՏԱԳԾՅԱԼ ԲԱԶՄԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ ՆՈՒՅՆԱՆՈՒՆ ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ՆԵՐԳԾՅԱԼ ԲԱԶՄԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԻ ՅԵՎ ՇԱՌԱՎՂԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

1. **Խնդիր.** Կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյան կողմով և շառավղով հաշվել նույնանուն կանոնավոր արտագծյալ բազմանկյան կողմը:

Լուծում. ABCD... *և* KLMN... *բազմանկյունները (նկ. 275 ա) կանոնավոր են և նույնանուն, հետևաբար, նրանք նման են։* KL *կողմը*$=b_n$, AB *կողմը*$=a_n$. *Բազմանկյունների նմանությունից հետևում է, վոր*

$$\frac{b_n}{a_n}=\frac{R}{h},\ \text{վորտեղից}\ b_n=\frac{a_n R}{h}. \qquad (1)$$

OP *յեռանկյունից, վորի* PB *էջը*$=\frac{a_n}{2}$, *գտնում ենք* h-*ը՝*

$$h^2=R^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2;\quad h=\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}. \qquad (2)$$

h-*ի համար գտած արժեքը (2)-ից տեղադրելով (1) հավասարության մեջ, ունենում ենք՝*

$$b_n=\frac{a_n R}{\sqrt{R-\frac{a_n^2}{4}}}$$

2. Այս բանաձևը հնարավորություն է տալիս կանոնավոր ներգծած բազմանկյան a_n կողմի և R շառավղի միջոցով որոշել նույնանուն կանոնավոր արտագծյալ բազմանկյան b_n կողմը։

3. Եթե ստացած բանաձևի յերկու մասերը քառակուսի բարձրացնենք և հաշվենք a_n-ը, ապա կստանանք՝

$$a_n = \frac{b_n R}{\sqrt{R^2+\frac{b_n^2}{4}}}$$

Այս բանաձևը հնարավորություն է տալիս կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյան a_n կողմը հաշվել կանոնավոր արտագծյալ բազմանկյան b_n կողմի և R շառավղի միջոցով։

4. Խնդիր. Կանոնավոր արտագծյալ վեցանկյան b_6 կողմը արտահայտել ներգծյալ շրջանագծի R շառավղի միջոցով։

Լուծում. Խնդրի լուծման համար օգտվենք հետևյալ բանաձևից՝

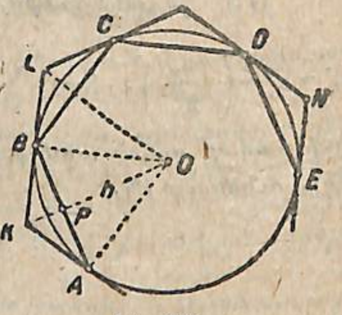
$$b_n = \frac{a_n R}{\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}}$$

Բազմանկյան կողմերի թիվ n-ը, պայմանի համաձայն, հավասար է 6-ի. հետևաբար, $a_n = a_6 = R$, ուստի

$$b_6 = \frac{a_6 R}{\sqrt{R^2-\frac{a_6^2}{4}}} = \frac{R\cdot R}{\sqrt{R^2-\frac{R^2}{4}}} = \frac{R^2}{\sqrt{\frac{3R^2}{4}}} = \frac{2R^2}{R\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

§ 11. ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ՆԵՐԳԾՅԱԼ ԲԱԶՄԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ԹՎԻ ԿՐԿՆԱՊԱՏԿՈՒՄԸ

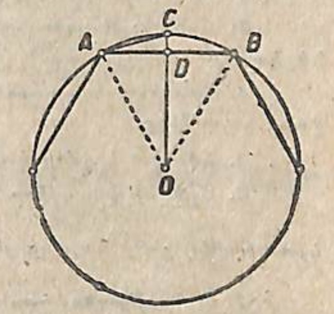


Նկ. 275. ա

1. Խնդիր. Կրկնապատկել կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյան կողմերի թիվը և նոր a_{2n} կողմն արտահայտել a_n-ի և R-ի միջոցով։

Լուծում. 1) Դիցուք $AB=a_n$ լարը ներկայացնում է կանոնավոր ներգծյալ n-անկյան կողմը (նկ. 276)։ Որպեսզի կառուցենք այնպիսի ներգծյալ

բազմանկյուն, որի կողմերի թիվը 2 անգամ ավելի է տվյալ բազմանկյան կողմերի թվից, այսինքն 2n է, պետք է շրջանագիծը բաժանել 2n հավասար մասերի։ Դրա համար կանոնավոր n-անկյան յուրաքանչյուր կողմին համապատասխանող աղեղը կիսում ենք. բաժանման նոր կետերը միացնելով հարևան գագաթների հետ, ստանում ենք կանոնավոր 2n-անկյուն։ Եթե AB-ն (նկ. 276) կանոնավոր n անկյան կողմն է, ապա AC-ն ներկայացնում է կանոնավոր 2n անկյան կողմը։



Նկ. 276.

2) $AC=a_{2n}$ կողմը հաշվելու համար դիտենք AOC սրանկյուն եռանկյունը ընենք, թե, ինչի է հավասար այդ կողմի քառակուսին՝

$$AC^2=AO^2+O\quad-2OC\cdot OD,$$

կամ $a_{2n}^2 = R^2+R^2-2R\cdot OD=2R^2-2R\cdot OD.$

AOD ուղղանկյուն եռանկյունից գտնում ենք՝ $OD=\sqrt{AO^2-AD^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}=\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}$.

Նախընթաց (1) հավասարության մեջ տեղադրելով OD-ի այս արտահայտությունը, ունենում ենք՝

$$a_{2n}^2=2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}} \text{ կամ } a_{2n}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}}$$

Այս բանաձևը, որը կոչվում է կանոնավոր ներգծյալ n-անկյան կողմերի թվի կրկնապատկման բանաձև, հնարավորություն է տալիս կանոնավոր ներգծյալ n անկյան a_n կողմի և շրջանագծի R շառավղի միջոցով որոշել կանոնավոր ներգծյալ 2n-անկյան a_{2n} կողմը։

2. Օրինակ. Արտահայտել կանոնավոր ներգծյալ տասներկուանկյան կողմը R-ի միջոցով։

Լուծում. $a_{12}^2=2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_6^2}{4}}$: $a_{12}^2=2R^2-2R\sqrt{\frac{3R^2}{4}}$, որովհետև $a_6=R$:

$$a_{12}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{3}}=R^2\sqrt{2-\sqrt{3}}, \text{ կամ } a_{12}=\frac{R}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right),$$

որովհետև $2-\sqrt{3}=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$.

Հարցեր յեվ վարժություններ.

1. R շառավղով շրջանագծի մեջ ներգծել կանոնավոր ութանկյուն յեվ նրա կողմն արտահայտել շառավղի միջոցով:

2. Կանոնավոր ներգծյալ յեռանկյան, քառանկյան, ութանկյան a կողմի միջոցով վորոշել շրջանի շառավիղը:

3. Վորոշել R շառավղով շրջանի մեջ ներգծած կանոնավոր ութանկյան, տասներկանկյան անկյունագծերի յերկարությունը:

4. Կանոնավոր արտագծած վեցանկյան կողմը հավասար ե b-ի: Վորոշել շըրջանի շառավիղը:

5. Տվյալ a կողմով կառուցել կանոնավոր ութանկյունը:

6. Շրջանի շառավիղը հավասար ե R-ի: Հաշվել կանոնավոր ներգծյալ հնգանկյան կողմը, յեթե հայտնի յե վոր $a_{10} = R\frac{\sqrt{\ }-1}{2}$:

7. h հարթագծով կառուցել 1) անոնավոր յեռանկյուն, 2) քառակուսի, 3) կանոնավոր վեցանկյուն:

XXI. ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ՅԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՅԵՎ ՇՐՋԱՆԻ ՄԱԿԵՐԵՍԸ

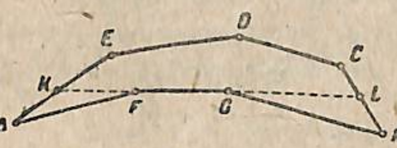
§ 1. ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ՅԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ԲԱՂԴԱՏՈՒՄԸ ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ՆԵՐԳԾՅԱԼ ՅԵՎ ԱՐՏԱԳԾՅԱԼ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՊԱՐԱԳԾԵՐԻ ՀԵՏ

1. Շրջանագծի յերկարությունն ուղղակի չափել նրա վրա վերադրելով գծային չափը՝ հնարավոր չե, վորովհետև գծային չափը լինելով ուղիղ գծի հատված, չի կարող համատեղվել կոր գծի հետ. այս պատճառով շրջանագծի յերկարությունը վորոշում են անուղղակի ճանապարհով, չափելով կանոնավոր ներգծած և արտագծած բազմանկյունների մակերեսները: Նախքան այն թեորեմներին անցնելը, վորոնք վերաբերում են շրջանագծի յերկարության բանաձևի արտածմանը, դիտարկենք A և B յերկու կետերի միջև տարված տարբեր գծերի յերկարությունների միջև յեղած կախումը:

Դիցուք տված են յերկու բեկյալներ՝ AEDCB և AFQB, վորոնցից առաջինն ընդգրկող բեկյալ ե, իսկ յերկրորդը ուռուցիկ ընդգրկված բեկյալ, և վորոնց ծայրերը համընկնում են A և B կետերում:

Ցույց տանք, վոր AFQB ուռուցիկ ընդգրկված բեկյալը կարճ ե ամեն մի AEDCB ընդգրկող բեկյալից, յեթե յերկու բեկյալներն էլ ունեն միևնույն A և B ծայրերը:

Իրոք, AFQB շոշափողի FQ կողմը շարունակելով դեպի յերկու կողմը մինչև AEDCB բեկյալի հետ հատվելը (նկ. 277). ունենում ենք՝



Նկ. 277

$AF \angle AK+KF$, $KF+FQ+QL < KE+ED+DC+CL$; $QB < QL+LB$.

Անդամ առ անդամ գումարելով տված անհավասարությունները, կստանանք՝ $AF+KF+FQ+QL+QB < AK+KF+KE+ED+DC+QL+CL+LB$,

կամ, հանելով անհավասարության յերկու մասերից KF և QL հատվածները և նկատելով, վոր $AK+KE=AE$ և $CL+LB=CB$, ունենում ենք՝

$AF+FQ+QB < AE+ED+DC+CB$,

Այսինքն ուռուցիկ ընդգրկված բեկյալը կարճ է ամեն մի ընդգրկող բեկյալից, որի ծայրերը համընկնում են ընդգրկված բեկյալի ծայրերի հետ։

Ասածներս իրավացի յեն մնում նաև այն դեպքում, յերբ ընդգրկողը կամ ընդգրկվածը շրջանագծի աղեղներ են, որովհետև շրջանագծի աղեղը կարելի յե դիտարկել իբրև մի բեկյալ, որն ունի շատ մեծ թվով աննշան յերկարության օղակներ (կողմեր)։

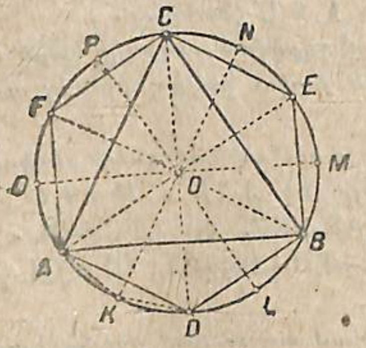
Այսպես, օրինակ՝ DC_1F *աղեղը (նկ. 278) կարճ է* DCF *բեկյալից, որը կազմված է* CD *և* CF *յերկու շոշափողներից. ճիշտ այդպես էլ* DC_1F *աղեղը կարճ է* $DQPF$ *բեկյալից, այսինքն* $\smile DC_1 + \smile C_1F < DQ + QP + PF$.

2. **Թեորեմ։** Կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյան պարագիծը փոքր է շրջանագծի յերկարությունից և այնքան ավելի յէ մոտենում վերջինիս, որքան ավելի շատ անգամ ենք կրկնապատկում նրա կողմերի թիվը։

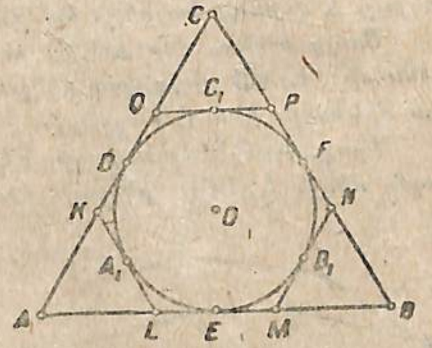
Տված՝ P_n*-ը n-անկյան պարագիծն է,* C*-ն շրջանագծի յերկարությունը (նկ. 277 ա)*

Ապացուցել՝ $P_n < C$ *և մոտենում է* C*-ին, յերբ կողմերի n թիվը կրկնապատկում ենք։*

Ապացուցում։ AB-ն ABC *կանոնավոր ներգծյալ յեռանկյան կողմն է, նրա պարագիծն է՝* $P_3 = 3AB$։ *Կիսելով* AB, BC *ու* CA *աղեղները և բաժանման* D, E *ու* F *կետերը միացնելով այդ աղեղների ծայրերի հետ, կստանանք կանոնավոր ներգծյալ վեց անկյուն, որի պարագիծը* $P^6 = 6AD$ *մեծ է կանոնավոր ներգծյալ յեռանկյան պարագծից։ Իրոք*



Նկ. 277 ա



Նկ. 278

ADB *յեռանկյունից ունենք՝* $AD + DB > AB$. *բայց* $AD = DB$, *ուստի* $2AD > AB$, *այս անհավասարության յերկու մասերը բազմապատկելով 3-ով կստանանք՝* $6AD > 3AB$, *կամ* $P_6 > P_3$։ *Այնուհետև կիսելով* AD, DB, BE, EC,… *աղեղները և* K, L, M, N,… *բաժանման կետերը միաց-*

նելով այդ աղեղների ծայրերի հետ, կստանանք կանոնավոր ներգծյալ 12-անկյուն, որի պարագիծը մեծ է 6-անկյան պարագծից՝ $P_{12} > P_6$։ *Իրոք,* ADK *յեռանկյունից ունենք՝* $AK + KD > AD$, *բայց* $KD = AK$, *ուստի* $2AK > AD$. *այս անհավասարության յերկու մասերը բազմապատկելով 6-ով, կստանանք* $12AK > 6AD$, *կամ* $P_{12} > P_6$։ *Շարունակելով ամեն անգամ ստացվող բազմանկյան կողմերի կրկնապատկումը, համոզվում ենք, որ կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյան պարագիծն այնքան ավելի մեծ է լինում, որքան մեծ է նրա կողմերի թիվը։ Այս յեզրակացությունն իրավացի յե նաև այն դեպքում, յերբ սկզբնապես վերցրած կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյունը ոչ թե 3 կողմ ունի, այլ որևէ թվով կողմեր։*

Այսպիսով ունենում ենք՝ $P_6 > P_3$, $P_{12} > P_6$,… *ընդհանրապես՝* $P_{2n} > P_n$. *որտեղ* P_n*-ը n-կողմ ունեցող կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյան պարագիծն է, իսկ* P_{2n}*-ը 2n կողմ ունեցող կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյան պարագիծը։*

Այսպես ուրեմն՝ կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյան կողմերի թվի կրկնապատկման հետ միասին նրա պարագիծն աճում է, ավելի ու ավելի մոտենալով շրջանագծի յերկարության, բայց այնուամենայնիվ մնալով նրանցից փոքր։ Իրոք կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյան կողմերն, իբրև լարեր, փոքր են նրանցով ձգված աղեղներից, այս պատճառով բազմանկյան բոլոր կողմերի գումարն էլ է փոքր շրջանագծի բոլոր աղեղների գումարից. այստեղից հետևում է, որ կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյան պարագիծը փոքր է շրջանագծի յերկարությունից։

Յեթե շրջանագծի յերկարությունը նշանակենք C, *ապա ստացած յեզրակացությունն այսպես կգրվի՝* $P_n < C$։

Կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյան կողմերի թիվն անսահմանափակորեն կրկնապատկելու դեպքում նրա պարագիծն այնքան է մոտենում շրջանագծի յերկարության, որ $C - P_n$ *տարբերությունը (շրջանագծի յերկարության և բազմանկյան պարագծի տարբերությունը) անվերջորեն փոքրանում է։*

3. **Թեորեմ.** Կանոնավոր արտագծյալ բազմանկյան պարագիծը մեծ է շրջանագծի յերկարությունից և մոտենում է վերջինիս, յերբ նրա կողմերի թիվը կրկնապատկվում է։

Տված՝ P_n*-ը բազմանկյան պարագիծն է.* C*-ն շրջանագծի յերկարությունը (նկ. 278)*

Ապացուցել՝ $P_n > C$ *և մոտենում է* C*-ին կողմերի n թվի կրկնապատկման ժամանակ։*

Ապացուցում։ AB-ն ABC *կանոնավոր արտագծյալ յեռանկյան կողմն է, իսկ նրա պարագիծն է՝* $P_3 = 3AB$։ *Կիսում ենք այն աղեղները,*

վորոնք ընկած են ABC յեռանկյան կողմերի և շրջանագծի շոշափման D, E և F կետերի միջև և բաժանման A_1, B_1, C_1 կետերից տանում ենք շոշափողներ. ստանում ենք կանոնավոր արտագծյալ վեցանկյուն, KLMNPQ, վորի պարագիծը՝ $P_6=6KL$, փոքր է P_3-ից, այսինքն $P_6<P_3$: Իրոք, AKL BMN, CQP յեռանկյուններից ունենք $KL<AK+AL$, $MN<BM+BN$, $PQ<CQ+CP$, իսկ այս նշանակում է, վոր ABC յեռանկյան կողմերից կտրվող KL և AL, BM և BN, CQ և CP հատվածների գումարները փոխարինվում են KL, MN, PQ հատվածներով, վորոնք ավելի փոքր են քան այդ գումարները. այս պատճառով $P_6<P_3$: Այս նույն ձևով կրկնապատկելով կանոնավոր արտագծյալ վեցանկյան կողմերի թիվը, կստանանք կանոնավոր արտագծյալ 12 անկյուն, վորի պարագիծը փոքր է կանոնավոր արտագծյալ 6 անկյան պարագծից, այսինքն $P_{12}<P_6$ և այլն: Նման դատողությամբ դժվար չէ համոզվել, վոր ինչպիսի կանոնավոր արտագծյալ բազմանկյուն էլ ունենանք, յեթե նրա կողմերի թիվը կրկնապատկենք, ապա այդ բազմանկյան պարագիծը փոքր կլինի վերցրած բազմանկյան պարագծից: Ընդհանրապես; $P_{2n}<P_n$:

Այսպես ուրեմն, կանոնավոր արտագծյալ բազմանկյան կողմերի թիվը կրկնապատկելու հետ միասին նրա պարագիծը փոքրանում է, շարունակ մոտենալով շրջանագծի յերկարության, բայց միշտ մնալով նրանցից մեծ:

Այս յեզրակացությունն այսպես է գրվում $P_n>C$:

Կանոնավոր արտագծյալ բազմանկյան կողմերի անսահմանափակորեն կրկնապատկելու հետ միասին նրա պարագիծն այնքան է մոտենում շրջանագծի յերկարության, վոր P_n-C տարբերությունը փոքրանում է անհետանալու չափ:

4. Ի մի բերելով ասածները, պնդում ենք, վոր $P_n<C<P_n$, այսինքն շրջանագծի յերկարությունը մեծ է կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյան պարագծից և փոքր է կանոնավոր արտագծյալ բազմանկյան պարագծից. այդ բազմանկյունների պարագծերը փոխվում են նրանց կողմերի թվի կրկնապատկման հետ միասին և ավելի ու ավելի մոտենում են շրջանագծի յերկարությանը, վորը շարունակ անփոփոխ է մնում:

§ 2. ԳԱՂԱՓԱՐ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ՅԵՎ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

1. Կանոնավոր ներգծյալ և արտագծյալ բազմանկյունների p_n և P_n պարագծերը փոփոխվում են այդ բազմանկյունների կողմերի անսահմանափակորեն կրկնապատկելու հետ միասին և ավելի ու ավելի մոտենում են շրջանագծի յերկարության, ձգտելով նրան հավասարվել,

իսկ շրջանագծի յերկարությունը չի փոխվում այդ վողջ պրոցեսի ընթացքում:

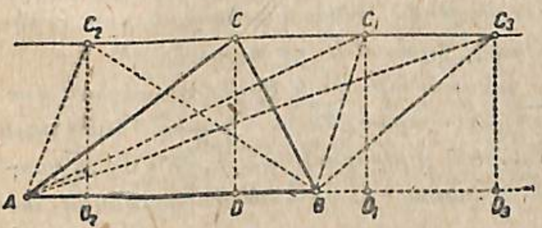
2. Այնպիսի մեծությունը, վորը տվյալ խնդրի պայմաններում տարբեր արժեքներ է ընդունում, կոչվում է փոփոխական մեծություն, իսկ այնպիսի մեծությունը, վորը խնդրի այդ նույն պայմաններում շարունակ պահպանում է իր արժեքը, չի փոփոխվում, կոչվում է հաստատուն մեծություն:

Ներգծյալ և արտագծյալ բազմանկյունների p_n և P_n պարագծերը, յերբ այդ բազմանկյունների կողմերի թիվն անսահմանափակորեն կրկնապատկում ենք, կարող են ծառայել իբրև օրինակ փոփոխական մեծությունների, իսկ շրջանագծի C յերկարությունը հաստատուն մեծություն է:

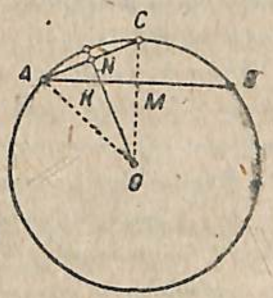
3. Բերենք օրինակներ հաստատուն և փոփոխական մեծությունների վերաբերյալ:

1) Տված է ABC յեռանկյունը (նկ. 279): Յեթե նրա C գագաթը տեղափոխենք AB հիմքին զուգահեռ ուղիղի վրա, բայց այդ հիմքը թողնենք անշարժ, ապա փոփոխական մեծություններ կլինեն՝ յեռանկյան կողմնային կողմերի յերկարությունները, պարագիծը և անկյուններից յուրաքանչյուրի մեծությունը. իսկ հաստատուն մեծություններ կլինեն՝ նրա հիմքը, նրա բոլոր անկյունների գումարը, բարձրությունը և մակերեսը:

2) Տված է R շառավղով մի շրջանագիծ (նկ. 280). $AB=a_n$ հատվածը կանոնավոր ներգծած n-անկյան կողմն է, իսկ OM-ը, վոր ուղղահայաց է AB-ին, հարթագիծն է. այս հարթագիծը նշանակենք h_n-ով:



Նկ. 279



Նկ. 280

Կրկնապատկելով n-անկյան կողմերի թիվը, կստանանք $AC=a_{2n}$ և $ON\perp AC$ հարթագիծը, վորը նշանակենք h_{2n}-ով:

OKM ուղղանկյուն յեռանկյունից ունենք՝ $OK>OM$, բայց OK-ն ON-ի մի մասն է միայն, ուստի ON-ն էլ ավելի մեծ է OM-ից: Այսպես ուրեմն՝ $ON>OM$ կամ $h_{2n}>h_n$, այսինքն բազմանկյան կողմերի

թվի կրկնապատկման հետ միասին հարթագիծն աճում է, ավելի ու ավելի մեծ է դառնում, իր յերկարությամբ ավելի ու ավելի մոտենում է շրջանագծի R շառավղի յերկարության, մնալով, սակայն, նրանից փոքր։

Այսպիսով բազմանկյան կողմերի թիվը անսահմանափակորեն կրկնապատկելիս h_n հարթագիծը փոփոխական մեծություն է, իսկ շրջանագծի շառավիղը՝ հաստատուն մեծություն, $R-h_n$ տարբերությունն ավելի ու ավելի փոքրանալով դառնում է անհետացող փոքր, յերբ բազմանկյան կողմերի թիվը ավելի ու ավելի մեծանում է։

§ 3. ԳԱՂԱՓԱՐ ՍԱՀՄԱՆԻ ՄԱՍԻՆ։ ՇՐՋԱՆԱԳԻԾԸ ՎՈՐՊԵՍ ՍԱՀՄԱՆ ՆԵՐԳԾՅԱԼ ՅԵՎ ԱՐՏԱԳԾՅԱԼ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՊԱՐԱԳԾԵՐԻ

1. Ինչպես տեսանք, կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյան պարագիծը կողմերի անսահմանափակ կրկնապատկման ժամանակ մեծանում է և մոտենում շրջանագծի յերկարության. այդ ժամանակ տվյալ շրջանագծի յերկարության և կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյան պարագծի յերկարության տարբերությունն այնքան ավելի փոքր է դառնում, վորքան ավելի մեծ է ներգծյալ բազմանկյան կողմերի թիվը, իսկ կողմերի թիվը անսահմանափակորեն մեծացնելիս այդ տարբերությունը ձգտում է զերոյի։

2. Կանոնավոր արտագծյալ բազմանկյան պարագիծը ևս նրա կողմերի անսահմանափակ կրկնապատկման դեպքում մոտենում է շրջանագծի յերկարության, բայց շարունակ նվազելով, բազմանկյան պարագծի և շրջանագծի յերկարության տարբերությունն այնքան ավելի փոքր է դառնում, վորքան ավելի մեծ է արտագծյալ բազմանկյան կողմերի թիվը, իսկ կողմերի թիվը անսահմանափակորեն կրկնապատկելիս այդ տարբերությունը ձգտում է զերոյի։

3. Բազմանկյան կողմերի անսահմանափակ կրկնապատկման ժամանակ վո՛չ ներգծյալ բազմանկյան պարագիծն է կարող հետզհետե մեծանալով հավասարվել շրջանագծի յերկարության և վո՛չ էլ արտագծյալ բազմանկյան պարագիծն է կարող հետզհետե փոքրանալով հավասար դառնալ շրջանագծի յերկարության։

Շրջանագիծը նրանց սահմանն է հանդիսանում։

4. **Այն հաստատուն մեծությունը, վորին փոփոխական մեծությունն այնպես է մոտենում, վոր նրա և փոփոխական մեծության տարբերությունը բացարձակ մեծությամբ կարող է ավելի փոքր դառնալ քան կամավորապես վերցրած վորևե դրական թիվ և այնուհետև էլ նրանից փոքր մնալ, կոչվում է փոփոխական մեծության սահմանը։**

Շրջանագիծն, այսպիսով, ծառայում է իբրև սահման ներգծյալ և արտագծյալ կանոնավոր բազմանկյունների պարագծերի, յերբ նրանց կողմերի թիվը անսահմանափակորեն կրկնապատկում ենք։

Այս սահմանումը մաթեմատիկական նշաններով այսպես է գրվում. սահման $p_n = C$. կամ սահման $P_n = C$, յերբ բազմանկյան կողմերի թիվը անսահմանափակորեն մեծանում է. գրում են նաև այսպես՝ $\lim p_n = C$, $\lim P_n = C$, վորտեղ lim-ը լատիներեն limes (=սահման) բառի կրճատ գրությունն է։

Բազմանկյան կողմերի թվի անսահմանափակ կրկնապատկման ժամանակ թե $C-p_n$ տարբերությունը և թե P_n-C տարբերությունը շարունակ պակասելով դառնում են անհետացող փոքր. այս պատճառով, ցանկացած աստիճանի ճշտությունը պահպանելով, իբրև շրջանագծի յերկարությունը ընդունում են այնպիսի ներգծյալ կամ արտագծյալ բազմանկյան պարագիծը, վորը խիստ մեծ թվով կողմեր ունի։

5. **Այն փոփոխական մեծությունը, վոր շարունակ նվազում է յեվ կարող է բացարձակ մեծությամբ դառնալ ու մնալ ավելի փոքր, քան կամավորապես վերցրած վորևե դրական մեծություն, կոչվում է անվերջ փոքր։**

Ընդունված է ասել, վոր անվերջ փոքրը փոփոխվելով, ձգտում է զերոյի, վոր զերոն ծառայում է անվերջ փոքրի համար իբրև սահման։ Անվերջ փոքր մեծությունների օրինակներ են՝ կանոնավոր բազմանկյան շառավղի ու հարթագծի տարբերությունը, յերբ կողմերի թիվը անսահմանափակորեն կրկնապատկվում է, շրջանագծի յերկարության և ներգծյալ բազմանկյան պարագծի տարբերությունը, արտագծյալ բազմանկյան պարագծի և շրջանագծի յերկարության տարբերությունը, յերբ այդ բազմանկյունների կողմերի թիվը անսահմանափակորեն մեծանում է։

Գրությունը՝

$$\left.\begin{array}{l} R-h_n = \text{անվերջ փոքր,} \\ C-p_n = \text{անվերջ փոքր,} \\ P_n-C = \text{անվերջ փոքր,} \end{array}\right\}$$ յերբ կանոնավոր բազմանկյան կողմերի թիվը անսահմանափակորեն կրկնապատկվում է։

§ 4. ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ՅԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎՈՒՄԸ։ π ԹԻՎԸ

1. **Շրջանագծի յերկարությունը գծային միավորով ուղղակի չափելը հնարավոր** չէ։ Նրա յերկարությունը վորոշվում է իբրև այն սահմանը, վորին ձգտում է կանոնավոր ներգծյալ կամ արտագծյալ բազմանկյան պարագիծը, յերբ բազմանկյան կողմերի թիվը անսահմանափակորեն կրկնապատկվում է։

2. Ելնելով սրանից, հաշվում են խիստ մեծ թվով կողմեր ունեցող մի կանոնավոր ներգծյալ և կամ արտագծյալ բազմանկյան պարագիծը և ստացած արդյունքն ընդունում իբրև շրջանագծի երկարությունը մի որոշ ճշտությամբ։ Կանոնավոր ներգծյալ և արտագծյալ բազմանկյունների կողմերի երկարությունը շրջանագծի շառավղի միջոցով հաշվելիս օգտվում են հետևյալ բանաձևերից.

$$a_{2n}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}} \quad \text{և} \quad b_n=\frac{a_n R}{\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}}$$ ։

Այն արդյունքները, որոնք ստացվում են շրջանագծի շառավղի միջոցով կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյունների կողմերի երկարությունը, ինչպես և պարագծերը հաշվելիս, երբ այդ բազմանկյունների կողմերի թիվը հաջորդաբար կրկնապատկվում է, տված են ստորև զետեղված աղյուսակում։ Արտագծյալ և ներգծյալ կանոնավոր նույնանուն բազմանկյունների պարագծերի տարբերությունը բերված է մինչև 0,000001 ճշտությամբ։

Այս աղյուսակի վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ բազմանկյունների կողմերի թվի կրկնապատկման հետ միասին 1) a_n-ը նվազում է և p_n-ն աճում. 2) b_n-ը նվազում է, P_n-ը ևս նվազում է. 3) a_n-ի ու b_n-ի, ինչպես և p_n-ի ու P_n-ի արժեքները հետզհետե իրար մոտենում են. 4) արտագծյալ և ներգծյալ բազմանկյունների պարագծերի P_n-p_n տարբերությունը դառնում է ավելի ու ավելի փոքր։

Այսպես էլ պետք է լինի, որովհետև երկու պարագծերն էլ հետզհետե մոտենում են միևնույն սահմանին՝ շրջանագծի երկարությանը, ձգտելով նրա հետ միաձուլվելու, երկարությամբ նրան հավասարվելու։

Միանգամայն հասկանալի է, որ եթե 768 կողմ ունեցող արտագծյալ և ներգծյալ բազմանկյունների պարագծերի տարբերությունը հավասար է մոտավորապես 0,00005 R-ի, ապա շրջանագծի երկարության և 768 կողմանի ներգծյալ բազմանկյան պարագծի տարբերությունը, ինչպես և 768 կողմանի արտագծյալ բազմանկյան պարագծի երկարության ու շրջանագծի երկարության տարբերությունն ավելի փոքր կլինի, քան 0,00005 R-ը. այս պատճառով իբրև շրջանագծի մոտավոր երկարություն կարելի է ընդունել ներգծյալ կամ արտագծյալ բազմանկյան պարագիծը, որի կողմերի թիվը շատ մեծ է. որքան մեծ լինի կողմերի թիվը, այնքան ճշգրիտ կլինի մոտավորությունը։

Այսպես, եթե վերցրած է 1 մ. շառավղով մի շրջանագիծ, ապա P_n-p_n տարբերությունը $n=768$ դեպքի համար կկազմի մոտ 0,00005 մ.

=0,005 սմ=0,05 մմ, այսինքն միայն $\frac{1}{20}$ միլիմետր։ Պարզ է, որ 1 մ. երկարության շառավիղ ունեցող շրջանագծի երկարությունը ներգծյալ կամ արտագծյալ բազմանկյան պարագծից կտարբերվի էլ ավելի քիչ։

Այսպես ուրեմն, մինչև 0,0001 ճշտությամբ, R շառավղով շրջանագծի C երկարությունը հավասար է 6,2832 R, այսինքն $C\cong 6{,}2832\ R$։

n— կողմերի թիվը	a_n ներգծյալ բազմանկյան կողմը	p_n —արտագծյալ բազմանկյան կողմը	b_n —արտագծյալ բազմանկյան պարագիծը	P_n —արտագծյալ բազմանկյան պարագիծը	$P_n - p_n$ պարագծերի տարբերութ.
6	1,0000000 R	6,00000 R	1,1547006 R	6,92820 R	0,92820 R
12	0,5176381 R	6,21166 R	0,5358984 R	6,43078 R	0,21912 R
24	0,2610524 R	6,26526 R	0,2633050 R	6,31932 R	0,05406 R
48	0,1308063 R	6,27870 R	0,1310869 R	6,29217 R	0,01347 R
96	0,0654382 R	6,28206 R	0,0654782 R	6,28543 K	0,00337 R
192	0,0327235 R	6,28290 R	0,0327278 R	6,28375 R	0,00085 R
384	0,0163623 R	6,28311 R	0,0163628 R	6,28333 R	0,00022 R
768	0,0081812 R	6,28317 R	0,0081813 R	6,28322 R	0,00005 R

Եթե տվյալ արտահայտության մեջ շրջանագծի R շառավիղը փոխարինենք նրա D տրամագծի կեսով, այսինքն R-ի փոխարեն վերցնենք $\frac{D}{2}$, ապա կստանանք՝

$$C\cong 6{,}2832R=6{,}2832\cdot\frac{D}{2}=3{,}1416D$$ ։

Վերջին բանաձևը ցույց է տալիս, որ շրջանագծի C երկարությունը ստացվում է մինչև 0.0001 ճշտությամբ, երբ տրամագիծը բազմապատկում ենք 3,1416 թվով։

3. $C\cong 3{,}1416\ D$ բանաձևը պահպանում է իր ուժը նաև այն դեպքում, երբ շրջանագծի տրամագիծը կամավորապես բերված երկարություն ունի։ Այդ բանաձևից ունենք $\frac{C}{D}\cong 3{,}1416$։ Այս հարաբերությունը ցույց է տալիս, որ շրջանագծի երկարությունը տրամագծից մեծ է մոտ 3,1416 անգամ։

Շրջանագծի C երկարության հարաբերությունն իր D տրամագծին մի հաստատուն թիվ է, որը մոտավորապես հավասար է 3,1416:

Այդ հաստատուն թիվը ընդունված է նշանակել հունարեն π (կարդացվում է «պի») տառով. նշանակում է π=3,1416: Մուծելով այս նշանակումը, մենք շրջանագծի C երկարությունը որոշող բանաձևին հետևյալ տեսքն ենք տալիս $\frac{C}{D}=\pi$, *կամ* C=πD *կամ* C=2πR *այսինքն՝*

Շրջանագծի երկարությունը π անգամ մեծ է իր տրամագծից կամ 2π անգամ մեծ է իր շառավղից:

4. π *թիվը* իռացիոնալ *թիվ է և, հետևաբար չի կարող արտահայտվել* $\frac{m}{n}$ *տեսքի թվով, որտեղ m-ը և n-ն ամբողջ թվեր են: Շրջանագծի C երկարությունն ընդունելով 768 կողմանի արտագծյալ կանոնավոր բազմանկյան պարագիծը, π-ի համար կստանանք 3,1416 մոտավոր արժեքը հավելորդով և մինչև 0,0001 ճշտությամբ.*

Գործնական նպատակների համար բավարար կլինի շրջանագծի C երկարությունն ընդունել π=3,14, մինչև 0,01 ճշտությամբ:

Խնդիրներ լուծելիս հարկավոր է լինում օգտվել π թվի հակադարձ թվից, այսինքն $\frac{1}{\pi}$*-ից.* $\frac{1}{\pi}=0,318$ *մինչև 0,001 ճշտությամբ.* $\frac{1}{\pi}=0,32$ *մինչև 0,01 ճշտությամբ:*

5. Շրջանագծի երկարությունը հաշվելու հարցը մաթեմատիկոսներին զբաղեցրել է երկար դարերի ընթացքում: Հին բաբելոնացիները և հրեաները ընդունում էին, որ շրջանագծի երկարությունը հավասար է նրա տրամագծի եռապատիկին: Հին ժամանակների մեծագույն մաթեմատիկոսներից մեկը՝ Արքիմեդը, *π թվի համար գտավ* $3\frac{1}{7}$ *արժեքը, ընդ որում շրջանագծի արժեքը հաշվելիս նա օգտվում էր այն եղանակով, որ այս գրքում ավանդված է:* Պտղոմեոսի, *հնդիկների և հետագայում արաբների մոտ π թվի համար գտնում ենք 3,1416 արժեքը:* Ադրիան Մեցիուսը *գտավ* $\pi=\frac{355}{113}$*: Այս թիվը հեշտ է հիշել, եթե առաջին երեք կենտ թվերը երկ-երկու անգամ իրար հետևից գրենք, 113355, և սրա մեջ վերջին երեք թվանշաններով գրված թիվը բաժանենք առաջին երեք թվանշաններով գրված թվի վրա:*

Դեռ միջին դարերում π թիվը հաշվել էին մեծ ճշտությամբ. Այսպես, ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Վիյետը *(1540—1603) π-ն հաշվեց մինչև տասներորդ տասնորդականի ճշտությամբ:*

Գերմանացի մաթեմատիկոս Լուդոլֆը *(1649—1711) հաշվեց π-ն 35 տասնորդականշանով: Դրանից հետո π թիվը սկսեցին անվանել Լուդոլֆի թիվ: Սակայն հետագայում տրվեցին π-ի անհամեմատ ավելի ճիշտ արժեքներ: Այսպես, անգլիացի մաթեմատիկոս* Շանկսը *(1812—1882) հաշվեց 707 նշան: Պետք է ասել, սակայն, որ այս վերջին հաշվումները նվազ օգտակար են և չեն արդարացնում նրանց վրա գործադրած հսկայական աշխատանքը՝ Շանկսի թվից, իհարկե, ոչ ոք չի օգտվում:*

Շատ ավելի հետաքրքրական և կարևոր են դրա հետ կապված տեսական հարցերը: Դեռ շատ հին ժամանակներում ուշադրություն էր դրավում 1) շրջանագծի ուղղացման հարցը, *այսինքն այնպիսի ուղիղ գծի հատվածի կառուցման հարցը, որի երկարությունը հավասար է տվյալ շրջանագծի երկարության, 2)* շրջանի քառակուսացման հարցը, *այսինքն այնպիսի քառակուսի կառուցելու հարցը, որի մակերեսը հավասար է տված շրջանի մակերեսին: Ընդսմին պահանջվում էր, իհարկե, թե մեկ և թե մյուս կառուցումը կատարել միայն քանոնի և կարկինի օգնությամբ, այսինքն միայն ուղիղ գծեր և շրջանագծեր տանելու միջոցով: Այս երկու խնդիրներն իրար հետ սերտորեն կապված են: Եթե կարողանանք այնպիսի հատված կառուցել, որի երկարությունը հավասար լինի շրջանագծի երկարության, ապա այս հատվածը դարձնելով ուղղանկյան հիմք, իսկ շառավղի կեսը՝ բարձրություն, կստանանք մի ուղղանկյուն, որը հավասարամեծ է տվյալ շրջանին. իսկ ուղղանկյունը փոխարկել հավասարամեծ քառակուսու արդեն դժվար չէ, այդ կարողանում էր կատարել դեռ* Էվկլիդը:

Շրջանի քառակուսացման և շրջանագծի ուղղացման խնդիրը չափազանց հետաքրքրում էր շատ երկրաչափների, որոնց թվում կային նաև սկսնակները: Եթե շրջանագծի շառավիղն ընդունենք իբրև չափի միավոր, ապա կիսաշրջանագծի երկարությունը կարտահայտվի π թվով: Այս պատճառով խնդիրը վերածվում է կարկինի ու քանոնի միջոցով այնպիսի հատված կառուցելուն, որի երկարությունն արտահայտվում է π թվով: Այսպիսի կառուցման հնարավորությունն, ինչպես տեսնում ենք, կախված է π թվի բնույթից: Դեռ 1768 թ. գերմանացի մաթեմատիկոս Լամբերտը *ցույց տվեց, որ π-ն իռացիոնալ թիվ է: Սակայն շատ իռացիոնալ թվեր կարող են կառուցվել կարկնով ու քանոնով: Այսպես, կառուցելով մի քառակուսի, որի կողմը հավասար է 1-ի (երկարության միավորի), և տանելով նրա անկյունագիծը, կստանանք մի հատված, որի երկարությունն արտահայտվում է* $\sqrt{2}$ *թվով: Միավոր շառավղով շրջանի մեջ ներգծած կանոնավոր ութանկյան կողմն արտահայտվում է* $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ *թվով,*

վորը եւ կարելի չէ կառուցել կարկինով ու քանոնով։ Բայց π թիվը այսպես ասած, անհամեմատ ավելի բարդ կազմություն ունի։ Անցյալ դարի յերկրորդ կեսում միայն ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Էրմիտը (1873) հաջողվեց տալ այն առաջադրությունները, վորոնց հիման վրա գերմանացի մաթեմատիկոս Լինդեմանը (1882) ցույց տվեց, վոր π թվով արտահայտված հատվածը հնարավոր չէ կարկինով ու քանոնով կառուցել։

Հետագայում այս ապացույցը պարզեցրել են և կատարելագործել շատ մաթեմատիկոսներ։ Այսպիսով վերջնականորեն ապացուցված է, վոր շրջանի քառակուսացումը կարկինով ու քանոնով անհնարին է։

Պետք է նկատել, վոր ավելի բարդ գործիքների, այսինքն ավելի բարդ կորերի միջոցով այդ կառուցումը կարելի չէ կատարել, և այդ հայտնի յեր դեռ հին ժամանակները։

6. **Թեորեմ.** Յերկու շրջանագծերի յերկարությունները այնպես են հարաբերում, ինչպես նրանց շառավիղները և կամ տրամագծերը:

Տված՝ C_1-ը և C_2-ը շրջանագծերի յերկարություններն են, R_1 և D_1, R_2 և D_2-նրանց շառավիղներն են ու տրամագծերը

Ապացուցելի՝ $\frac{C_1}{C_2}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{D_1}{D_2}$.

Ապացուցում. $C_1=2\pi R_1$, $C_2=2\pi R_2$

Առաջին հավասարությունն անդամ առ անդամ բաժանելով յերկրորդի վրա, ունենում ենք՝

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{2\pi R_1}{2\pi R_2}=\frac{R_1}{R_2}.$$

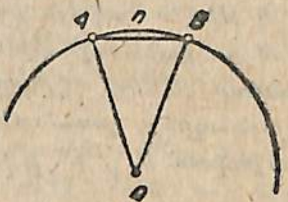
Նմանապես $C_1=\pi D_1$ և $C_2=\pi D_2$ հավասարությունից գտնում ենք՝

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{\pi D_1}{\pi D_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

§ 5. ԱՂԵՂԻ ՅԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Խնդիր 1. Վորոշել n°-ի աղեղի յերկարությունը, յերբ շառավիղն է R *(նկ. 281)*.

Լուծում. *Քանի վոր AB աղեղը պարունակում է n աղեղային աստիճան, ապա նրան համապատասխան AOB կենտրոնական անկյունը պարունակում է n անկյունային աստիճան։ Մեկ աղեղային աստիճանի յերկարությունը հավասար է* $\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180}$, *բայց* AB *աղեղը պարունակում է* n°, *հետևաբար նրա* a *յերկարությունը կլինի*



Նկ. 281

$$a=\frac{\pi R\cdot n}{180}.$$

n *և 360 թվերը պետք է նույնանուն լինեն. այս նշանակում է, վոր յեթե* n*-ը տված է, օրինակի համար, րոպեներով, ապա 360-ը եւ պետք է վերածել րոպեների։*

Խնդիր 2. Վորոշել այն կենտրոնական անկյան մեծությունը, վորը համապատասխանում է շրջանագծի շառավղի յերկարությունն ունեցող աղեղին։

Լուծում. $a=\frac{\pi Rn}{180}$ *բանաձևից ունենում ենք* $n°=\frac{180°\cdot a}{\pi R}$

խնդրի պայմանի համաձայն $a=R$, *հետևաբար,*

$$n°=\frac{180°\cdot R}{\pi R}=\frac{180°}{\pi}\cong 57°\ 18'։$$

Այն կենտրոնական անկյունը, վորին համապատասխանող աղեղի յերկարությունը շառավղի չափ է, կոչվում է ռադիան (շառավղորդ)։ *Ռադիանը մոտավորապես հավասար է 57° 18'-ի, իսկ ավելի մեծ ճշտությամբ՝ 57° 17',44",8-ի։*

§ 6. ՇՐՋԱՆԻ, ԱՐՏԱՏԻ ՅԵՎ ՀԱՏՎԱԾԻ ՄԱԿԵՐԵՍԸ

1. Կանոնավոր ներգծյալ և արտագծյալ բազմանկյունների մակերեսները, յերբ այդ բազմանկյունների կողմերի թիվն անսահմանափակորեն կրկնապատկում ենք, փոփոխական մեծություններ են։

Այդ ժամանակ ներգծյալ բազմանկյան մակերեսն աճում է, իսկ արտագծյալ բազմանկյանը նվազում։ Այդ յերկու փոփոխական մեծություններն աստիճանաբար մոտենում են իրար, ձգտելով միևնույն սահմանին։ Այն սահմանը, վորին նրանք ձգտում են շրջանի մակերեսն է։ Այսպես ուրեմն շրջանի մակերեսն այն սահմանն է, վորին ձգտում են կանոնավոր ներգծյալ և արտագծյալ բազմանկյունների մակերեսները, յերբ նրանց կողմերի թիվն անսահմանափակորեն կրկնապատկվում է։

Յեթե շրջանագծի մակերեսը նշանակենք K, *կանոնավոր արտագծյալ բազմանկյան մակերեսը* $S_ա$, *իսկ կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյան մակերեսը՝* $S_ն$, *ապա* $S_ն<K<S_ա$։

Բազմանկյան կողմերի թվի կրկնապատկման հետ միասին $S_ա-S_ն$ *տարբերությունը նվազում է, աստիճանաբար դառնալով ավելի ու ավելի փոքր։ Պարզ է, վոր այդպիսի պայմաններում* $K-S_ն$ *և* $S_ա-K$ *տարբերություններից յուրաքանչյուրը փոքր կլինի* $S_ա-S_ն$ *տարբերությունից։ Այս պատճառով իբրև* շրջանի մակերես *(ցանկացած մոտավոր ճշտությամբ) ընդունում են խիստ մեծ թվով կողմեր ունեցող կանոնավոր ներգծյալ և կամ կանոնավոր արտագծյալ բազմանկյան մակերեսը։*

Կանոնավոր արտագծյալ բազմանկյան մակերեսն է

$S_{ա} = \frac{1}{2} P_{ա} \cdot R$, որտեղ $P_{ա}$-ն կանոնավոր արտագծյալ բազմանկյան պարագիծն է։ Կողմերի թվի անսահմանափակորեն կրկնապատկման դեպքում բազմանկյան $P_{ա}$ պարագիծը ձգտում է իր սահման C-ին՝ շրջանագծի երկարությանը, միաժամանակ նրա $S_{ա}$ մակերեսն էլ ձգտում է իր սահման K-ին՝ շրջանի մակերեսին։

$S_{ա} = \frac{1}{2} P_{ա} \cdot R$ հավասարությունն իրավացի է, ինչ թվով կողմեր էլ ունենա բազմանկյունը, հետևաբար նաև այն դեպքում, երբ կողմերի թիվը՝ n-ը, շատ մեծ է. բայց այս դեպքում $P_{ա}$-ն C-ից և $S_{ա}$-ն K-ից այնքան չնչին մեծություններով են տարբերվում, որ կարելի է այդ տարբերությունները արհամարհել. ուստի հավասարությունն իրավացի է նաև այն դեպքում, երբ $P_{ա}$-ն փոխարինում ենք նրա C սահմանով և $S_{ա}$-ն նրա K սահմանով։ Այսպես ուրեմն.

$$K = \frac{1}{2} C \cdot R, \qquad (1)$$

այսինքն շրջանի մակերեսը հավասար է նրա շրջանագծի երկարության և շառավղի արտադրյալի կեսին։

(1) բանաձևի մեջ C-ի փոխարեն դնելով նրա արժեքը՝ 2πR, ունենում ենք՝

$$K = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot R = \pi R^2.$$

Եթե վերջին հավասարության մեջ R-ը փոխարինենք $\frac{D}{2}$-ով, ապա շրջանի մակերեսի համար կստանանք հետևյալ բանաձևը՝

$$K = \pi R^2 = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{1}{2} \pi D^2.$$

Այսպես ուրեմն

| $K = \pi R^2$, կամ $K = \frac{1}{4} \pi D^2$ | քառ. միավոր. |

1) Շրջանի մակերեսը հավասար է նրա շառավղի քառակուսուն, բազմապատկած π թվով։

2) Շրջանի մակերեսը հավասար է նրա տրամագծի քառակուսուն, բազմապատկած $\frac{\pi}{4}$-թվով։

Հետեվանք. Երկու շրջանների մակերեսներն այնպես են հարաբերում, ինչպես նրանց շառավիղների քառակուսիները և կամ նրանց տրամագծերի քառակուսիները։

Իրոք. եթե K_1-ը և K_2-ը երկու շրջանների մակերեսներն են, R_1-ը և R_2-ը՝ նրանց շառավիղները, D_1-ը, և D_2-ը՝ նրանց տրամագծերը. ապա

$$K_1 = \pi R_1^2 = \frac{1}{4} \pi D_1, \quad K_2 = \pi R_2^2 = \frac{1}{4} \pi D_2^2.$$

Անդամ առ անդամ բաժանելով այս հավասարությունները, ունենում ենք՝

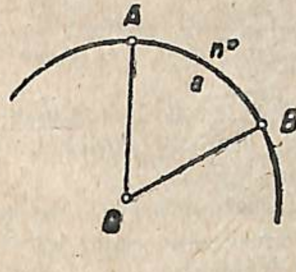
$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{D_1^2}{D_2^2}.$$

2. **Թեորեմ.** Սեկտորի մակերեսը հավասար է նրա աղեղի երկարության և շառավղի արտադրյալի կեսին։

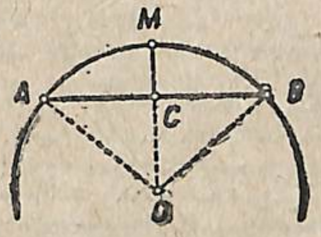
Տված՝ R շառավղով շրջան (նկ. 282), ⌣AB=a; AOB սեկտորը պարունակում է n°.

Ապացուցել՝ $S_{սեկտ.} = \frac{1}{2} aR.$

Ապացուցում. R շառավղով շրջանի K մակերեսը հավասար է πR^2-ու. այն սեկտորի մակերեսը, որի աղեղը հավասար է 1°-ի, կազմում է շրջանի մակերեսի $\frac{1}{360}$-ը և հետևաբար հավասար է $\frac{\pi R^2}{360}$



Նկ. 282



Նկ. 283

Այն AOB սեկտորի մակերեսը, որի AB աղեղը n° է պարունակում, հավասար է $S_{սեկտ} = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi R n R}{180}$. բայց ⌣ $AB = a = \frac{\pi R n}{180}$, ուստի

| $S_{սեկտ} = \frac{1}{2} aR$ | քառ. միավոր։ |

3. *Սեգմենտի մակերեսը.* AMB սեգմենտի մակերեսը (նկ. 283), որպիսի սեգմենտը սահմանափակված է AMB=a աղեղով և AB լարով, հաշվում են իբրև նույն a աղեղն ունեցող AOB սեկտորի մակերեսի և AOB հավասարասրուն եռանկյան մակերեսի տարբերությունը։

AMB բացատի մակերեսը հավասար է AOB սրտատի մակերեսին, հանած AOB յեռանկյան մակերեսը. սրտատի մակերեսը հավասար է $\frac{1}{2}aR$, իսկ յեռանկյան մակերեսը $\frac{1}{2}a_n h_n$, ուստի բացատի մակերեսն է՝ $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}a_n h_n$։

AMB բացատի մեջ (նկ. 283) AB լարը կոչվում է բացատի հիմք, CM=h ուղղահայացը, վորն անցնում է բացատի հիմքի միջնակետով, կոչվում է բացատի բարձրություն կամ սլաք։

Հարցեր յեվ վարժություններ.

1. Ի՞նչքանով կմեծանա շրջանագծի յերկարությունը, յեթե նրա շառավիղը մեծացնենք 1մ-ով։

2. Քանի՞ անգամ է կանոնավոր յեռանկյան մեջ ներգծած շրջանագծի յերկարությունը փոքր այդ յեռանկյան շուրջը արտագծած շրջանագծի յերկարությունից։

3. Քանի՞ անգամ է կանոնավոր յեռանկյան շուրջն արտագծած շրջանի մակերեսը մեծ նույն յեռանկյան մեջ ներգծած շրջանի մակերեսից։

4. Հաշվել թե R=1մ շառավղով գծած աղեղը, վորը 120° է պարունակում, վորքանով է մեծ նրան ձգող լարից։

5. Կիսաշրջանագծի յերկարությունը, հաշված մինչև 0,01 ճշտությամբ, մոտավորապես հավասար է a_3+a_4։ Ստուգել։

6. R=3 մ շառավիղ ունեցող յերեք միահավասար շրջանագծեր զուգաբար արտաքուստ իրար շոշափում են։ Վորոշել շրջանագծերի միջև առաջացած «կորագիծ» յեռանկյան մակերեսը։

7. Ուղղանկյուն յեռանկյան կողմերը՝ 2a. 2b յեվ 2c. ծառայում են իբրեվ շրջանագծերի տրամագծեր։ Ներքնաձիգի վրա կառուցած շրջանի մակերեսը հավասար է էջերի վրա կառուցած շրջանների մակերեսների գումարին։ Ապացուցել։

8. R=1 մ շառավղով յերկու միահավասար շրջանագծեր իրար արտաքուստ շոշափում են։ Տանել այնպիսի յերրորդ շրջանագիծ, վորը կիսի տվյալ շրջանագծերը, և հաշվել բոլոր յերեք շրջանների ընդհանուր մասի մակերեսը։

9. R=1մ շառավղով շրջանի համակենտրոն շրջանագծով կիսված է։ Վորոշել համակենտրոն շրջանագծի շառավիղը։

10. Ապացուցել, վոր օղակի մակերեսը հավասար է $\pi(R+r)(R-r)$, վորտեղ R-ը յեվ r-ը արտաքին յեվ ներքին շրջանագծերի շառավիղներն են։

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

Գլուխ II եջ . . . 4. 80° և 100°; 5. 76°, 5; 45°; 6. 61°; 8. 90°;

» III » . . 3. 5 սմ, 5 սմ յեվ 4 սմ կամ $4\frac{1}{3}$ սմ, $4\frac{1}{3}$ սմ և $5\frac{1}{3}$ սմ.

» VI » . . 1. $\frac{a}{2}$ 2. a և b.

» VII » . . 1 AB ∥ CD; 2. CD ⊥ KL.
3. 45° և 135°; 78° 45′ և 101° 15″; 80° և 100°; 108°, 5 և 71°, 5.
7. 108° և 72°; 80° և 100°; 110° և 70°; 50° և 130°; 108°; 80°; 110°; 50°.
8. 30°, 60° և 90°; վոչ։

» VIII » . . 2. 24,2 սմ. 11. 10 սմ.

» » . . 2. 9 անգամ 3. Այո 4. 250 մ.
5. քառակուսու մակերեսը 900 սմ²-ով մեծ է։
6. Քառակուսու պարագիծը 60 սմ-ով փոքր է։
8. 25 սմ².

» XI » . . 6. յերկու։ 8. 6 սմ.
12. 2) 2r-ով; 3) 3 սմ և 7 սմ շառավիղներով համակենտրոն շրջանագծեր։
13. Մի ուղիղ, վորը զուգահեռ է տվածներին և անցնում է նրանց մեջտեղով. AB-ի և CD-ի կազմած անկյունների 2 կիսորդները։
16. Համակենտրոն շրջանագիծ, վորի շառավիղը հավասար է լարի կենտրոնական հեռավորությանը։

» XII » . . 1. 30°, 35° և 115°. 37°, 5; 60° և 82°, 5.
5. 80°; 6. 70°.

» XIII » . . 2. 8 սմ և 4 սմ շառավիղներով համակենտրոն շրջանագծեր.
3. 1, 5 սմ և 6, 5 սմ; 3 սմ.

» XIV » . . 5. Շրջանագիծ, վորի համար իբրև տրամագիծ ծառայում է տված կետի և տված շրջանագծի կենտրոնի միջև ընկած հատվածը։

» XV » . . 2. Տանել կիսորդը։ 3. 2; 2; 0, 5. 6. 12, 8 սմ և 8 սմ.

» XVI » . . 9. Ցերկրորդ և յերրորդ։ 10. 6 սմ. 11. 1,5 սմ և 4, 5 սմ.
12. Այդ ուղղանկյունները միայն այն դեպքում են նման, յեթե յերկուսն էլ քառակուսիներ են։

Գլ. XVII եջ . . 1. ա) վոչ. բ) այո. 2. սրանկյուն. անհնարին է։

4. 10 սմ $13\frac{1}{3}$ սմ և $16\frac{2}{3}$ սմ. 4. 4 կգ.

» XVIII » . . 2. $5\sqrt{3}$ սմ և $10\sqrt{3}$ սմ. 3; 4 սմ. 4. $R\sqrt{3}$; մեկ յերրորդը։

» XIX » . . 1. վորովհետև $2+4 \neq 3+5$. 2. վորովհետև $1+3 \neq 2+4$; 9.7 սմ։

» XX » . . 2. $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$; $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}a\sqrt{2+\sqrt{2}}$

3. 1) $R\sqrt{2}$; $R\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $2R$;

2) R; $R\sqrt{2}$; $R\sqrt{3}$; $R\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $2R$.

4. $\frac{1}{2}b\sqrt{3}$. 6. $\frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

» XXI . . . 1. 2π մ-ով. 2. 2 անգամ. 3. 4 անգամ

4. մոտ 36 սմ-ով. 6. 1, 4 մ²-ով.

8. $2R^2(\pi-1) \approx 4,3$ մ².

9. $\frac{1}{2}R\sqrt{2} \approx 1,4$ մ.

ՑԱՆԿ

եջ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՅԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐ

1. Ֆիզիկական և յերկրաչափական մարմին 3
2. Յերկրաչափական կերպերի առաջացումը շարժումով 5
3. Գծերի և մակերևույթների տեսակները 6
4. Յերկրաչափության առարկան և յերկրաչափության բաժանումը . . . 7

I. ՈՒՂԻՂ ԳԻԾ

1. Ուղիղ գիծ: Ճառագայթ: Հատված: Բեկյալ: Կոր գիծ 9
2. Ուղիղի աքսիոմները 10
3. Հատվածների բաղդատումը 12
4. Գործողություններ հատվածների հետ 12
5. Հատվածների չափումը 13
6. Շրջանագիծ և շրջան 14

II. ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

1. Անկյունը և նրա նշանակումը 17
2. Անկյունների բաղդատումը: Անկյունների հավասարությունը և անհավասարությունը 18
3. Բացած անկյուն և ուղիղ անկյուն 18
4. Կենտրոնական անկյուն և նրա հատկությունները 20
5. Փոխադրիչ 22
6. Գործողություններ անկյունների հետ: Հարագիր անկյուններ . . . 23
7. Կից անկյուններ և նրանց հատկությունը: Գաղափար թեորեմի մասին . . 25
8. Ողղահայաց և թեք 28
9. Հակադիր անկյուններ 29

III. ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

1. Ուղղագիծ պատկերներ 31
2. Յեռանկյունների դասակարգումը 32
3. Գծեր յեռանկյան մեջ 33
4. Կախում յեռանկյան կողմերի միջև 35
5. Հավասարասրուն յեռանկյուն: Նրա հատկությունները 35
6. Առանցքային համաչափություն 37

IV· ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

1· Եռանկյունների հավասարության յերեք հայտանիշները 40
2· Կառուցման հիմնական խնդիրները 43

V· ԿԱԽՈՒՄՆԵՐ ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

1· Եռանկյան արտաքին անկյունը· նրա հատկությունները 49
2· Կախում յեռանկյան կողմերի և անկյունների միջև 51

VI· ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑ ԵՎ ԹԵՔԵՐ

1· Կետերի առաջաձգությունն ուղղի վրա 54
2· Ուղղահայաց և թեքեր 54
3· Թեքեր և նրանց առաջաձգությունները 55
4· Ուղղանկյուն յեռանկյունների հավասարությունը 57

VII· ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՈՒՂԻՂՆԵՐ

1· Զուգահեռ ուղիղներ 59
2· Զուգահեռների աքսիոմը 60
3· Անկյուններ, վորոնք առաջ են գալիս, յերբ յերկու զուգահեռներ հատվում են մի ուղիղով 62
4· Ուղիղների զուգահեռության հայտանիշները 64
5· Զուգահեռ ուղիղների կառուցումը քանոնի և գծագրական յեռանկյան օգնությամբ 68
6· Համապատասխանաբար զուգահեռ կողմեր ունեցող անկյունների հատկությունը 68
7· Եռանկյան անկյունների հատկությունները 69
8· Համապատասխանաբար ուղղահայաց կողմեր ունեցող անկյունների հատկությունը 70
9· Զուգահեռ ուղիղներով կտրված զուգահեռ ուղիղների հատվածների հատկությունը 71
10· Հատվածների բաժանումը հավասար մասերի 73

VIII· ՔԱՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

1· Քառանկյուններ 75
2· Զուգահեռագիծը և նրա հատկությունները 77
3· Զուգահեռագիծը վորոշող հայտանիշները 78
4· Զուգահեռագծի կառուցումը 80
5· Կենտրոնական համաչափություն 81
6· Եռանկյան միջին գիծը 83
7· Ուղղանկյուն: Նրա հատկությունները 83
8· Ուղղանկյան կառուցումը 84
9· Ուղղանկյան համաչափության առանցքները 85
10· Շեղանկյունը և նրա հատկությունները 85

11· Շեղանկյան կառուցումը 86
12· Քառակուսին և նրա հատկությունները 87
13· Քառակուսու կառուցումը 88
14· Սեղան 89
15· Հավասարասրուն սեղանի հատկությունները 89
16· Սեղանի միջին գիծը 90
17· Սեղանի կառուցումը 91
18· Քառանկյունը վորոշող տարրերի թիվը 92
19· Բազմանկյուն: Նրա անկյունների հատկությունը 95

IX· ՈՒՂՂԱԳԻԾ ՊԱՏԿԵՐՆԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐԸ

1· Մակերեսների չափումը 98
2· Ուղղանկյան և քառակուսու մակերեսը 98
3· Հավասար, հավասարաբաղադիր և հավասարամեծ պատկերներ . . . 101
4· Զուգահեռագծի մակերեսը 102
5· Եռանկյան մակերեսը 103
6· Սեղանի մակերեսը 106
7· Բազմանկյան մակերեսը 107
8· Պյութագորասի թեորեմը 107
9· Ուղղագիծ պատկերների փոխարկումը հավասարամեծ պատկերների . . 109

X· ՅԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ՏԵՂԵՐ

1· Գիծն իբրև կետերի յերկրաչափական տեղ 113
2· Յերկրաչափական տեղեր 114

XI· ՇՐՋԱՆԱԳԻԾ ԵՎ ՇՐՋԱՆ

1· Շրջանագիծ 117
2· Լարին ուղղահայաց տրամագծի հատկությունը: Համաչափություն շրջանի մեջ 118
3· Զուգահեռ լարերի միջև ընկած աղեղների հատկությունը 119
4· Շրջանագծի և աղեղի կենտրոնը գտնելը: Աղեղի կիսումը 120
5· Կախում լարերի և աղեղների միջև 120
6· Կախում լարերի և նրանց կենտրոնական հեռավորության միջև . . . 121
7· Ուղիղի զանազան դիրքերը շրջանագծի նկատմամբ: Հատող և շոշափող . 122
8· Շոշափողներ տանելը 124
9 ·Միևնույն կետից տարված շոշափողների հատկությունը 126

XII· ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՉԱՓՈՒՄԸ

1· Անկյուն, վորի գագաթը շրջանագծի վրա յե, և նրա չափումը . . . 129
2· Այն անկյան չափումը, վորի գագաթը գտնվում է շրջանի ներսը . . 133
3· Այն անկյան չափումը, վորի գագաթը գտնվում է շրջանից դուրս . . 134

XIII. ԵՐԿՈՒ ՇՐՋԱՆԱԳԾԵՐԻ ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԴԻՐՔԸ

1. Համակենտրոն և տարակենտրոն շրջանագծեր 137
2. Երկու շրջանագծերի փոխադարձ դիրքը 138
3. Երկու փոխհատվող շրջանագծերի ընդհանուր լարի հատկությունը . . 140
4. Երկու շրջանագծերի ընդհանուր շոշափողները և նրանց կառուցումը . 140

XIV. ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՏԵՂԵՐԻ ՄԵԹՈԴՈՎ

1. Կառուցման խնդրի լուծումը 144
2. Խնդիրներ 148

XV. ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐ

1. Երկու հատվածների ընդհանուր չափը 149
2. Հատվածների հարաբերությունը 152
3. Համեմատական հատվածներ: Երկրաչափական համեմատություն . . 154
4. Երկրաչափական համեմատության հատկությունները: Համեմատությունների տեսակները 155
5. Անկյան կողմերը հատող զուգահեռ ուղիղների հատկությունը . . . 156
6. Փնջի ճառագայթները հատող զուգահեռ ուղիղների հատկությունները . 159
7. Եռանկյան ներքին անկյան կիսորդի հատկությունը 160
8. Չորրորդ համեմատական հատվածի կառուցումը 160
9. Հատվածի բաժանումը տվյալ հարաբերությամբ 161

XVI. ՊԱՏԿԵՐՆԵՐԻ ՆՄԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

1. Նման բազմանկյուններ 163
2. Եռանկյունների նմանություն 164
3. Եռանկյունների նմանության երեք հայտանիշներ 164
4. Նման եռանկյունների բարձրությունների և կողմերի համեմատականությունը 167
5. Նման եռանկյունների հատկությունների վրա հիմնված գործիքներ . 168
6. Նման ուղղագիծ պատկերների կառուցումը 169
7. Նմանադիր բազմանկյուններ: Նմանության կենտրոնը 171
8. Նման բազմանկյունների հատկությունը 172
9. Նման պատկերների պարագծերի հարաբերությունը 174
10. Նման եռանկյունների և բազմանկյունների մակերեսների հարաբերությունը 174

XVII. ՉԱՓԱԿԱՆ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՌԱՆԿՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԻ ՄԵՋ

1. Կախումը եռանկյան տարրերի միջև 178
2. Չափական առնչություններ ուղղանկյուն եռանկյան տարրերի միջև . 178
3. Չափական կախումը խոտորանկյուն եռանկյան տարրերի միջև . . 181
4. Կախում զուգահեռագծերի անկյունագծերի և կողմերի միջև . . . 184
5. Եռանկյան միջնագծի և բարձրության հաշվումը 184
6. Եռանկյան մակերեսի որոշումը նրա երեք կողմերով: Հերոնի բանաձևը . 186

XVIII. ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐ ՇՐՋԱՆԻ ՄԵՋ

1. Շրջանագծի կետից տրամագծի վրա իջեցրած ուղղահայացի հատկությունը 188
2. Փոխհատվող լարերի հատվածների հատկությունը 189
3. Շրջանից դուրս փոխհատվող հատողների հատկությունը 190
4. Հատվածի բաժանումը արտաքին և միջին հարաբերությամբ . . . 191

XIX. ՆԵՐԳԾՅԱԼ ԵՎ ԱՐՏԱԳԾՅԱԼ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

1. Ներգծյալ և արտագծյալ եռանկյուններ 194
2. Ներգծյալ քառանկյան անկյունների հատկությունը 196
3. Արտագծյալ քառանկյան կողմերի հատկությունը 197
4. Արտագծյալ բազմանկյան մակերեսը 197

XX. ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

1. Կանոնավոր բազմանկյուններ 200
2. Կանոնավոր ներգծյալ և արտագծյալ բազմանկյունների կառուցումը . 201
3. Կանոնավոր նույնանուն բազմանկյունների հատկությունները . . 203
4. Կանոնավոր բազմանկյան մակերեսը 204
5. Շրջանի մեջ ներգծած քառակուսի: Նրա կառուցումը և նրա կողմի արտահայտումը շառավիղի միջոցով 205
6. Ներգծյալ կանոնավոր վեցանկյուն: Նրա կառուցումը և նրա կողմի արտահայտումը շառավիղի միջոցով 206
7. Կանոնավոր ներգծյալ եռանկյուն: Նրա կառուցումը, նրա կողմի արտահայտումը շառավիղի միջոցով 207
8. Կանոնավոր եռանկյան արտագծած և ներգծած շրջանագծերի, նրա բարձրության և մակերեսի արտահայտումը կողմի միջոցով 207
9. Արտագծած քառակուսու և արտագծած կանոնավոր եռանկյան կառուցումը և նրանց կողմերի արտահայտումը շառավիղի միջոցով 208
10. Կանոնավոր արտագծյալ բազմանկյան կողմի հաշվումը նույնանուն կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյան կողմի և շառավիղի միջոցով . . . 209
11. Կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյան կողմերի թվի կրկնապատկումը . . 210

XXI. ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ՇՐՋԱՆԻ ՄԱԿԵՐԵՍԸ

1. Շրջանագծի երկարության բաղդատումը կանոնավոր ներգծյալ և արտագծյալ բազմանկյունների պարագծերի հետ 213
2. Գաղափար հաստատուն և փոփոխական մեծության մասին 216
3. Գաղափար սահմանի մասին: Շրջանագիծը որպես սահման ներգծյալ և արտագծյալ բազմանկյունների պարագծերի 218
4. Շրջանագծի երկարության հաշվումը: π թիվը 219
5. Աղեղի երկարությունը 224
6. Շրջանի, արտատի և բացատի մակերեսը 225
Պատասխաններ 229

ՀՀ Ազգային գրադարան
NL0404484

5 ФЕВ 1937
56

ԳԻՆԸ 2 Ռ. 25 ԿՈՊ.

ԱԳՀ
4962

ՀՍԽՀ ՊԵՏՀՐԱՏ

Ю. О. Гурвиц и Р. В. Гангнус
Систематический курс
ГЕОМЕТРИИ
Часть первая
Планиметрия
6—8 годы обучения
Гиз. ССР Армении, Ереван, 1936