ԳՐԵՆՎԻԼ ՅԵՎ ԼՈՒԶԻՆ

ԴԻՖՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՅԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇՎԻ ՏԱՐՐԵՐԸ

ՄԱՍՆ ԱՌԱՋԻՆ

Թարգմանությամբ յեվ խմբագրությամբ
պրոֆ. [redacted]

Գինը 75 կոպ.

ՊԵՏՀՐԱՏ — ՈՒՍՄԱՆԿՀՐԱՏԲԱԺԻՆ
ՅԵՐԵՎԱՆ 1932

ԾՐԱԳԻՐ ԱՆԱԼԻԶԻ ՆԵՐԱԾՈՒԹՅԱՆ

Առաջադրություն № 1

Մեծություն։ Փոփոխական մեծություն։ Հաստատուն մեծություն։ Մեծությունների յերկրաչափական պատկերացումը։ Փոփոխականի արժեքների տիրույթը։ Հատված և միջակայք։ Մեծության մոնոտոն և տատանվող փոփոխությունները։ Սահմանափակ մեծություն։ Փոփոխական մեծության աճումը։ Հաստատուն մեծությունը վորպես փոփոխական։ Ֆունկցիա։ Անկախ և կախյալ փոփոխական։ Ֆունկցիայի քարակտերիստիկը։ Ֆունկցիաների հաշվումը։ Արգումենտի փոփոխման տիրույթը։ Ֆունկցիայի աճումը։

Առաջադրություն № 2

Ֆունկցիաների դասակարգումը։ Ֆունկցիաների յերկրաչափական պատկերացումը։ Ֆունկցիայի աճման յերկրաչափական պատկերացումը։

Առաջադրություն № 3

Փոփոխականի սահմանը։

Փոփոխականի՝ իր սահմանին մոտենալու յեղանակների մասին։

Անվերջ-փոքրերը։

Առաջադրություն № 4

Սահմանների հիմնական թեորեմները։

Անվերջ-մեծի գաղափարը։

Անվերջ-մեծի և անվերջ-փոքրի կապը։

Անընդհատություն։

Անընդհատ ֆունկցիաների հատկությունները։

Յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների գրաֆիկները։

Առաջադրություն № 5

Ֆունկցիայի ֆունկցիա։
Աճող և նվազող ֆունկցիաներ։
Հակադարձ ֆունկցիաներ։

Առաջադրություն № 6

Ռացիոնալ ֆունկցիաների խզումները։

Յերկու կարևոր սահմաններ՝ $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ և $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Անվերջ-փոքրերի համեմատումն իրար հետ։ Անվերջ-փոքրերի կարգերը։ Համարժեք անվերջ փոքրերի անալիզի առաջին սկզբունքը։ Առաջին սկզբունքի կիրառումը։

ԱՆԱԼԻԶԻ ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Առաջադրություն № 1—2

ԱՌԱՋԱԴՐՈՒԹՅԱՆ ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Փոփոխական յեվ ֆունկցիա

Կարևոր ցուցմունք.

Նախքան անալիզի ներածության ուսումնասիրման անցնելը՝ անհրաժեշտ է լավ իմանալ տարրական հանրահաշիվը, յերկրաչափությունը և յեռանկյունաչափությունը այն ծավալով, վոր նախատեսված է մանկավարժական տեխնիկումների համար։ Յեթե ձեր գիտությունն այդ առարկաներից թերի յե, նախ անցեք այդ առարկաները, ապա միայն դիմեցեք անալիզի ներածության ուսումնասիրելուն։

Տարրական մաթեմատիկան դուք կարող եք անցնել և կամ թերիները լրացնել հետևյալ հայերեն գրքերով.

Բեմ-Վոլկով-Սերուվե, Հանրահաշիվ I և II մ.

Կիսելյով, Յերկրաչափություն I և II մ.

Մրոյեկ, Յեռանկյունաչափություն.

Բերգ, Զենամենսկի և այլք, Մաթեմատիկայի աշխատանքի գիրք.

Սալիբեկյան յեվ Խաչատրյան, Մաթեմատիկայի աշխատանքի գիրք։ Նույն գրքերը, բացի վերջինից, կան նաև ռուսերեն։ Ովքեր ի վիճակի յեն օգտվելու ռուսերեն գրքերից, կարող են ձեռք բերել տարրական մաթեմատիկային վերաբերող հետևյալ գրքերն ևս.

Шапошников и Вальцов, Сборник алгебраических задач, ч. I и II.

Киселев, Элементарная алгебра.

Карасев, Ряднова и Чулицкий. Математика для педтехникумов. ч. I и II.

Киселев, Элементарная геометрия.

Рыбкин, Прямолинейная тригонометрия.

Крогиус, Тригонометрия.

Անհրաժեշտ է նկատի ունենալ, վոր մաթեմատիկական գրականությունը հայոց լեզվով խիստ սահմանափակ է. ուստի ամեն մի հեռակայող, վորը նպատակ ունի մաթեմատիկայի մեջ իր գիտելիքները խորացնելու, պետք է հիմնավորապես սովորի ռուսաց լեզուն։

ԱՌԱՋԱԴՐՈՒԹՅԱՆ ՄՇԱԿՄԱՆ ԿԱՐԳԸ

Իբրև հիմնական ձեռնարկ ոգտագործելու յենք Վ. Գրենվիլ յեվ Ն. Լուզին, Դիֆֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի տարրերը, I-ին մաս, թարգմ. խմբագրությամբ Արշ. Տոնյանի։ Հետագայում կհիշատակենք «Գրենվիլ-Լուզին» բառերով։

Այս առաջադրությունն ընդգրկում է Գրենվիլ-Լուզինի §§ 20—38։

§ 20-ն *ուսումնասիրելիս աշխատեցեք գտնել մեծությունների որինակներ գիտության զանազան բնագավառներից և հաշիվ տվեք ձեզ, թե ինչով է մաթեմատիկական մեծությունը տարբերվում մյուս տեսակի մեծություններից։*

§§ 21-22 *ուսումնասիրելիս հատուկ ուշադրություն դարձնել այն բանի վրա, վոր բոլոր կոնկրետ մեծությունները փոփոխական են, այսինքն կոնկրետ հաստատուն մեծություն չկա։ Եթե գիտության մեջ հաստատուն մեծություններ տրվում են, ինչպես որինակ* π *թիվը, ապա այդ հետևանք է այն բանի, վոր բնության մեջ պատահող յերևույթների և առարկաների այս կամ այն կոնկրետ հատկանիշը կամ հատկանիշները վերացման յենթարկելով՝ մենք ստանում ենք ընդհանուր գաղափարներ։*

Պարզ է, վոր մաթեմատիկական շրջանագիծը բնության մեջ անկախ գոյություն չունի. Ֆիզիկական շրջանագիծը պետք է բաղկացած լիներ մոլեկուլներից, վորոնք անընդհատ շարժման մեջ են. մեր մտածողությունը աբստրակցիայի յե յենթարկում մի կողմից մոլեկուլների շարժումը և մյուս կողմից նրանց մեծությունը, վորի հետևանքով ֆիզիկական, կոնկրետ շրջանագծերից ստացվում է մաթեմատիկական շրջանագծի գաղափարը։

Չպետք է յերբեք մոռանալ, վոր մաթեմատիկական գաղափարները փոխառություններ են իրականությունից և վոչ թե «մարդկային վոգու ազատ ստեղծագործություններ», ինչպես սիրում են պնդել իդեալիստները։

Պարզ է նաև, վոր մաթեմատիկական գաղափարների հատուկ բացատրությունը կարող է տրվել միայն իրականության վրա հենվելով։

Մաթեմատիկական աբստրակցիայի մասին կարդացեք՝

Энгельс „Диалектика природы“, 1930, стр. 99, 106—107.

§ 25-*ի վերաբերյալ պետք է նշել, վոր շատ գրքերում «հատված» բառը չեն գործածում, այլ «փակ ինտերվալ» կամ «փակ միջակայք»։ Այս դեպքում «միջակայք» բառի տեղ ասում են «(յերկու կողմից) բաց միջակայք»։ Լինում են դեպքեր, յերբ միջակայքի ծայրերից մեկը պատկանում է իրեն, իսկ մյուսը վոչ. այդ դեպքում ասում են՝ «միջակայքը կիսաբաց է կամ մի կողմից բաց է», որինակ* $a < x \leqslant b$։ *Կարող է նաև պատահել, վոր միջակայքը մի կողմից կամ յերկու կողմից տարածվի մինչև անվերջություն, որինակ* $a < x < \infty$, $-\infty < x < b$, $-\infty < x < +\infty$.

§ 27-*ը կարդալիս ուշադրություն առնել, վոր* x*ի բացարձակ մեծություն ասելով հասկանում ենք նրա մեծությունը, վերցրած դրական նշանով.* x *թվի բացարձակ մեծությունը նշանակում ենք* $|x|$ *նշանով։*

Որինակ $|6| = +6$, $|-8| = +8$.

§§ 30—32. *Ֆունկցիայի և արգումենտի կապակցությունը հիմնովին յուրացնելու համար մտածեցեք որինակներ յերկրաչափությունից, յեռանկյունաչափությունից և ֆիզիկայից։ Այս տեսակետից քննության առեք, որինակ 1) ուղղանկյուն զուգահեռանիստի ծավալը, վորի կողերը փոփոխվում են, և 2) հոսանքի ուժը փոփոխական դիմադրություն ունեցող հաղորդչի մեջ, յերբ պոտենցիալների տարբերությունը փոփոխական է։ Արտահայտեցեք այդ կապակցությունները բանաձևերով։*

§ 37. *Իբրև լրացում պետք է ասենք, վոր ֆունկցիան կարող է տված լինել վոչ թե միայն բանաձևով, այլ նաև յերկրաչափական պատկերացումով, այսինքն գրաֆիկով, ինչպես որի-*

նակ հիվանդի ջերմաստիճանային կորը, արդյունաբերության այս կամ այն ճյուղի աճման գրաֆիկը և այլն։ Ֆունկցիան կարող է տված լինել նաև աղյուսակի ձևով, օրինակ՝ sin α ֆունկցիայի արժեքները, երբ α անկյունը աճում է առաջին քառորդում, զետեղված են՝ Пржевальский «Пятизначные таблицы логарифмов» գրքի, ինչպես և Գրենվիլ-Լուզինի ձեռնարկի տեղեկանքների բաժնում։

Կատարեցեք Գրենվիլ-Լուզինի § 38-ից հետո զետեղված բոլոր վարժությունները՝ 1-ից մինչև 17։ Յեթե որևէ վարժությունը լուծելիս դժվարության եք հանդիպում, այդ նշանակում է, որ տեսության համապատասխան բաժինը լավ չեք յուրացրել և ուրեմն անհրաժեշտ է նորից կարդալ և ուսումնասիրել։

ՍՏՈՒԳՄԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔՆԵՐԻ ԹԵՄԱՆԵՐ

Գրավոր պատասխանեցեք հետևյալ հարցերին.

1. Ինչո՞վ է տարբերվում հաստատուն մեծությունը փոփոխականից։

2. Մի շարք մեծություններ կոչվում են **ֆիզիկական հաստատուններ**. օրինակ՝ լույսի տարածման արագությունը, էլեկտրոնի լիցքը, ջրածնային ատոմի մասսան և այլն։ Ինչո՞ւ այդ մեծությունները հաստատուն են։

3. Ի՞նչ տարբերություն կա հատվածի և միջակայքի միջև։

4. Ի՞նչն ենք անվանում արգումենտի փոփոխման տիրույթ։

5. Ո՞ր ֆունկցիաներն են կոչվում բացահայտ հանրահաշվական։

6. Ո՞ր ֆունկցիաներն են կոչվում անբացահայտ հանրահաշվական։

7. Ո՞ր ֆունկցիաներն են կոչվում փոխ-հակադարձ։

8. Յերևակայեցեք մի քառակուսի, որի չափերը ավելի ու ավելի մեծանում են. ներքևում թված մեծություններից ո՞րոնք կլինեն այդ ժամանակ փոփոխական և ո՞րոնք՝ հաստատուն.

ա) քառակուսու կողմերը.

բ) քառակուսու անկյունները.

գ) կողմի և անկյունագծի հարաբերությունը.

դ) մակերեսի և կողմի հարաբերությունը.

9 Ոհմի օրենքի համաձայն $J=\frac{E}{R}$, որտեղ J-ն հոսանքի

ուժն է ամպերներով, E-ն պոտենցիալների տարբերությունը վոլտերով, R-ը դիմադրությունն է օմերով։ Ո՞ր յերկու մեծություններն են այստեղ ուղիղ համեմատական և ո՞րոնք են հակադարձ համեմատական։

Առաջադրությունը լավ մշակելուց և տրված հարցերին պատասխանելուց հետո դուք արդեն ի վիճակի կլինեք հասկանալու, թե ինչով է տարբերվում բարձրագույն մաթեմատիկան տարրականից։ Դրա համար առաջարկվում է կարդալ «Рабочая книга по математике для высших техничесих учебных заведений», первый концентр, 1931 г. стр. 22—24, որ այստեղ տալիս ենք ազատ վերարտադրությամբ։

Ընկերներ,

Մեր գիտությունը՝ մաթեմատիկան, հաճախ կոչում են «չոր», «մեռած», «ձևական», «կյանքից կտրված»։

Ով որ գիտե միայն տարրական մաթեմատիկան, այն էլ սովորական դպրոցական ավանդումով, իրոք կարող է այն տպավորությունն ստացած լինել, որ մաթեմատիկան կյանքը դնում է անփոփոխելի բանաձևերի մեռած շրջանակների մեջ։ Նույն իսկ նրանք, ովքեր հեշտ են յուրացնում մաթեմատիկան և սիրում են այդ առարկան, հավանորեն շատ անգամ են իրենց առաջ հարց դրել՝ կարո՞ղ են արդյոք այդ անշարժ պատկերները, այդ չփոփոխվող բանաձևերը, որոնք շարունակ նույնն են մնում շատ հին ժամանակներից ի վեր, իրապես ընդգրկել հավիտենապես հոսուն, մշտափոփոխ կյանքը, կարո՞ղ են արդյոք նրանք դառնալ բնությունն ուսումնասիրելու և նրա ուժերին տիրանալու այն հզոր զենքը, որպիսին լինելու հավակնություն են հանդես բերում նրանք։

Ահա ձեր աչքի առաջ սավառնակը բարձրանալով գետնից՝ սավառնեց վեր և թաքնվեց ամպերի յետևը։ Մեքենայի ամեն մի պտուտակը, վառելիքի ամեն մի գրամը, ճանապարհի ամեն մի մետրը հաշված են մաթեմատիկական բանաձևերով։ Հավաքեցեք այդ բոլոր բանաձևերը միասին և դուք կստանաք մի հաստ տետր։ Կարդացեք այդ տետրը ծայրից ծայր։ Կգտնե՞ք արդյոք նրա մեջ այն սավառնակի կենդանի և ամբողջական պատկերը, որ դուք տեսնում եք և որի մասին գրել եք ձեր տետրը։

Ձեր բանաձևերը ձեզ կտան մի շարք կարևոր և նույն իսկ վճռական նշանակություն ունեցող հարցերի պատասխանը։ Դուք նրանցից կիմանաք, թե սավառնակը ինչ բարձրության կհասնի, մի ժամում քանի կիլոմետր կանցնի, վառելիքն ինչքան ժամանակ կբավի և ուրիշ օգտակար շատ տեղեկություններ։ Բայց դուք այլ բան եք ցանկանում իմանալ։ Ձեզ հետաքրքրում է յերևույթն իր ամբողջությամբ։ Դուք հարցնում եք՝ **ի՞նչպես է** ժամանակի ընթացքում **փոփոխվում** սավառնակի բարձրությունը գետնից, ինչպես է փոփոխվում նրա արագությունը, ինչպես է կախված վառելիքի ծախսը սավառնակի արագությունից և այլն. չէ՞ վոր ամբողջ յերևույթը փոփոխությունների մի անընդհատ շղթա է ներկայացնում, և դուք, բնականաբար, ցանկանում եք իմանալ, թե վո՞րն է այդ փոփոխությունների ընդհանուր պատկերը, վորո՞նք են այդ փոփոխությունների օրենքները, **ի՞նչն է փոփոխվում և ի՞նչպես**։

Հարցն այսպես դնելով՝ դուք արդեն կանգնում եք այն նոր մաթեմատիկայի շեմքին, վորն այժմ ուսումնասիրելու ենք։

Ամեն ինչ բնության մեջ անդադար փոխվում է։ Ամեն մի տեխնիկական պրոցես կազմակերպված փոփոխություն է։

Մաթեմատիկան կամ պետք է իր ապարատով ընդգրկեր բնության և տեխնիկայի մեջ տեղի ունեցող փոփոխությունների ամբողջական պատկերը, կամ հրաժարվեր բնագիտության և տեխնիկայի զենքը լինելու իր դերից։ Այս հարցն իր ամբողջ սրությամբ ծառացավ XVII դարի մաթեմատիկայի առաջ, յերբ նյութական կուլտուրայի ամբողջ զարգացումը տարերայնորեն հարկադրեց, վոր գիտական միտքը զգալի տեղաշարժ կատարի դեպի դիալեկտիկական մեթոդը։

Ամեն մի գիտություն, վորը չպիտի կարողանար վերակառուցվել, մետաֆիզիկական անշարժությունից և ցրվածությունից անցնել դիալեկտիկական հոսունության և միաձուլության, անխուսափելի կորստի յեր մատնված։

Մաթեմատիկան վերակառուցվեց և նրա վերակառուցման պտուղը յեղավ գաղափարների և մեթոդների այն կոմպլեքսը, վորը ներկայումս, գուցե վոչ լիովին հաջող, կոչում ենք **բարձրագույն մաթեմատիկա**։

Այստեղից ել առաջին և հիմնական տարբերությունը, վոր ունի այդ «բարձրագույն մաթեմատիկան» «տարրականից»։ Վերցրեք ինչպիսի մեծություն կկամենաք։ Տարրական մաթեմատի-

կան հարցնում է՝ **ի՞նչպիսի** մեծություն է այդ։ Բարձրագույն մաթեմատիկան հարցնում է՝ **ի՞նչպես է փոփոխվում** այդ մեծությունը։ Տարրական մաթեմատիկան հարցնում է՝ **ի՞նչ մեծություն** ունի յեռանկյան ներքնաձիգը, յեթե նրա եջերն են՝ 3մ և 4մ և պատասխանում է՝ 5մ։ Բարձրագույն մաթեմատիկան հարցնում է՝ **ի՞նչպես** կփոփոխվի յեռանկյան ներքնաձիգը, յեթե, որինակ՝ ձգեք նրա եջերը։ Իսկ ինչպես է բարձրագույն մաթեմատիկան պատասխանում այդպիսի հարցերին։ Դրա մասին կիմանանք հենց այն դասընթացքից, վոր այժմ ձեզ տրվում է։

Այժմ դուք հասկանում եք, թե ինչու մենք սկսեցինք փոփոխական մեծությունների ուսումնասիրությունից. նրանք հանդիսանում են դիալեկտիկայի ուղին բռնած մաթեմատիկայի ուսումնասիրության հիմնական առարկան։ Յեվ յեթե դուք մի անգամ ես հաշիվ տաք ձեզ վորևե տեխնիկական պրոցեսի կառուցվածքի մասին, դուք միանգամից կնկատեք, վոր բոլոր տեխնիկական և տնտեսական հաշվարկումների համար հիմնականը հենց այն փոփոխական մեծություններն են, վորոնք մասնակցում են այդ պրոցեսին (անցած ճանապարհը, շարժման արագությունը, ջրի պաշարը, վառելիքի պաշարը)։

Մի քայլ ես արեք։ Ավելի ուշադրությամբ դիտեցեք բնության վո՛ր յերևույթը, տեխնիկական վո՛ր պրոցեսը կկամենաք։ Դուք կնկատեք, վոր նրան մասնակցող մեծությունների փոփոխությունը պատահական չէ։ Մեծություններից վորևե մեկը փոփոխելով՝ դուք փոփոխում եք նաև մյուսները, և այդ փոփոխությունները իրար հետ կապակցված են խիստ օրենքներով։ Յերբ գազի ճնշումը փոքրացնում եք, դուք **ստիպված** եք նրա ծավալը մեծացնել, յեթե ցանկանում եք բարեխառնությունն անփոփոխ պահել։ Տուրբինի օգտակար գործողության գործակիցը մեծացնելու համար դուք **պետք է** փոխեք նրա պտույտների թիվը։ Մեծացնելով տրակտորի ճանապարհը՝ դուք **անհրաժեշտաբար** մեծացնում եք վառելիքի ծախսը։ Ամեն մի տեխնիկական պրոցեսում մեծությունների միջև գոյություն ունեն անխզելի կապեր. այդ մեծություններից մի մասի կամայորապես փոփոխելուց իբրև հետևանք անհրաժեշտաբար բխում է մյուսների օրինաչափ և միանգամայն վորոշ փոփոխությունը։ Այդ դեռ բավական չէ. դուք անմիջապես պարզ տեսնում եք, վոր փոփոխվող մեծությունների հենց այդ միանգամայն վորոշ օրինաչափ կապակցությունը և սերտ կախումն իրարից կազմում են տվյալ պրոցեալի վողջ նյութը, այն ամենը, ինչ վոր պետք է ուսումնասիրել:

Իրերի այս դրությունից ինչ յեզրակացության պետք է հանգի մաթեմատիկան: Պարզ է, վոր յեթե նա կամենում է բնության յերևույթներն ուսումնասիրել, պետք է ստեղծի պլանաչափ ապարատ, վորն ընդգրկում է վոչ միայն առանձին մեծությունների փոփոխությունները, այլև տարբեր մեծությունների փոխադարձ կապը: Նա պետք է հայտնի՝ ինչպես է փոփոխվում այս ինչ y մեծությունը, յերբ այն ինչ x մեծությունը կամավորապես փոփոխման է յենթարկվում: Դուք արդեն գիտեք, թե այդ ինչ է նշանակում. այդ նշանակում է, վոր մաթեմատիկան պետք է դառնա ֆունկցիաների ուսմունք:

Յեթե առաջին տեղաշարժը, վորի մասին վերը խոսեցինք, տեղաշարժ եր անշարժությունից դեպի փոփոխականություն, ապա այս յերկրորդ տեղաշարժն արդեն տեղաշարժ է ցրվածությունից, անջատվածությունից դեպի միաձուլություն, դեպի փոխադարձ թափանցում իրար մեջ:

Այսպես՝ տեխնիկայի և բնագիտության պահանջները մաթեմատիկան անխուսափելիորեն դնում են դիալեկտիկական ուղիի վրա:

Ֆունկցիաների տեսության ապարատը մաթեմատիկայի խոշորագույն ստեղծագործություններից մեկն է: Ամբողջ դասընթացքի մեջ դուք հետզհետե կտիրանաք նրան:

Մի հարցի վրա ևս արժե կենտրոնացնել ձեր ուշադրությունը: Դուք գիտեք, վոր ֆունկցիա մենք կոչում ենք այնպիսի փոփոխական մեծությունը, վորի արժեքը կախված է մի ուրիշ փոփոխականի արժեքից. այս վերջին փոփոխականը մենք կոչում ենք անկախ փոփոխական: Իսկ ինչպես կլինի, յեթե x անկախ փոփոխականի բոլոր փոփոխությունների ժամանակ մի y մեծություն շարունակ պահպանում է միևնույն, օրինակ 5, արժեքը: Դուք գիտեք, վոր այդպիսի մեծությունը մենք հաստատուն ենք կոչում: Բայց այժմ մեզ այլ բան է զբաղեցնում՝ կարո՞ղ ենք մենք համարել, վոր y-ն x-ի ֆունկցիա չէ:

Թվում է, թե վոչ. չէ՞ վոր վորոշակի ասված է, վոր ֆունկցիա կոչվում է փոփոխական մեծությունը, մինչդեռ մեր y-ը հաստատուն է: Յեթե այս հանգամանքը մի կողմ թողնենք y-ը ֆունկցիա լինելու մյուս պայմանին բավարարում է, վորովհետև x-ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է y-ի միանգամայն վորոշ արժեք, այն է $y=5$: Ֆունկցիոնալ կապակցության հիմնական հատկությունն առկա յե, մեր y-ին միայն մի բան է պակասում՝ փոփոխական մեծություն լինելը: Յեվ ահա վերին աստիճանի նպատակահարմար է ներել նրա այդ թերությունը յեվ անվանել x-ի ֆունկցիա: Իրոք, կշռադատեցեք հետևյալը. ձեր առջև ունեք ահա x-ի յերկու պարզ ֆունկցիաներ՝ $y_1=3x-2$ և $y_2=7-3x$. գումարեցեք այդ յերկու ֆունկցիաները, կստանաք $y_1+y_2=5$, այսինքն մեզ տված յերկու ֆունկցիաների գումարը հաստատուն մեծություն է: Յեթե մենք հրաժարվեյինք այդ մեծությունը ֆունկցիա անվանել պատճառաբանելով, վոր նա հաստատուն է, ապա մենք կհանգեյինք մի տարօրինակ յեզրակացության, թե x-ի յերկու պարզ ֆունկցիաների գումարը մի այնպիսի մեծություն է, վորը չի կարելի x-ի ֆունկցիա անվանել: Նույնն եր կլիներ տարբերության, արտադրյալի նկատմամբ և այլն: Այս պատճառով շատ ավելի հարմար է y-ը համարել x-ի ֆունկցիա ամեն անգամ, յերբ x մեծության յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է y մեծության վորոշակի արժեք, անկախ նրանից՝ կլինի y-ը հաստատուն, թե փոփոխական մեծություն:

Դուք անշուշտ նկատեցիք մեր կատարած ընդլայնման վորոշակի դիալեկտիկական բնույթը: Հաստատուն մեծությունը, վոր սկզբում սահմանել եյինք վորպես փոփոխական մեծության հակադրություն, զարգացման հետագա աստիճանի վրա անխզելիորեն, օրգանապես հյուսվեց նրա հետ. հաստատունը և փոփոխականը, վորոնք իրարից առանձնացած եյին և իրար թշնամի, այժմ մեզ համար դարձան միևնույն ամբողջության՝ ֆունկցիայի ընդհանուր գաղափարի, անբաժանելի բաղադրիչ մասերը: Յեվ այնքան ամուր, այնքան անխզելի յե այդ կապը, վոր յերբ փորձում ենք իրարից բաժանել այդ հակադրությունները, մենք անխուսափելիորեն եյական թերություններ ենք առաջացնում կառուցած շենքի մեջ, ինչպես հենց այժմ տեսանք:

Հակադրությունների միասնության օրենքն այստեղ ծառանում է մեր առաջ իր ակտուալ ներգործականությամբ:

III ԳԼՈՒԽ

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐ ՅԵՎ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§ 20. **Մեծություն.** Չպետք է իրար հետ շփոթել **թիվը** և **մեծությունը**: Թիվը միշտ վերացական է, վորովհետև ստացվում է իբրև չափման արդյունք. իսկ մեծությունը, ընդհակառակն, միշտ կոնկրետ է, վորովհետև առարկայի **վորակն** է հանդիսանում:

Մեծությունները խիստ բազմատեսակ են: **Ֆիզիկայում**, որինակ՝ ջերմաստիճանը, ջերմունակությունը, տեսակարար կշիռը, էլեկտրական հոսանքի ուժը մեծություններ են: **Մեխանիկայում** մեծություններ են, որինակ՝ արագությունը, մասսան, ծանրությունը: **Յերկրաչափության** մեջ էլ կան մեծություններ՝ ուղիղ գծերի յերկարությունները, անկյունները, մակերեսները, ծավալները և այլն:

Չնայած վոր մեծություններն այսքան բազմազան են, նրանք բոլորն ունեն մի ընդհանուր հատկություն՝ ամեն մի մեծություն կարող է չափվել նույն տեսակի մեծության միավորով: Այսպես որինակ՝ յերկարությունը չափվում է յերկարության միավորով՝ **մետրով**. ջերմաստիճանը չափվում է ջերմաստիճանի միավորով՝ **աստիճանով**. էլեկտրական հոսանքի ուժը չափվում է իր միավորով՝ **ամպերով** և այլն: Ինչպես արդեն ասվեց, այդպիսի չափման արդյունքը միշտ լինում է վերացական թիվ, վոր արտահայտում է մեծության հարաբերությունը այն մեծության, վոր ընդունված է իբրև չափման միավոր: Մեծությունը չափող թիվը կոչվում է այդ մեծության արժեք:

Բնության ամեն մի որենք տալիս է այն առնչությունները, վոր կան մեծությունների, կամ ավելի ճիշտ, այդ մեծություններն արտահայտող թվերի միջև:

Մաթեմատիկայի ուսումնասիրության առարկան հենց թվերն են և այն առնչությունները, վոր կան նրանց միջև, անկախ այն մեծությունների և որենքների կոնկրետ բնույթից, վորոնցից ստացվել են այդ թվերը և առնչությունները:

§ 21. **Հաստատուն և փոփոխական մեծություններ.** Այս կամ այն մաթեմատիկական խնդրի մեջ մեծությունների մի մասը լինում է **տված** կամ **հայտնի**, մյուս մասը **վորոնելի** կամ **անհայտ**: Տարրական մաթեմատիկան ուշադրության առարկա յե դարձնում մեծությունների հենց այդպիսի բաժանումը: Բարձրա-

գույն մաթեմատիկան նույնպես ուշադրություն է դարձնում մեծությունների այդպիսի բաժանման վրա, բայց նրա գլխավոր հետաքրքրությունը կենտրոնացած է մեծությունների միջև յեղած կախման վրա, հատկապես այն կախման վրա, վոր կա մի մեծության **փոփոխության** և մի կամ մի քանի ուրիշ մեծությունների **փոփոխությունների** միջև:

Այս տեսակետից մեծությունները (և նրանց համապատասխանող թվերը) բաժանվում են յերկսի՝ **փոփոխականների** և **«հաստատունների»**:

Ընթացիկ կյանքում բոլոր դիտվող մեծությունները փոփոխական են, այսինքն ժամանակի ընթացքում փոփոխվում են, թեկուզ աննշան չափով: Յերբ քարը վերև ենք նետում, ապա նրա x **հեռավորությունը յերկրի մակերևույթից փոփոխական մեծություն է**, վորովհետև այդ հեռավորությունը նախ մեծանում է, քանի դեռ քարը վերև է բարձրանում, ապա սկսում է փոքրանալ, յերբ քարը բարձրագույն կետին հասնելուց հետո սկսում է ընկնել, և վերջը դառնում է զերո, յերբ քարը գետնին է հասնում: Կնշանակի x հեռավորությունն այս դեպքում փոփոխական մեծություն է, այսինքն ժամանակի տարբեր մոմենտներում տարբեր արժեքներ ունի:

Ասացինք, վոր կյանքում բոլոր **մեծությունները փոփոխական են**: Նույնիսկ այն դեպքում, յերբ ուշադիր դիտողությունը կարծես թե հաստատուն մեծություն է տալիս, ճշգրիտ և զգայուն գործիքների նուրբ չափումները ցույց են տալիս, վոր այդ մեծությունն այնուամենայնիվ փոփոխական է: Որինակ՝ մարդու հասակը միայն մի որվա ընթացքում: Սովորությունը դրդում է մեզ այդ հասակը մի որվա ընթացքում նույնը համարել: Բայց ճշգրիտ գործիքով կատարած չափումները ցույց են տալիս, վոր հասակը առավոտյան միշտ փոքր ինչ բարձր է լինում, քան յերեկոյան, յերբ որվա ընթացքում կուտակված հոգնածությունը, վորքան էլ այն աննշան թվա, անխուսափելիորեն թուլացնում է մկանները և հասակը ցածացնում:

Իբրև ընդհանուր կանոն, իրականության մեջ ամեն մի մեծություն փոփոխական է: Միայն գիտական մտածողությունն է, վոր աբստրակցիայի միջոցով ընթացիկ կյանքում հաստատուն մեծություն է տեսնում, որինակ՝ յերբ խոսքը վերաբերում է իներցիայի կամ նյութի պահպանության որենքին: Հետագայում հաստատուն մեծություն գաղափարը հենց այդ իմաստով ել կգործածենք։

Մաթեմատիկական անալիզը ամեն մի կոնկրետ մեծություն տառով է նշանակում։ Յեվ վորովհետև կոնկրետ մեծությունը միշտ փոփոխվում է, ապա մաթեմատիկական անալիզը դրան համապատասխանեցնելով պետք է յենթադրի, վոր այդ տառը շարունակ փոխում է իր թվային արժեքները։ Օրինակ, յեթե վերև նետած քարի դեպքում x տառը նշանակում է քարի հեռավորությունը յերկրից, ապա x տառի թվային արժեքը կախված է ժամանակից և փոփոխվում է անընդհատ, նախ մեծանալով, ապա փոքրանալով մինչև զերո և այնուհետև մնալով զերո, յեթե քարին ձեռք չենք տալիս և անտեսում ենք գետնի փոքրիկ ցնցումները, վորոնք միշտ կան։ Այսպիսով մաթեմատիկական անալիզի մեջ **փոփոխական մեծություն կոչվում է այն տառը, օրինակ x ը, վորը ժամանակի ընթացքում փոփոխում է իր թվային արժեքը:**

Ուրեմն յեթե x ը փոփոխական մեծություն է, ապա x տառը ժամանակի տարբեր մոմենտներում տարբեր թվեր է ցույց տալիս։

Այն թիվը, վոր x տառը նշանակում է տվյալ մոմենտին, կոչվում է **x փոփոխական մեծության արժեքը տվյալ մոմենտում:** Այդ արժեքն ընդհանրապես փոփոխվում է մոմենտից մոմենտ։ Այդ հանգամանքը բառերով հաճախ այսպես են արտահայտում. «x փոփոխականը հաջորդաբար ստանում է մի շարք արժեքներ»։ Փոփոխական մեծությունները սովորաբար նշանակում են լատինական այբբենի վերջին տառերով՝ x, y, z, այլև u, v, t, w.

§ 22. Քանի վոր բոլոր յերևույթները շարունակ փոփոխվում են, ապա **կոնկրետ** հաստատուն մեծություն գոյություն չունի։ Սակայն յերևույթների փոփոխությունը կարող է տարբեր դեպքերում տարբեր արագությամբ տեղի ունենալ և յերբեմն այնքան դանդաղ, վոր յերևույթը կարելի յե գործնականորեն վորպես անփոփոխ նկատել։ Գիտությունը իդեալիզացիայի յենթարկելով տալիս է հաստատուն մեծությունների բազմաթիվ օրինակներ։ Այսպես որ՝ **յերկրաչափության մեջ** յեռանկյան անկյունների գումարը **հաստատուն մեծություն է**, ինչպես ել փոփոխվի յեռանկյունը, ինչպես ել մեծանան կամ փոքրանան նրա կողմերը, և ինչպես ել փոփոխվեն նրա անկյունները։ Հաստատուն մեծություն է նաև շրջանագծի յերկարության հարաբերությունն իր տրամագծին, ինչպիսի շրջանագծեր ել վերցնելու լինենք։ Այս վերջին

հաստատունը նշանակվում է π տառով և հավասար է 3,141592653...

Հաստատուն մեծությունները սովորաբար նշանակում են լատինական այբբենի առաջին տառերով՝ a, b, c,...

Հաստատուն մեծությունները լինում են յերկու տեսակ՝ **բացարձակ հաստատուններ** և **պարամետրներ**։ Առաջիններն ամեն տեսակ պայմանների դեպքում պահպանում են միևնույն արժեքը. օրինակ՝ 2, 5, $\sqrt{7}$, π և այլն։ Պարամետրները սոսկ **կամայական հաստատուններ են**, այսինքն նրանք մի հարցի մեջ մնում են անփոփոխ, բայց մի ուրիշ հարցի մեջ կարող են բոլորովին այլ արժեք ստանալ։ Իբրև օրինակ կարող է ծառայել շրջանի շառավիղը, վորը մի տվյալ շրջանի մեջ մի հաստատուն արժեք ունի, մի այլ տվյալ շրջանի մեջ մի այլ հաստատուն արժեք։

Խնդիրներ

1. Մեկ միավոր շառավղով գծած շրջանագծի վորևե կետից տարված է շարժական լար. հաստատո՞ւն է այդ լարի մեծությունը, թե փոփոխական. յեթե փոփոխական է, ի՞նչ սահմաններում է փոփոխվում։

2. Մարմնի կշիռը հաստատո՞ւն մեծություն է, թե փոփոխական։

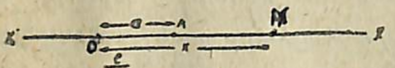
3. Ի՞նչպիսի մեծություն է լույսի արագությունը դատարկության մեջ։

4. Ի՞նչպիսի մեծություն է ջերմաստիճանի բացարձակ զերոն։ Վորոնեցեք փոփոխական և հաստատուն մեծությունների միքանի օրինակներ։

§ 23. **Մեծությունների յերկրաչափական պատկերացումը.** Մեծությունների յերկրաչափական պատկերացումը նույնն է, ինչ վոր գործածվում է վերացական թվերը պատկերացնելու համար։ Վերցնում են X'X ուղիղ գիծը, ընտրում են նրա դրական ուղղությունը (ձախից դեպի աջ) և յերկարության միավորը (e)։

a **հաստատուն մեծությունը** յերկրաչափորեն պատկերացնելու համար X'X ուղիղի վրա գտնում են այն A կետը, վորի աբսցիսը, այսինքն OA հատվածի չափը e միավորով, ճիշտ և ճիշտ հավասար է a հաստատուն մեծության արժեքին։ Քանի վոր այդ արժեքը շարունակ պահպանվում է, ապա A կետն անշարժ է։ Այսպիսով՝ **հաստատուն մեծությունը յերկրաչափորեն պատկերացվում է ուղիղ գծի անշարժ կետով** (գծ. 13)։

x **փոփոխական մեծությունը յերկրաչափորեն** պատկերացնելու համար ամենից առաջ պետք է հիշել, որ նա ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է, ստանալով զանազան արժեքներ։ Այս պատճառով x փոփոխական մեծությունը նախ դիտում ենք ժամանակի որոշ, թեպետ և կամայական մոմենտում։ Այդ մոմենտին x-ն ստանում է միանգամայն որոշ մի թվային արժեք։ Այդ մոմենտին մենք x-ի հետ ճիշտ այնպես ենք վարվում, ինչպես վարվում էինք a հաստատուն թիվը յերկրաչափորեն պատկերացնելիս, այսինքն X'X ուղիղի վրա գտնում ենք այն M կետը, որի աբսցիսը հավասար է x փոփոխական մեծության այդ մոմենտին ունեցած արժեքին։ M կետը դժվար չէ գտնել և միակը կլինի (գծ. 13)։



Գծ. 13.

Բայց ժամանակի ընթացքում x-ը կփոփոխի իր թվային արժեքը։ Հետևաբար ժամանակի ուրիշ մոմենտներում M կետը մեր X'X ուղիղի վրա ուրիշ տեղերում կգտնվի, այսինքն կշարժվի։ Այսպիսով՝ **փոփոխական մեծությունը յերկրաչափորեն պատկերացվում է ուղիղ գծի շարժվող կետով։**

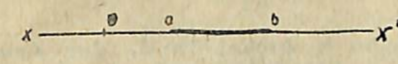
§ 24. **Փոփոխականների արժեքների տիրույթը.** Մենք գիտենք, որ ամեն մի x փոփոխական մեծություն ժամանակի ընթացքում տարբեր թվային արժեքների մի շարք է անցնում, մեկը մյուսի հետևից ընդունելով այդ արժեքները։ Հաճախ շատ օգտակար է լինում ուշադրություն դարձնել այն թվային արժեքների վրա, որ ընդունում է x փոփոխական մեծությունը, և առանձնացնել այդ թվային արժեքների ամբողջությունը մնացած թվերից։ **Թվային արժեքների այն ամբողջությունը, որ ընդունում է x փոփոխական մեծությունը, կոչվում է նրա արժեքների տիրույթ։**

Չպետք է կարծել, որ յեթե x-ը փոփոխական մեծություն է, ապա դրանով արդեն իսկ ընդունակ է ամեն տեսակ արժեքներ ընդունելու։ Օրինակ՝ յեթե x-ը մի վարժված շախմատիստի տարած պարտիաների թիվն է սկսած իր առաջին խաղից, ապա x-ը ժամանակի ընթացքում մեծանում է, հետևաբար փոփոխական մեծություն է։ Բայց x-ը կարող է ընդունել միայն ամբողջ դրական արժեքներ, որովհետև չի կարելի օրինակ տանել $\sqrt{2}$ պարտիա։ Հետևաբար x փոփոխական մեծության տիրույթն այս դեպքում կկազմի ամբողջ թվերի մի համեմատաբար փոքր խմբակ։

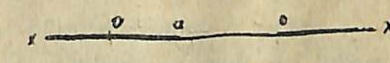
Փոփոխական մեծության յերկրաչափական պատկերացման մասին ասածից հետո պարզ է, որ x փոփոխական մեծության **արժեքների տիրույթը յերկրաչափորեն կպատկերացվի իբրև X'X ուղիղի կետերի մի հավաքածու։** Այդ կլինի հենց այն կետերի ամբողջությունը, որոնց վրա լինում է M կետը, որովհետև մի այդպիսի կետի աբսցիսը հենց այն արժեքն է, որ x-ը կընդունի ժամանակի մի համապատասխան մոմենտում։

Շախմատիստի օրինակի մեջ x փոփոխականի արժեքների տիրույթը կպատկերացվի իբրև ամբողջ աբսցիս ունեցող կետերի մի հավաքածու։

§ 25. **Հատված և միջակայք. Քննության մեջ պատահող** փոփոխական մեծությունն ուսումնասիրելիս՝ ամենից առաջ անհրաժեշտ է լինում հետևել նրա փոփոխությանը, այսինքն նրան պատկերացնող M կետի շարժմանը X'X ուղիղի վրա։ **Այդպիսի** (այսինքն **քննության մեջ պատահող**) փոփոխական մեծության փոփոխման տիրույթը յերկու տիպի է լինում։



Գծ. 14.



Գծ. 15.

Առաջին տիպ՝ հատված. x փոփոխականն այս դեպքում ընդունում է միայն այն արժեքները, որոնք գտնվում են a և b թվերի միջև, անպայման ներառյալ նաև a և b սահմանային թվերը։ Յերկրաչափորեն x-ի փոփոխման տիրույթը կլինի այս դեպքում a և b կետերի միջև ընկած կետերի ամբողջությունը և այն a և b կետերը։ Փոփոխման այսպիսի տիրույթը կոչվում է **ուղիղի հատված** և նշանակվում է [a,b]։ Սահմանային a և b կետերը, ինչպես ասացինք, մտնում են տիրույթի մեջ և կոչվում են **հատվածի ծայրեր**։ Հետևաբար հատվածը փակված է իր ծայրերով (գծ. 14. հատվածը հաստ է գծած)։

Յերկրորդ տիպ՝ միջակայք. x փոփոխականն ընդունում է միայն այն արժեքները, որոնք գտնվում են a և b թվերի միջև, **բայց յերբեք չի ընդունում այդ սահմանային a և b թվերը որպես արժեքներ։**

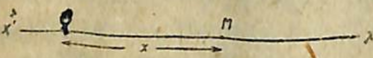
Յերկրաչափորեն այս դեպքում փոփոխման տիրույթը կլինի այն կետերի ամբողջությունը, որոնք գտնվում են a և b կետերի միջև, իսկ a և b կետերն իրենք տիրույթից դուրս կմնան։ Փոփոխման այդպիսի տիրույթը կոչվում է միջակայք (ինտերվալ) և նշանակվում է (a,b): Սահմանային a և b կետերն այստեղ չեն մտնում տիրույթի մեջ և կոչվում են տիրույթի սահմաններ: Կնշանակի միջակայքը բաց է սահմանների հարևանության մեջ, ծայրեր չունի, քանի վոր նրա սահմանային կետերը նրա մեջ չեն մտնում (գծ. 15 միջակայքը բարակ է գծած):

Չպետք է հատվածը շփոթել միջակայքի հետ: Թեպետ և հատվածը միայն յերկու կետով է ավելի հարուստ քան միջակայքը, բայց նրանց իրարից տարբերելը խիստ կարևոր է մաթեմատիկական անալիզի համար: Անհավասարությունների նշաններով հատվածը կգրվի $[a \leqslant x \leqslant b]$. իսկ միջակայքը՝ $(a<x<b)$:

§ 26. **Մեծության մոնոտոն յեվ տատանվող փոփոխություններ.** Ամեն մի x փոփոխական մեծություն փոփոխվում է ժամանակի ընթացքում: Այն արժեքները, վոր xն ընդունում է ուրիշներից առաջ, կոչվում են **նախորդող** (նախորդ), իսկ այն արժեքները, վոր xն ավելի ուշ է ընդունում, կոչվում են **հաջորդող** (հաջորդ):

Յեթե x փոփոխականն այնպես է փոփոխվում, վոր նրա ամեն մի հաջորդ արժեքն ավելի մեծ է, քան նախորդը, այդ դեպքում x փոփոխականը կոչվում է աճող:

Աճող x փոփոխականը յերկրաչափորեն պատկերացվում է M կետով, վորը շարունակ դեպի աջ է տեղափոխվում (գծ. 16):



Գծ. 16.

Նույնպես էլ, յեթե x փոփոխականն այնպես է փոփոխվում, վոր նրա ամեն մի հաջորդ արժեքը փոքր է նախորդից, այդ դեպքում xը կոչվում է նվազող փոփոխական մեծություն:

Նվազող փոփոխական մեծությունը յերկրաչափորեն պատկերացվում է M կետով, վորը շարունակ դեպի ձախ է շարժվում:

Աճող յեվ նվազող փոփոխական մեծությունները կոչվում են մոնոտոն (միալար, միապաղաղ) **մեծություններ: Այնպիսի փոփոխական մեծությունը, վորի փոփոխությունը մոնոտոն չէ, կոչվում է տատանվող:**

Տատանվող մեծության համար իբրև օրինակ կարող է ծառայել ճոճանակը, յեթե xով նշանակենք թելից կախած կապարյա ծանր գնդակի ծանրության կենտրոնի հեռավորությունը այդ գնդակի հավասարակշռության դիրքից. այն ժամանակ xը փո-

փոխարար մերթ աճում է, մերթ նվազում, յերբ ճոճանակը ճոճվում է: Հետևաբար xը մոնոտոն մեծություն չի լինի:

Իրականության մեջ իբրև **աճող մեծության** օրինակ կարող է ծառայել **ժամանակը**՝ հաշված վորոշ մոմենտից: Ժամանակը սովորաբար նշանակում են t տառով (լատիներեն tempus=ժամանակ): t ժամանակն իր բնույթով այնպես է, վոր շարունակ աճում է: $t^2, t^3, \ldots$ փոփոխական մեծությունները ևս աճող են, վորովհետև յերբ t ժամանակն աճում է, աճում է նաև նրա քառակուսին (t^2), խորանարդը (t^3) և այլն:

Ընդհակառակն $\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}, \frac{1}{t^3}, \ldots$ ամեն մեկն առանձին վերցրած նվազող մեծություններ են, վորովհետև յերբ t ժամանակն աճում է, աճում են նաև այդ կոտորակների հայտարարները, մինչդեռ համարիչները նախկինն են մնում:

$x = \sin t$ մեծությունը տատանվող է, վորովհետև t անկյունն աճելիս սինուսը մերթ աճում է, մերթ նվազում, տատանվելով $+1$ի և -1ի միջև.

§ 27. **Սահմանափակ մեծություն.** x փոփոխական մեծությունը կոչվում է **սահմանափակ**, յեթե, **ժամանակի վորոշ մոմենտից սկսած**, նրա բացարձակ մեծությունը՝ $|x|$, դառնում է և այնուհետև շարունակ մնում ավելի փոքր, քան մի վորոշ A դրական թիվ, այսինքն տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$|x| \leqslant A,$$

վորտեղ A-ն անփոփոխ դրական թիվ է:

Ընդհակառակն. յեթե չի կարելի այնպիսի A դրական թիվ գտնել, վորից $|x|$ը շարունակ փոքր մնա, **սկսած ժամանակի վորոշ մոմենտից**, ապա այդպիսի x փոփոխական մեծությունը կոչվում է **անսահմանափակ**:

Օրինակ՝ յեթե tն ժամանակն է, ապա՝

$$x = \sin t$$

հավասարությամբ վորոշված x փոփոխականը սահմանափակ մեծություն է, վորովհետև սինուսը բացարձակ մեծությամբ չի կարող մեկից մեծ լինել: Ի դեպ նկատենք, վոր այս փոփոխական մեծությունը բացարձակ մեծությամբ **շարունակ** փոքր է կամ հավասար 1ի:

Բայց սահմանափակ մեծություն լինելու համար բնավ անհրաժեշտ չէ, վոր $|x| < A$ անհավասարությունը **շարունակ** տեղի ունենա. բավական է, որ այդ անհավասարությունը ճիշտ լինի միայն մի որոշ մոմենտից սկսած։

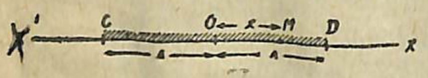
Օրինակ՝

$$x = \frac{1}{t}$$

հավասարությամբ որոշված x փոփոխականը, որտեղ t-ն ժամանակն է, դարձյալ սահմանափակ մեծություն է, որովհետև հենց թեկուզ $t \geqslant 2$ արժեքներից սկսած՝ ունենք $|x| < \frac{1}{2}$, չնայած որ x-ի արժեքները շատ մեծ են, երբ t-ն դեռ փոքր է։

Բայց ինքը t-ն, նրա քառակուսին՝ t^2, նրա խորանարդը՝ t^3 և այլն, արդեն անսահմանափակ մեծություններ են, որովհետև նրանք ժամանակի ընթացքում ամեն մի հաստատուն A թվից ավելի մեծ կդառնան։ Անսահմանափակ մեծություն կլինի նաև $t \sin t$ արտահայտությունը (ինչու)։

Տեսնենք՝ ինչպիսի երկրաչափական հատկություն ունի x սահմանափակ մեծությունը։ Դրա համար կոորդինատների սկզբից դեպի աջ և դեպի ձախ դնենք A երկարության հատվածներ։ Այն ժամանակ X'X ուղիղի վրա կստանանք CD անշարժ հատվածը։ Պարզ է, որ այդ CD հատվածի ներսը գտնվող բոլոր կետերի համար աբսցիսը բացարձակ մեծությամբ փոքր է A-ից, իսկ դուրսը գտնվող կետերի համար մեծ է A-ից (գծ. 17)։



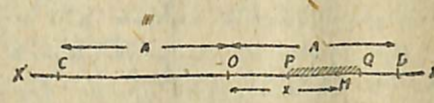
Գծ. 17.

Այստեղից պարզ է, որ M շարժվող կետը, որի աբսցիսը x-ն է, ժամանակի որոշ մոմենտից սկսած պետք է ընկնի CD հատվածի ներսը և այնուհետև այնտեղ էլ մնա, եթե x-ը սահմանափակ մեծություն է և եթե ունենք $|x| \leqslant A$ անհավասարությունը՝ սկսած որոշ մոմենտից։

Ընդհակառակն, ենթադրենք M շարժվող կետը որոշ մոմենտից սկսած ընկնում է PQ անշարժ հատվածի վրա և այնուհետև շարունակում այնտեղ մնալ։ Այն ժամանակ նրա x աբսցիսը սահմանափակ փոփոխական մեծություն է. Իրոք, միշտ էլ կարելի է այնքան մեծ դրական A թիվ վերցնել, որ PQ անշարժ հատվածն ամբողջովին գտնվի CD հատվածի մեջ, որն ստացված է A-ն O սկզբնակետից դեպի աջ և դեպի ձախ դնելով

(գծ. 18)։ Այս պատճառով M կետը որոշ մոմենտից սկսած գտնվելով PQ հատվածի վրա նույն մոմենտից կգտնվի CD հատվածի ներսը, ուստի այդ մոմենտից սկսած կունենանք $|x| < A$։ Նշանակի x-ը սահմանափակ մեծություն է։

Այսպիսով ամեն մի սահմանափակ x մեծություն երկրաչափորեն պատկերացվում է M շարժվող կետով, որը որոշ մոմենտից սկսած մնում է մի վերջավոր անշարժ հատվածի վրա։ Եվ միայն սահմանափակ մեծություններն են, որոնք պատկերացվում են կետի այդպիսի շարժումով։



Գծ. 18.

Անսահմանափակ մեծությունը պատկերացնող կետը դուրս կգա ամեն մի հատվածից, որքան էլ այդ հատվածը մեծ լինի։

§ 28. **Փոփոխական մեծության աճումը.** Որևէ փոփոխական մեծության ուսումնասիրությունը սովորաբար նրանով է սկսվում, որ դիտում են նրա ստացած աճումը, երբ նախկին թվային արժեքից նոր թվային արժեքի է անցնում։

Երբ x փոփոխական մեծությունը, ունենալով մի որոշ թվային արժեք x', ընդունում է մի այլ թվային արժեք x'', ապա նոր և հին արժեքների

$$x'' - x'$$

տարբերությունը կոչվում է փոփոխականի աճում, որովհետև հենց այդ տարբերությունը պետք է ավելացնել x' հին արժեքին, որպեսզի ստացվի x'' նոր արժեքը։

Իրոք, եթե այդ տարբերությունը նշանակենք h, այսինքն եթե գրենք

$$x'' - x' = h,$$

ապա այստեղից կստանանք

$$x'' = x' + h,$$

այսինքն

փոփոխականի նոր արժեքը հավասար է հինին, գումարած աճումը. h աճումն ուրիշ ձևով էլ են նշանակում, որը գերադասելի է առաջինից։ Տարբերությունը լատիներեն կոչվում է differentia, իսկ հունական այբբենի մեջ d տառը գրվում է $\triangle$ և կոչվում է գծիկատ»: Դրա համապատասխան ընդունված է x'' — x' տարբերությունը գրել

$$\Delta x',$$

վորը կարդացվում է՝ «դելտա իքս պրիմ» կամ «դելտա իքս գիծ»:

Այս նշանը մի ամբողջություն է ներկայացնում և չի կարելի Δ-ն անջատել կամ դիտել վորպես x'-ի մոտ դրվող բազմապատկիչ: Նշանակի x'' նոր արժեքն այժմ հետևյալ տեսքով կգրվի.

$$x' + \Delta x'.$$

Նույնպես և յեթե y փոփոխականը y' արժեքից անցնի նոր արժեքի, ստանալով Δy' աճումը, ապա նոր արժեքը հետևյալ տեսքով կգրվի.

$$y' + \Delta y'.$$

Δx', Δy',... նշանիկները շատ հարմար են, վորովհետև միանգամից յերևում է, թե վոր փոփոխականի համար է վերցված աճումը:

Մի կարևոր դիտողություն անենք. x' թիվը, վորը մենք անվանեցինք «հին արժեք», «նախկին արժեք», սովորաբար կոչվում է սկզբնական արժեք և սովորաբար նշանակվում է նույն x տառով, ինչով վոր հենց ինքը x փոփոխական մեծությունն է նշանակվում, այսինքն առանց վերևի «պրիմ» նշանիկի: Ուրեմն x փոփոխական մեծության սկզբնական արժեքը կլինի x, իսկ նոր արժեքը x + Δx. x փոփոխական մեծության Δx աճումը յերկրաչափորեն պատկերացնելու համար՝ M կետով պատկերացնենք x-ի սկզբնական արժեքը, իսկ նրա նոր արժեքը՝ x + Δx, պատկերացնենք N կետով (գծ. 19): Նշանակի նոր OM հատվածը հավասար է x-ի, իսկ ON հատվածը՝ x + Δx-ի: Այստեղից հետևում է, վոր M հին կետից դեպի N նոր կետն ուղղված MN հատվածը կլինի Δx աճման յերկրաչափական պատկերը:

Գծ. 19.

Յեթե N-ն ավելի ձախ գտնվեր, քան M-ը, ապա MN հատվածը ուղղված կլիներ դեպի ձախ և Δx աճումը բացասական կլիներ, վորովհետև x + Δx նոր արժեքը փոքր կլիներ x հին արժեքից:

§ 29. **Հաստատուն մեծությունը վորպես փոփոխական:** Առաջին հայացքից փոփոխական մեծության և հաստատուն մեծության գաղափարներն այնքան հակադիր են, վոր նրանց չի կարելի համեմատել: Բայց, իրականության մեջ, շատ հաճախ օգտակար է լինում հաստատուն մեծությունը դիտել վորպես փոփոխական մեծության մասնավոր դեպք:

Ահա թե ինչու է այդ արվում. հաճախ պատահում է, վոր վորևէ բանաձև ուսումնասիրելիս սկզբում կարծում ես, թե իսկական փոփոխական մեծության հետ գործ ունես և միայն ուշադիր ուսումնասիրության հետևանքով պարզվում է, վոր այդ մեծությունը վոչ թե փոփոխական է, այլ հաստատուն:

Օրինակ՝ մեկը, վոր յեռանկյունաչափություն չգիտե կամ մոռացել է, հեշտությամբ կարող է՝

$$\sin^2 t + \cos^2 t$$

գումարը համարել փոփոխական մեծություն, վորովհետև յերբ t ժամանակը փոխվում է, գումարելիներն էլ են փոխվում: Բայց մենք գիտենք, վոր այդ գումարը միշտ հավասար է 1-ի:

Նմանապես կարելի յեր մտածել, թե

$$\frac{1 - t^3}{(1 - t)(1 + t + t^2)}$$

կոտորակը փոփոխական մեծություն է, վորովհետև համարիչն ուրիշ տեսք ունի, հայտարարն ուրիշ: Բայց իրողությունն այն է, վոր համարիչը և հայտարարը հավասար են, և կոտորակը հավասար է 1-ի:

Յերկրաչափորեն էլ կարող է լինել, վոր հաստատուն մեծությունը փոփոխականի մասնավոր դեպքը հանդիսանա: Օրինակ՝ յեթե M կետը վորևէ ձևով հարթության վրա շարժվում է, նրա x հեռավորությունը դիտողից ընդհանրապես փոխվում է, այսինքն փոփոխական մեծություն է: Բայց յեթե M կետը շարժվում է մի շրջանագծի վրա, վորի կենտրոնում կանգնած է մեր դիտողը, ապա x-ը մի հաստատուն մեծություն կլինի, վորը հավասար է այդ շրջանի շառավղին:

Հաստատուն մեծությունը կարելի յե փոփոխականների կարգը դասել հետևյալ կերպով. x փոփոխական մեծություն մենք անվանեցինք մի տառ, վորը հաջորդաբար անցնում է արժեքների մի շարք: Բայց մասնավոր դեպքում այդ արժեքները կարող են բոլորն իրար հավասար լինել։ Այս դեպքում x փոփոխականն ըստ էության հաստատուն մեծություն է։

C հաստատուն մեծության ΔC աճումը հավասար է զերոյի, վորովհետև նրա ամեն մի արժեքը հավասար է հնին. կնշանակի՝

$$\Delta C = 0$$

Հակադարձ առաջադրությունը ևս ճիշտ է՝ այն մեծությունը, վորի աճումը շարունակ հավասար է զերոյի, հաստատուն մեծություն է։

§ 30 **Ֆունկցիա.** Իրականությունը դիտելով մենք անմիջապես նկատում ենք, վոր վորոշ փոփոխական մեծություններ կախված են մյուսներից։

Այն փոփոխական մեծությունը, վորը կախված է մյուսից, կոչվում է վերջինիս **ֆունկցիա։**

Այսպես օրինակ՝ այն ծանրությունը, վոր կարող է բարձրացնել մարդը, կախված է վերջինիս ուժից, յեթե մնացած պայմանները նույնն են։ Նույնպես և գնացքի անցած ճանապարհը կախված է ժամանակից. այսինքն ժամանակի ֆունկցիա է։ Քառակուսու մակերեսը նրա կողմի ֆունկցիան է, գնդի ծավալը շառավղի ֆունկցիան է և այլն։

Քանի վոր բնության մեջ մեծություններն իրար հետ կապված են խիստ բազմազան բարդ և նուրբ ձևերով, ապա կարելի յե ասել, վոր բնագիտության հիմնական խնդիրը **ֆունկցիաների ուսումնասիրությունն է։**

§ 31. **Անկախ փոփոխական յեվ կախյալ փոփոխական** Այն փոփոխականը, վորի արժեքները լիովին մեր տրամադրության տակ են, այսինքն վորին կարող ենք վերագրել մեր ցանկացած արժեքները տված մասնավոր խնդրի թույլատրած սահմաններում, կոչվում է **անկախ փոփոխական** կամ **արգումենտ**, իսկ այն փոփոխականը, վորի արժեքները լիովին վորոշվում են, հենց վոր տրվում է անկախ փոփոխականի արժեքը, կոչվում է **կախյալ փոփոխական** կամ **ֆունկցիա** [պարզել Բոյլ-Մարիոտի օրենքն արտահայտող բանաձևով՝ $v = \frac{c}{p}$, կամ գծային ընդարձակման բանաձևով՝ $l = l_0(1 + \beta t)$]։

Յերբ մենք քննության ենք առնում իրար հետ կապված յերկու այդպիսի փոփոխական մեծություններ, հաճախ մեզանից

է կախված լինում, թե նրանցից վորն ընտրենք վորպես անկախ փոփոխական։ Բայց ամեն անգամ, յերբ այդպիսի ընտրությունը կատարված է և արդեն վորոշ բանաձևեր գրված են, ապա անկախ և կախյալ փոփոխականների դերերն առանց նախազգուշությունների չի կարելի փոխել։

Մի վորևե փոփոխական մեծություն (կախյալ փոփոխականը) կարող է իրականության մեջ յերկու կամ ավելի մեծ թվով ուրիշ փոփոխական մեծությունների (անկախ փոփոխականների, արգումենտների) ֆունկցիա լինել։ Օրինակ՝ տվյալ կտորեղենի **գինը** նրա **վորակի** և **քանակի** ֆունկցիան է. յեռանկյան **մակերեսը հիմքի յեվ բարձրության** ֆունկցիան է. ուղղանկյուն զուգահեռանիստի ծավալը նրա **յերեք կողերի** ֆունկցիան է և այլն։ [Գիտության զանազան բնագավառներից բերեք մեկ անկախ փոփոխականի և շատ անկախ փոփոխականների ֆունկցիաների օրինակներ]։

§ 32. **Ֆունկցիայի խարակտերիստիկը.** Արդեն ասացինք, վոր արդի բնագիտության հիմնական խնդիրն է ուսումնասիրել բնության մեջ պատահող վորոշ փոփոխական մեծությունների կախումը ուրիշ փոփոխական մեծություններից, այսինքն **ֆունկցիաների ուսումնասիրումը։** Այդ կատարվում է հետևյալ նպատակով. յերբ կախումն ուսումնասիրված է, ուրիշ խոսքով, յերբ հայտնաբերված է այն օրենքը, ըստ վորի վորոշ փոփոխական մեծություններ կախված են մյուսներից, ապա այդ օրենքը հնարավորություն է տալիս կանխատեսելու յերևույթների տեղի ունենալը։ Թե ինչպիսի գործնական նշանակություն ունի այս, բավական է հիշել մակընթացությունների և տեղատվությունների կանխատեսումը, վորի ժամանակ ցույց է տրվում նույնիսկ նրանց բարձրությունը։

Այն օրենքը, վորով մի փոփոխական մեծություն կախված է մյուսից, համարվում է գտնված, յերբ հաջողվում է մի դիտվող փոփոխական մեծության կախումը մյուս դիտվող փոփոխական մեծությունից արտահայտել մաթեմատիկական նշանների, այսինքն **բանաձևի** միջոցով։

Օրինակ՝ մեխանիկան վորոնում է դատարկության մեջ ընկնող մարմնի անցած s ճանապարհի կախումը անկման t ժամանակից։ Յեվ յերբ մեխանիկան այդ կախումը գրում է

$$S = \frac{1}{2} g t^2$$

բանաձևով, որտեղ $g=981$, ապա հարցը մինչև վերջ լուծված է, որովհետև օրենքը գտնված է։

Բանաձևն այլ բան չէ, քան այն մաթեմատիկական գործողությունների նշումը, որ պետք է կատարել բանաձևի մեջ մտնող մեծությունների հետ։ Այսպիսով՝

y կախյալ փոփոխականը ցույց տվող բանաձևը ալ բան չէ, քան այն գործողությունների ամբողջությունը, որ պետք է կատարել x անկախ փոփոխականի և գործակիցների հետ, որպեսզի ստացվի yը։

Այսպես օրինակ՝

$$y=\frac{3x^2+\log x-\sin x}{2^x+\sqrt{x}-6}$$

հավասարումը պարզ կերպով նշում է, թե ինչ պետք է անել xի և մի քանի հաստատուն թվերի հետ, որպեսզի ստանանք yը։

Հաճախ պատահում է, որ x անկախ փոփոխականի միևնույն y ֆունկցիան շատ անգամ է առաջ գալիս որևէ հետազոտության մեջ։ Որպեսզի ստիպված չլինենք ամեն անգամ լրիվ արտագրել այն բանաձևը, որ արտահայտում է yի կախումը xից, պայմանավորվում ենք այդ բանաձևը կարճ գրել՝ մի տառով։

Այսպես, գրում ենք

$$y=f(x)$$

և կարդում. «իգրեկը ֆունկցիա է xից» կամ «իգրեկը հավասար է էֆ իքսից»։ Այս նշանակման մեջ f տառը կոչվում է ֆունկցիայի քարակտերիստիկ յեվ պարզապես նշանակում է այն գործողությունների ամբողջությունը, որ պետք է կատարել xի հետ՝ yի մեծությունը ստանալու համար։

Յեթե միևնույն հետազոտության մեջ միևնույն x փոփոխականի մի քանի տարբեր ֆունկցիաներ են պատահում, ապա այդ ֆունկցիաների տարբեր քարակտերիստիկները նշանակելու համար պետք է տարբեր տառեր գործածել՝ շփոթությունից խուսափելու համար։ Օրինակ՝ յեթե այսպիսի ֆունկցիաներ են պատահում՝

$$y=3x^2+1,\quad z=\log x,\quad t=\sqrt{x},\quad u=\sin\frac{1}{x^2+8}\ \text{և այլն,}$$

ապա ավելի լավ և կրճատ այսպես գրել՝

$$y=f(x),\quad z=F(x),\quad t=\Phi(x),\quad u=\varphi(x)\ \text{և այլն։}$$

Բայց յեթե միևնույն կախումը տարբեր տառազույգեր է կապակցում, կարելի յե և պետք է քարակտերիստիկի համար միևնույն տառը գործածել, որովհետև կախման տեսակը չի փոխվում, այլ նույնն է մնում։ Օրինակ՝ յեթե տված է՝

$$y=\frac{3x^2+1}{\log x+8}\ \text{և}\ v=\frac{3u^2+1}{\log u+8},$$

ապա համառոտ այսպես պետք է գրել.

$$y=f(x)\ \text{և}\ v=f(u),$$

որովհետև գործողությունների ամբողջությունը նույնն է։ Այսպիսով ամեն մի քարակտերիստիկ մի դատողության ընթացքում անպայման պետք է նշանակի գործողությունների միևնույն ամբողջությունը, իսկ գործողությունների տարբեր ամբողջությունները նշանակելու համար պետք է գործածել տարբեր քարակտերիստիկներ։

$$y=f(x)$$

համառոտ գրության առթիվ պետք է նկատել, որ նա հարմար է նաև այլ տեսակետից. հաճախ այնպես է լինում, որ բնության մեջ դիտել ենք մի y փոփոխական մեծության կախումը մի այլ x մեծությունից, բայց դեռևս չենք կարողացել յերևան բերել այդ կախման մաթեմատիկական կառուցվածքը, այսինքն դեռևս չենք կարողանում yը պատկերացնել xը պարունակող մաթեմատիկական բանաձևով, որովհետև մենք դեռ չգիտենք մաթեմատիկական գործողությունների այն ամբողջությունը, որոնք տալիս են yը։ Այս դեպքում yի կախումը xից միայն նրանով է արտահայտություն գտնում, որ x մեծության փոփոխությունը առաջ է բերում y մեծության փոփոխությունը յեվ xի հաստատունության հետ yն էլ է հաստատուն մնում։

Այստեղ հատկապես հարմար է

$$y=f(x)$$

համառոտ գրությունը, որովհետև f քարակտերիստիկը հենց նշանակում է գործողությունների դեռևս անհայտ ամբողջությունը։ Այս դեպքում y մեծության կախումը xից կարելի յե արտահայտել հետևյալ համապատասխանության ձևով. մենք ասում ենք՝ yը xի ֆունկցիան է, յերբ xի ամեն մի դիտվող արժեքին համապատասխանում է yի վորոշ արժեք։

Պետք է ասել, որ ընթերցողն, իսկապես, արդեն ծանոթ է այսպիսի սիմբոլիկ նշանակմանը։ Այսպես, եռանկյունաչափության մեջ նրան պատահել են՝

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\operatorname{tg} x,\ y=\operatorname{ctg} x,\ y=\arcsin x$$ և այլն, կամ հանրահաշվի մեջ՝

$$y=\log x.$$

այստեղ sin, cos, tg, ctg, arcsin, log նշանները հենց նշանակում են այս ֆունկցիաների քարակտերիստիկները, որոնց ուղղակի արտահայտությունը x-ի միջոցով չի կարող տրվել տարրական մաթեմատիկայի միջոցով։

Վերջապես, երբ z փոփոխականը շատ անկախ փոփոխականների, օրինակ x և y երկու անկախ փոփոխականների, ֆունկցիա է, ապա գրում են.

$$z=f(x,y),$$

որտեղ $f(x,y)$-ը մի հայտնի կամ դեռևս անհայտ արտահայտություն է, որը, բացի գործակիցներից, պարունակում է նաև x և y փոփոխականները։

§ 33. **Ֆունկցիաների հաշվումը.** Եթե w-ն $x, y, \ldots, z$ անկախ փոփոխականների ֆունկցիան է, իսկ f-ը նրա քարակտերիստիկը, ապա

$$w=f(x,y,\ldots,z).$$

w կախյալ փոփոխականի ընդունած արժեքը, երբ $x,y,\ldots,z$ անկախ փոփոխականները դարձրել ենք $a,b,\ldots,c$ թվերին հավասար, այսինքն երբ

$$x=a,\ y=b,\ldots,z=c,$$

նշանակվում է այսպես.

$$f(a,b,\ldots,c).$$

Այսպես օրինակ՝ եթե

$$\phi(x,y,z)=\frac{x-y+z}{x^2+y^2},$$

ապա $$\phi(1,2,3)=\frac{1-2+3}{1^2+2^2}=\frac{2}{5},$$

$$\phi(2,1,3)=\frac{2-1+3}{2^2+1^2}=\frac{4}{5},$$

$$\phi(3,2,1)=\frac{3-2+1}{3^2+2^2}=\frac{2}{13},$$

$$\phi(5,0,0)=\frac{5-0+0}{5^2+0^2}=\frac{1}{5}.$$

Եթե

$$f(x)=x^2-9x+14,$$

ապա

$$f(y)=y^2-9y+14,$$

$$f(a)=a^2-9a+14,$$

$$f(b+1)=(b+1)^2-9(b+1)+14=b^2-7b+6,$$

$$f(0)=0-9.0+14=14,$$

$$f(-1)=(-1)^2-9.(-1)+14=24,$$

$$f(3)=3^2-9.3+14=-4,$$

$$f(7)=7^2-9.7+14=0$$ և այլն.

Դիցուք

$$\varphi(x,y)=\sin(x+y);$$

այն դեպքում

$$\varphi(a,b)=\sin(a+b),$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2},0\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1,$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 0=0,$$

$$\varphi\left(\frac{3\pi}{10},-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right),$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{12},0\right)=\sin\left(\frac{\pi}{12}+0\right)=\sin\frac{\pi}{12}=0,2588$$ (չորրորդ տասնորդանշանի կեսի ճշտությամբ)։

§ 34. **Արգումենտի փոփոխության շրջանը.** $y=f(x)$ ֆունկցիայի սահմանման համաձայն y կախյալ փոփոխականը միանգամայն որոշ թվային արժեք է ստանում ամեն անգամ, երբ x արգումենտին որոշ թվային արժեք ենք տվել։ Այստեղից սակայն բնավ չի հետևում, որ x արգումենտին կարող ենք տալ **բոլոր թվային արժեքները**։ Ընդհանրապես, շատ հաճախ $f(x)$ արտահայտությունն ունի x արգումենտի այնպիսի բացառիկ արժեքներ, վորոնց համար արտահայտությունը կորցնում է իր մաթեմատիկական իմաստը: x արգումենտի այսպիսի բացառիկ արժեքները կոչվում են տվյալ արտահայտության համար կրիտիկական:

Այսպես օրինակ՝

$$y=\frac{7}{x-5}$$

ֆունկցիայի համար $x=5$ արժեքը արգումենտի կրիտիկական մեծությունն է, վորովհետև յերբ $x=5$, բաժանարարը զերո յե դառնում, և y-ի մեծությունը հաշվելն արդեն անհնարին է:

Բացի x արգումենտի կրիտիկական արժեքներից, յերբ ֆունկցիայի արտահայտությունն իր իմաստը կորցնում է, հաճախ ստիպված ենք լինում x-ին այնպիսի արժեքներ տալուց խուսափել, վորոնց համար ֆունկցիաների արտահայտությունը թեև միանգամայն վորոշ, բայց կեղծ արժեքներ է ընդունում:

Օրինակ՝

$$y=\sqrt{x}$$

ֆունկցիան կեղծ է, յերբ x-ը բացասական է: Յեթե կամենում ենք ֆունկցիայի համար իրական արժեքներ ունենալ, պետք է սահմանափակվենք x-ի միայն դրական արժեքներով:

$$y=\log_a x$$

ֆունկցիան, յերբ a հիմքը դրական է, կեղծ է դառնում x-ի բացասական արժեքների համար, վորովհետև բացասական թվերն իրական լոգարիթմներ չունեն: Վորպեսզի y-ն իրական լինի, պետք է վերցնել $x>0$.

Նույնպես և

$$y=\arcsin x,\quad y=\arccos x$$

ֆունկցիաներն անիմաստ են, յերբ x-ը գտնվում է $[-1\leqslant x\leqslant 1]$ հատվածից դուրս, վորովհետև սինուսը և կոսինուսը չեն կարող 1-ից մեծ և −1-ից փոքր լինել:

Ընդհակառակն

$$x^2-2+5,\quad \sin x,\quad \operatorname{arctg} x$$

ֆունկցիաները կարելի յե հաշվել x-ի բոլոր վերջավոր իրական արժեքների համար:

Ամեն մի $y=f(x)$ ֆունկցիա ունի իր հատուկ ամբողջություն x արգումենտի այն արժեքների, վորոնք այդ ֆունկցիայի համար թույլատրելի յեն: Արգումենտի թույլատրելի արժեքների այդ ամբողջությունը կոչվում է ֆունկցիայի գոյության տիրույթ:

Օրինակ.

Գտնել $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ ֆունկցիայի գոյության տիրույթը, ուշադրության առնելով միայն իրական արժեքները:

Լուծում. Վորպեսզի առաջին գումարելին իրական լինի, պետք է արմատատակ $1+x$ արտահայտությունը դրական լինի կամ զերո. ուստի $x\geqslant -1$: Վորպեսզի յերկրորդ գումարելին էլ դրական լինի, անհրաժեշտ է, վոր $x\leqslant 1$: Կնշանակի ֆունկցիայի գոյության տիրույթն է $[-1\leqslant x\leqslant +1]$ հատվածը:

§ 35. Ֆունկցիայի աճումը.

Հետագայում կտեսնենք, վոր դիֆֆերենցիալ հաշվի համար վերին աստիճանի անհրաժեշտ է կարողանալ գտնել ֆունկցիաների աճումները, վորովհետև ֆունկցիան լրիվ կարողանում ենք ուսումնասիրել միայն այն ժամանակ, յերբ մեզ հայտնի յե նրա փոփոխությունը, այսինքն նրա ստացած աճումները արգումենտի փոփոխվելու ժամանակ:

Այսպես ուրեմն, դիցուք ուսումնասիրում ենք $y=f(x)$ ֆունկցիան: Յենթադրենք, վոր x-ն սկզբում ունի վորոշ արժեք և ապա ստանում է Δx աճումը: Այն ժամանակ արգումենտի նոր արժեքը կլինի $x+\Delta x$: Բայց քանի վոր արգումենտը փոփոխվեց և x հին արժեքից անցավ $x+\Delta x$ նոր արժեքին, ապա կփոփոխվի նաև կախյալ փոփոխականը, y հին արժեքից անցնելով $y+\Delta y$ նոր արժեքին, վորտեղ Δy-ը ֆունկցիայի աճումն է, վոր առաջ է յեկել արգումենտի Δx աճումից: Բայց հին արգումենտին կհամապատասխանի ֆունկցիայի հին արժեքը, կնշանակի

$$y=f(x),$$

և նոր արգումենտին ֆունկցիայի նոր արժեքը՝

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x).$$

յերկրորդ հավասարությունից հանելով առաջինը՝ կստանանք

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

կարևոր հավասարությունը:

Այսպիսով՝ $y=f(x)$ ֆունկցիայի Δy աճումը հաշվելու համար պետք ե հետևյալ քայլերն անել.

Առաջին քայլ. Ֆունկցիայի $f(x)$ արտահայտության մեջ x հին արգումենտը պետք ե փոխարինել $x+\Delta x$ նոր, աճած արգումենտով։ Կստանանք մեր ֆունկցիայի նոր արժեքը՝ $f(x+\Delta x)$։

Երկրորդ քայլ. պետք ե վերցնել ֆունկցիայի հին արժեքը՝ $f(x)$։

Երրորդ քայլ. պետք ե $f(x+\Delta x)$ նոր արժեքից հանել $f(x)$ հին արժեքը. $f(x+\Delta x)-f(x)$ տարբերությունը կլինի ֆունկցիայի մեր փնտրած աճումը՝ Δy։

Օրինակներ

1. Գտնել $y=x^2$ ֆունկցիայի աճումը։

Լուծում. Առաջին քայլը (x հին արժեքի փոխարինումը $x+\Delta x$ նոր արժեքով) տալիս ե

$$(x+\Delta x)^2.$$

Յերկրորդ քայլը (ֆունկցիայի վերցնելը հին արգումենտի համար) տալիս ե x^2.

Յերրորդ քայլը (ֆունկցիայի նոր և հին արժեքների տարբերությունը կազմելը) կտա աճման բանաձևը՝

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2,$$

որը հաշվելուց և պարզելուց հետո դառնում ե

$$\Delta y=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

2. Գտնել $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիայի աճումը։

Լուծում. Ընդհանուր կանոնի համաձայն ունենք

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x},$$

որպիսի աճումը ձևափոխումներից հետո դառնում ե

$$\Delta y=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}.$$

3. Գտնել $y=5-3x+4x^3$ ֆունկցիայի աճումը։

Լուծում.

$$\Delta y=(-3+12x^2)\Delta x+12x(\Delta x)^2+4(\Delta x)^3.$$

§ 36. **Ֆունկցիաների դասակարգումը.** Այստեղ դիտելու յենք միայն մեկ արգումենտի ֆունկցիաները։ Ամեն մի այդպիսի y ֆունկցիա, ինչպես տեսանք, կգրվի հետևյալ տեսքով.

$$y=f(x),$$

որտեղ $f(x)$-ն այն բանաձևն ե, որը պարունակում ե x արգումենտը և տալիս ե դիտվող y ֆունկցիայի մեծությունը։ Այս բանաձևը այն մաթեմատիկական գործողությունների ամբողջությունն ե, որ պետք ե կատարել x արգումենտի հետ. այստեղից պարզ ե, որ ինչքան մեծ լինի այդ գործողությունների թիվը և ինչքան ավելի դժվար լինի նրանց կատարումը, այնքան ավելի բարդ կլինի $y=f(x)$ ֆունկցիան և այնքան ավելի դժվար կլինի նրան ուսումնասիրել։

Այս պատճառով նախքան բոլոր $f(x)$ ֆունկցիաների ուսումնասիրությանն անցնելը, բնական ե աշխատել նրանց դասակարգել, հիմք ընդունելով $f(x)$ բանաձևի մեջ նշված գործողությունների պարզությունը։

ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ

Այսպես կոչվում են այնպիսի $f(x)$ ֆունկցիաները, վորոնք x-ից ստացվում են թվաբանության միայն առաջին յերեք գործողությունների միջոցով՝ **գումարման, հանման և բազմապատկման.** Այս գործողությունները պետք ե կատարվեն **վերջավոր** թիվ անգամ։ Հաստատունների նկատմամբ կատարվող գործողությունները ուշադրության չեն առնվում, վորովհետև արդյունքը նորից հաստատուններ են լինում։

Հանրահաշվից հայտնի յե, վոր յերբ այդ բոլոր նշված գործողությունները կատարված են, յերբ բոլոր փակագծերը բացված են և բոլոր նման անդամները միացված, ապա բազմանդամը կարելի յե գրել x արգումենտի **նվազող** կամ **աճող** աստիճաններով, օրինակ՝

$$y=2x^3-5x^2+2x-3,$$
$$y=a+bx-cx^2$$

և այլն։ Պարզ ե, վոր բոլոր բազմանդամներն էլ կարող ենք գրել նվազող աստիճաններով, և այն դեպքում ավագագույն անդամը առաջին տեղը կգրվի։ Ավագագույն անդամի աստիճանը կոչվում ե տվյալ բազմանդամի աստիճան։ Այսպես, առաջին բազմանդամը յերրորդ աստիճանի յե (խորանարդ բազմանդամ), իսկ յերկրորդը՝ յերկրորդ աստիճանի (քառակուսի բազմանդամ)։

ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Յեթե գումարման, հանման և բազմապատկման ավելացնենք նաև **բաժանման** գործողությունը, ապա այդ չորս գործողությունների միջոցով ստացված ֆունկցիաները, յերբ գործողությունները կատարած են վերջավոր թվով, կոչվում են **ռացիոնալ ֆունկցիաներ**։ Պարզ է, վոր այդ ֆունկցիաներն արգումենտի նկատմամբ կատարվող արմատման (արմատ հանելու) գործողություն չեն պարունակում և, յեթե բոլոր նշված գործողությունները կատարենք, ապա այդ ֆունկցիաները բավական պարզ տեսք կունենան՝ նրանք կներկայացնեն **յերկու բազմանդամների հարաբերությունը**.

Օրինակ՝ յեթե

$$y=\frac{\frac{2x-3}{x-1}+\frac{3x-2}{x+1}}{\frac{x}{x-2}}+7x,$$

ապա այդ նույն y ֆունկցիան անհամեմատ ավելի պարզ տեսք կստանա, յեթե նշած գործողությունները կատարենք. կունենանք

$$y=\frac{7x^4+5x^3-23x^2+11x+2}{x^3-x}$$

ԲԱՑԱՀԱՅՏ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Յեթե նախընթաց չորս գործողություններին՝ գումարման, հանման, բազմապատկման և բաժանման, միացնենք մի գործողություն ևս՝ վորևէ աստիճանի արմատ հանելու գործողությունը, ապա այդ հինգ գործողությունների կատարումից ստացված ֆունկցիաները, յեթե գործողությունները կատարված են վերջավոր թվով, կոչվում են **բացահայտ հանրահաշվական ֆունկցիաներ**։

Այսպես

$$y=\frac{2x^3+\sqrt{x^2-1}-8x}{\sqrt[3]{4x+1}-\sqrt{x+7}}-\sqrt[3]{\frac{x-1}{x^5-6}}+11x^2+9$$

ֆունկցիան բացահայտ հանրահաշվական է։

Բացահայտ հանրահաշվական ֆունկցիաներն ընդհանրապես շատ բարդ են և սակավ դեպքերում միայն կարող են պարզացվել։

Կարևոր է սակայն նկատել, վոր պատշաճ ձևափոխություններ կատարելով՝ կարելի յե բոլոր արմատները վերացնել։ Բայց այդ կատարելիս մենք ստանում ենք այնպիսի հավասարություն,

վորի մեջ y տառը առաջ է գալիս քառակուսի, խորանարդ և ավելի բարձր աստիճաններով։ Օրինակ

$$y=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$$

բացահայտ հանրահաշվական ֆունկցիան այսպիսի ձևափոխություններ է կրում.

$$y-\sqrt{1+x}=\sqrt{1-x}$$

$$\left(y-\sqrt{1+x}\right)^2=1-x$$

$$y^2-2y\sqrt{1+x}+(1+x)=1-x$$

$$y^2+2x=2y\sqrt{1+x}$$

$$(y^2+2x)^2=4y^2(1+x)$$

և, վերջապես,

$$y^4-4y^2+4x^2=0,$$

վորտեղ այլևս արմատներ չկան, բայց վորտեղ y-ն առաջ է գալիս բարձր աստիճաններով։

Իբրև ընդհանուր կանոն պետք է ասել, վոր **ամեն մի բացահայտ հանրահաշվական ֆունկցիա՝** $y=f(x)$, **արմատանշանները վերացնելու համար կատարած պատշաճ ձևափոխություններից հետո բերվում է հետևյալ տեսքի հավասարման՝**

$$F(x,y)=0,$$

վորտեղ F-ը x և y տառերով կազմված մի բազմանդամ է. այդ հավասարումը կարելի յե նաև այսպես գրել

$$A(x)y^n+B(x)y^{n-1}+C(x)y^{n-2}+\ldots+G(x)y+H(x)=0,$$

վորտեղ $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$,..., $H(x)$ **արտահայտությունները միայն x տառը պարունակող բազմանդամներ են։**

ԱՆԲԱՑԱՀԱՅՏ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Նախընթաց արդյունքը մեզ բերում է հետևյալ մտքին։ Վերը մենք ֆունկցիա անվանեցինք ամեն մի y կախյալ փոփոխական, վորը կախված է x արգումենտից, և y-ը նշանակեցինք f(x)-ով՝

$$y=f(x),$$

վորտեղ f(x)-ն այն բանաձևն է, վոր արտահայտում է y-ը x-ի միջոցով, այսինքն նշում է մաթեմատիկական այն գործողությունների ամբողջությունը, վոր պետք է կատարել x ի հետ y ն ստանալու համար:

Եթե գործողությունների այդ ամբողջությունը դեռ ևս մեզ հայտնի չէ, ապա մենք այնուամենայնիվ պահպանում ենք նախկին նշանակումը՝

$$y = f(x),$$

վորտեղ $f(x)$ ը նշանակում է մաթեմատիկական գործողությունների հենց այդ դեռևս մեզ անհայտ ամբողջությունը:

y **ֆունկցիան կոչվում է բացահայտ ֆունկցիա, եթե հայտնի են այն գործողությունները, վոր պետք է կատարել x արգումենտի հետ y ն ստանալու համար:**

Իսկ եթե x արգումենտի y ֆունկցիան վորոշելու համար մեզ միայն տված է մի հավասարում, վորը պարունակում է x և y տառերը՝

$$F(x,y) = 0,$$

և այս լուծումն է, վոր վորոշում է y ֆունկցիան, և եթե մենք չենք կարողանում կամ չենք կամենում այդ հավասարումը լուծել բստ y ի, այդ դեպքում y ը կոչվում է x արգումենտի անբացահայտ ֆունկցիա:

y անբացահայտ ֆունկցիան անմիջապես բացահայտ է դառնում, հենց վոր $F(x,y)=0$ հավասարումը լուծում ենք y տառի նկատմամբ, այդ դեպքում $y=f(x)$ բանաձևը ցույց է տալիս x ի հետ կատարած գործողությունների ամբողջությունը, վոր գտել ենք լուծման ժամանակ: Իսկ եթե մենք չենք կարողանում լուծել $F(x,y)=0$ հավասարումը y տառի նկատմամբ կամ մոռացել ենք նրա լուծումը, այդ դեպքում $y=f(x)$ գրելաձևի մեջ $f(x)$ նշանը նշանակում է x ի հետ կատարվող գործողությունների այն ամբողջությունը, վոր մեզ անհայտ է կամ մենք մոռացել ենք:

Եթե $F(x,y)$ ը x և y երկու տառերով մի բազմանդամ է, ապա $F(x,y)=0$ հավասարմանը բավարարող y անբացահայտ ֆունկցիան կոչվում է x տառի հանրահաշվական (անբացահայտ) ֆունկցիա:

Առաջին հայացքից կարող է թվալ, վոր ամեն մի y անբացահայտ հանրահաշվական ֆունկցիա կդառնա բացահայտ հանրահաշվական ֆունկցիա, հարկավոր է միայն $F(x,y)=0$ հավասարումը լուծել արմատանշանների օգնությամբ: Բայց իրողությունն այն է, վոր արմատանշանների օգնությամբ լուծելի չեն վոչ բո-

լոր հանրահաշվական հավասարումները և, հետևաբար, անբացահայտ հանրահաշվական ֆունկցիաների դասն ավելի լայն է, քան բացահայտ հանրահաշվական ֆունկցիաներինը, այսինքն այն ֆունկցիաներինը, վորոնք գրված են արմատանշանների միջոցով:

ՏՐԱՆՍՑԵՆԴԵՆՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Տրանսցենդենտ ֆունկցիայի սահմանումը **բացասական է՝** ամեն մի y ֆունկցիա, վորը հանրահաշվական չէ, կոչվում է **տրանսցենդենտ:**

Մաթեմատիկական անալիզն սկզբում զբաղվում է հետևյալ **պարզագույն** տրանսցենդենտ ֆունկցիաներով (այսպես կոչված **էլեմենտար տրանսցենդենտություններով**).

1. **Աստիճանային տրանսցենդենտություն կոչվում է այնպիսի ֆունկցիան,** վոր ունի հետևյալ տեսքը՝

$$x^a,$$

վորտեղ a ն **իռացիոնալ** թիվ է, որինակ՝ $x^{\sqrt{2}}$.

Անհրաժեշտ է հիշել, վոր եթե a ն ռացիոնալ թիվ լինի՝

$$a=\frac{p}{q}, \text{ ապա } x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$ կլինի բացահայտ հանրահաշվական ֆունկցիա և վոչ թե աստիճանային տրանսցենդենտություն:

2. **Ցուցչային ֆունկցիաներ,** երբ ցուցիչում արգումենտը պարունակվում է՝

$$2^x, \quad a^x, \quad x^x, \quad a^{x^2}.$$

3. **Լոգարիթմական ֆունկցիաներ,** վորոնք պարունակում են փոփոխականների լոգարիթմները՝ $\lg x$, $\lg(a^2 + x^2)$:

4. **Եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ,** վորոնք են՝

$$\sin x, \ \cos x, \ \operatorname{tg} x, \ \operatorname{ctg} x, \ \operatorname{sc} x, \ \operatorname{csc} x.$$

5. **Շրջանային (հակադարձ եռանկյունաչափական) ֆունկցիաներ՝**

$$\arcsin x, \ \arccos x, \ \operatorname{arctg} x, \ \operatorname{arcctg} x, \ \operatorname{arcsc} x, \ \operatorname{arccsc} x.$$

Մաթեմատիկական անալիզի բարձր ճյուղերում ուսումնասիրվում են ուրիշ տրանսցենդենտ ֆունկցիաներ ևս (որինակ մեխանիկայի համար առանձին կարևորություն ունեցող էլլիպտիկ ֆունկցիաները և այլն):

ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Երբ մենք x արգումենտի y անբացահայտ ֆունկցիա անվանեցինք այն ֆունկցիան, վորը բավարարում է մեզ տված $F(x,y)=0$ հավասարմանը։

Անբացահայտ ֆունկցիայի մասնավոր դեպքն է այսպես կոչված **հակադարձ ֆունկցիան**։

Դիցուք մեզ տված y ը վորպես x արգումենտի բացահայտ ֆունկցիա՝

$$y=f(x).$$

Այս գրքում քննության առնվող ֆունկցիաների համար ընդհանրապես հնարավոր է այս հավասարությունը լուծել x ի նկատմամբ, այսինքն x տառը գրել մի բանաձևով, վորը պարունակում է y տառը՝

$$x=\varphi(y).$$

Այս դեպքում յերկու ֆունկցիաների քարակտերիստիկները՝

$$f \text{ և } \varphi,$$

թե մեկը և թե մյուսը նշանակում են արգումենտների նկատմամբ կատարվող վորոշ մաթեմատիկական գործողությունների ամբողջությունները։ Ճիշտ է, այդ արգումենտները տարբեր են, վորովհետև f ֆունկցիայի արգումենտը x ն է, իսկ φ ֆունկցիայինը՝ y ը։ Բայց յեթե այդ յերկու ֆունկցիաների արգումենտները միևնույն t տառով նշանակենք, ապա կստանանք

$$f(t) \text{ և } \varphi(t)$$

ֆունկցիաները, վորոնք կոչվում են **փոխհակադարձ ֆունկցիաներ**։

Մեկը մյուսից տարբերելու համար այդ ֆունկցիաներից մեկը կոչվում է **ուղիղ** ֆունկցիա, մյուսը՝ **հակադարձ**։

Հետևյալ որինակներում միևնույն տողում իրար դիմաց գրված են փոխհակադարձ ֆունկցիաներ՝

$$t^2+1 \qquad \pm\sqrt{t-1}$$
$$a^t \qquad \lg_a t$$
$$\sin t \qquad \arcsin t$$

$f(t)$ և $\varphi(t)$ փոխհակադարձ ֆունկցիաներն այն կարևոր հատկությունն ունեն, վոր յեթե նրանցից մեկի հետ կատարենք բոլոր այն գործողությունները, վորոնք կատարված են մյուսի արգումենտի հետ, ապա կվերադառնանք t անկախ փոփոխականին, այսինքն

$$\varphi[f(t)]=t \text{ և } f[\varphi(t)]=t.$$

Այդ դժվար չէ ստուգել հենց թեկուզ առաջին որինակով՝

$$(\pm\sqrt{t-1})^2+1=t$$

և

$$\sqrt{(t^2+1)-1}=t.$$

ՄԻԱՐԺԵՔ ՅԵՎ ԲԱԶՄԱՐԺԵՔ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

y փոփոխականը կոչվում է x փոփոխականի **միարժեք** ֆունկցիա, յեթե x ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է y ի մեկ և միայն մեկ արժեք։ Այսպես,

$$y=3x^2$$

հավասարման մեջ y ը x ի միարժեք ֆունկցիա է։

Յեթե x ի ամեն մի արժեքին համապատասխանում է y ի վոչ թե մեկ, այլ միքանի արժեքներ, ապա y ը կոչվում է x ի **բազմարժեք** ֆունկցիա։ Որինակ՝

$$y^2=5x$$

հավասարումը y ը վորոշում է վորպես x ի յերկարժեք ֆունկցիա, վորովհետև

$$y=\pm\sqrt{5x}.$$

Նմանապես և

$$y=\mathrm{Arctg}x$$

հավասարությունը y ը վորոշում է վորպես x ի բազմարժեք (անվերջ արժեք) ֆունկցիա, վորովհետև x ի ամեն մի տվյալ արժեքի համար y ի արժեքների թիվն անվերջ է։ Որինակ՝ յեթե $x=0$, ապա $y=n\pi$, վորտեղ n ը հավասար է կամ 0-ի կամ կամավոր ամբողջ թվի։

Յեթե $f(t)$ ուղիղ ֆունկցիան միարժեք է, ապա նրան հակադարձ $\varphi(t)$ ֆունկցիան սովորաբար բազմարժեք է։ Դրա պատճառը կպարզենք յերկրաչափական պատկերացման միջոցով։

§ 37. **Ֆունկցիաների յերկրաչափական պատկերացումը.** Արդեն տեսել ենք, վոր ամեն մի մեծություն կարելի յե կետով պատկերացնել։ Հեշտ է յերկրաչափորեն պատկերացնել նաև ֆունկցիաները։

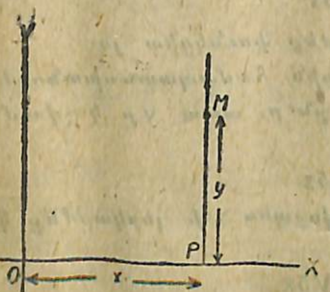
Դիցուք մեզ տված է y ը վորպես x ի միարժեք ֆունկցիա

$$y = f(x).$$

այդ նշանակում է, որ x փոփոխականի ամեն մի արժեքին համապատասխանում է y փոփոխականի միանգամայն որոշ մի արժեք։

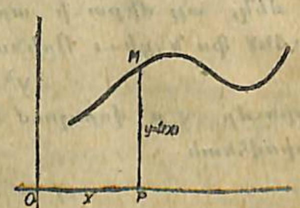
Այժմ վերցնենք հարթության վրա կոորդինատական առանցքների մի ուղղանկյուն սիստեմ՝ XOY։ Դիցուք P-ն x-երի առանցքի այն կետն է, որի աբսցիսը հավասար է x-ի։ Եթե P կետում աբսցիսների առանցքին ուղղահայաց կանգնեցնենք, ապա այդ ուղղահայացի վրա մենք միշտ էլ կարող ենք գտնել այն միակ M կետը, որի PM օրդինատը ճիշտ և ճիշտ հավասար է մեր ֆունկցիայի f(x) մեծությանը (գծ. 21)։ Ուրեմն մենք ունենք՝

$$OP = x, \quad PM = y = f(x).$$



21.

Գծ. 21.



22.

Գծ. 22.

Ենթադրենք, որ այսպիսի կառուցումներ կատարել ենք այն բոլոր արժեքների համար, որ կարելի է տալ x փոփոխականին։ Այն ժամանակ x-երի առանցքի բոլոր P կետերում կանգնեցրած կլինեն ուղղահայացներ և ամեն մի ուղղահայացի վրա դրված կլինի մի PN հատված, որը հավասար է տվյալ y ֆունկցիայի մեծությանը, երբ արգումենտն ընդունում է P կետի աբսցիսին հավասար արժեք։

Այսպիսի կառուցման հետևանքով կանգնեցրած ուղղահայացների M ծայրերը կկազմեն կետերի մի երկրաչափական տեղ, որը ճիշտ այնպես է տարածված, ինչպես ինքը OX առանցքը, որովհետև այս առանցքի ամեն մի P կետին համապատասխանում է այդ երկրաչափական տեղին պատկանող M կետը։ Այս պատ-

ճառով մենք կարող ենք M կետերի այդ երկրաչափական տեղը կոր գիծ կամ կոր անվանել (գծ. 22)։

Այսպիսով՝

Ամեն մի f(x) միարժեք ֆունկցիա երկրաչափորեն կարող է պատկերացվել այնպիսի կորով, որի y օրդինատը աբսցիսների առանցքի ամեն մի x կետում ճիշտ և ճիշտ հավասար է f(x) ֆունկցիայի մեծությանը, երբ այդ ֆունկցիայի արգումենտը հավասար է x աբսցիսին։

Ընդհակառակը, եթե այնպիսի կոր ունենք, որը աբսցիսների առանցքին ուղղահայաց ամեն մի ուղիղով կտրվում է միայն մի կետում, ապա այդպիսի կորը պատկերացնում է միանգամայն որոշ մի ֆունկցիա, հենց այն ֆունկցիան, որի մեծությունները հավասար են կորի օրդինատներին, երբ արգումենտի մեծությունները հավասար են աբսցիսներին։

Այս կարելի է կարճ այսպես ասել՝ ամեն մի կորի համար օրդինատը աբսցիսի ֆունկցիան է։

Ֆունկցիան և կորը այնքան սերտորեն կապված են իրար հետ, որ զարմանալի չպիտի թվա, եթե մաթեմատիկոսը, ընագետը և վիճակագիրը այդ երկու գաղափարներն իրար հետ նույնացնում են և ֆունկցիոնալ կախման մասին խոսելիս իրենց երևակայությամբ համապատասխան կորն են տեսնում։

Իբրև ֆունկցիայի երկրաչափական պատկերացման առաջին կիրառություն վերադառնանք այն հարցին, թե

ինչո՞ւ հակադարձ ֆունկցիան սովորաբար բազմարժեք է լինում.

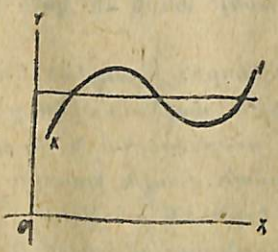
Դիցուք y=f(x)-ը x արգումենտի տվյալ միարժեք ֆունկցիան է։ Պատկերացնելով այդ ֆունկցիան երկրաչափորեն՝ ստանում ենք KK կորը (գծ. 23)։

Հակադարձ ֆունկցիան՝

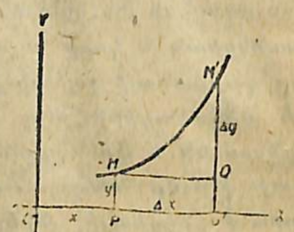
$$x = \varphi(y),$$

պատկերացվում է հենց այդ նույն կորով, որովհետև x աբսցիսի և y օրդինատի թվային մեծությունները նույնն են թե y=f(x) և թե x=φ(y) հավասարման մեջ։ Միայն թե x=φ(y) հակադարձ ֆունկցիայի մեջ անկախ փոփոխականն այլևս x-ը չէ, այլ y-ը։ Այդ նշանակում է, որ եթե կամենում ենք ունենալ y=f(x) ուղիղ ֆունկցիայի երկրաչափական պատկերացումը, պետք է դիտողին հարկադրել, որ նա OX առանցքի վրա այնպես շարժվի, ինչպես գետնի վրա՝ գլուխն ուղղած դեպի OY առանցքի դրական ուղղությունը. այն ժամանակ, գլուխը բարձրացնելով՝ նա գլխավերևը կտեսնի $y=f(x)$ ուղիղ ֆունկցիայի յերկրաչափական պատկերը։ Կնշանակի՝ հակադարձ ֆունկցիայի պատկերն ունենալու համար դիտողը պետք է շարժվի OY առանցքի վրա գլուխը դեպի OX առանցքի դրական ուղղությունը. այն ժամանակ նա գլխավերևը կտեսնի $x=\varphi(y)$ հակադարձ ֆունկցիայի պատկերը։

Յեվ այժմ պարզ է, թե ինչու հակադարձ ֆունկցիան սովորաբար բազմարժեք է՝ օրդինատների նոր առանցքին (այսինքն OX առանցքին) զուգահեռ ուղիղները պարտավոր չեն KK կորը կտրել անպայման միայն մի կետում (գծագրում պատկերացված է հատուկ [illegible] (գծ. 11).



Գծ. 23.



Գծ. 24.

§ 38. Ֆունկցիայի աճման յերկրաչափական պատկերացումը. Յեթե կարևոր է $y=f(x)$ ֆունկցիայի յերկրաչափական պատկերացումը, ապա նվազ կարևոր չէ նրա Δy աճման յերկրաչափական պատկերացումը։

Դիցուք տվյալ

$$y=f(x)$$

ֆունկցիան յերկրաչափորեն պատկերացվում է կորի տեսքով (գծ. 24)։

Դիցուք OX առանցքի P կետը պատկերացնում է արգումենտի սկզբնական արժեքը, այսինքն PO հատվածը հավասար է x-ի։ Այդ դեպքում կորի PM օրդինատը P կետում հավասար է քննվող ֆունկցիայի մեծությանն՝ արգումենտի այդ արժեքի համար։ Ուրեմն ունենք հետևյալ հավասարությունները.

$$x=OP,\quad y=f(x)=PM.$$

x-ին տանք Δx աճումը. այն ժամանակ արգումենտի նոր արժեքը կլինի $x+\Delta x$։ Յեթե P′ կետը յերկրաչափորեն պատկերացնում է արգումենտի այդ նոր արժեքը, ապա PP′ ուղղյալ հատվածը (P կետից դեպի P′ կետը) կպատկերացնի Δx աճումը. իսկ կորի P′M′ օրդինատը P′ կետում հավասար կլինի քննվող ֆունկցիայի մեծությանն՝ արգումենտի նոր արժեքի համար։ Ուրեմն ունենք հետևյալ հավասարությունները.

$$\Delta x=PP',\quad f(x+\Delta x)=P'M'.$$

Բայց ֆունկցիայի մեծությունը արգումենտի նոր արժեքի համար կլինի ֆունկցիայի նոր արժեքը, այսինքն հավասար է հին y-ին՝ գումարած Δy աճումը։ Ուրեմն

$$y+\Delta y=P'M'.$$

Այժմ M կետից տանելով OX առանցքի զուգահեռը՝ կստանանք PMQP′ ուղղանկյունը, վորի մեջ P′Q կողմը հավասար է y-ի։ Ուրեմն

Ֆունկցիայի Δy աճումը յերկրաչափորեն պատկերացվում է QM′ հատվածով։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Տված է

$$f(x)=x^3-10x^2+31x-30;$$

ցույց տալ վոր

$f(0)=-30 \qquad f(y)=y^3-10y^2+31y-30$

$f(2)=0 \qquad f(a)=a^3-10a^2+31a-30$

$f(3)=f(5) \qquad f(az)=a^3z^3-10a^2z^2+31az-30$

$f(1)>f(-3) \qquad f(x-2)=x^3-16x^2+83x-140$

$f(-1)=-6.f(6) \qquad f(x+h)=x^3+(3h-10)x^2+$

$+(3h^2-20h+31)x+h^3-10h^2+31h-30$

2. Տված է

$$F(x,y)=\frac{3x+y}{x^2-y};$$

Գտնել

$F(3,1)$; $F(2,0)$; $F(0,2)$; $F\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)$.

Պատ. $1\frac{1}{4}$; $1{,}5$; -1; $1\frac{1}{2}$.

3. Յեթե

$$\varphi(x)=x(x-1)(x+6)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{5}{4}\right),$$

ապա ցույց տալ։ որ

$$\varphi(0)=\varphi(1)=\varphi(-6)=\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\varphi\left(-\frac{5}{4}\right)=0.$$

4. Դնելով

$$f(x)=2x^6-x^4+7x^2-3,$$

ցույց տալ, որ $f(3)=f(-3)$ և ընդհանրապես $f(m)=f(-m)$.

5. $f(x)=x^2+3$. գտնել

$$f(x+1);\ f(x)+1;\ f(x^2);\ [f(x)]^2;\ f(2x);\ 2f(x)$$

Պատ. x^2+2x+4; x^2+4; x^4+3;

x^4+6x^2+9; $4x^2+3$; $2x^2+6$.

6. Միանհայտ հավասարումը պատկերացվում է $f(x)=0$ տեսքով։

Ինչպես գրել, որ 3 և $-\frac{1}{2}$ թվերն այդ հավասարության արմատներն են։

Պատ. $f(3)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

7. $$\Psi(x)=x^3+\frac{1}{x^3}-3x-\frac{3}{x};$$

Ցույց տալ, որ

$$\Psi\left(\frac{1}{x}\right)=\Psi(x).$$

8. $$\Phi(y)=\frac{y-1}{y+1};$$

Ցույց տալ, որ

$$\frac{\Phi(y_1)-\Phi(y_2)}{1+\Phi(y_1)\Phi(y_2)}=\frac{y_1-y_2}{1+y_1y_2}.$$

9. $f(\varphi)=\cos\varphi$; ցույց տալ, որ

$$f(\varphi)=f(-\varphi)=-f(\pi-\varphi)=-f(\pi+\varphi).$$

10. Տրված է

$$F(\theta)=\operatorname{tg}\theta;$$

ցույց տալ, որ

$$F(2\theta)=\frac{2F(\theta)}{1-[F(\theta)]^2}.$$

11. Տրված է

$$\varphi(x)=\lg\frac{1-x}{1+x};$$

ցույց տալ, որ

$$\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

12. $f(x)=x!$; գտնել

$$f(2);\ f(5);\ f(6).$$

Պատ. 2; 120; 720.

Դիտողություն. $x!=1.2.3.4\ldots x$ սիմվոլի իմաստի համաձայն x արգումենտը կարող է ստանալ միայն ամբողջ արժեքներ։

13. Որոշել հետևյալ ֆունկցիաների գոյության տիրույթը.

a) $\sqrt{2+x}+\sqrt[4]{5-x}$. Պատ. $-2\leqq x\leqq 5$

b) $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-2}}$. Պատ. ֆունկցիան իմաստ ունի x-ի բոլոր վերջավոր արժեքների համար, որոնք փոքր չեն 2-ից՝

$$2\leqslant x<+\infty.$$

c) $\sqrt[3]{m-x}+\sqrt[5]{x-n}$. Պատ. ֆունկցիան իմաստ ունի x-ի ամեն մի վերջավոր արժեքի համար՝ $-\infty<x<+\infty$.

d) $\arcsin x\cdot e^{-x}$ Պատ. $-1\leqslant x\leqslant +1$.

e) $\dfrac{a+x}{a-x}$. Պատ. ֆունկցիան իմաստ ունի x-ի բոլոր արժեքների համար, որոնք տարբեր են a-ից։

14. Գտնել հակադարձ ֆունկցիաները հետևյալ ֆունկցիաների համար.

a) $4x - 3$ Պատ. $\frac{x+3}{4}$.

b) $\frac{a+bx}{c}$, Պատ. $\frac{cx-a}{b}$.

c) $\cos^2 x$. Պատ. $\arccos\sqrt{x}$.

15. Ցույց տալ, որ եթե

$$f(x) = \sqrt[n]{a - x^n},$$

ապա $$f[f(x)] = x.$$

Գտնել այս ֆունկցիայի համար հակադարձ ֆունկցիան։

16. Գտնել

$$\varphi(x) = x^2 + 2x - 4$$

ֆունկցիայի աճումը, երբ արգումենտը $x = 2$ արժեքից անցնում է $x = 4$ արժեքին։

Պատ. $\Delta\varphi(x) = 16$.

17. Տված է $y = x^2$ ֆունկցիան։ Լցնել դատարկ տեղերը հետևյալ աղյուսակի մեջ։

x-ի սկզբնական արժեքը	x-ի աճած արժեքը	Δx	y-ի սկզբնական արժեքը	y-ի աճած արժեքը	Δy
4	6	2	16	36	20
4	5	1	16	25	9
4	4,5	0.5	16,00	20.25	—
4	4,4	—	—	—	—
4	4,3	—	—	—	—
4	4,2	—	—	—	—
4	4,1	—	—	—	—
4	4,01	—	—	—	—