Հ. Ս. Խ. Հ. ԼՈՒՍԺՈՂԿՈՄԱՏ
ՍՈՑ. ԴԱՍՏԻԱՐԱԿՈՒԹՅԱՆ ԳԼԽԱՎՈՐ ՎԱՐՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԴՊՐՈՑԻ ՁԵՌՆԱՐԿՆԵՐ

Մ. Ֆ. ԲԵՐԳ, Մ. Ա. ՁՆԱՄԵՆՍԿԻՅ, Գ. Ն. ՊՈՊՈՎ, Ի. Ֆ. ՍԼՈՒԴՍԿԻՅ,
Ն. Պ. ԽՎՈՍՏՈՎ, Ն. Ի. ՃՁԵՏԻՆԻՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԳԻՐՔ

ԱՇԽԱՏԱՆՔԱՅԻՆ ԴՊՐՈՑՆԵՐԻ ԻՆՆԵՐՈՐԴ ԽՄԲԱԿԻ, ՏԵԽՆԻԿՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ
ԲԱՆՖԱԿՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Փոխադրեցին Ս. ՍԱՂԻՐԵԴՅԱՆ
Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՊԵՏԱԿԱՆ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ № 1035
ՅԵՐԵՎԱՆ—1929

Հ. Ս. Խ. Հ. ԼՈՒՍԺՈՂԿՈՄԱՏ
ՍՈՑ. ԴԱՍՏԻԱՐԱԿՈՒԹՅԱՆ ԳԼԽԱՎՈՐ ՎԱՐՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԴՊՐՈՑԻ ՁԵՌՆԱՐԿՆԵՐ

Մ. Ֆ. ԲԵՐԳ, Մ. Ա. ԶՆԱՄԵՆՍԿԻՅ, Գ. Ն. ՊՈՊՈՎ, Ի. Ֆ. ՍԼՈՒԴՍԿԻՅ,
Ն. Պ. ԽՎՈՍՏՈՎ, Ն. Ի. ՇՉԵՏԻՆԻՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԳԻՐՔ

ԱՇԽԱՏԱՆՔԱՅԻՆ ԴՊՐՈՑՆԵՐԻ ԻՆՆԵՐՈՐԴ ԽՄԲԻ, ՏԵԽՆԻԿՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ ԲԱՆՖԱԿՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Փոխադրեցին Ս. ՍԱԼԻԲԵԿՅԱՆ
Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՊԵՏԱԿԱՆ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ № 1035
ԵՐԵՎԱՆ – 1929

ԳԼՈՒԽ I

ՊՐՈԳՐԵՍԻԱՆԵՐ

§ 1. ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ ՊՐՈԳՐԵՍԻԱ

ԽՆԴԻՐ. *Պայմանավորվեցին հոր փորող բանվորին առաջին մետր խորության համար վճարել 1 ռուբ. 20 կոպ., յերկրորդի համար՝ 1 ռուբ. 50 կոպ. և այդպես յուրաքանչյուր հետևյալ մետրի համար ավելացնել վարձը 30 կոպեկով։ Վորքան վճարեցին բանվորին, յեթե նա հորը փորեց 10 մետր խորությամբ։*

Այս խնդիրը լուծելու համար պետք է գտնել հետևյալ թվերի գումարը.

$$120+150+180+210+240+270+300+330+360+390$$

Սովորական գումարում կատարելու փոխարեն, գտնենք այդ թվերի գումարն ավելի կարճ ձևով։

Նշանակենք վորոնվող գումարը S *տառով և դասավորենք այդ թվերը հետևյալ յերկու շարքով.*

$$S=120+150+180+210+240+270+300+330+360+390$$

$$S=390+360+330+300+270+240+210+180+150+120$$

Յերկրորդ շարքի թվերն առաջին շարքի նույն գումարելիներն են, վերցրած հակառակ կարգով, վորից, ինարկե, գումարը չի փոխվի։ Այժմ գումարելով իրար տակ գտնվող թվերը, կստանանք.

$$2S=510+510+510+510+510+510+510+510+510+510$$

այսինքն

$$2S=510.10=5100$$

հետևապես

$$S=\frac{5100}{2}=2550$$

Այդպես ուրեմն ամբողջ աշխատանքի համար վճարեցին 25 ռուբլի 50 կոպեկ։

Այս խնդրի մեջ մենք գործ ունեցանք միևնույն թվով հաջորդաբար աճող մի շարք թվերի հետ։ Թվերի այդպիսի շարքը կոչվում է պրոգրեսիա (առաջացվություն):

Թվաբանական կամ տարբերական պրոգրեսիա կոչվում է թվերի այն շարքը, վորի մեջ յուրաքանչյուր հաջորդ թիվ ստացվում է իր նախորդից, ավելացնելով նրան այդ շարքի համար մի կայուն թիվ, վորը կոչվում է պրոգրեսիայի տարբերություն:

Այն թվերը, վորոնք կազմում են պրոգրեսիա, կոչվում են պրոգրեսիայի անդամներ:

Պրոգրեսիան կոչվում է աճող, *յեթե նրա տարբերությունը* դրական թիվ է, *վորովհետև սկսած առաջինից նրա անդամները հետզհետե ընդունում* են աճող թվային արժեքներ։ Պրոգրեսիան կոչվում է նվազող, յեթե նրա տարբերությունը բացասական թիվ է, վորովհետև այդ դեպքում անդամնե֊րի թվային արժեքը, սկսած առաջինից, հետզհետե նվազում են։

Որինակ, կենտ թվերի հետևյալ շարքը

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13\ldots$$

հանդիսանում է աճող պրոգրեսիա, վորի տարբերությունն է՝ $+2$.

Թվերի հետևյալ շարքը

$$25,\ 20,\ 15,\ 10,\ 5,\ 0,\ -5,\ -10\ldots$$

հանդիսանում է նվազող պրոգրեսիա, վորի տարբերությունն է -5

Թվաբանական պրոգրեսիան նշանակում են հետևյալ նշանով $\div$, վորն ընդունված է դնել շարքի առաջին անդամի առաջ, որինակ

$$\div 13,\ 10,\ 7,\ 4,\ 1,\ -2,\ -5\ldots$$

Վորովհետև պրոգրեսիայի յուրաքանչյուր անդամը շարքի մեջ ունի իր վորոշ տեղը, ապա հարմարության համար նրա անդամները կարելի յե նշանակել միևնույն տառով, որինակ. a-ով, ըստ կարգի համարագրելով բոլոր անդամները, սկսած առաջինից ցուցիչների կամ ինդեկսների ոգնությամբ, վորոնք գրվում են a տառի ներքևում աջ կողմից.

$$\div a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ldots a_n$$

Այդ նշանակում է, վոր տված է n անդամ պարունակող թվաբանական պրոգրեսիա, վորտեղ n-ը կարող է լինել վորև է ամբողջ թիվ։ Պրոգրեսիայի տարբերությունն ընդունված է նշանակել d տառով։

§ 2. ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ ՊՐՈԳՐԵՍԻԱՅԻ ՎՈՐԵՎԵ ԱՆԴԱՄԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

Պրոգրեսիայի վորոշման համաձայն կարելի յե գրել

$$a_2=a_1+d$$
$$a_3=a_2+d=a_1+2d$$
$$a_4=a_3+d=a_1+3d$$
$$a_5=a_4+d=a_1+4d$$

Վերը բերած հավասարություններից դժվար չէ նկատել պրոգրեսիայի հաջորդական անդամների կազմելու որինականությունը՝ կախված նրա առաջին անդամից և տարբերությունից։ Պրոգրեսիայի n րդ անդամի ընդհանուր արտահայտությունը գտնելու համար գրենք $n-1$ հավասարություն.

$$a_2=a_1+d$$
$$a_3=a_2+d$$
$$a_4=a_3+d$$
$$\ldots\ldots$$
$$a_{n-1}=a_{n-2}+d$$
$$a_n=a_{n-1}+d$$

Գումարելով այդ հավասարություններն ըստ համապատասխան մասերի, ձախ մասում կստանանք բոլոր անդամները, բացի առաջինից, իսկ աջ մասում՝ բոլոր անդամները, բացի վերջինից, և d տարբերությունը կրկնած վորպես գումարելի $n-1$ անգամ (հավասարությունների թիվը)։ Այդ դեպքում ստացված հավասարության յերկու մասերում կկրճատվեն բոլոր անդամները, սկսած յերկրորդից մինչև նախավերջինը, վորից հետո կստանանք.

$$a_n=a_1+d(n-1)\ \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

այսինքն, թվաբանական պրոգրեսիայի n-րդ անդամը հավասար է նրա առաջին անդամին՝ գումարած պրոգրեսիայի տարբերության յեվ վորոնելի նախընթաց բոլոր անդամների թվի արտադրյալը:

Որինակ. հետևյալ պրոգրեսիայում

$$\div 3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23\ldots$$

$$a_1=3 \qquad d=4$$

Գտնենք ութերորդ անդամը (այսինքն $n=8$).

(1) *ֆորմուլի հիման վրա, կստանանք* $a_8=3+4(8-1)=31$

Մի ուրիշ որինակ. գտնենք հետևյալ պրոգրեսիայի 10-*րդ անդամը.*

$$\div 21,\ 18,\ 15,\ 12,\ 9,\ 6\ldots$$

այստեղ $a_1=21 \qquad d=-3 \qquad n=10$

հետևապես $a_{10}=21-3(10-1)=-6$

Յեթե պրոգրեսիան ունի n *անդամ, ապա* a_n *-ը կոչվում է այդ պրոգրեսիայի վերջին անդամ.*

§ 3. ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ ՊՐՈԳՐԵՍԻԱՅԻ ԾԱՅՐ ԱՆԴԱՄՆԵՐԻՑ ՀԱՎԱՍԱՐԱՊԵՍ ՀԵՌԱՑՎԱԾ ԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Յենթադրենք տված է հետևյալ աճող պրոգրեսիան.

$$\div a_1,\ a_2,\ .\ .\ .\ a_h,\ .\ \ .\ a_k,\ .\ .\ .\ a_{n-1},\ a_n\ (d>0)$$

վորտեղ a_h *և* a_k *անդամները հավասարապես են հեռացված նույն շարքի ծայր անդամներից.* a_h *-ը՝ սկզբի, իսկ* a_k *-ն՝ վերջի ծայրանդամից.*

Արտագրենք այդ պրոգրեսիան հակառակ կարգով այնպես, վոր նրա առաջին անդամը դառնա վ րջին, իսկ վերջինն՝ առաջին.

$$\div a_n,\ a_{n-1}\ .\ .\ .\ a_k,\ .\ .\ .\ a_h,\ .\ .\ .\ a_2,\ a_1$$

Ակներև է, վոր նոր պրոգրեսիան նվազող է, այսինքն նրա տարբերությունը հավասար է $-d$*-ի.*

Առաջին պրոգրեսիայից կստանանք

$$a_h = a_1+d\,(h-1)$$

Յերկրորդ պրոգրեսիայից՝

$$a_k = a_n - d\,(h-1)$$

Գումարելով վերջին յերկու հավասարությունները ըստ համապատասխան մասերի, կստանանք

$$a_h + a_k = a_1 + a_n \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

այսինքն, թվաբանական պրոգրեսիայի ծայրանդամներից հավասարապես հեռացված յերկու անդամների գումարը հավասար է առաջին յեվ վերջին անդամների գումարին:

Որինակ, հետևյալ պրոգրեսիայում.

$$\div 2,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18,\ 22,\ 26,\ 30,\ 34$$

գտնում ենք $2+34=36;\ 6+30=36;\ 10+26=36;$ *և այլն.*

§ 4. ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ ՊՐՈԳՐԵՍԻԱՅԻ ԲՈԼՈՐ ԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

Միացնելով պրոգրեսիայի բոլոր անդամները պլյուս նշանով, կստանանք այդ պրոգրեսիայի գումարը, *վորն ընդհանուր ձևով նշանակում են* S *տառով.*

Այժմ կազմենք թվաբանական պրոգրեսիայի բոլոր անդամների գումարի ֆորմուլը։ Դրա համար գործադրենք այն յեղանակը, վորի միջոցով գտանք թվաբանական պրոգրեսիայի անդամների գումարը § 1-ի խնդրում, այսինքն վերցնենք միևնույն պրոգրեսիայի հետևյալ յերկու շարքի գումարները.

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_h + \ldots + a_k + \ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$S = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_k + \ldots + a_h + \ldots + a_2 + a_1$$

Յերկրորդ շարքի թվերն առաջին շարքի նույն գումարելիներն են, վերցրած հակառակ կարգով։ Գումարելով այդ յերկու հավասարությունները ըստ համապատասխան մասերի և զույգ-զույգ վերցնելով իրար տակ գտնվող թվերը, կստանանք.

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_h + a_k) + \ldots + (a_k + a_h) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Փակագծերում գտնվող գումարելիների յուրաքանչյուր զույգը պրոգրեսիայի ծայրերից հավասարապես հեռացված անդամների գումարն է, վորը հավասար է $a_1 + a_n$ *(տես § 3), իսկ այդպիսի զույգերի թիվը հավասար է* n*-ի, հետևապես*

$$2S = (a_1 + a_n) \cdot n$$

վորտեղից

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \ldots\ldots\ldots (3)$$

այսինքն. թվաբանական պրոգրեսիայի բոլոր անդամների գումարը հավասար է առաջին յեվ վերջին անդամների կիսագումարին բազմապատկած բոլոր անդամների թվով։

Որինակ, վերցնենք բնական թվերի շարքը կազմող հետևյալ պրոգրեսիան.

$$\div\ 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots 27$$

այստեղ $a_1 = 1$; $a_{27} = 27$; $n = 27$;

Գտնենք բոլոր անդամների գումարը։ (3) ֆորմուլի հիման վրա կստանանք.

$$S = \frac{(1+27) \cdot 27}{2} = 378$$

Նույն ձևով § 1-ի խնդրում S *գումարի համար կստանանք.*

$$S = \frac{(120+390) \cdot 10}{2} = 2550$$

Այսպես ուրեմն (1) և (3) ֆորմուլներով հեշտությամբ կարելի յե վորոշել թվաբանական պրոգրեսիայի թե վերջին անդամը և թե նրա բոլոր անդամների գումարը, մինչդեռ այդ մեծությունների անմիջական հաշվելը և բարդ կլիներ, և ահագին ժամանակ կպահանջեր։

Պրոգրեսիան զանազան դեպքերում վորոշվում է հետևյալ հինգ քանակությունների արժեքներով. a_1, a_n, d, n *և* S

Դրանց մեջ յեղած կապը ցույց է տրվում հետևյալ յերկու փոխհարաբերությամբ [(1) և (3) ֆորմուլներով].

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$
$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Ծանոթություն.—*Տեղադրելով* a_n *-ի փոխարեն* $a_1 + d(n - 1)$ *արտահայտությունը՝ կարող ենք այդ ֆորմուլին տալ հետևյալ ձևը.*

$$S = \frac{[2a_1 + d(n-1)]n}{2}$$

Թվաբանական պրոգրեսիային վերաբերյալ բոլոր խնդիրները լուծվում են, երբ վերը մատնանշված հինգ քանակություններից տրվում են երեքը, *վորոնցով մնացած երկուսը գտնում են (1) և (3) ֆորմուլներով, այսինքն լուծումը բերվում է երկու անհայտով երկու հավասարումներից կազմված սիստեմի արմատների վորոնմանը։ Այստեղ կարող են տեղի ունենալ հետևյալ տասը զանազան դեպքերը.*

Տվյալներ	*Անհայտներ*
1. a_1, d, n	a_n, S
2. a_n, d, n	a_1, S
3. a_1, a_n, n	d, S
4. a_1, a_n, d	n, S
5. n, d, S	a_1, a_n
6. n, a_n, S	a_1, d
7. n, a_1, S	a_n, d
8. a_n, d, S	a_1, n
9. a_1, d, S	a_n, n
10. a_1, a_n, S	d, n

Այդ դեպքերից միայն 8-րդը և 9-րդը բերում են քառակուսի հավասարման, իսկ մնացածները լուծվում են առաջին աստիճանի հավասարումներով։

Լուծենք մի քանի խնդիրներ.

1. *Գտնել բնական առաջին հարյուր թվերի գումարը։ Այստեղ* $a_1 = 1$; $a_{100} = 100$; $n = 100$; *հետևապես*

$$S = \frac{(1+100) \cdot 100}{2} = 5050$$

2. *Գտնել հետևյալ շարքի առաջին* n *կենտ թվերի գումարը.*

$$\div\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\ .\ .\ .$$

Վորովհետև n*-րդ զույգ թիվը կլինի* 2n, *ապա նրա նախորդ* $2n - 1$ *թիվը կլինի* n*-րդ կենտ թիվը, հետևապես*

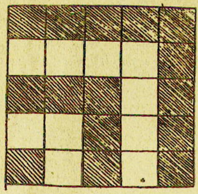
$$S = \frac{(1+2n-1) \cdot n}{2} = n^2$$

այսինքն. առաջին n կենտ թվերի գումարը հավասար է այդ թվերի թվի քառակուսուն:

Որինակ. $1 + 3 = 4 = 2^2$; $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$; $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$ *և այլն։*

Կենտ թվերի գումարի այդ հատկությունը պարզ արտահայտում է գծանկար 1-ը, վորը կազմված է այսպես. ներքևի ձախ անկյան քառակուսուն կցված են 3 նույնպիսի քառակուսիներ (1 վերևից, 1 կողքից և 1 վերևի անկյունում). այդ քառակուսիներին կցված են նաև 5 նույնպիսի քառակուսիներ (2 վերևից, 2 կողքից և 1 վերևի աջ անկյունում)։ Դրանց՝ նույն ձևով կցված են 7 քառակուսիներ, այնուհետև 9 քառակուսիներ և այլն։ Այժմ ակներև է, վոր $1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$, $1+3+5+7=4^2$, $1+3+5+7+9=5^2$ *և այլն։*

3. Տված 5 և 32 թվերի միջև դասավորել 8 միջին թվաբանականները։ Այսինքն պահանջվում է կազմել մի թվաբանական պրոգրեսիա, որը ունենա 10 անդամ (2 տվածը և 8 պահանջելիքը) և որի առաջին անդամը լինի 5, իսկ վերջին անդամը՝ 32։



Գծ. 1

Այստեղ $a_1=5$; $a_{10}=32$; $n=10$, հետևապես պրոգրեսիան կազմելու համար բավական է գտնել նրա տարբերությունը՝ d-ն։

Իսկ մենք գիտենք (§ 2), որ

$a_n = a_1 + d(n-1)$, որտեղից $d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$

Տեղադրելով խնդրի տվյալները, կստանանք.

$$d = \frac{32-5}{10-1} = \frac{27}{9} = 3$$

հետևապես, որոնելի պրոգրեսիան կլինի.

÷ 5, ,8 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32

4. Գտնել այն պրոգրեսիան, որի $d = 6$; $n = 10$ և $S = 340$

Ըստ § 4-ի ծանոթության ֆորմուլի, կստանանք.

$$340 = \frac{(2a_1+6\cdot 9)10}{2}$$

կամ

$$68 = 2a_1 + 54$$

որտեղից

$$a_1 = 7$$

Իսկ պրոգրեսիան կլինի. ÷ 7, 13, 19, 25 . . .

5. Թվաբանական պրոգրեսիայի չորրորդ և տասերորդ անդամների գումարը հավասար է 44-ի, իսկ երկրորդի և տասնհինգերորդի գումարը հավասար է 53-ի։ Գտնել այդ պրոգրեսիան։

Ըստ պայմանի

$$a_4 + a_{10} = 44; \quad a_3 + a_{15} = 53$$

իսկ

$$a_4 = a_1 + 3d; \quad a_{10} = a_1 + 9d; \quad a_2 = a_1 + d; \quad a_{15} = a_1 + 14d;$$

հետևապես

$$2a_1 + 12d = 44$$
$$2a_1 + 15d = 53$$

Հանելով այս հավասարումներից մեկը մյուսից, կստանանք $3d=9$; հետևապես՝ $d=3$, իսկ $2a_1=44-12d=44-36=8$, այսինքն $a_1=4$

Պրոգրեսիան կլինի. ÷ 4, 7, 10, 13 . . .

6. Գտնել պրոգրեսիայի անդամների թիվը, եթե նրա $a_1=7$; $d=-2$ և $S=12$

Տեղադրելով ֆորմուլներում խնդրի տվյալները, կստանանք

$$a_n = 7 - 2(n-1) = 9 - 2n; \quad 12 = \frac{(7 + a_n)n}{2}$$

որտեղից

$$12 = \frac{(7+9-2n)n}{2} = (8-n)n$$

կամ

$$n^2-8n+12=0; \quad n=4\pm\sqrt{16-12} = 4\pm 2$$
$$n_1 = 6; \qquad n_2 = 2$$

Ստացանք յերկու պատասխան. պրոգրեսիայի անդամների թիվը կամ 6 և կամ 2։ Հիրավի, 7. 5. 3, 1, —1, —3 և 7, 5 յերկու պրոգրեսիաներից յուրաքանչյուրի անդամների գումարը հավասար է 12 ի։

7. Գտնել այն պրոգրեսիան, վորի $d = 3$; $a_n = 29$ և $S = 155$

Նախ գտնենք առաջին անդամի արտահայտությունը.

$$29 = a_1 + 3(n - 1)$$

հետևապես

$$a_1 = 29 - 3n + 3 = 32 - 3n$$

(3) ֆորմուլի հիման վրա

$$155 = \frac{(32 - 3n + 29)n}{2}$$

վորտեղից

$$310 = 61n - 3n^2$$

կամ

$$3n^2 - 61n + 310 = 0$$

Այս քառակուսի հավասարումը n-ի նկատմամբ տալիս է յերկու արժեք.

$$n_1 = \frac{1}{3}; \quad n_2 = 10$$

Յերկու արմատն էլ բավարարում են հավասարմանը, իսկ n-ը խնդրի իմաստով կարող է լինել միայն ամբողջ թիվ (պրոգրեսիայի անդամների թիվը), հետևապես պիտանի յե միայն $n_2=10$ արմատը։

Իսկ յեթե $n=10$, ապա

$$a_1=32-3 \cdot 10=2$$

հետևապես պրոգրեսիան կլինի ÷2, 5, 8 . . .

§ 5. ԲՆԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐԻ ՖՈՐՄՈՒԼԸ

Մաթեմատիկական մի քանի հարցերում կարևոր է լինում ոգտվել վոչ միայն բնական թվերի գումարի ֆորմուլով, այլ և այդ թվերի քառակուսիների գումարի ֆորմուլով։ Այդ ֆորմուլը կարելի յե հանել հետևյալ ձևով։ Վերցնենք n հետևյալ թվային նույնությունները

$$2^3=(1+1)^3=1^3+3 \cdot 1^2 \cdot 1+3 \cdot 1 \cdot 1^2+1^3$$
$$3^3=(2+1)^3=2^3+3 \cdot 2^2 \cdot 1+3 \cdot 2 \cdot 1^2+1^3$$
$$4^3=(3+1)^3=3^3+3 \cdot 3^2 \cdot 1+3 \cdot 3 \cdot 1^2+1^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n+1)^3=n^3+3n^2 \cdot 1+3n \cdot 1^2+1^3$$

Գումարենք այդ բոլոր նույնությունները։ Այդ դեպքում առաջին հավասարության ձախ մասում գտնվող 2^3-ը և յերկրորդ հավասարության աջ մասում գտնվող 2^3-ն իրար կվոչնչացնեն. Նմանապես յերկրորդ հավասարության ձախ մասի 3^3-ը և յերրորդ հավասարության աջ մասի 3^3-ն իրար կը-վոչնչացնեն, և այլն։ Այդ վոչնչացումներից հետո կստանանք

$$(n+1)^3=1+3(1^2+2^2+3^2 \ldots +n^2)+3(1+2+3 \ldots +n)+n$$

Համառոտելու նպատակով նշանակենք

$$1+2+3+ \ldots +n=S_1$$
$$1^2+2^2+3^2+ \ldots +n^2=S_2$$

կունենանք

$$(n+1)^3=1+3S_2+3S_1+n$$

վորտեղից

$$S_2=\frac{(n+1)^3-1-n}{3}-S_1=\frac{n^3+3n^2+2n}{3}-S_1$$

Իսկ

$$n^3+3n^2+2n=n^3+2n^2+n^2+2n=n^2(n+2)+n(n+2)=(n+2)(n^2+n)=$$
$$=n(n+1)(n+2)$$

Հետևապես

$$S_2=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-S_1$$

Բայց

$$S_1=\frac{n(n+1)}{2},\text{ ուրեմն } n(n+1)=2S_1$$

Այդ պատճառով

$$S_2=\frac{2S_1(n+2)}{3}-S_1=S_1\left[\frac{2(n+2)}{3}-1\right]=S_1\cdot\frac{2n+1}{3}$$

կամ

$$S_2=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{2n+1}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Օրինակ

$$1^2+2^2+3^2=\frac{3(3+1)(6+1)}{6}=14$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2=\frac{4(4+1)(8+1)}{6}=30 \text{ և այլն.}$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

I	1.	Տված է	$a_1=4;\ d=3;\ n=12;$	Գտնել	a_{12} և S.
	2.	»	$a_1=3;\ d=-4;\ n=10;$	»	a_{10} և S.
	3.	»	$a_1=7;\ d=5;\ n=8;$	»	a_8 և S.
	4.	»	$a_1=-2{,}5;\ d=0{,}5;\ n=15;$	»	a_{15} և S.
II	5.	»	$a_n=65;\ d=5;\ n=12;$	»	a_1 և S.
	6.	»	$a_n=25;\ d=4;\ n=18;$	»	a_1 և S.
	7.	»	$a_n=-15;\ d=-2;\ n=12;$	»	a_1 և S.
	8.	»	$a_n=-7{,}5;\ d=-0{,}5;\ n=16$	»	a_1 և S.
III	9.	»	$a_1=5;\ a_n=105;\ S=605;$	»	d և n.
	10.	»	$a_1=10;\ a_n=-9;\ S=10;$	»	d և n.
	11.	»	$a_1=0,\ a_n=-32;\ S=-144;$	»	d և n.
	12.	»	$a_1=30;\ a_n=150;\ S=1890;$	»	d և n.
IV	13.	»	$a_1=4;\ a_9=60;\ n=9;$	»	d և S.
	14.	»	$a_1=-10;\ a_{11}=40;\ n=11;$	»	d և S.
	15.	»	$a_1=15;\ a_{16}=-30;\ n=16;$	»	d և S.
	16.	»	$a_1=-8{,}5;\ a_{21}=-63{,}$[illegible]$;\ n=21;$	»	d և S.
V	17.	»	$a_1=10;\ n=14;\ S=1050;$	»	a_n և d.
	18.	»	$a_1=48;\ n=33;\ S=528;$	»	a_n և d.
	19.	»	$a_1=-45;\ n=31;\ S=0;$	»	a_n և d.
	20.	»	$a_1=-2;\ n=15;\ S=-240;$	»	a_n և d.

VI 21. » $a_n = 105$; $n=16$; $S=840$; » a_1 և d.
22. » $a_n = -25$; $n=16$; $S=30$; » a_1 և d.
23. » $a_n = 1$; $n=12$; $S=-318$; » a_1 և d.
24. » $a_n = -30$; $n=21$; $S=0$; » a_1 և d.
VII 25. » $a_1=21$; $d=5$; $a_n = 91$; » n և S.
26. » $a_1=12$; $d=-2$; $a_n = -30$; » n և S.
27. » $a_1=14{,}5$; $d=0{,}7$; $a_n = 32$; » n և S.
28. » $a_1=-5$; $d=-2$; $a_n = -55$; » n և S.
VIII 29. » $d=3$; $n=17$; $S=340$; » a_1 և a_n.
30. » $d=-2{,}5$; $n=35$; $S=350$; » a_1 և a_n.
31. » $d=1/_3$; $n=50$; $S=425$; » a_1 և a_n.
32. » $d=1/_2$; $n=25$; $S=-75$; » a_1 և a_n.
IX 33. » $a_1=2$; $d=3$; $S=330$; » a_n և n.
34. » $a_1=40$; $d=-4$; $S=180$; » a_n և n.
35. » $a_1=-17$; $d=1{,}5$; $S=25$; » a_n և n.
36. » $a_1=-52$; $d=5$; $S=-288$; » a_n և n.
X 37. » $a_n = 77$; $d=5$; $S=623$; » a_1 և n.
38. » $a_n = -4$; $d=-2$; $S=150$; » a_1 և n.
39. » $a_n = 0$; $d=-3$; $S=570$, » a_1 և n.
40. » $a_n = -41$; $d=-2^1/_2$; $S=-279$; » a_1 և n.

41. *Գտնել բոլոր յերկանիշ թվերի գումարը։*

42. *Գտնել բոլոր յեռանիշ թվերի գումարը։*

43. *Գտնել 7-ին բազմապատիկ առաջին 13 թվերի գումարը; 5-ին բազմապատիկ առաջին 24 թվերի գումարը։*

44. *Պրոգրեսիայի առաջին յերեք անդամների գումարը հավասար է 21-ի, իսկ հետևյալ յերեքի գումարը՝ 48-ի։ Գտնել այդ պրոգրեսիան։*

45. *Պրոգրեսիայի առաջին յերեք անդամների գումարը հավասար է 18-ի, իսկ նրանց արտադրյալը հավասար է 120-ի։ Գտնել այդ պրոգրեսիան։*

46. *Գտնել այն պրոգրեսիան, վորի չորրորդ և յոթերորդ անդամների գումարը հավասար է 50 ի, իսկ հինգերորդի և տասմեկերորդի գումարը՝ 70-ի։*

47. *Գտնել այն պրոգրեսիան, վորի յերրորդ և հինգերորդ անդամների գումարը հավասար է 50-ի, իսկ յերկրորդ և ութերորդ անդամների արտադրյալը հավասար է 627-ի։*

48. *Տված 17 և 82 թվերի միջև դասավորել 12 միջին թվաբանականներն այնպես, վոր վորոնելի թվերը տված թվերի հետ կազմեն թվաբանական պրոգրեսիա։*

49. *Տված 7 և 92 թվերի միջև դասավորել 16 միջին թվաբանականներն այնպես, վոր վորոնելի թվերը տված թվերի հետ կազմեն թվաբանական պրոգրեսիա։*

50. *Գտնել այն պրոգրեսիան, վորի առաջին յերեք անդամների գումարը հավասար է 51-ի, իսկ այդ անդամների քառակուսիների գումարը հավասար է 965-ի։*

51. *Գտնել այն պրոգրեսիան, վորի առաջին յերեք անդամների գումարը հավասար է 0-ի, իսկ այդ անդամների քառակուսիների գումարը հավասար է 50-ի։*

52. Պայմանավորվեցին հոր փորող բանվորին առաջին մետր խորության համար վճարել 90 կոպ., յերկրորդի համար՝ 1 ռուբ. 20 կոպ. և այդպես յուրաքանչյուր հետևյալ մետրի համար ավելացնել վարձը 30 կոպեկով։ Վո՞րքան վճարեցին բանվորին, յեթե նա փորեց 14 m խորության հոր։

53. Պայմանավորվեցին հոր փորող բանվորներին առաջին մետր խորության համար վճարել 80 կոպ., յերկրորդի համար՝ 1 ռուբլի և այդպես յուրաքանչյուր հետևյալ մետրի համար ավելացնել վարձը 20 կոպեկով։ Ի՞նչ խորության հոր փորեցին բանվորները, յեթե ընդամենը ստացան 33 ռուբլի։

54. Վորևէ բարձրությունից ազատ ընկնող մարմինն առաջին վայրկյանում անցնում է 4,9 m, իսկ յուրաքանչյուր հետևյալ վայրկյանում՝ 9,8 m-ով ավելի։ Ի՞նչպիսի բարձրությունից ընկավ մարմինը, յեթե ընկնումը տևեց 10 վայրկյան։

55. Հայտնի յե, վոր ազատ ընկնող մարմինն առաջին վայրկյանում անցնում է 4,9m, իսկ յուրաքանչյուր հետևյալ վայրկյանում 9,8m-ով ավելի։ Ի՞նչքան ժամանակից հետո գետնին կընկնի մարմինը 300 m բարձրությունից։

56. Պայմանավորեցին 720 ռուբլի պարտքը վճարել մաս-մաս, մտցնելով յուրաքանչյուր հաջորդ ամիս 10 ռուբլիով պակաս նախորդից։ Վո՞րքան վճարեցին առաջին ամիսը և վո՞րքան ժամանակում վերջացրին այդ պարտքը, յեթե վերջին ամիսը վճարեցին 40 ռուբ.։

57. Պայմանավորվեցին 1995 ռուբլի պարտքը վճարել մաս-մաս, մտցնելով յուրաքանչյուր հաջորդ ամիս 5 ռուբլիով ավելի նախորդից։ Վո՞րքան վճարեցին առաջին ամիսը և վո՞րքան ժամանակում վերջացրին այդ պարտքը, յեթե վերջին ամիսը վճարեցին 150 ռուբ.։

58. Բազմանկյան ներքին հաջորդական անկյունների աստիճանների թվերը կազմում են մի պրոգրեսիա, վորի տարբերությունն է 5։ Այդ բազմանկյան ամենափոքր անկյունն է 120°։ Գտնել բազմանկյան կողմերը։

59. Վո՞րքան վայրկյանում և ի՞նչ բարձրության կթռչի ուղղաձիգ արձակած փամփուշտը, յեթե նրա սկզբնական արագությունն է $500\frac{\text{m}}{\text{վայրկ.}}$։

60. Յերկու մարմին գտնվելով իրարից 200 m հեռավորության վրա, շարժվում են իրար հանդեպ։ Առաջինը յուրաքանչյուր վայրկյանում անցնում է 12 m, իսկ յերկրորդն՝ առաջին վայրկյանում անցավ 20 m և յուրաքանչյուր հաջորդ վայրկյանում անցնում է 2 m-ով ավելի նախորդից։ Քանի՞ վայրկյանից հետո կհանդիպեն այդ մարմինները։

61. Յերկու մարմին դուրս գալով մի տեղից, շարժվում են միևնույն ուղղությամբ։ Առաջին մարմինն առաջին վայրկյանում անցնում է 1 m և յուրաքանչյուր հաջորդ վայրկյանում՝ 3 m-ով ավելի նախորդից։ Յերկրորդ մարմինը յերկու վայրկյանով առաջինից ուշ դուրս յեկավ և առաջին վայրկյանում անցավ 10 m, իսկ յուրաքանչյուր հաջորդ վայրկյանում՝ 2 m-ով ավելի նախորդից։ Քանի՞ վայրկյանից հետո յերկրորդ մարմինը կհասնի առաջինին։

62. Գտնել և ստուգել բնական շարքի առաջին 10 կենտ թվերի գումարը (վերհիշեք ֆորմուլը)։

63. Գտնել և ստուգել 20-ի և 50-ի միջև գտնվող բոլոր կենտ թվերի գումարը։

64. Գտնել բնական շարքի առաջին 10 թվերի քառակուսիների գումարը (վերհիշեք ֆորմուլը)։

65. Գտնել բնական շարքի 30 հաջորդական թվերի քառակուսիների գումարն՝ սկսած 5-ից։

66. Ի՞նչ մեծություն է հետևյալ ամբողջ թվերի քառակուսիների գումարը. 1) 4^2-ից մինչև 10^2-ը, 2) 10^2-ից մինչև 25^2-ը, 3) 8^2-ից մինչև 15^2-ը։

67. Գտեք հետևյալ շարքի առաջին 20 թվերի գումարը.

$$1-3+5-7+9- \ . \ . \ .$$

կազմեցեք այդ շարքի առաջին n անդամների գումարի ֆորմուլը հետևյալ յերկու դեպքի համար. յերբ n-ը զույգ թիվ է և յերբ n-ը կենտ թիվ է։

68. Թվաբանական պրոգրեսսիայի առաջին յերկու անդամներն են՝ a և b թվերը։ Կազմեցեք n-րդ անդամի համար և n անդամների գումարի համար արտահայտությունները։

69. Թվաբանական պրոգրեսսիայի յերեք իրար հաջորդող անդամներն են՝ a, b և c թվերը։ Ապացուցեք, վոր այդ անդամների մեջ տեղի ունի հետևյալ առընչությունը.

$$a^2+8bc-(2b+c)^2$$

70. Թվաբանական պրոգրեսսիայի առաջին, յերկրորդ և վերջին անդամներն են կազմում a, b և c թվերը։ Ապացուցեք, վոր այդ անդամների գումարը հավասար է

$$\frac{(a+c)(b+c-2a)}{2\ (b-a)}$$

§ 6. ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՊՐՈԳՐԵՍՍԻԱ

ԽՆԴԻՐ։ Ասում են, վոր հնդկական պրինց Սիրամը շախմատային խաղը հնարողին առաջարկել է՝ խնդրել իրանից այնպիսի նվեր, ինչպիսին վոր նա ցանկանում է։ Վիրջինս խնդրում է, վոր իրեն տան շախմատային տախտակի առաջին քառակուսու համար 1 ցորենի հատիկ, յերկրորդ քառակուսու համար՝ 2 հատիկ, յերրորդի համար՝ 4 և այլն, այդպես կրկնակի ավելացնելով յուրաքանչյուր հաջորդ քառակուսու համար մինչև վերջին քառակուսին։ Պրինցը համաձայնվում է. բայց յերբ հաշվում են շախմատային տախտակի 64 քառակուսու համար ստանալիք ցորենի քանակը, տեսնում են, վոր այդ նվերն անհնարին է տալ ցորենի պակասության պատճառով։ Վորքան ցորենի հատիկ եր հարկավոր խաղը հնարողին տալու համար։

Պահանջելիք ցորենի հատիկների քանակը 64 քառակուսու համար հավասար է հետևյալ շարքի թվերի S գումարին

$$S=1+2+2^2+2^3+ \ . \ . \ . +2^{62}+2^{63}$$

Այդ գումարը մենք կարող ենք գտնել այսպես. բազմապատկենք ստացած հավասարության մասերը 2-ով.

$$2S=2+2^2+2^3+2^4+ \ . \ . \ . \ 2^{63}+2^{64}$$

Այժմ հանելով այս հավասարությունից նախորդը, կստանանք.

$$S=2^{64}-1$$

Ուրեմն պետք է հաշվել 2^{64} աստիճանը, վորը կարելի յե գտնել կամ հաջորդական բազմապատկման միջոցով, այսպես

$$2^{64}=2.2.2.2 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (64 \text{ արտադրիչ})$$

կամ հետևյալ փորմուլով

$$2^{64}=[(2^{16})^2]^2=(65536^2)^2$$

հատիկների վերջնական թիվը կլինի

$$S=2^{64}-1=18.446.744.073.709.511.615$$

Կարելի յե հաշվել, վոր այդ քանակությամբ հատիկներ, յեթե միակերպ ցրելու լինեյին յերկրի ամբողջ ցամաքի վրա, ապա կստացվեր 9mm հաստությամբ ցորենի շերտ։

Այս խնդրում մենք գործ ունեցանք թվերի մի այնպիսի շարքի հետ, վորի մեջ յուրաքանչյուր թիվ, սկսած յերկրորդից, հավասար է իր նախորդ թվին՝ բազմապատկած միևնույն թվով։ Թվերի այդպիսի շարքը կոչվում է յերկրաչափական պրոգրեսիա (համաչափություն)։

Յերկրաչափական կամ բազմապատկական պրոգրեսիա կոչվում է թվերի այն շարքը, վորի մեջ յուրաքանչյուր հաջորդ թիվ ստացվում է իր նախորդից, բազմապատկելով այն այդ շարքի համար մի կայուն թվով, վորը կոչվում է պրոգրեսիայի հայտարար:

Այն թվերը, վորոնք կազմում են պրոգրեսիա, կոչվում են պրոգրեսիայի անդամներ:

Յեթե պրոգրեսիայի հայտարարն իր բացարձակ արժեքով մեծ է միավորից, *ապա պրոգրեսիան կոչվում է* աճող, *իսկ յեթե հայտարարը* փոքր է միավորից, *ապա պրոգրեսիան կոչվում է* նվազող։

Յերկրաչափական պրոգրեսիան նշանակում են $\div\div$ *նշանով, որինակ*

$$\div\div\ 1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243\ .\ .\ .$$

Այս պրոգրեսիան, վորի հայտարարը հավասար է 3-ի, յերկրաչափական աճող պրոգրեսիա յե, իսկ հետևյալ պրոգրեսիան

$$\div\div\ 64,\ 32,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2\ .\ .\ .$$

վորի հայտարարը հավասար է $\frac{1}{2}$ *-ի՝ կլինի նվազող պրոգրեսիա։*

Պրոգրեսիայի հայտարարը նշանակում են q *տառով, իսկ անդամները, նրանց թիվը և գումարը նշանակում են այնպես, ինչպես թվաբանական պրոգրեսիայի համար։*

§ 7. ՅԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՊՐՈԳՐԵՍԻԱՅԻ ՎՈՐԵՎԷ ԱՆԴԱՄԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

Համաձայն պրոգրեսիայի վորոշման.

$$a_2=a_1\cdot q$$
$$a^3=a_2\cdot q=a_1\cdot q^2$$
$$a^4=a^3\cdot q=a_1\cdot q^3 \text{ և այլն։}$$

Արդեն այդ հավասարություններից կարելի յե նկատել պրոգրեսիայի հաջորդական անդամների կազմելու օրինականությունը՝ կախված նրա առաջին անդամից և հայտարարից։ Պրոգրեսիայի n*-րդ անդամի ընդհանուր արտահայտությունը գտնելու համար գրենք* n—1 *հավասարություն.*

$$a_2=a_1q$$
$$a_3=a_2q$$
$$a_4=a_3q$$
$$.\ .\ .$$
$$a_{n-1}=a_{n-2}q$$
$$a_n=a_{n-1}q$$

և բազմապատկենք իրար համապատասխան մասերով։ Այդ դեպքում ձախ մասի արտադրյալում կունենանք, վորպես արտադրիչներ, բոլոր անդամները, բացի առաջինից, իսկ աջ մասում՝ բոլոր անդամները, բացի վերջինից և q-ն վորպես արտադրիչ $n-1$ անգամ։ Հավասարության յերկու մասերն էլ կարելի յե կրճատել հետևյալ արտադրյալով

$$a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}$$

վորից հետո ձախ մասում կմնա միայն a_n անդամը, իսկ աջ մասում՝ $a_1 \cdot q^{n-1}$ հետևապես

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

այսինքն. յերկրաչափական պրոգրեսիայի n-րդ անդամը հավասար է առաջին անդամին, բազմապատկած հայտարարի այն աստիճանով, վորի ցուցիչն է վորոնելի նախընթաց բոլոր անդամների թիվը։

Որինակ հետևյալ պրոգրեսիայում

$$\div\div 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64 \ldots$$

$$a_1=2 \qquad q=2$$

Գտնենք յոթերորդ անդամը (այսինքն $n=7$): (1) ֆորմուլի հիման վրա կստանանք

$$a_7=2 \cdot 2^{7-1}=2 \cdot 2^6=2^7=128$$

Մի ուրիշ որինակ. գտնենք հետևյալ պրոգրեսիայի 8-րդ անդամը

$$\div\div 2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162 \ldots$$

այստեղ

$$a_1=2; \quad q=3; \quad n=8$$

հետևապես

$$a_8=2 \cdot 3^{8-1}=2 \cdot 3^7=4374$$

§ 8. ՅԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՊՐՈԳՐԵՍՍԻԱՅԻ ԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

Պրոգրեսսիայի վորոշման համաձայն գրենք հետևյալ $n-1$ հավասարությունները

$$a_2=a_1q$$
$$a_3=a_2q$$
$$a_4=a_3q$$
$$\ldots\ldots$$
$$a_{n-1}=a_{n-2}q$$
$$a_n=a_{n-1}q$$

և գումարենք իրար ըստ համապատասխան մասերի։ Հավասարության ձախ մասում կստանանք բոլոր անդամների գումարը, բացի առաջինից, այսինքն $S-a_1$, իսկ աջ մասում, փակագծերից դուրս հանելով q-ն, վորպես արտադրիչ, փակագծերում կստանանք բոլոր անդամների գումարը, բացի վերջինից, այսինքն $q(S-a_n)$ հետևապես

$$S-a_1=q(S-a_n)$$

Ստացած հավասարությունից վորոշենք S-ի արժեքը.

$$S-a_1=q \cdot S-q \cdot a_n$$

վորտեղից

$$S-qS=a_1-q \cdot a_n$$

կամ

$$S(1-q)=a_1-a_n \cdot q$$

հետևապես

$$S=\frac{a_1-a_n q}{1-q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

կամ, բազմապատկելով հավասարության աջ մասի համարիչն ու հայտարարը (—1)-*ով, կստանանք*

$$S=\frac{a_n \cdot q-a_1}{q-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

այսինքն. յերկրաչափական պրոգրեսիայի անդամների գումարը հավասար է մի կոտորակի, վորի համարիչն է պրոգրեսիայի վերջին անդամի յեվ հայտարարի արտադրյալը մինուս առաջին անդամը, իսկ հայտարարն է պրոգրեսիայի հայտարարի յեվ մեկ միավորի տարբերությունը:

(2) *ֆորմուլով հարմար է հաշվել նվազող պրոգրեսիայի անդամների գումարը, իսկ* (3) *ֆորմուլով՝ աճող պրոգրեսիայի անդամների գումարը։*

Օրինակ, գտնենք հետևյալ պրոգրեսիայի 10 *անդամների գումարը*

÷÷ 3, 6, 12, 24, 48 . . . .

այստեղ

$$a_1=3;\ q=2;\ n=10;$$

հետևապես

$$a_{10}=a_1 \cdot q^9=3 \cdot 2^9=3 \cdot 512=1536$$

այդ դեպքում

$$S=\frac{1536 \cdot 2-3}{2-1}=3069$$

Նույն ձևով գտնում ենք հետևյալ պրոգրեսիայի 7 *անդամի գումարը*

÷÷ 128 64 32 16 . . . . $\left(q=\left(\frac{1}{2}\right)\right.$

$$S_7=\frac{a_1-a_7 \cdot q}{1-q}$$

իսկ

$$a_7=a_1 \cdot q^6=128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6=2$$

հետևապես

$$S_7=\frac{128-2 \cdot \frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{127}{\frac{1}{2}}=254$$

Ծանոթություն.— *Տեղադնելով* (1) *ֆորմուլից* a_n *-ի արժեքը* (2) *և* (3) *ֆորմուլների մեջ, յերկրաչափական պրոգրեսիայի անդամների գումարի համար կստանանք նաև հետևյալ արտահայտությունները.*

$$S=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

Այդ ֆորմուլներով հարմար է հաշվել անդամների գումարը, յերբ տված են a_1, q *և* n։

Վորովհետև a_1, a_n, q, n *և* S *հինգ քանակությունների համար ստացել ենք հետևյալ յերկու առընչությունները*

$$a_n=a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S=\frac{a_n q-a_1}{q-1}$$

ապա իմանալով վորևէ յերեք քանակությունները, կարող ենք գտնել մնացած յերկուսը, կազմելով յերկու անհայտով յերկու հավասարումների սիստեմ։

Այստեղ ևս կարող են լինել, ինչպես և թվաբանական պրոգրեսիայի համար, հետևյալ տասը զանազան դեպքերը.

Տվյալներ	Անհայտներ
1. a_1, q, n	a_n, S
2. a_n, q, n	a_1, S
3. a_1, a_n, n	q, S
4. a_1, a_n, q	n, S
5. n, q, S	a_1, a_n
6. n, a_n, S	a_1, q
7. n, a_1, S	a_n, q
8. a_n, q, S	a_1, n
9. a_1, q, S	a_n, n
10. a_1, a_n, S	q, n

Լուծենք մի քանի խնդիրներ.

1. Տված 4 և 256 թվերի միջև դասավորել հինգ միջին յերկրաչափականներ։

Այսինքն պահանջվում է կազմել մի յերկրաչափական պրոգրեսիա, վորն ունենա 7 անդամ (2 տվածը և 5 պահանջելիքը) և վորի առաջին անդամը լինի 4, իսկ վերջին անդամը՝ 256։

Այստեղ $a_1 = 4$; $a_7 = 256$; $n = 7$, հետևապես պրոգրեսիան կազմելու համար բավական է գտնել նրա q հայտարարը։

Իսկ մենք գիտենք (§ 7), վոր

$$a_7 = a_1 \cdot q^6$$

Տեղադրելով խնդրի տվյալները, կստանանք

$$256 = 4 \cdot q^6;\quad q^6 = 64;\quad q = \sqrt[6]{64};\quad q = 2$$

հետևապես վորոնելի պրոգրեսիան կլինի

$$\div\div\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256$$

2. Գտնել հետևյալ պրոգրեսիայի 8 անդամների գումարը.

$$\div\div\ -4,\ 16,\ -64\ \ldots.$$

Այստեղ

$$a_1 = -4;\ q = -4;\ n = 8;$$

հետևապես

$$S_8 = \frac{a_1(q^8-1)}{q-1} = \frac{-4\cdot[(-4)^8-1]}{-4-1} = 52428$$

3. Գտնել պրոգրեսիայի առաջին անդամ a_1-ը և վերջին անդամ a_n-ը, յեթե $q = 3$, $n = 5$ և $S = 242$

Նախ գտնենք a_n-ը հետևյալ ֆորմուլով

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot 3^4$$

և ապա այդ մեծությունը և տված թվերը տեղադրենք անդամների գումարի ֆորմուլի մեջ

$$242 = \frac{a_1 \cdot 3^4 \cdot 3 - a_1}{3-1} = \frac{a_1(3^5-1)}{2} = 121a_1$$

վորտեղից

$$a_1 = 242 : 121 = 2$$

Այժմ գտնում ենք

$$a_n = 2 \cdot 3^4 = 162$$

Ստուգումը

$$2 + 6 + 18 + 54 + 162 = 242$$

4. Պրոգրեսիայի առաջին և յերրորդ անդամների գումարը հավասար է 34-ի, իսկ յերկրորդի և չորրորդի գումարը հավասար է 136-ի: Գտնել այդ պրոգրեսիան:

Ըստ պայմանի

$$a_1 + a_3 = 34; \qquad a_2 + a_4 = 136$$

իսկ

$$a_3 = a_1 \cdot q^2; \qquad a_2 = a_1 q; \qquad a_4 = a_1 q^3$$

հետևապես

$$a_1 + a_1 q^2 = a_1(1 + q^2) = 34$$
$$a_1 q + a_1 q^3 = a_1 q(1 + q^2) = 136$$

Բաժանելով վերջին հավասարությունը նախորդի վրա համապատասխան մասերով՝ կստանանք

$$q = 4$$

Հետևապես

$$a_1(1 + 4^2) = 17a_1 = 34; \qquad a_1 = 2$$

Պրոգրեսիան կլինի

$$\div\div\ 2,\ 8,\ 32,\ 128,\ 512\ \ldots$$

5. Ապացուցենք, վոր յերկրաչափական պրոգրեսիայի ծայր անդամներից հավասարապես հեռացված յերկու անդամների արտադրյալը հավասար է առաջին յեվ վերջին անդամների արտադրյալին:

Վերցնենք հետևյալ պրոգրեսիան

$\div\div\ a_1, a_2, \ldots a_h, \ldots a_k, \ldots a_{n-1}, a_n$, վորի հայտարարն է q:

Յեթե այդ պրոգրեսիան գրենք հակառակ կարգով, կստանանք

$\div\div\ a_n, a_{n-1}, \ldots a_k, \ldots a_h, \ldots a_2, a_1$, վորի հայտարարը կլինի $\frac{1}{q}$:

Յենթադրենք՝ առաջին պրոգրեսիայի a_h և a_k անդամները հավասարապես են հեռացված նույն շարքի ծայր անդամներից a_h-ը՝ սկզբի, իսկ a_k-ն վերջի ծայրանդամից, այդ դեպքում առաջին պրոգրեսիայի համար

$$a_h = a_1 \cdot q^{h-1}$$

իսկ յերկրորդ պրոգրեսիայի մեջ a_k հաշվում է սկզբից, հետևապես

$$a_k = a_n \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^{h-1} = \frac{a_n}{q^{h-1}}$$

Բազմապատկելով վերջին յերկու հավասարությունները ըստ համապատասխան մասերի՝ կստանանք.

$$a_h \cdot a_k = a_1 \cdot q^{h-1} \cdot \frac{a_n}{q^{h-1}} = a_1 \cdot a_n$$

այն, ինչ պետք էր ապացուցել:

Օրինակ, հետևյալ պրոգրեսիայում

$$\div\div\ 2.\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ 486,\ 1458$$

յերրորդ անդամն սկզբից կլինի 18-ը, իսկ յերրորդ անդամը վերջից՝ 162-ը, հետևապես

$$18 \cdot 162 = 2 \cdot 1458 = 2916$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՅԵՎ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

I.	71.	*Տված է.*	$a_1=4;\ q=3;\ n=6;$	*Գտնել.* a_6 և S
	72.	»	$a_1=2;\ q=1\frac{1}{2};\ n=8;$	» a_8 և S
	73.	»	$a_1=6;\ q=\frac{2}{3};\ n=10;$	» a_{10} և S
	74.	»	$a_1=-8;\ q=-2;\ n=12;$	» a_{12} և S
II.	75.	»	$a_n=256;\ q=2;\ n=8;$	» a_1 և S
	76.	»	$a_n=1024;\ q=-2;\ n=13;$	» a_1 և S
	77.	»	$a_n=-243;\ q=-\frac{3}{2};\ n=6;$	» a_1 և S
	78.	»	$a_n=-\frac{5}{8};\ q=-\frac{1}{2};\ n=10;$	» a_1 և S
III.	79.	»	$a_1=7;\ a_n=224;\ n=6;$	» q և S
	80.	»	$a_1=8;\ a_n=10368;\ n=5;$	» q և S
	81.	»	$a_1=\frac{2}{3};\ a_n=486;\ n=7;$	» q և S
	82.	»	$a_1=81;\ a_n=-10\frac{2}{3};\ n=6;$	» q և S
IV.	83.	»	$q=2;\ n=6;\ S=189;$	» a_1 և a_n
	84.	»	$q=-3;\ n=7;\ S=1641;$	» a_1 և a_n
	85.	»	$q=\frac{1}{2};\ n=8;\ S=79\frac{11}{16};$	» a_1 և a_n
	86.	»	$q=-\frac{2}{3};\ n=4;\ S=-13;$	» a_1 և a_n
V.	87.	»	$a_1=5;\ q=3;\ a_n=405;$	» n և S
	88.	»	$a_1=\frac{3}{8};\ q=-4;\ a_n=96;$	» n և S
	89.	»	$a_1=-54;\ q=\frac{1}{3};\ a_n=-\frac{2}{27};$	» n և S
	90.	»	$a_1=-\frac{3}{4};\ q=-2;\ a_n=-192;$	» n և S
VI.	91.	»	$a_1=2;\ a_n=1458;\ S=2186;$	» q և n
	92.	»	$a_1=-1;\ a_n=-256;\ S=171;$	» q և n
	93.	»	$a_1=1;\ a_n=2401;\ S=2801;$	» q և n
	94.	»	$a_1=81;\ a_n=-\frac{1}{3};\ S=60\frac{2}{3};$	» q և n
VII.	95.	»	$a_1=3;\ q=4;\ S=1021;$	» a_n և n
	96.	»	$a_1=8;\ q=2;\ S=4088;$	» a_n և n
	97.	»	$a_1=-4;\ q=-3;\ S=-2188;$	» a_n և n
	98.	»	$a_1=32;\ q=-\frac{1}{2};\ S=21\frac{1}{2};$	» a_n և n
VIII.	99.	»	$a_n=250;\ q=5;\ S=312;$	» a_1 և n

	100.	»	$a_n = 6;\ q = \frac{1}{4};\ S = 2042;$	»	a_1 և n
	101.	»	$a_n = 64;\ q = -2;\ S = 21\frac{1}{2};$	»	a_1 և n
	102.	»	$a_n = 405;\ q = 3;\ S = 606\frac{2}{3};$	»	a_1 և n
IX.	103.	»	$a_1 = 2;\ n = 3;\ S = 26;$	»	q և a_n
	104.	»	$a_1 = 15;\ n = 3;\ S = 105;$	»	q և a_n
	105.	»	$a_1 = -12;\ n = 3;\ S = 252;$	»	q և a_n
	106.	»	$a_1 = 128;\ n = 3;\ S = 224;$	»	q և a_n
X.	107.	»	$a_n = 8;\ n = 3;\ S = 14;$	»	a_1 և q
	108.	»	$a_n = 4;\ n = 3;\ S = 124;$	»	a_1 և q
	109.	»	$a_n = 64;\ n = 3;\ S = 52;$	»	a_1 և q
	110.	»	$a_n = -6;\ n = 3;\ S = -10{,}5;$	»	a_1 և q

111. Գտնել հետևյալ պրոգրեսիայի 8 անդամների գումարը․

$$\div\div\ 5,\ 15,\ 45\ \ldots$$

112. Գտնել հետևյալ պրոգրեսիայի 10 անդամների գումարը․

$$\div\div\ 3,\ -6,\ 12\ \ldots$$

113. Գտնել հետևյալ պրոգրեսիայի 12 անդամների գումարը․

$$\div\div\ 6,\ 2,\ \frac{2}{3}\ \ldots$$

114. Գտնել հետևյալ պրոգրեսիայի 6 անդամների գումարը․

$$\div\div\ -4,\ 1,\ -\frac{1}{4}\ \ldots$$

115. Տված 2 և 162 թվերի միջև դասավորել 3 միջին յերկրաչափականներ այնպես, վոր վորոնվող թվերը տված թվերի հետ միասին կազմեն յերկրաչափական պրոգրեսիա։

116. Տված 7 և 224 թվերի միջև դասավորել 4 միջին յերկրաչափականներ այնպես, վոր վորոնելի թվերը տված թվերի հետ միասին կազմեն յերկրաչափական պրոգրեսիա։

117. Գտնել այն պրոգրեսիան, վորի առաջին անդամը հավասար 1-ի, իսկ յերրորդ և հինգերորդ անդամների գումարը հավասար է 90-ի։

118. Գտնել այն պրոգրեսիան, վորի առաջին անդամը հավասար է 3-ի, իսկ յոթերորդ և չորրորդ անդամների տարբերությունը հավասար է 168-ի։

119. Պրոգրեսիայի առաջին և յերրորդ անդամների գումարը հավասար է 15-ի, իսկ յերկրորդի և չորրորդի գումարը՝ 30-ի։ Գտնել այդ պրոգրեսիայի առաջին 10 անդամների գումարը։

120. Պրոգրեսիայի յերրորդ և առաջին անդամների տարբերությունը հավասար է 24-ի, իսկ հինգերորդ և առաջին անդամների տարբերությունը հավասար է 624-ի։ Գտնել այդ պրոգրեսիայի առաջին 6 անդամների գումարը։

121. Պրոգրեսիայի առաջին յերեք անդամների գումարը հավասար է 112-ի, իսկ վերջին յերեք անդամների գումարը հավասար է 14-ի։ Գտնել այդ վեց անդամներից բաղկացած պրոգրեսիան։

122. Պրոգրեսիան կազմված է վեց անդամից։ Նրա կենտ տեղերում գտնվող անդամների գումարը հավասար է 455-ի, իսկ զույգ տեղերում գտնվող անդամների գումարը հավասար է 1365-ի։ Գտնել այդ պրոգրեսիան։

123. *Նկատել են, որ մի քաղաքում ազգաբնակությունը յուրաքանչյուր տարի ավելանում է նույն հարաբերությամբ։ Ի՞նչ մեծության է այդ հարաբերությունը, յեթե ազգաբնակությունը 4 տարվա ընթացքում* 10000-*ից հասել է մինչև* 14641-*ի։*

124. *Գտեք յերկրաչափական պրոգրեսիայի անդամների արտադրյալի արտահայտությունը և գտեք այն պրոգրեսիան, որի* $q = -6$; $a_n = -216$; *իսկ բոլոր անդամների արտադրյալը հավասար է* 46.656-*ի։*

Ցուցմունք: *Պրոգրեսիայի անդամների արտադրյալը կլինի․*

$$a_1 \cdot a_2 \ldots a_n = a_1 \cdot a_1 q \cdot a q^2 \ldots a_1 q^{n-1} = a_1^n \cdot q^{1+2+\ldots+(n-1)}$$

իսկ

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

հետևապես

$$a_1 \cdot a_2 \ldots a_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

125. *Գտնել հետևյալ պրոգրեսիայի առաջին վեց անդամների արտադրյալը․* $\because$ 1, 4, 16 . . .

126. *Յերկրաչափական պրոգրեսիա կազմող յերեք թվերի գումարը հավասար է* 26-*ի, յեթե այդ թվերին համապատասխանաբար գումարենք* 1, 6 *և* 3, *ապա կստացվեն թվաբանական պրոգրեսիա կազմող յերեք թվեր։ Գտնել այդ թվերը։*

127. *Թվաբանական պրոգրեսիա կազմող յերեք թվերի գումարը հավասար է* 15-*ի, յեթե այդ թվերին համապատասխանաբար գումարենք* 1, 4 *և* 19, *ապա կստացվեն յերկրաչափական պրոգրեսիա կազմող յերեք թվեր։ Գտնել այդ թվերը։*

128. *Յերկրաչափական պրոգրեսիա կազմող չորս թվերի գումարը հավասար է* 360-*ի։* 4-*րդ թիվը* 9 *անգամ մեծ է* 2-*րդ թվից։ Գտնել այդ թվերը։*

129. *Յենթադրենք, որ* m, n, p, q *թվերը կազմում են յերկրաչափական պրոգրեսիա։ Ապացուցեք, որ այդ պրոգրեսիայի հարևան անդամների համար ճիշտ է հետևյալ առնչությունը*

$$(m^2 + n^2 + p^2)(n^2 + p^2 + q^2) = (mn + np + pq)^2$$

130. *Յերկրաչափական պրոգրեսիայի յերեք իրար հաջորդող անդամներն են* a, b *և* c *թվերը։ Ցույց տվեք, որ* b-*ն կազմում է* a *և* c *թվերի միջին յերկրաչափականը, իսկ յեթե* a, b *և* c *թվերը կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա, ապա ցույց տվեք, որ* b-*ն* a *և* c *թվերի միջին թվաբանականն է։*

ԳԼՈՒԽ II

ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§ 9. ԱՌԱՋԻՆ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Երկու արտահայտությունների միացումն անհավասարության նշանով $>$ (**«մեծ է»**) *կամ* $<$ (**«փոքր է»**), **կոչվում է անհավասարություն**, *օրինակ.*

$$8 > 3\frac{1}{2};\quad -11 < -2;\quad 0 > -28;\quad a > b$$

Վերհիշենք, վոր յերկու անհավասար հանրահաշվային թվերից այն է մեծ, վորը թվային շարքում գտնվում է դեպի աջ։ Այդ պայմանի համաձայն մեծ և փոքր թվերի տարբերությունը միշտ դրական է.

$$-2 > -11;\quad -2-(-11) = +9;\quad 0 > -28;\quad 0-(-28) = +28$$

Այստեղից հետևում է, վոր հետևյալ անհավասարությունները

$$a > b \text{ և } a-b > 0$$

համազոր են։

Այն անհավասարությունները, վորոնք պարունակում են տառերով արտահայտված թվեր, բաժանվում են անպայմանականների և պայմանականների։ **Անպայմանական** *կոչվում են այն անհավասարությունները, վորոնք մնում են ճիշտ,* **ինչպիսի թվային արժեքներ էլ վոր տանք նրանց տառերին**, *բացի զերոյից, օրինակ.*

$$x^2 > 0,\quad a^2 + b^2 > 2ab$$

վորի մեջ դժվար չէ համոզվել, տալով տառային քանակություններին զանազան թվային արժեքներ։ Այդ հատկությամբ նրանք նման են **նույնությունների**։ **Պայմանական** *կոչվում են այն անհավասարությունները, վորոնք մնում են ճիշտ, նրանց մեջ մտնող տառերին վոչ ամեն տեսակ թվային արժեքներ տալու դեպքում. օրինակ.* $2x - 8 < 7 - x$ *անհավասարության մեջ ընդունելով* $x=3$, *կստանանք.* $6-8 < 7-5$ *կամ* $-2 < 4$, *վոր ճիշտ է, սակայն, յեթե ընդունենք* $x = 11$, *ապա կստանանք.* $22-8 < 7-11$, *կամ* $14 < -4$, *վոր ճիշտ չէ։ Հետևապես վերջին անհավասարությունը պայմանական է։ Ինչպես կպարզվի հետագայում, պայմանական անհավասարությունների և պայմանական հավասարությունների, այսինքն* **հավասարումների** *մեջ, տեղի ունի վորոշ նմանություն (անալոգիա)։*

Դիտելով պայմանական անհավասարությունները, մենք հանգում ենք նրա մեջ մտնող տառերի այն արժեքների վորոշման, վորոնց նկատմամբ անհավասարությունը մնում է ճիշտ, կամ, ինչպես ասում են, հանգում ենք **անհավասարության լուծմանը**։ *Կանգ առնենք մի անհայտով առաջին աստիճանի անհավասարությունների լուծման վրա, այսինքն այնպիսիների, վո-*

րոնց մեջ միայն առաջին աստիճանի մի տառը կարող է ընդունել զանազան թվային արժեքներ։

Ինչպիսին են, օրինակ, հետևյալ անհավասարությունները․

$$5x - 1 > 12 + 3x \quad \text{կամ} \quad az + b^2 > cz - d^2$$

պարզ է, վոր վերջին անհավասարության մեջ a, b, c և d-ն ունեն վորոշ թվային արժեքներ, իսկ z-ը կարող է ընդունել զանազան արժեքներ։

Անհավասարությունների լուծումը հիմնվում է հետևյալ յերեք կանոնների վրա.

I. Անհավասարության նշանը չի փոխվում, յեթե անհավասարության յերկու մասերին էլ ավելացնենք կամ նրանցից հանենք հավասար մեծություններ:

Ենթադրենք տված է $a > b$ անհավասարությունը։ Արտահայտելով այն $a - b > 0$ ձևով, ավելացնենք և հանենք նրա ձախ մասում m թիվը, վորից ձախ մասի մեծությունը չի փոխվի, կստանանք

$$a - b + m - m > 0$$

Վերջին անհավասարությունը կարելի յե արտահայտել հետևյալ յերկու ձևով

$$(a + m) - (b + m) > 0 \quad \text{և} \quad (a - m) - (b - m) > 0$$

վորտեղից հետևում է, վոր

$$a + m > b + m \quad \text{և} \quad a - m > b - m$$

այն, ինչ պետք էր ապացուցել։

II. Անհավասարության նշանը չի փոխվի, յեթե նրա յերկու մասերն է բազմապատկենք կամ բաժանենք միենույն դրական թվով:

Արտահայտենք $a > b$ անհավասարությունը $a - b > 0$ ձևով և բազմապատկենք նրա ձախ մասը, վորը դրական է, դրական m թվով։ Հետևանքը կլինի դրական և մենք կստանանք

$$am - bm > 0$$

վորտեղից

$$am > bm$$

այն, ինչ պետք էր ապացուցել։ Նույն ձևով ապացուցվում է կանոնի նաև յերկրորդ մասը։

III. Անհավասարության նշանը փոխվում է հակառակ նշանի, յեթե նրա յերկու մասերն էլ բազմապատկենք կամ բաժանենք միենույն բացասական թվով:

Ենթադրենք տված է $a > b$ անհավասարությունը կամ, վոր նույնն է, $a - b > 0$։ Բազմապատկենք $a - b > 0$ անհավասարության ձախ մասը բացասական m թվով։ Վորովհետև $a - b$ դրական է, իսկ m-ը բացասական, ապա $m(a - b)$ արտադրյալը նույնպես կլինի բացասական և մենք կստանանք

$$m(a - b) < 0$$

կամ

$$am - bm < 0$$

վորտեղից հետևում է, վոր $am < bm$։ Նույն ձևով կարելի յե ապացուցել այս կանոնի նաև յերկրորդ մասը։

Օրինակ. $7 > -2$։ Բազմապատկելով յերկու մասերն էլ -3-ով, կստանանք $-21 < 6$.

ՀԵՏԵՎԱՆՔ 1. Անհավասարության անդամները կարելի յե տեղափոխել անհավասարության մեկ մասից մյուսը, փոխելով նրանց նշանները հակառակ նշանների։

Օրինակ. $2x - 8 < 7 - x$։ Աջ մասից x-ը ձախ մասը տեղափոխելու համար, յերկու մասերն էլ մեծացնենք x-ով (կանոն I-ին), կստանանք

$$2x - 8 + x < 7 - x + x$$

կամ $2x - 8 + x < 7$. տեղափոխելով -8-ը ձախից աջ, կստանանք $3x < 15$

ՀԵՏԵՎԱՆՔ 2. Անհավասարության բոլոր անդամները կարելի յե կրճատել ընդհանուր բաժանարարով. այդ դեպքում, յեթե բաժանարարը դրական է, ապա անհավասարության նշանը մնում է նույնը, իսկ յեթե նա բացասական է, ապա անհավասարության նշանը փոխվում է հակառակ նշանի։

Օրինակներ. $3x < 15$։ Բաժանելով յերկու մասերն էլ 3-ի (կանոն II-րդ), կստանանք $x < 5$

$8x - 6 > 12 + 10x$։ Կրճատելով բոլոր անդամները 2-ով, կստանանք $4x - 3 > 6 + 5x$

ՀԵՏԵՎԱՆՔ 3. Անհավասարության բոլոր անդամների նշանները կարելի յե փոխել հակառակի, այն դեպքում պետք է փոխել նաև անհավասարության նշանը, վորովհետև այդ միևնույն է թե անհավասարության յերկու մասերն էլ բազմապատկում ենք -1-ով (կանոն III-րդ)։

Օրինակ. $-3 < 4$, փոխելով նշանները, կստանանք $3 > -4$։

ՀԵՏԵՎԱՆՔ 4. Անհավասարության բոլոր անդամները կարելի յե բերել ընդհանուր (դրական) հայտարարի և ապա ազատվել նրանից։

Հիրավի, այդ միևնույն է թե անհավասարության յերկու մասերն էլ բազմապատկում ենք ընդհանուր հայտարարով (կանոն II-րդ)։

Օրինակ.

$$\frac{a}{4} - \frac{1-a}{3} > 2 + \frac{4a+3}{2}$$

Բազմապատկելով բոլոր անդամները 12-ով (ընդհանուր հայտարարով), կըստանանք

$$3a - 4 + 4a > 24 + 24a + 18$$

Մի անհայտով առաջին աստիճանի անհավասարությունները լուծելիս, այդ բոլոր հետևանքները գործադրում են անհավասարությունը համառոտելու համար ճիշտ այնպես, ինչպես այդ արվում է հավասարումներ լուծելու ժամանակ։ Այդ պատճառով անհավասարություններ լուծելու դեպքում էլ պետք է

1) բաց անել բոլոր փակագծերը,

2) ազատել անհավասարությունը կոտորակներից,

3) տեղափոխել անհայտ անդամները անհավասարության մի մասը, իսկ հայտնի անդամները մյուս մասը,

4) նման անդամների միացումից հետո, բաժանել անհավասարության յերկու մասերն էլ անհայտի գործակցի վրա, վորից հետո կստացվի մի անհավասարություն, վորը և կվորոշի անհայտի սահմանը։

Որինակ.

$$\frac{3(x-1)}{4}-2\frac{1}{2}>1-\frac{(3x+1)5}{3}$$

Հաջորդաբար կստանանք

$$\frac{3x-3}{4}-\frac{5}{2}>1-\frac{15x+5}{3}$$

$$9x-9-30>12-60x-20$$

$$9x+60>12-20+9+30$$

$$69x>31$$

$$x>\frac{31}{69}$$

Այդպես $\frac{31}{69}$ *թիվը կոչվում է անհայտի* ներքևի սահման, *վորովհետև անհայտը չի կարող փոքր լինել* $\frac{31}{69}$*-ից։ Հետևանք 2-ի որինակում մենք ստացանք, վոր* $x<5$*։ Այստեղ 5 թիվը կոչվում է անհայտի* վերևի սահման, *վորովհետև* x*-ը չի կարող գերազանցել 5-ին։*

Յերբեմն անհայտը պետք է բավարարի միաժամանակ յերկու անհավասարությունների։ Այդ դեպքում առանձին լուծված յուրաքանչյուր անհավասարություն վորոշում է անհայտի սահմանը և այդ յերկու սահմանները կարող են լինել. 1) զուգադիպող, 2) սահմանափակող *կամ* 3) հակասող։ *Որինակ.* 1) $x>5$, $x>8$; 2) $x>-2$, $x<7$; 3) $x<3$, $x>11$։ *Առաջին յերկու դեպքերում յերկու անհավասարությունները կոչվում են* միաբանելի, *իսկ վերջին դեպքում՝* անմիաբանելի։

Որինակ 1. *Լուծենք հետևյալ անհավասարությունները*

$$3x+7>x+11; \qquad 3-x<11-2x$$

Լուծելով գտնում ենք

$$2x>4; \quad x>2 \text{ և } x<8$$

Հետևապես, յերկու անհավասարություններին էլ բավարարում են x*-ի այն բոլոր արժեքները, վորոնք գտնվում են 2-ի և 8-ի միջև։*

Որինակ 2.

$$4x-9>2x+13; \qquad x-1<7-x$$

Լուծելով գտնում ենք

$$x>11 \text{ և } x<4$$

Այստեղ անհայտի սահմանները հակասում են իրար և անհավասարությունները՝ անմիաբանելի յեն։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Լուծեք հետևյալ անհավասարությունները

131. $5x-8<3x+2$

132. $7x-11>8x+3$

133. $5+2x<6x+13$

134. $8-2x<0$

135. $3x-10>0$

136. $4(2x+1)>3x+39$

137. $(z+1)^2>(z-1)^2$

138. $(z-2)^2+10<(z+5)^2$

139. $\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}<\frac{3x-2}{4}-1$

140. $\frac{3-2x}{5}+8>\frac{5x+2}{2}-x$

141. $5-\frac{x}{3}<3\frac{1}{2}-\frac{4x+1}{8}$

142. $\frac{7-6x}{2}+12<\frac{8x+1}{3}-10x$

143. $8+\frac{3x-4}{5}>\frac{x-1}{6}-\frac{5x-3}{8}$ 144. $\frac{x}{C^2}+\frac{x}{C}+x-1>C$

Լուծեք միաբան հետևյալ անհավասարությունները

145. $3x+8>2x+9$ և $2x-7<3x+2$

146. $5x-1>2x+5$ և $x-4>2x+3$

147. $2-x<4+3x$ և $x+10<2+3x$

148. $4x-3>x+9$ և $16-x>x-40$

149. $5x-3>1+x$ և $\frac{1}{2}-3x<\frac{2}{3}x-5$

150. $7x-1\frac{1}{2}>2+5x$ և $1-2x<3x-1$

151. $2(x-3)-1<5$ և $\frac{3x}{8}-7>\frac{x}{12}$

152. $\frac{5}{9}x+\frac{2}{3}>6\frac{2}{9}$ և $3(x-2)+2<5$

153. *Որոշել՝* a, b *և* y *տառերի ինչպիսի արժեքների դեպքում*

$$\frac{4-2a}{1+3a} \qquad \frac{5-2b}{8+5b} \qquad \frac{3y+7}{2-6y}$$

կոտորակները կլինեն դրական։

154. *Որոշել* a, x *և* y *տառերի ինչպիսի արժեքների դեպքում*

$$\frac{9-2a}{4a+1} \qquad \frac{5x-9}{2x+4} \qquad \frac{15-4y}{7+3y}$$

կոտորակները կլինեն բացասական։

155. *Ապացուցեք, որ կանոնավոր կոտորակը մեծանում է, երբ նրա համարիչին և հայտարարին ավելացնում ենք միևնույն դրական թիվը, իսկ անկանոն կոտորակը՝ փոքրանում է։*

156. *Ապացուցեք, որ երկու թվերի միջին թվաբանականը մեծ է նույն թվերի միջին երկրաչափականից։*

157. *Ապացուցեք, որ ամեն մի եռանկյան մեջ կիսապարագիծը մեծ է նրա յուրաքանչյուր կողմից։*

158. $(a-d)^2>0$ *անհավասարության հիման վրա ապացուցեք, որ երկու թվերի հարաբերության քառակուսու և նույն թվերի կրկնապատիկ հարաբերության տարբերությունը միշտ մեծ է մեկ բացասական միավորից։*

159. *Ապացուցեք, որ ամեն մի ուղղանկյուն եռանկյան մեջ ներքնաձիգին իջեցրած բարձրությունը փոքր է ներքնաձիգի կեսից։*

160. *Ապացուցեք, որ ամեն մի ուղղանկյուն եռանկյան մեջ ներքնաձիգին իջեցրած կրկնապատիկ բարձրության քառակուսին փոքր է ներքնաձիգի քառակուսու և էջերի կրկնապատիկ արտադրյալի գումարից։*

Գ Լ Ո Ւ Խ III

ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՈՒՍՄՈՒՆՔԸ

§ 10. ԿԱՅՈՒՆ ՅԵՎ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Հայտնի յե, վոր ամեն մի ուղղանկյուն յեռանկյան սուր անկյունների գումարը հավասար ե 90^0-ի։

Սակայն գոյություն ունեն անվերջ մեծ քանակությամբ ուղղանկյուն յեռանկյուններ։ Նշանակելով նրանց սուր անկյունների աստիճանները x և y կարելի յե գրել

$$x + y = 90$$

վորտեղից կստանանք

$$y = 90 - x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Փոփոխենք x անկյան մեծությունը, տալով նրան **կամավոր** արժեքներ։ Այն ժամանակ, ըստ (1) ֆորմուլի, x-ի ամեն մի նոր արժեքի դեպքում y-ը կստանա իր համապատասխան արժեքը. ուրիշ խոսքով y-ի արժեքը **կախումն ունի** x-ին տրված արժեքներից։

Վերցնենք մի օրինակ ևս. ֆիզիկայի մեջ վորևե մարմնի M մասսան վորոշվում ե հետևյալ ֆորմուլով

$$M = V \cdot d$$

վորտեղ V-ն՝ ծավալն ե, իսկ d-ն՝ այդ մարմնի խտությունը։ Մարմնի միևնույն խտության համար M մասսան կախումն ունի V ծավալից. հետևապես V-ին տալով կամավոր թվային արժեքներ, M-ի համար կստանանք **վորոշ** թվային արժեքներ։

Այսպես, յեթե տված մեծությունների արժեքների միջև գոյություն ունի հանրահաշվական ֆորմուլով արտահայտված վորևե կապ, ապա կարող ենք այդ մեծություններից մեկին ու մեկին (վորին ցանկանանք) վերագրել այս կամ այն արժեքը. բայց այդ դեպքում առաջինի հետ կապված մյուս մեծությունը կունենա իր միանգամայն վորոշ արժեքները, կախված առաջին մեծության արժեքներից։

Այն մեծությունը, վորի թվային արժեքը վերցնում ենք կամավոր (ըստ ցանկության), կոչվում ե **անկախ փոփոխական**։

Այդ դեպքում, այն մեծությունը, վորը կապված ե առաջինի հետ, հետևապես և փոփոխվում ե նրան տված արժեքների համաձայն, կոչվում ե առաջինի **ֆունկցիա** կամ **կախյալ փոփոխական**։

Այսպես օրինակ, ուղղանկյուն յեռանկյան սուր անկյուններից մեկը մյուս սուր անկյան ֆունկցիան ե, վորովհետև

$$y = 90 - x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ֆորմուլի մեջ x-ին տալով 10°, 20°, 30°, 40° և այլն արժեքներ, y-ի համար կգտնենք հետևյալ համապատասխան արժեքները

80°, 70°, 60°,50° և այլն։

Պարզ տեսնում ենք, որ (1) ֆորմուլի մեջ x և y-ից զատ կա ամբողջ մի թիվ՝ 90, որը պահպանում է իր միևնույն արժեքը x և y-ի բոլոր փոփոխությունների դեպքում։ Ընդհանրապես փոփոխումների մի քանի պրոցեսների ժամանակ մենք գործ ենք ունենում ոչ միայն փոփոխականների հետ, այսինքն այնպիսիների, որոնց թվային արժեքները փոխվում են, այլ և կայունների հետ, որոնք նույն պրոցեսի ժամանակ պահպանում են իրենց արժեքը։ Օրինակ, ամեն մի տվյալ շրջագծի մեջ նրա շառավղի (կամ տրամագծի) մեծությունը կայուն թիվ է, այն ինչ լարի յերկարությունը փոփոխական է, որովհետև կարող է փոփոխվել 0-ից մինչև 2R (R— շառավիղ)։

Շրջանագծի յերկարությունը շառավղի տվյալ արժեքի դեպքում կայուն է. շառավղի փոփոխման դեպքում դառնում է փոփոխական, և մենք այդ դեպքում կարող ենք ասել, որ շրջանագծի յերկարությունը նրա շառավղի ֆունկցիան է։

Մենք գիտենք, որ յեռանկյան անկյունների գումարը հավասար է 180°-ի, այսինքն կայուն է. բայց անկյունների արժեքները կարող են փոփոխվել, և այդ անկյուններից վորևե յերկուսին արժեքներ տալով, այդ պայմանի միջոցով կարող ենք գտնել յերրորդ անկյան արժեքը. հետևապես այդ անկյունն առաջին յերկու անկյունների ֆունկցիան է։

Ֆունկցիոնալ կոչված այդպիսի կախման բազմաթիվ օրինակներ կարելի յե բերել։ Օրինակ, ուղղանկյան մակերեսը նրա չափման ֆունկցիան է. խորանարդի ծավալը նրա կողի ֆունկցիան է. գնդի ծավալը նրա շառավղի ֆունկցիան է. մետաղե ձողի յերկարությունը տաքացնելիս՝ ջերմության ֆունկցիան է. տվյալ ուժի աշխատանքը ֆունկցիան է այն ճանապարհի, որ անցնում է այդ ուժի շփման կետը. շղթայի տվյալ դիմադրության դեպքում ելեկտրական հոսանքի ուժը լարվածության ֆունկցիան է. հավասարաչափ շարժումով անցած ճանապարհը (այսինքն կայուն արագության դեպքում) ժամանակի ֆունկցիան է. մթերքի արժեքը, նույն մթերքի միավորի վորոշ գնի դեպքում, մթերքի քանակի ֆունկցիան է (այսինքն, նրա յերկարության, կամ ծավալի, կամ քաշի) և այլն։

Դժվար չե յուրաքանչյուր հարցի մեջ վորոշել, թե արդյոք վորը պետք է ընդունել կայուն և վորը համարել փոփոխական։ Օրինակ, յեթե տրված է ուղղանկյան P մակերեսը և նրա x ու y չափումները, ապա կարող ենք գրել

$$P = x \cdot y$$

Այստեղ P-ն կայունն է (ըստ պայմանի), x և y-ը՝ փոփոխականներն։ Մենք կարող ենք գրել.

$$y = \frac{P}{x} \text{ կամ } x = \frac{P}{y}$$

Ընդունելով x-ը անկախ փոփոխական, կարող ենք նրան կամավոր արժեքներ տալ. այդ դեպքում y-ը կլինի նրա ֆունկցիան. բայց կարելի յե և հակառակն անել. y-ը համարել անկախ փոփոխական, այդ դեպքում x-ը կլինի նրա ֆունկցիան։

Հարցի իմաստին նայելով՝ կարելի յե վորոշել, թե արդյոք վո՞րն ընդունել կայուն, վորն անկախ փոփոխական և վորը ֆունկցիա։ Որինակ, գըտնենք R շառավիղ ունեցող շրջանագծի y լարի յերկարությունը, նայելով թե այդ լարի x հեռավորությունը կենտրոնից ինչպիսի փոփոխությունների յե յենթարկվում։

Դյուրին է նկատել, վոր

$$y = 2\sqrt{R^2 - x^2}$$

լարը տեղափոխման յենթարկելով ինքն իրեն զուգահեռ, մենք մեր ցանկացած չափով փոփոխում ենք x-ը։ Հետևապես լարի հեռավորությունը կենդրոնից կլինի անկախ փոփոխական, լարի յերկարությունը՝ ֆունկցիա, շրջանագծի շառավիղը՝ կայուն թիվ։

§ 11. ՀԱՍԿԱՑՈՂՈՒԹՅՈՒՆ ԱՆՎԵՐՋ-ՓՈՔՐ ՅԵՎ ԱՆՎԵՐՋ-ՄԵԾ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ։ ՀԱՍԿԱՑՈՂՈՒԹՅՈՒՆ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԻ ՄԱՍԻՆ

Մենք գիտենք, վոր կանոնավոր n անկյան ներքին անկյունների գումարը հավասար է $2dn - 4d$-ի, վորտեղ d-ն նշանակում է ուղիղ անկյուն (կայուն քանակություն)։ Ակներև է, վոր ներքին անկյուններից յուրաքանչյուրը հավասար է $2d - \frac{4d}{n}$; n-ի, այսինքն կողմերի թվի փոփոխման դեպքում, $2d - \frac{4d}{n}$ տարբերությունը կլինի n-ի ֆունկցիան, այսինքն այդ տարբերությունը փոփոխական է, վորովհետև կայուն նվազելի $2d$-ի դեպքում, հանելի $\frac{4d}{n}$-ը փոփոխական է։ n-ի մեծանալու հետ, $\frac{4d}{n}$ կոտորակի արժեքը փոքրանում է։ Յեթե ընդունենք, վոր n-ը մեծանում է անսահմանորեն, $\frac{4d}{n}$ կոտորակի թվային արժեքն անսահմանորեն կփոքրանա, այնպես վոր $2d - \frac{4d}{n}$ տարբերությունը հետզհետե ավելի ու ավելի քիչ կտարբերվի իր նվազելի $2d$-ից։

Հիրավի, յեթե	$n = 12$-ի,	ներքին	անկյան	մեծությունը կլինի	$\frac{5}{3}d$
»	$n = 24$-ի	»	»	»	$\frac{11}{6}d$
»	$n = 48$-ի	»	»	»	$\frac{23}{12}d$
»	$n = 96$-ի	»	»	»	$\frac{47}{24}d$
»	$n = 192$-ի	»	»	»	$\frac{95}{48}d$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
»	$n = 1536$-ի	»	»	»	$\frac{767}{384}d$ և այլն

Վերջապես $2d - \frac{4d}{n}$ փոփոխական քանակությունը n-ի բոլոր դեպքերում արտահայտում է n-անկյան ներքին անկյան մեծությունը, ուստի ընդունված է ասել, որ 2d կայուն քանակությունը, n-ի անսահմանորեն աճման դեպքում, $2d - \frac{4d}{n}$ փոփոխական քանակության սահմանն է, որովհետև n-անկյան ներքին անկյան մեծությունն այդ դեպքում անսահմանորեն մոտենում է 2d-ին։

Զննենք $1 + \frac{1}{x}$ գումարը, որտեղ x-ին կարելի է վերագրել թվերի բնական շարքի հետևյալ հաջորդական արժեքները 1, 2, 3, 4, 5 . . . . .

Այն ժամանակ մեր գումարը կընդունի հետևյալ համապատասխան արժեքները

$$1 + \frac{1}{1}; \qquad 1 + \frac{1}{2}; \qquad 1 + \frac{1}{3}; \qquad 1 + \frac{1}{4}; \qquad 1 + \frac{1}{5}; \ldots$$

կամ

$$2; \qquad 1\frac{1}{2}; \qquad 1\frac{1}{3}; \qquad 1\frac{1}{4}; \qquad 1\frac{1}{5}; \ldots$$

աստիճանաբար նվազում են, բայց ակներև է, որ միշտ էլ մեծ են մնում մեկ միավորից. դրա հետ միաժամանակ x-ի թվային արժեքի աճումով $1 + \frac{1}{x}$ գումարն սկսում է ավելի ու ավելի քիչ տարբերվել միավորից, որովհետև

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 = \frac{1}{x}$$

տարբերությունն այնքան փոքր կլինի, որքան որ մեծ վերցնելու լինենք x-ի արժեքը. սակայն դրանից դատ փոփոխական $1 + \frac{1}{x}$ գումարի և կայուն 1 թվի տարբերությունը կարելի է ցանկացածին չափ փոքրացնել։ Հիրավի, յեթե մենք ցանկանում ենք, որ այդ տարբերությունը 0,000.001-ից ավելի փոքր լինի, այդ դեպքում բավական է, որ x-ի արժեքը 1,000,000-ից ավելի վերցնենք։

Ուստի կարող ենք ասել, որ փոփոխական $1 + \frac{1}{x}$ գումարի սահմանը կլինի կայուն թիվ մեկ միավորը, այն պայմանի համաձայն, որ x-ն անսահմանորեն աճում է։

Այստեղ մենք գործ ունենք մի փոփոխականի հետ, որը փոքրանալով մոտենում է իր սահմանին, որովհետև մեծ է այդ սահմանից։ Բայց յեթե վերցնենք $1 - \frac{1}{x}$ տարբերությունը, ապա պարզ կտեսնենք, որ x-ի մեծանալու դեպքում այդ տարբերությունը կմեծանա և, մնալով միավորից փոքր, կսկսի նրանից հետզհետե ավելի ու ավելի քիչ տարբերվել, այնպես որ նրա սահմանն այնուամենայնիվ կլինի մեկ միավորը։ Այդ դեպքում $1 - \frac{1}{x}$ փոփոխականը մեծանալով մոտենում է իր սահմանին։

Ընդհանրապես, յերբ փոփոխական թիվը փոփոխման պրոցեսում մոտենում է մի որևէ կայուն մեծության այնպես, որ նրանց միջև յեղած տարբերությունը ըստ աբսոլյուտ արժեքի վորոշ տեղից սկսած դառնում յեվ փոքր է մնում ամեն մի կամավոր դրական թվից, վորքան ել ուզում է նա փոքր լինի, ապա այդ կայունը կոչվում է փոփոխականի սահման:

Մեր առաջին օրինակի մեջ կայուն 2d-*ի և* $2d-\frac{4d}{n}$ *փոփոխականի տարբերությունը հավասար է* $2d-(2d-\frac{4d}{n})=\frac{4d}{n}$*։ Պահանջենք, վոր այդ տարբերությունն ավելի փոքր լինի* 0,000001 d-*ից, այսինքն*

$$\frac{4d}{n}<0{,}000001d$$

կամ

$$\frac{4}{n}<0{,}000001$$

այն ժամանակ

$$n>4{,}000000$$

այսինքն, բավական է վերցնենք 4.000.000-*ից ավելի շատ կողմեր ունեցող բազմանկյուն, վոր փոփոխականի և նրա սահմանի տարբերությունը* 0,000001d-*ից ավելի քիչ դառնա։*

Պարզ յերևում է, վոր ընդհանրապես փոփոխականի և նրա սահմանի տարբերությունը նույնպես փոփոխական թիվ է, միայն թե անսահմանորեն նվազող, կամ ինչպես ընդունված է ասել, զերոյի ձգտող կամ զերո սահման ունեցող։

Զերո սահման ունեցող ամեն մի փոփոխական մեծություն կոչվում է անվերջ-փոքր մեծություն:

Այդպիսի մեծության վորպես իրական մի օրինակ կարող է ծառայել հալվող սառույցի կտորի ծավալը։ Հալման պրոցեսի ընթացքում այդ ծավալը աստիճանաբար փոքրանալով, կարող է անսահմանորեն նվազել. հետևապես այդ ծավալը. նախ և առաջ փոփոխական մեծություն է, յերկրորդ՝ անվերջ-փոքր։

Այն փոփոխական մեծությունը, վորն իր փոփոխման պրոցեսի ընթացքում ընդունակ է անսահմանորեն աճեցման այնպես, վոր կարող է իր աբսոլյուտ արժեքով գերազանցել ամեն մի կամավոր մեծ մեծության, վորքան ել ուզում է նա մեծ լինի, կոչվում է անվերջ-մեծ մեծություն:

Օրինակ, յերբ սուր անկյունն աճելով, մոտենում է ուղիղ անկյան, այն ժամանակ այդ անկյան տանգենսը ներկայացնում է իրենից մի անսահմանորեն աճող փոփոխական մեծություն։

Ճիշտն ասած, այդպիսի մեծությունները չունեն սահման, բայց յերբեմն, հարմարության համար, գործ են ածում անսահմանության մի առանձին նշան (∞) *և ասում, վոր անսահմանորեն աճող (աբսոլյուտ արժեքով) մեծության սահմանն է* $\pm\infty$ *(այսինքն, պլյուս կամ մինուս անսահմանություն)։*

Կայուն *մեծությունն իր իսկ բնույթի համաձայն կարող է լինել միայն* վերջավորյալ։ *Իսկ* փոփոխական *մեծությունը կարող է լինել և* վերջավորյալ յեվ անվերջ-փոքր յեվ անվերջ-մեծ: *Առաջին դեպքում նրա սահմանը* վերջավորյալ *մեծություն է, յերկրորդ դեպքում՝* զերո, *յերրորդ դեպքում՝* անսահմանություն։

Պայմանավորվենք փոփոխական թիվը նշանակել a *տառով. նրան վորպես սահման ծառայող կայունը՝* A *տառով, և նրանց անվերջ-փոքր տարբերությունը՝* α *տառով (հունարեն ալ՛ֆա տառը)։ Այն ժամանակ կարող ենք գրել*

$$a - A = \alpha$$

Մատնանշելու համար, վոր A-*ն է* a-*ի սահմանը, պայմանավորվել են օգտվել* «lim» *սիմվոլից (կրճատված* «limite» *բառը, վորը ֆրանսերեն նշանակում է «սահման»), ուստի հետևյալ գրությունը*

$$\lim a = A$$

*կարդացվում է՝ «*a *փոքրի սահմանն է* A *մեծը»։ Մատնանշելու համար, վոր «*α*»-ն անվերջ փոքր մեծություն է, օգտվելով նրա սահմանումից, գրում են*

$$\lim \alpha = 0$$

ալ՛ֆայի սահմանը զերոն է։

Դիտողություն.—*Հետևյալ հավասարման վրա հենվելով*

$$a - A = \alpha$$

կարելի յե գրել, վոր

$$a = A + \alpha$$

կամ

$$a = \alpha + A$$

այսինքն

$$A + \alpha = \alpha + A$$

հետևապես, մենք յենթադրում ենք, վոր անվերջ-փոքր գումարելիների նկատմամբ ևս կիրառվում է գումարման տեղափոխման հատկությունը։

§ 12. ԱՆՎԵՐՋ-ՓՈՔՐ ԹՎԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

I. Վերջավոր թվով վերցրած անվերջ-փոքր գումարելիների հանրահաշվական գումարն անվերջ փոքր է։

Դիցուք տված է հետևյալ գումարը

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

վորտեղ n-*ը վերջավոր թիվ է։*

Անվերջ-փոքրի սահմանումի համաձայն, կամավոր փոքրի, բայց վերջավոր ε-*ի դեպքում կունենանք.*

$$\alpha_1 < \frac{\varepsilon}{n}$$

$$\alpha_2 < \frac{\varepsilon}{n}$$

$$\cdots$$

$$\alpha_n < \frac{\varepsilon}{n}$$

վորի համապատասխան մասերը գումարելով կստանանք

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n < \varepsilon$$

Նկատենք, վոր յեթե գումարելիների նվազման հետ միաժամանակ նրանց թիվը աճելու լինի, այն դեպքում նրանց գումարը կարող է և անվերջ-փոքր չլինել։ Վերցնենք, օրինակ, այսպիսի գումարներ

$$0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 + \ldots + 0{,}1 \quad \textit{(10 գումարելի)}$$

$$0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}01 + \ldots + 0{,}01 \quad \textit{(100 գումարելի)}$$

$$0{,}001 + 0{,}001 + 0{,}001 + 0{,}001 + \ldots + 0{,}001 \quad \textit{(1000 գումարելի)}$$

(մի գումարից ներքևի հետևյալ գումարին անցնելիս փոքրացնում ենք գումարելիները 10 անգամ, բայց դրա հետ միասին նրանց քանակն ավելացնում ենք 10 անգամ)։ Զնայելով, վոր գումարելիները նվազում են անսահման, նրանց գումարը մնում է անփոփոխ՝ հավասար 1-ի։ Վերցնենք այսպիսի գումարներ ևս

$$0,1+0,1+0,1+0,1+\ .\ .\ .+0,1 \quad (10\ \text{գումարելի})$$

$$0,01+0,01+0,01+0,01+\ .\ .\ .+0,01 \quad (1000\ \text{գումարելի})$$

$$0,001+0,001+0,001+0,001+\ .\ .\ .+0,001 \quad (100000\ \text{գումարելի})$$

. . . .

(գումարելիները փոքրանում են 10 անգամ, իսկ նրանց թիվը մեծանում է 100 անգամ)։ Այդ գումարներն աճում են անսահմանորեն. առաջին գումարը հավասար է 1-ի, յերկրորդը՝ 10-ի, յերրորդը՝ 100-ի և այլն։

II. Անվերջ-փոքր թվի յեվ կայուն թվի արտադրյալն անվերջ-փոքր է

Օրինակ, 100α արտադրյալը, վորտեղ α-ն մի վորևէ անվերջ-փոքր թիվ է, դառնում ու մնում է (իր աբսոլյուտ մեծությամբ) փոքր տված վորևէ դրական թվից, օրինակ, ավելի փոքր դրական 1 միլիոներորդականից, վորովհետև α-ն դառնում ու մնում է ավելի փոքր տված ամեն մի դրական թվից, դրանց թվում ավելի փոքր նաև $\frac{1}{100}$ *միլիոներորդականից։*

Պարզ է, վոր յերկու անվերջ փոքրերի արտադրյալն անվերջ-փոքր է։

III. Անվերջ-փոքր α-ի յեվ կայուն n մեծության քանորդն անվերջ-փոքր է

Հիրավի, քանորդ $\frac{a}{n}=a\cdot\frac{1}{n}$ *հետևապես* (II) *յեզրակացության համաձայն նա անվերջ-փոքր է։*

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

161. 0,0000001-ը *կլինի՞ արդյոք անվերջ-փոքր թիվ։*

162. $\frac{1}{n}$ *կոտորակը կլինի՞ արդյոք անվերջ-փոքր թիվ,* n *փոփոխականի դեպքում։*

163. $(0,000001)^{100000}$ *կլինի՞ արդյոք անվերջ-փոքր։*

164. *Յեթե α-ն անվերջ-փոքր է, կլինե՞ն արդյոք անվերջ-փոքր*

$$5\alpha;\quad \frac{\alpha}{80};\quad \alpha^2;\quad \alpha+\alpha^2$$

165. *Յեթե α-ն անվերջ-փոքր է, հետևյալ թվերից վորո՞նք կլինեն անվերջ-փոքր*

$$0,000001+\alpha;\quad \frac{1}{1000000}\cdot\alpha;\quad \alpha:0,00001$$

166. *Կարո՞ղ է արդյոք* $\frac{1}{x}$ *կոտորակը լինել անվերջ-մեծ* (x-ը *փոփոխական թիվ է)։*

§ 13. ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԿԱՆՈՆԸ

Սահմանները վորոնելու ժամանակ ղեկավարվում են հետևյալ ընդհանուր կանոններով.

ԹԵՈՐԵՄ 1.—Յեթե կայուն թիվ A-ն այնպիսին է, վոր յերկու փոփոխական a յեվ b ի համար, վորոնց տարբերությունն անվերջ-փոքր է, բավարարվում է անհավասարությունը՝

$$a < A < b$$
$$(\text{կամ } a > A > b)$$

ապա A-ն կլինի ընդհանուր սահման այդ փոփոխականների:

Հիրավի, յեթե $(a-b)$ *անվերջ-փոքր է, ապա* $(A-a)$ *և* $(b-A)$ *տարբերությունները, վորոնք թվայնորեն ավելի փոքր են քան* $(a-b)$, *նույնպես կլինեն անվերջ-փոքր. հետևապես*

$$A = \lim a$$
$$\text{և } A = \lim b$$

Որինակ, x *դրական փոփոխականի դեպքում*

$$1 + \frac{1}{x} > 1 > 1 - \frac{1}{x}$$

բայց $\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}$ *փոփոխականների տարբերությունը* x*-ի աճման դեպքում անվերջ-փոքր մեծություն է. ուստի*

$$\lim\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$
$$\text{և } \lim\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

ԹԵՈՐԵՄ 2.—Յեթե փոփոխական b-ն իր փոփոխման ընթացքում ամփոփվում է ուրիշ a փոփոխական յեվ նրա սահման A-ի միջեվ, ապա այդ A թիվը կլինի b-ի սահմանը:

Հիրավի, պայմանի համաձայն հետևյալ տարբերության աբսոլյուտ մեծությունը

$$a - A$$

անվերջ-փոքր է, բայց $b - A$ *տարբերությունը թվայնորեն փոքր է* $a - A$ *տարբերությունից. հետևապես, նույնպես անվերջ-փոքր է, իսկ այդ նշանակում է, վոր*

$$\lim b = A$$

Որինակ, x *դրական դեպքում փոփոխական* $1 + \frac{1}{2x}$*-ը փոքր է* $1 + \frac{1}{x}$*-ից, սակայն* $\lim\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$. *հետևապես, և* $\lim\left(1 + \frac{1}{2x}\right) = 1$, *վորովհետև տարբերություն*

$$\left(1 + \frac{1}{2x}\right) - 1 < \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1$$

ԹԵՈՐԵՄ 3. — Յեթե a յեվ b յերկու փոփոխականների տարբերությունն իրենց բոլոր փոփոխությունների ընթացքում մնում է անվերջ-փոքր, կամ նրանք մնում են միմյանց հավասար յեվ դրա հետ միաժամանակ նրանցից մեկը, որինակ a, ձգտում է դեպի վորոշ A սահմանին, ապա մյուսը՝ (b)-ն յեվս ձգտում է նույն սահմանին:

Յեվ հիրավի. յենթադրենք $A = \lim a$

Այդ նշանակում է, վոր $(A - a)$ *տարբերության աբսոլյուտ մեծությունն անվերջ-փոքր է, այսինքն*

$$A - a = \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

(վորտեղ α*-ն անվերջ-փոքր է):*

Բացի այդ, ըստ պայմանի

$$b - a = \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(ուր β*-ն նույնպես անվերջ-փոքր է):*

Այն ժամանակ, (2)-ի համապատասխան մասերը հանելով (1)-ից, կըգտնենք, որ

$$A - b = \alpha - \beta$$

իսկ այդ նշանակում է, որ $\lim b = A$, որովհետև $(\alpha - \beta)$ տարբերությունն անվերջ-փոքր է։ Իսկ յեթե $a = b$, ապա $A - b = \alpha$ և այնուամենայնիվ $\lim b = A$

Օրինակ, տրամագծին զուգահեռ (գծ. 1 ա), կենտրոնին մոտեցող k և l (կամ k և n) յերկու լարի (դրա հետ միաժամանակ $k - l$ և $n - k$ լարերի տարբերությունն անվերջ-փոքր է, իսկ մասնավոր դեպքում $k - m = 0$, յեթե լարերը կենտրոնից հավասար են հեռացած), ընդհանուր սահմանը կըլինի K տրամագիծը։

§ 14. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՀԵՏԵՎԱՆՔՆԵՐԸ

1. Երկու փոփոխականների գումարի սահմանը հավասար է նրանց սահմանների գումարին:

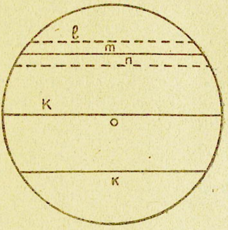
Ենթադրենք, a և b փոփոխականները համապատասխանաբար ունեն իրենց համար կայուն A և B սահմաններ, այնպես որ

$$a = A + \alpha$$
$$\text{և } b = B + \beta$$

որտեղ α և β անվերջ-փոքր են։ Համապատասխան մասերի գումարումից կստանանք

$$a + b = (A + B) + (\alpha + \beta)$$

(Այստեղ մենք ընդունում ենք, որ անվերջ-փոքր գումարելիների վերաբերմամբ ևս կիրառելի յե գումարելիների զուգորդման հատկությունը)։



Գծ. 1 ա.

Բայց գումար $a + b$-ն փոփոխական է, գումար $A + B$-ն կայուն, և այդ գումարներից առաջինը տարբերվում է յերկրորդից $\alpha + \beta$-ով, այսինքն անվերջ-փոքր թվով. ուստի

$$\lim (a + b) = A + B$$

բայց

$$A = \lim a \quad \text{և} \quad B = \lim b$$

հետևապես

$$\lim (a + b) = \lim a + \lim b$$

Այս թեորեմը ճիշտ է վորևե վերջավորյալ թվով վերցրած գումարելիների նկատմամբ։

2. Երկու փոփոխականների տարբերության սահմանը հավասար է նրանց սահմանների տարբերության:

Պահպանելով նախկին նշանակումները, կարող ենք գրել

$$a - b = (A - B) + (\alpha - \beta)$$

Այստեղ $a - b$ *տարբերությունը փոփոխական է,* $A - B$ *տարբերությունը՝ կայուն,* $\alpha - \beta$ *տարբերությունը՝ անվերջ-փոքր. ուստի*

$$\lim (a - b) = A - B$$

կամ

$$\lim (a - b) = \lim a - \lim b$$

Օրինակով ստուգեցեք ապացուցած թեորեմների ճշտությունը։

$$a = 4 + \frac{1}{2x} \quad \text{և} \quad b = 1 + \frac{1}{x}$$

x-ի անսահման աճման դեպքում։

3. Յերկու փոփոխականների արտադրյալի սահմանը հավասար է նրանց սահմանների արտադրյալին:

Նույն նշանակումները պահելով, կստանանք

$$a \cdot b = (A + \alpha) \cdot (B + \beta)$$

կամ

$$a \cdot b = AB + \alpha \cdot B + \beta \cdot A + \alpha \cdot \beta$$

Այստեղ $a \cdot b$ *արտադրյալը փոփոխական է,* AB *արտադրյալը՝ կայուն, և առաջինը տարբերվում է յերկրորդից հետևյալ գումարով*

$$\alpha \cdot B + \beta \cdot A + \alpha \cdot \beta$$

բայց այս գումարի գումարելիներից յուրաքանչյուրն անվերջ-փոքր է (անվերջ փոքրերի 2-րդ հատկության համաձայն) հետևապես, և ամբողջ գումարն է անվերջ-փոքր (1-ին հատկության համաձայն), բայց այդպիսի դեպքում

$$\lim (a \cdot b) = A \cdot B$$

վորտեղ

$$A = \lim a \quad \text{և} \quad B = \lim b$$

ուստի

$$\lim (a \cdot b) = \lim a \cdot \lim b$$

Հեշտ է այս թեորեմը տարածել վորևէ թվով վերցրած վերջավորյալ արտադրիչների վրա։

4. Փոփոխականի յեվ կայուն թվի բազմապատկումից ստացված արտադրյալի սահմանը հավասար է փոփոխականի սահմանին, բազմապատկած նույն կայուն թվով:

Տված է $\lim a = A$ *և վորևէ կայուն թիվ՝* C*-ն։ Վորովհետև* $a = A + \alpha$, *ապա հավասարության յերկու մասն էլ բազմապատկենք* C*-ով, կստանանք.*

$$a \cdot C = A \cdot C + \alpha \cdot C$$

$a \cdot C$ *արտադրյալը փոփոխական է,* $A \cdot C$ *արտադրյալը՝ կայուն, վերջապես* $\alpha \cdot C$*-ն՝ անվերջ-փոքր. ուստի*

$$\lim (a \cdot C) = AC$$

կամ

$$\lim (a \cdot C) = (\lim a) \cdot C$$

ՀԵՏԵՎԱՆՔ. Յեթե յերկու փոփոխական իրենց բոլոր փոփոխումների ընթացքում պահպանում են կայուն յեվ վերջավոր հարաբերություն, ապա այդ նույն հարաբերության մեջ կլինեն յեվ նրանց սահմանները:

Ցենթադրենք, a և b յերկու փոփոխականների հարաբերությունը միշտ մնում է հավասար կայուն C թվին, այսինքն

$$\frac{a}{b} = C$$

այդ դեպքում

$$a = b \cdot C$$

բայց քիչ առաջ ապացուցած թեորեմի համաձայն

$$\lim a = (\lim b) \cdot C$$

վորտեղից

$$\frac{\lim a}{\lim b} = C$$

5. **Յերկու վերջավորյալ փոփոխականների քանորդի սահմանը հավասար է նրանց սահմանների քանորդին:**

Նշանակենք a և b փոփոխականների քանորդը q տառով, այնպես վոր

$$\frac{a}{b} = q$$

կամ

$$a = b \cdot q$$

ըստ 3-րդ թեորեմի իրավունք ունենք գրել

$$\lim a = \lim (b \cdot q)$$

իսկ այդպիսի դեպքում

$$\lim a = \lim b \cdot \lim q$$

վորտեղից

$$\lim q = \frac{\lim a}{\lim b}$$

կամ

$$\lim \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\lim a}{\lim b}$$

Ի՞նչպես կփոխվի թեորեմի ձևակերպումը, յեթե բաժանելի a-ն լինի կայուն վերջավորյալ թիվ։

Ի՞նչպես կփոխվի թեորեմի ձևակերպումը, յեթե բաժանարար b-ն լինի կայուն վերջավորյալ թիվ։

Ճի՞շտ է արդյոք թեորեմը, յեթե բաժանարար b-ն հավասար լինի զերոյի։

6. **Ամբողջ ու դրական ցուցչով աստիճանի սահմանը հավասար է սահմանի նույն ցուցչով աստիճանին։**

Ցենթադրենք, տված է a^n, վորտեղ a-ն փոփոխական է, իսկ n-ը՝ դրական ամբողջ թիվ։

$$\lim a^n = \lim (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}) = \underbrace{\lim a \cdot \lim a \cdot \ldots \cdot \lim a}_{n}$$

(ինչու). հետևապես

$$\lim a^n = (\lim a)^n$$

Յեթե ցուցիչը կոտորակային է, որինակ

$\frac{p}{q}$, ուր p և q-ն ամբողջներ են

ապա, յենթադրելով

$$a^{\frac{p}{q}} = b$$

կունենանք

$$a^p = b^q$$

Յերրորդ թեորեմի հիման վրա կարող ենք գրել

$$\lim (a^p) = \lim (b^q)$$

բայց հենց նոր ապացուցածի համաձայն

$$\lim (a^p) = (\lim a)^p \text{ և } \lim (b^q) = (\lim b)^q$$

հետևապես

$$(\lim a)^p = (\lim b)^q$$

վորտեղից

$$(\lim a)^{\frac{p}{q}} = \lim b = \lim \left(a^{\frac{p}{q}}\right)$$

Յեթե ցուցիչը բացասական է, ապա

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

հետևապես

$$\lim (a^{-n}) = \lim \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\text{im } a^n} = \frac{1}{(\lim a)^n} = (\lim a)^{-n} \quad .$$

7. Փոփոխականից հանած արմատի (ամբողջ յեվ դրական ցուցչով) սահմանը հավասար է նրա սահմանից հանած արմատին:

Տրված է $\sqrt[n]{a}$, ուր a-ն փոփոխականն է, n-ը՝ դրական ամբողջ թիվ։ Գրենք հետևյալ նույնությունը

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

այդ դեպքում

$$\lim \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \lim a$$

իսկ ըստ նախկին թեորեմի

$$\lim \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(\lim \sqrt[n]{a}\right)^n$$

հետևապես

$$\left(\lim \sqrt[n]{a}\right)^n = \lim a$$

Հավասարության յերկու մասից էլ n աստիճանի արմատ հանելով, կգտնենք

$$\lim \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\lim a}$$

Ապացուցած թեորեմները մեզ բերում են այն յեզրակացության, վոր, ընդհանրապես, յերբ փոփոխականների միջև յեղած կապն արտահայտվում է վորևէ ֆորմուլով, ապա այդ փոփոխականների սահմանների միջև ևս կապ է ստեղծվում նույն ֆորմուլի միջոցով։

Օրինակ, (1—7) թեորեմների վրա հիմնվելով կարելի յե անմիջապես գրել

$$\lim \frac{x^m + y}{z - u^3} = \frac{\lim(x^m + y)}{\lim(z - u^3)} = \frac{\lim x^m + \lim y}{\lim z - \lim u^3} = \frac{(\lim x)^m + \lim y}{\lim z - (\lim u)^3}$$

այսինքն,վորպեսզի հաշվենք x, y, z և u փոփոխականների ֆունկցիայի սահմանը, բավական է վերցնել այդ փոփոխականների սահմանները և նրանց հետ կատարել նույն գործողությունները և նույն հետևողականությամբ, ինչ վոր ցույց է տրված այդ նույն փոփոխականների համար։

Սահմանների ուսմունքի օգտագործումը հեշտացնում է խնդիրների լուծումը, վորովհետև թույլ է տալիս փոփոխական թվերի հետ կատարելիք գործողությունները փոխարինել այն կայուն թվերի նույն գործողություններով, վորոնք հանդիսանում են նույն փոփոխականների սահմանները:

Օրինակ, սահմանների օգնությամբ մենք կարող ենք լուծել հետևյալ հարցը. ինչի՞ յե հավասար անվերջ—փոքր աղեղի սինուսի և իրեն աղեղի հարաբերության սահմանը, այսինքն գտնել

$$\lim \frac{\sin x}{x} \quad \text{յերբ } x \longrightarrow 0\text{-ի}$$

(յերբ x-ի թվային արժեքը ձգտում է զերոյի)։

Առաջին քառորդի դրական աղեղի համար

$$\operatorname{tg} x > x > \sin x$$

կամ

$$\frac{\sin x}{\cos x} > x > \sin x$$

Յեթե վերցնենք այդ անհավասարության անդամների հակադարձ թվերը, այդ դեպքում անհավասարության նշանները նույնպես կփոխվեն հակառակ նշանների, այսինքն

$$\frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

Այս անհավասարության բոլոր անդամները յերբ բազմապատկենք $\sin x$-ով, կստանանք

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Յեթե ընդունենք, վոր աղեղ x-ը, անսահմանորեն պակասելով, ձգտում է զերոյի, $\cos x$-ը կլինի փոփոխական մեծություն, վորի համար սահման է հանդիսանում մեկ միավորը, այնպես վոր

$$\cos 0 = 1$$

բայց $\frac{\sin x}{x}$ փոփոխական հարաբերությունն իր փոփոխումների դեպքում, ինչպես այդ ցույց է տալիս անհավասարություն (1)-ը, պարփակվում է փոփոխական $\cos x$-ի և նրա սահմանի միջև. հետևապես $\frac{\sin x}{x}$ փոփոխականըն ունի նույն սահմանը, այսինքն

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \text{յերբ } x \longrightarrow 0\text{-ի}$$

Այսպես ուրեմն, սինուսի և իր աղեղի հարաբերության սահմանը, յերբ աղեղը ձգտում է զերոյի, հավասար է մեկ միավորի։

Վճռենք յերկու օրինակ ևս.

1. Գտնենք $\frac{4+x}{12+x}$ հարաբերության սահմանը, այն դեպքում, յերբ x-ը ձգտում է զերոյի։

$$\lim \frac{4+x}{12+x} = \frac{\lim(4+x)}{\lim(12+x)} = \frac{\lim 4+\lim x}{\lim 12+\lim x}$$

բայց 4 և 12 կայուն թվերն իրենք իրենց սահմանն են. հետևապես, նկատի առնելով, վոր $\lim x = 0$, կգտնենք

$$\lim \frac{4+x}{12+x} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

2. Գտնենք $\frac{1-a^2}{1-a}$ հարաբերության սահմանն այն դեպքում, յերբ a-ն ձգտում է մեկ միավորի։ Սահմանի մեջ, փոխարինելով a-ն մեկ միավորով, անմիջականորեն կստանանք $\frac{0}{0}$ արտահայտությունը, վորը կոչվում է անորոշ, վորովհետև կարելի յե այն հավասարեցնել ցանկացած վորևե վերջավոր թվի։

Փոփոխական a-ին տանք այնպիսի արժեքներ, վոր աստիճանաբար մեծանալով մոտիկ լինեն միավորին, բայց միշտ միավորից փոքր մնան

0,9; 0,99; 0,999; 0,9999 և այլն։

Այդ դեպքում տված հարաբերության համապատասխան արժեքները կլինեն

1,9; 1,99; 1,999; 1,9999 և այլն։

Առաջին շարքի թվերի արժեքները մոտենում են մեկ միավորի. յերկրորդ շարքի թվերի արժեքները մոտենում են յերկուսի։

Վորովհետև $1-a^2 = (1-a)(1+a)$, ուստի

$$\frac{1-a^2}{1-a} = \frac{(1-a)(1+a)}{1-a} = 1+a$$

յեթե համարիչն ու հայտարարը կրճատենք $(1-a)$-ով, վորպիսի իրավունք մենք ունենք, վորովհետև a-ն անսահմանորեն մոտենում է մեկ միավորի, բայց չի հավասարվում նրան։

Պարզ ձև տալով հարաբերությանը, փնտռենք նրա սահմանը, յեթե

$$a \longrightarrow 1$$

$$\lim(1+a) = 1+\lim a = 1+1 = 2$$

Յեվ այսպես $\lim \frac{1-a^2}{1-a} = 2$-ի, յեթե $a \longrightarrow 1$-ի։

Օրինակ

Գտնենք $\frac{2x+3}{x+1}$ փոփոխականի սահմանը, յեթե x-ն անսահմանորեն աճում է, այսինքն $x \longrightarrow \infty$։

Վորովհետև $\frac{2x+3}{x+1} = 2+\frac{1}{x+1}$, ապա կարելի յե գրել.

$$\lim\left(\frac{2x+3}{x+1}\right) = \lim\left(2+\frac{1}{x+1}\right) = 2+\lim\frac{1}{x+1}$$

Երբ $x \longrightarrow \infty$, թվային արժեքը $\frac{1}{x+1} \longrightarrow 0$, այսինքն կոտորակը ձգտում է զերոյի

$$\lim \frac{1}{x+1} = 0$$

հետևապես

$$\lim \left(\frac{2x+3}{x+1}\right) = 2, \text{ երբ } x \longrightarrow \infty$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

167. Գտեք $\lim \frac{1+x}{x}$, եթե $x \to \infty$

168. Գտեք $\left(1+\frac{1}{x}\right)^m - 1$, եթե m-ն ամբողջ և դրական է, իսկ $x \to \infty$։

Ցուցմունք. $\lim \left(1+\frac{1}{x}\right)^m = \left[\lim \left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^m$

169. Գտեք հետևյալ արտահայտության սահմանը

$$\frac{1+2+3+\ .\ .\ .\ +x}{x^2}$$

եթե x-ը ընդունելով ամբողջ և դրական արժեքներ, անսահման մեծանում է։

170. Գտեք հետևյալ արտահայտության սահմանը.

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ .\ .\ .}}}$$

Ցուցմունք. Տված արտահայտությունը գրեք հավասար x-ի և ապա վերծանեք ստացած հավասարումը։

171. Մի բաժակ բորակային թթվույտը խառնեցին մի բաժակ ջրի հետ. ստացած խառնուրդի մի բաժակին նորից մի բաժակ ջուր խառնեցին. ստացած նոր խառնուրդի մի բաժակին ելի մի բաժակ ջուր խառնեցին և նույն գործողությունը կրկնեցին n անգամ։ Վերջան թթվույտ է պարունակվում վերջին խառնուրդի մի բաժակի մեջ։

Բացատրեցեք խառնուրդի բաղադրության համար ստացած արտահայտության արժեքը, եթե $n \longrightarrow \infty$։

172. Գտեք $\frac{3n^3+n}{n^3-1}$ արտահայտության սահմանը, եթե $n \longrightarrow \infty$։

173. Գտեք հետևյալ արտահայտությունների սահմանը.

1) $1 - \cos x$, եթե $x \longrightarrow 0$; 2) $\frac{1+\sin x}{1+\cos x}$, եթե $x \longrightarrow 0$

§ 15. ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Թվաբանությունից հայտնի է, թե ինչպես պետք է հասարակ կոտորակը դարձնել տասնորդական։ Հասարակ կոտորակը տասնորդական դարձնելիս, չերբեմն ստանում ենք վերջավորյալ տասնորդական կոտորակ, օրինակ, $\frac{3}{4} = 0{,}75$. չերբեմն էլ ստանում ենք պարբերական կոտորակ. օրինակ,

$\frac{2}{9} = 0{,}2222\ .\ .\ .$

Վերջին դեպքում հասարակ կոտորակն արտահայտում ենք տասնորդական կոտորակով, միայն թե վորևէ մոտավոր ճշտությամբ. որինակ, 0,1-ի, 0,01-ի և այլն. բացի այդ, մոտավոր ճշտությունը վերցնում ենք կամ պակասորդով, կամ հավելորդով։

Այն էլ գիտենք, վոր անկրճատելի հասարակ կոտորակը դառնում է պարզ պարբերական, յեթե նրա հայտարարը և 10 թիվը փոխադարձ պարզ թվեր են. անկրճատելի հասարակ կոտորակը դառնում է խառը պարբերական, յեթե նրա հայտարարի արտադրիչների մեջ ի միջի այլոց կան նաև 10-ի արտադրիչներից 2-ը կամ 5-ը, կամ և 2-ը և 5-ը։

Որինակ

$$\frac{2}{3}=0,(6);\qquad \frac{1}{6}=0,1(6);\qquad \frac{1}{9}=0,(1)$$

$$\frac{1}{45}=0,0(2);\qquad \frac{3}{11}=0,(27);\qquad \frac{7}{13}=0,(538461)$$

Պարբերական կոտորակները հասարակ դարձնելը

Վերցնենք վորևէ պարզ պարբերական կոտորակ, որինակ 0,(43)։ Այդ նշանակում է. վորևէ հասարակ կոտորակ տասնորդական դարձնելիս ստացվել է պարբերական տասնորդական կոտորակ.

$$0,434343\ .\ .\ .$$

անհայտ հասարակ կոտորակի արժեքը նշանակենք x-ով.

$$x=0,(43)$$

Ստորակետը փոխադրենք մի պարբերություն դեպի աջ, այսինքն պարբերական կոտորակի արժեքը մեծացնենք 100 անգամ։

Ակներև է, վոր փնտրելիք հասարակ կոտորակն էլ կմեծանա 100 անգամ, այսինքն

$$100x=43,4343\ .\ .\ .$$

և վորովհետև

$$x=0,4343\ .\ .\ .$$

ուստի համապատասխան մասերն իրարից հանելով կստանանք

$$99x=43$$

որտեղից

$$x=\frac{43}{99}$$

այսինքն

$$0,(43)=\frac{43}{99}$$

Յեթե պարբերության մեջ լիներ 3 թվանշան, որինակ, 0,(461), նույն դատողությամբ կարելի յեր ապացուցել, վոր

$$0,(461)=\frac{461}{999}$$

Առհասարակ, պարզ պարբերական կոտորակ ստանում ենք այնպիսի հասարակ կոտորակից, վորի համարիչը հավասար է պարբերությանը, իսկ հայտարարը մի թիվ է, վորի մեջ թվանշան 9-ը կրկնվում է այնքան անգամ, վորքան թվանշան կա պարբերության մեջ։

Այժմ վերցնենք մի խառը պարբերական կոտորակ, որինակ, 0,2(17), վորն ստացվել է x հասարակ կոտորակից.

Ստորակետը փոխադրենք մի պարբերություն դեպի աջ, այսինքն խառը պարբերականը մեծացնենք 1000 *անգամ: Այդ դեպքում փնտռելիք անհայտ հասարակ կոտորակն էլ կմեծանա* 1000 *անգամ: Այժմ էլ ստորակետը փոխադրենք դեպի աջ, մինչև առաջին պարբերությունը, այսինքն պարբերական կոտորակը մեծացնենք* 10 *անգամ, այն ժամանակ անհայտ հասարակ կոտորակը նույնպես կմեծանա* 10 *անգամ. հետևապես կստանանք*

$$1000x = 217{,}1717\ .\ .\ .$$
$$10x = 2{,}1717\ .\ .\ .$$

համապատասխան մասերը հանելով, կստանանք

$$990x = 217 - 2$$

վորտեղից

$$x = \frac{217-2}{990}$$

Յեթե մինչև պարբերությունը լինի յերկու թվանշան, իսկ պարբերության մեջ յերեք թվանշան որինակ 0,42(715), *նույն դատողությամբ կըգտնենք*

$$x = \frac{42715-42}{99900}$$

Ընդհանրապես, **խառը պարբերական կոտորակ ստացվում է այնպիսի հասարակ կոտորակից, վորի համարիչն է ստորակետից մինչև առաջին պարբերության վերջը յեղած թվի յեվ ստորակետից մինչև առաջին պարբերությունը յեղած թվի տարբերությունը. իսկ հայտարարն է մի թիվ, վորի մեջ թվանշան 9-ը կրկնված է այնքան անգամ, վորքան թվանշան կա պարբերության մեջ յեվ 9-ին կցած այնքան զերո, վորքան թվանշան կա ստորակետից մինչև առաջին պարբերությունը:**

Որինակ.

$$0{,}3(42) = \frac{342-3}{990} = \frac{339}{990} = \frac{113}{330}$$

$$0{,}73(41) = \frac{7341-73}{9900} = \frac{7268}{9900} = \frac{1817}{2475}$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ. *Հետևյալ պարզ և խառը պարբերական կոտորակները դարձրեք հասարակի:*

174. 0,(4); 0,(22); 0,(05); 0,(605);
175. 0,1(43); 0,03(54); 0,00(16); 0,13(456);
176. 0,0(32); 0,03(47); 0,00(673); 0,41(835):

§ 16. *ՔԱՆՈՐԴԱԿԱՆ ԱՆՎԵՐՋ ՊՐՈԳՐԵՍՍԻԱ: ԱՆՎԵՐՋ ՆՎԱԶՈՂ ՔԱՆՈՐԴԱԿԱՆ ՊՐՈԳՐԵՍՍԻԱՅԻ ԳՈՒՄԱՐԻ ՍԱՀՄԱՆԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ*

Յուրաքանչյուր քանորդական պրոգրեսիա կարելի յե ուզածին չափ շարունակել, անկախ նրանից, արդյոք աճող է նա, թե նվազող: Գործնականում նշանակություն ունեն միայն այն նվազող պրոգրեսիաները, վորոնց անդամների թիվը անսահմանորեն աճում է, վորովհետև նման պրոգրեսիաները, ինչպես հետագայում կտեսնենք, մատչելի յեն գումարման համար:

Նախորոք ապացուցենք յերկու թեորեմ:

ԹԵՈՐԵՄ 1.—Եթե թիվ $q>1$, ապա q-ի ամբողջ յեվ դրական աստիճանները աճում են n ցուցչի մեծանալու հետ միասին, յեվ բավականաչափ մեծ n-ի դեպքում կարող են գերազանցել ամեն մի մեծ A թվի։

Պարզ է, որ

$$q^2>q;\quad q^3>q^2$$

և այլն, այնպես որ, ընդհանրապես

$$q^n>q^{n-1}$$

այսինքն, n-ի աճելու հետ աճում է և աստիճանը։

Ցույց տանք, որ միշտ էլ կարելի յե n ցուցչի համար գտնել այնպիսի արժեք, որ $q^n>A$, որքան էլ ուզում է մեծ լինի այդ վերջինը։

Որովհետև $q>1$, ապա q-ի և մեկի տարբերությունը նշանակելով α, կունենանք

$$q-1=\alpha$$

$$q^2-q>\alpha,\ \textit{որովհետև}\ q>1,\ \textit{հետևապես}\ q\alpha>\alpha$$

$$q^3-q^2>\alpha$$

$$\cdots\cdots$$

$$q^n-q^{n-1}>\alpha$$

Այդ n անհավասարությունների համապատասխան մասերը գումարելով, կստանանք

$$q^n-1>n\alpha$$

կամ

$$q^n>1+n\alpha$$

Որպեսզի բավարարենք $q^n>A$ անհավասարությանը, բավական է, որ լինի

$$1+n\alpha>A$$

կամ

$$n>\frac{A-1}{\alpha}$$

բայց որքան էլ ուզում է մեծ լինի A-ն, ակներև է, միշտ էլ կարելի յե n-ի համար գտնել այնպիսի արժեք, որ գերազանցի $\frac{A-1}{\alpha}$

Օրինակ, n-ի ո՞ր արժեքի դեպքում $(1,001)^n$ աստիճանը մեծ կլինի 10000-ից։

Պարզ է, որ $n>\frac{10000-1}{0,0001}$-ի դեպքում, այսինքն $n>99990000$-ի դեպքում։

ԹԵՈՐԵՄ 2.—Եթե թիվ $q<1$, ապա q-ի ամբողջ յեվ դրական աստիճանները նվազում են n ցուցչի մեծանալու հետ միասին, յեվ բավականին մեծ n-ի դեպքում կարող են ուզածին չափ մոտենալ զերոյի։

Հիրավի, յեթե $0<q<1$, ապա

$$q^2<q;\quad q^3<q^2\ \textit{և ընդհանրապես}\ q^n<q^{n-1}$$

այսինքն, n-ի աճելու հետ նվազում են q-ի աստիճանները։

Դիցուք $q=\frac{1}{p}$, ուր $p>1$։ Այդ դեպքում $q^n=\frac{1}{p^n}$

Բայց ըստ առաջին թեորեմի, յեթե $p>1$, ապա բավականին մեծ n-ի դեպքում p^n-ը կարող է ուզածին չափ մեծանալ։

Որքան մեծ է կոտորակի հայտարարը, այնքան փոքր է նրա թվային արժեքը, ուստի պարզ է, որ n-ի աճելու հետ q^n անսահմանորեն նվազում է, որովհետև p^n անսահմանորեն աճում է, կամ սահմանների լեզվով ասած, n-ի դեպի անսահմանությունը ձգտելու դեպքում $\frac{1}{p^n}$ կոտորակը, հետևապես, q^n-ն ձգտում է զրոյի:

Անվերջ նվազող քանորդական պրոգրեսիայի գումարի սահմանի հաշվումը

Տված է նվազող քանորդական պրոգրեսիա

$$\div\div\; a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$$

Այս պրոգրեսիայի անդամները, երբ $q < 1$, որքան հեռանում են շարքի սկզբից, այնքան նվազում են: Շարունակելով այս պրոգրեսիան անսահման հեռու, 2-րդ թեորեմի հիման վրա կարող ենք ասել, որ n-ի բավականին մեծ լինելու դեպքում $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ կարող է դառնալ ուզածին չափ փոքր:

Այդպիսի պրոգրեսիայի n անդամների գումարը ներկայացնենք տարբերության ձևով.

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n$$

Այդ տարբերության նվազելին կախումն չունի n-ից:

Իսկ հանելին պարունակում է արտադրիչ q^n-ին, որը n-ի բավականին մեծ լինելու դեպքում՝ կարող է ուզածին չափ փոքրանալ. հետևապես, n-ի անսահմանությանը ձգտելու դեպքում, այդ արտադրիչը ձգտում է զրոյի, իսկ նրա հետ միասին զրոյի յե ձգտում և $\frac{a_1}{1-q} \cdot q^n$ ամբողջ արտադրյալը, քանի որ առաջին արտադրիչն a_1 և q-ի տված վերջավորյալ արժեքների դեպքում՝ վերջավորյալ մեծություն է, որովհետև $q \neq 1$:

Այդպիսի անվերջ նվազող քանորդական պրոգրեսիայի անդամների S գումարը, այնքան ավելի քիչ կտարբերվի S-ին հավասար ամբողջ տարբերության նվազելի $\frac{a_1}{1-q}$-ից, որքան հանելին մոտիկ լինի զրոյին. այսպիսով, անվերջության ձգտող n-ի դեպքում, $\lim q^n = 0$. հետևապես

$$\lim \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n = 0$$

իսկ այդպիսի դեպքում

$$\lim S = \frac{a_1}{1-q}$$

Կարելի յե a_1-ի ինդեքսը բաց թողնել և ուղղակի գրել.

$$\lim S = \frac{a}{1-q}$$

այսինքն, անվերջ նվազող քանորդական պրոգրեսիայի անդամների գումարի սահմանը հավասար է մի կոտորակի, վորի համարիչն է պրոգրեսիայի առաջին անդամը, իսկ հայտարարն է 1-ի յեվ պրոգրեսիայի հայտարարի տարբերությունը:

Օրինակ, հետևյալ պրոգրեսիայում

$$\div 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \cdot \cdot \cdot$$

ունենք

$$a = 1; \; q = \frac{1}{2}; \quad \text{հետևապես} \quad \lim S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$$

Ստացած հետևանքը պետք է հասկանալ այն մտքով, վոր այդ պրոգրեսիայի անդամների գումարի արժեքն այնքան ավելի քիչ է տարբերվում 2-ից, վորքան n-ը մեծ է, այսինքն վորքան ավելի շատ է լինում հաշվելիք անդամների թիվը: Հիրավի

2	*անդամի*	*դեպքում*	*մոտավոր*	*գումարն է*	$1\frac{1}{2}$	*վրիպակը՝*	$\frac{1}{2}$
3	»	»	»	»	$1\frac{3}{4}$	»	$\frac{1}{4}$
4	»	»	»	»	$1\frac{7}{8}$	»	$\frac{1}{8}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
10	»	»	»	»	$1\frac{511}{512}$	»	$\frac{1}{512}$

n *անդամների դեպքում մոտավոր գումարն է*

$$2 - \frac{1}{1-q} \cdot q^n$$

կամ $2 - 2 \cdot \frac{1}{2^n}$ *վրիպակը՝* $\frac{1}{2^{n-1}}$

այնպես վոր, օրինակ, 14 *անդամի դեպքում վրիպակը կլինի* $\frac{1}{2^{13}} = \frac{1}{8192}$

ՕՐԻՆԱԿ

Պարբերական կոտորակը դարձնել հասարակ

Տված է 0,(23) *պարզ պարբերական կոտորակը:*

Այդ նշանակում է, վոր $0,(23) = 0,2323 \; . \; . \; . = \frac{23}{100} + \frac{23}{10000} + \frac{23}{1000000} + \cdot \cdot \cdot$

Աջ մասն իրենից ներկայացնում է անվերջ նվազող քանորդական պրոգրեսիայի գումարի սահմանը, վորի $a = \frac{23}{100}; \; q = \frac{1}{100}$

$$\text{հետևապես} \quad \lim S = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{23}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\left(\frac{23}{100}\right)}{\left(\frac{99}{100}\right)} = \frac{23}{99}$$

Նմանապես 0,4(13) *խառը պարբերական կոտորակի համար կարելի յե գրել*

$$0,4(13) = \frac{4}{10} + \frac{13}{1000} + \frac{13}{100000} + \cdot \cdot \cdot = \frac{4}{10} + \frac{13}{1000}\left(1 + \frac{1}{100} + \cdot \cdot \cdot\right)$$

Փակագծերի մեջ ստացանք անվերջ նվազող քանորդական պրոգրեսիայի անդամների գումարի սահմանը, վորի $a = 1; \; q = \frac{1}{100}$ *հետևապես*

$$\lim S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{100}{99}$$

այդ դեպքում

$$0,4(13) = \frac{4}{10} + \frac{13}{1000} \cdot \frac{100}{99} = \frac{4}{10} + \frac{13}{990}$$

կամ

$$0{,}4(13)=\frac{4\,.\,99+13}{990}=\frac{4(100-1)+13}{990}=\frac{400-4+13}{990}=\frac{413-4}{990}$$

Այս հետևանքները մեզ արդեն հայտնի էին, սակայն այժմ ուրիշ յեղանակով ստացանք։

Վճռենք մի այսպիսի խնդիր. a կողմ ունեցող քառակուսու կողմերի միջնակետերը միանում են միմյանց հետ ուղիղներով։ Այդպիսով ստացված նոր քառակուսու կողմերի միջնակետերը նորից միանում են միմյանց հետ ուղիղներով և այդպես շարունակվում անվերջ։

Վորոշենք այդ քառակուսիների կողմերի և մակերեսների գումարների սահմանները։

Լուծումն։ *Յերկրորդ քառակուսու կողմը $\frac{a}{2}$ էջ ունեցող հավասարասրուն ուղղանկյուն յեռանկյան ներքնաձիգն է. հետևապես, նա հավասար է*

$$\sqrt{\frac{2a^2}{4}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

Յերրորդ քառակուսու կողմը կգտնենք նույն յեղանակով և կստանանք $\frac{a}{2}$։ Կողմերի գումարն է $a+\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{a}{2}+\,.\;.\;.$ այսինքն՝ կստանանք անվերջ նվազող քանորդական պրոգրեսիա, վորի առաջին անդամն է a և հայտարարը՝ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ հետևապես, կողմերի գումարի սահմանը կլինի

$$\frac{a}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=a(2+\sqrt{2})$$

այնուհետև, առաջին քառակուսու մակերեսն է a^2; յերկրորդի մակերեսն է $\frac{a^2}{2}$; յերրորդի մակերեսը՝ $\frac{a^2}{4}$ և այլն. հետևապես, մակերեսների գումարն է

$$a^2+\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}+\,.\;.\;.$$

այդ գումարի սահմանը հավասար է

$$\frac{a^2}{1-\frac{1}{2}}=2a^2$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ։ *Գտեք անվերջ նվազող քանորդական պրոգրեսիաների գումարների սահմանները.*

177. $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\,.\;.\;.$

178. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\,.\;.\;.$

179. $1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}+\,.\;.\;.$

180. $1-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{5}-\,.\;.\;.$

181. *Գտնենք հետևյալ գումարի սահմանը*

$$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\,.\;.\;.+\frac{1}{n(n+1)}+\,.\;.\;.$$

Լուծում. Այս գումարի n րդ անդամը կարելի է ներկայացնել $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ տարբերության ձևով. ուստի և յուրաքանչյուր գումարելին նման տեսքն է ընդունում. հետևապես, այդ շարքի n անդամների գումարն է

$$S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ .\ .\ .+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Յուրաքանչյուր տարբերության յերկրորդ անդամը և նրան հաջորդող տարբերության առաջին անդամը տալիս են գումարում զերո. հետևապես

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}$$

անսահման մեծ n-ի դեպքում $\lim\frac{1}{n+1}=0$, այսինքն $\lim S_n=1$։

182. Գտեք հետևյալ շարքի անդամների գումարի սահմանը.

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ .\ .\ .+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

օգտվելով հետևյալ նույնությունից

$$\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}$$

183. Գտեք անվերջ նվազող քանորդական պրոգրեսիայի գումարի սահմանը, վորի առաջին անդամը մեկ միավոր է, իսկ յուրաքանչյուր անդամ K անգամ մեծ է նրան հաջորդող բոլոր անդամների գումարից։

184. AB ուղիղը կիսվում է C կետում։ CB հատվածը կիսվում D կետում. այնուհետև DB հատվածը կիսվում E կետում և այսպես շարունակվում անվերջ։ Գտեք բաժանման կետի սահմանային հեռավորությունը B-ից։

185. Ժամեր ցույց տվող և րոպե ցույց տվող սլաքները կեսօրին համատեղվում են։ Յե՞րբ նորից կհանդիպեն նրանք։

Ցուցմունք. պետք է վորոնել գումարի սահմանը.

$$1+\frac{1}{12}+\frac{1}{12^2}+\ .\ .\ .$$

186. a կողմ ունեցող հավասարակողմ յեռանկյան կողմերի միջնակետերը միացնելով ներգծում են հավասարակողմ նոր յեռանկյուն. սրան ևս նույն ձևով ներգծում նոր յեռանկյուն, և այսպես անվերջ։

Գտեք. 1) բոլոր յեռանկյունների մակերեսների գումարի սահմանը. 2) այդ յեռանկյուններին ներգծած շրջանների մակերեսների գումարի սահմանը։

ԳԼՈՒԽ IV

ԻՌՌԱՑԻՈՆԱԼ ԹՎԵՐ։ ԱՆՀԱՄԱՉԱՓԵԼԻ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§ 17. ՀԱՍԿԱՑՈՂՈՒԹՅՈՒՆ ԻՌՌԱՑԻՈՆԱԼ ԹՎԻ ՄԱՍԻՆ

Ամբողջ և կոտորակ հարաբերական թվերը միասին առած կոչվում են ռացիոնալ թվեր։ Վորովհետև ռացիոնալ թվերից արմատ հանելու գործողությունը հնարավոր է վոչ ամեն դեպքում, ապա, ընդհանրացման նպատակով, վորպեսզի այդ գործողությունը միշտ հնարավոր համարվի, հանրահաշվի մեջ ներմուծում են այսպես կոչված իռռացիոնալ թվեր։

Վերհիշենք, վոր բաժանման այն դեպքը, յերբ բաժանելին փոքր է բաժանարարից, մեզ բերում է կոտորակային թվերի հասկացողությանը։ Փոքր թվից մեծ թիվ հանելու դեպքը բերում է բացասական թվերի հասկացողությանը, այսինքն մեր հասկացողությունը թվի մասին նախկին գործողությունների ուսումնասիրության ժամանակ հետզհետե լայնանում եր։

Արմատ հանելու այն դեպքը, յերբ արմատատակ թիվը չի հանդիսանում արմատացուցչին համապատասխանող ճիշտ աստիճան, ստիպում է մեզ մի յերրորդ քայլ ևս անել դեպի թվերի մասին ունեցած գաղափարի լայնացումը։

Վերցնենք, որինակ, $\sqrt{3}$։ Այդ արմատի արժեքը չի կարելի արտահայտել ճշտությամբ վոչ ամբողջ, վոչ էլ կոտորակային թվով։

Հիրավի

$$1^2=1; \quad 2^2=4;$$

հետևապես

$$\sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$$

այսինքն

$$1<\sqrt{3}<2$$

վորտեղից հետևում է, վոր $\sqrt{3}$ ամբողջ թիվ չէ։

Այժմ յենթադրենք, վոր

$$\sqrt{3}=\frac{p}{q}$$

վորտեղ $\frac{p}{q}$ անկրճատելի կոտորակ է, այդ դեպքում

$$3=\frac{p^2}{q^2}$$

իսկ $\frac{p^2}{q^2}$ նույնպես անկրճատելի կոտորակ է (ինչու՞), հետևապես այդպիսի հավասարություն տեղի ունենալ չի կարող, այսինքն $\sqrt{3}$ կոտորակային թիվ չէ։

Վերցնենք մի քառակուսի, վորի մակերեսը հավասար է 3 քառակուսի միավորի։ Եթե այդ քառակուսու կողմը նշանակենք α-ով, ապա $\alpha^2=3$, հետևապես

$$\alpha=\sqrt{3}$$

Ինչպես պարզեցինք, α թիվը չի կարող լինել վոչ ամբողջ, վոչ էլ կոտորակային թիվ։ Այդ թիվը չունի ընդհանուր չափ միավորի հետ, այսինքն նա ճշտությամբ չի կարող արտահայտվել միավորի վորևէ մասերով։

Հենց այդպիսի թվերն էլ պայմանավորվել են անվանել իռռացիոնալ։

Մենք գիտենք, վոր անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակները ճշտությամբ արտահայտվում են հասարակ կոտորակներով, հետևապես նրանք ռացիոնալ թվեր են։

Իսկ ամեն մի իռռացիոնալ թիվ կարելի յե արտահայտել անվերջ, վոչ-պարբերական տասնորդական կոտորակով:

Վերցնենք վորևէ իռռացիոնալ թիվ, որինակ, $\sqrt{2}$, և հաշվենք նրա մոտավոր արժեքները

1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; . . . պակասորդով,
2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; . . . հավելորդով։

Կարելի յե կազմել անհավասարությունների հետևյալ շարքը․

$1<\sqrt{2}<2$; մոտավորությունների տարբերությունն է 1
$1,4<\sqrt{2}<1,5$ » » 0,1
$1,41<\sqrt{2}<1,42$ » » 0,01
$1,414<\sqrt{2}<1,415$ » » 0,001
$1,4142<\sqrt{2}<1,4143$ » » 0,0001
. . . .

այստեղից յերևում է, վոր $\sqrt{2}$ իռռացիոնալ թիվը կապված է անհավասարությունների հետևյալ սիստեմի հետ

$$1<1,4<1,41<1,414<1,4142<\ldots<\sqrt{2}\ \ldots\ (1)$$
$$2>1,5>1,42>1,415>1,4143>\ldots>\sqrt{2}\ \ldots\ (2)$$

այսինքն $\sqrt{2}$ թվային արժեքը կարելի յե հաշվել վորևէ աստիճանի մոտավոր ճշտությամբ, որինակ մինչև $\frac{1}{10^n}$ մոտավոր ճշտությամբ։

$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, և ընդհանրապես ամեն մի $\sqrt{N}$ իռռացիոնալ թվի համար կարելի յե ստանալ անհավասարությունների նույնպիսի սիստեմ.

$$k_0<k_1<k_2<k_3<\ldots<k_n\ \ldots<\sqrt{N}\ \ldots\ (I)$$
$$l_0>l_1>l_2>l_3>\ldots>l_n\ \ldots>\sqrt{N}\ \ldots\ (II)$$

վորտեղ պակասորդով և հավելորդով մոտավորությունների ինդեքսը համապատասխանում է մոտավորության կոտորակի հայտարարի ցուցչին, այսինքն

$k_0<\sqrt{N}<l_0$ մոտավորության տարբերությունն է 1
$k_1<\sqrt{N}<l_1$ » » 0,1
$k_2<\sqrt{N}<l_2$ » » 0,01
. . . . . .
$k_n<\sqrt{N}<l_n$ » » $\frac{1}{10^n}$

որտեղից հետևում է, որ

$$\sqrt{N} - k_n < \frac{1}{10^n}$$

$$l_n - \sqrt{N} < \frac{1}{10^n}$$

այսինքն մոտավորությունների յուրաքանչյուրը տարբերվում է $\sqrt{N}$ իսկական արժեքից ավելի, քան $\frac{1}{10^n}$ փոքր չափով։

Մոտավորության կոտորակի 10^n հայտարարի n-ն ցուցիչը կարելի է մեծացնել, անսահման, այդ դեպքում $\frac{1}{10^n}$ կոտորակի թվային արժեքն անսահման կնվազի ձգտելով զերոյին։

Այդ պատճառով $\sqrt{N}$ իռացիոնալ թիվը կարելի է դիտել, որպես անփոփոխ մեծություն։ Այդ թվի և k կամ l մոտավորությունների յուրաքանչյուրի տարբերությունը կարելի է դարձնել ուզածին չափ փոքր։

Հիրավի, k-ի արժեքների, այսինքն պակասորդով մոտավորությունների, (I) շարքից երևում է, որ փոփոխական k թիվը, որի արժեքները կախված n-ի մեծանալուց, աճում են, մնում է միշտ $\sqrt{N}$ ավելի փոքր։ L-ի արժեքների, այսինքն հավելորդով մոտավորությունների, (II) շարքից երևում է, որ փոփոխական l թիվը, որի արժեքները, կախված n-ի մեծանալուց, նվազում են, մնում է միշտ $\sqrt{N}$ ավելի մեծ։

Դրա հետ միասին $\sqrt{N} - k_n$ և $l_n - \sqrt{N}$ երկու տարբերությունները անսահման նվազում են, ձգտելով զերոյին, երբ n-ը անսահման աճում է։

Այսպես, ուրեմն ամեն մի $\sqrt{N}$ իռացիոնալ թվի համար կարելի է կազմել անհավասարությունների հետևյալ սխեմը

$$k_0 < k_1 < k_2 \ldots < k_n \ldots < \sqrt{N}$$
$$l_0 > l_1 > l_2 \ldots > l_n \ldots > \sqrt{N}$$

որը հնարավորություն է տալիս $\sqrt{N}$ իռացիոնալ թիվը դիտել, որպես սահման, որին անսահման մոտենում են k յեվ l փոփոխականները, առաջինները մեծանալով, իսկ յերկրորդները փոքրանալով ըստ մոտավորության աստիճանի աճման։

Այդ կանոնը գործադրելի է ոչ միայն քառակուսի արմատների, այլ և ամեն մի աստիճանի արմատների նկատմամբ։

Այստեղից հետևում է, որ ամեն մի իռացիոնալ թիվ կարելի է բաղդատել k և l փոփոխական ռացիոնալ թվերի հետ, որոշելով, կլինի արդյոք տված իռացիոնալ թիվը մեծ կամ փոքր ընտրված ռացիոնալ թվից, ուրիշ խոսքով ասած, ամեն մի իռացիոնալ թիվ k և l ռացիոնալ թվերի նկատմամբ ունի իր միանգամայն որոշ տեղը։

Ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերը միասին առած կազմում են իրական թվերի շրջանը, որը տալիս է թվային ավելի լրիվ շարք, քան միայն ռացիոնալ թվերից կազմվածը։

Մենք արդեն ծանոթ ենք թվային առանցքի հետ, որի վրա կարելի է տալ յերկրաչափական պատկերացումն ամեն մի ռացիոնալ թվի, այսինքն ամբողջ կամ կոտորակ, դրական կամ բացասական։ Իռացիոնալ թվերի ներմուծումը հնարավորություն է տալիս թվային նշանակումն անցկացնել *թվային առանցքի այն կետերին, վորոնց տարածությունները սկզբնակետից անհամաչափելի յեն միավորի հետ։*

Իռռացիոնալ թվերի տեսությունն իր հիմքում կառուցված ե այսպես կոչված Կանտոր—Դեդեկինդի *հետևյալ աքսիոմի վրա.*

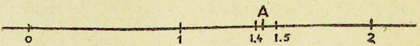
1) Յուրաքանչյուր թվին ուղիղի վրա համապատասխանում ե վորոշ կետ:

2) Յուրաքանչյուր կետին ուղիղի վրա համապատասխանում ե վորեվե թիվ:

Այդ աքսիոմը վերաբերում ե թվերի անընդմիջվող այն շարքին, *վորի մեջ յերկու հարևան թվերի տարբերությունն անսահման փոքր ե։ Պարզ ե, վոր* (1) *ուղիղ կանոնը ճիշտ ե բոլոր ռացիոնալ թվերի համար։*

Վերջիններիս նկատմամբ (2) *հակադարձ կանոնը ճիշտ ե ուղիղի միայն այն կետերի համար, վորոնք հանդիսանում են միավորի հետ համաչափելի հատվածների ծայրեր։*

Վորպեսզի ուղիղի վրա պատահակի վերցրած կետը համապատասխանի վորևե թվի, անհրաժեշտ ե ներմուծել անհամաչափելի հատվածների յերկարությունները արտահայտող իռռացիոնալ թվեր։



Գծ. 2

Դիմելով իռռացիոնալ թվերի յերկրաչափական պատկերացմանը (գծ. 2); *տեսնում ենք, վոր նշանակելով, որինակ,* $OA=\sqrt{2}$, *ստանում ենք ուղիղի վրա* $\sqrt{2}$ *իռռացիոնալ թվին համապատասխանող* առանձնահատուկ A *կետը։*

Այդ առանձնակի կետերը թվային առանցքի վրա լրացնում են այն բացերը, վորոնք ստացվում են միայն ռացիոնալ թվերի հետազոտումների դեպքում։ Հետևապես, իռռացիոնալ թվերի ներմուծումը լրացնում ե թվային այն շարքը, վորը յերկրաչափականորեն պատկերանում ե թվային առանցքի վրա, վորովհետև ռացիոնալ կամ իռռացիոնալ ամեն մի թվի համար այդ ուղիղի վրա գտնվում ե նրա համապատասխան կետը։

Վորովհետև իռռացիոնալ թվերը հանդիսանում են ռացիոնալ թվերի սահմանները և նրանց արժեքները կարելի յե հաշվել ցանկացած վորևե աստիճանի մոտավոր ճշտությամբ, ապա ներմուծելով հանրահաշվի մեջ այդ թվերը, պայմանավորվել են նրանց հետ կատարել նույն գործողությունները և նույն կանոններով, ինչպես ռացիոնալ թվերի հետ։

§ 18. ԻՌՌԱՑԻՈՆԱԼ ԹՎԵՐԻ ՔԱՂԴԱՏՈՒՄԸ

Ցենթադրենք տված են α *և* β *յերկու իռռացիոնալ թվերը, վորոնք վորոշվում են նրանով, վոր միևնույն աստիճանի մոտավորության դեպքում*

$$\text{և}\quad \left.\begin{array}{l} k_n < \alpha < l_n \\ k_n' < \beta < l_n' \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots (1)$$

Բացի դրանից, հայտնի յե, վոր

$$\left.\begin{array}{l} k_n = k_n' \text{ (մոտավորություններ պակասորդով} \\ l_n = l_n' \text{ (մոտավորություններ հավելորդով} \end{array}\right\} \dots\dots\dots (2)$$

(1) *անհավասարությունից հետևում ե, վոր*

$$\lim k_n = \alpha = \lim l_n$$
$$\lim k_n' = \beta = \lim l_n'$$

իսկ (2) փոփոխականների հավասարությունից հետևում է նրանց սահմանների հավասարությունը, այսինքն

$$\alpha = \beta$$

հետևապես, յերկու իռռացիոնալ թվեր կոչվում են հավասար, յերբ k յեվ l շարքերի մեջ հավասար են նրանց նույն կարգի մոտավորությունները:

Յենթադրենք անհավասարությունների (1) սիստեմով վորոշվող α և β իռռացիոնալ թվերի համար հայտնի է, վոր

$$k_n < k_n' \quad \text{և} \quad l_n < l_n'$$

Այդ դեպքում հաշվում են, վոր

$$\alpha < \beta$$

Այդպես ուրեմն, α և β յերկու իռռացիոնալ թվերից առաջինն ավելի փոքր է յերկրորդից, յերբ միևնույն աստիճանի մոտավոր ճշտության դեպքում (k) և (l) շարքերի թվերը, վորոնց սահմանն է α-ն, համապատասխանաբար ավելի փոքր են նույն շարքերի թվերից, վորոնց սահմանն է β-ն:

§ 19. ԻՌՌԱՑԻՈՆԱԼ ԹՎԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ, ՀԱՆՈՒՄԸ, ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ ՅԵՎ ԲԱԺԱՆՈՒՄԸ

Նախ քննենք հետևյալ որինակը: Յենթադրենք պահանջվում է գումարել $\sqrt{3}$ և $\sqrt{5}$ յերկու իռռացիոնալ թվերը:

Առաջինը վորոշվում է անհավասարությունների հետևյալ շարքով

$$\left.\begin{array}{c} 1,7 < \sqrt{3} < 1,8 \\ 1,73 < \sqrt{3} < 1,74 \\ 1,732 < \sqrt{3} < 1,733 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Յերկրորդի համար նույն ձևով

$$\left.\begin{array}{c} 2,2 < \sqrt{5} < 2,3 \\ 2,23 < \sqrt{5} < 2,24 \\ 2,236 < \sqrt{5} < 2,237 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

. . . .

Կազմենք միևնույն աստիճանի ճշտության մոտավորությունների գումարները

պակասորդով

$$\left.\begin{array}{c} 1,7 + 2,2 \\ 1,73 + 2,23 \\ 1,732 + 2,236 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

հավելորդով

$$\left.\begin{array}{c} 1,8 + 2,3 \\ 1,74 + 2,24 \\ 1,733 + 2,237 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

(3) շարքի գումարները հետզհետե աճում են, մնալով վերջավոր, վորովհետև գումարելիները վերջավոր են, հետևապես, այդ գումարները հանդիսանում են մի ինչ վոր սահմանի ձգտող փոփոխականի արժեքներ: (4) շարքի գումարները հետզհետե նվազում են, մնալով նույնպես վերջավոր և ձգտելով մի ինչ վոր սահմանի: Սակայն (3) և (4) շարքերի յերկու գումարների տարբերությունը միևնույն $\frac{1}{10^n}$ աստիճանի մոտավորության դեպքում միշտ հավասար է $\frac{2}{10^n}$: Յեթե n-ը անսահման աճում է, այդ տարբերությունը ձգտում է զերոյի, հետևապես, այն փոփոխականները, վորոնց արժեքները ցույց են տված (3) և (4) շարքերում, ձգտում են միևնույն սահմանին:

Հենց այդ ընդհանուր սահմանն էլ անվանում են $\sqrt{3}$ և $\sqrt{5}$ իռռացիոնալ թվերի գումար:

Օգտվելով գումարման նշանից, այդ գումարը նշանակում են

$$\sqrt{3} + \sqrt{5}$$

Առհասարակ, ունենալով α և β յերկու իռռացիոնալ թվեր և կազմելով նրանց գումարը, պայմանավորվում ենք կատարվող գործողությունը սահմանել այսպես. գումարել α և β նշանակում է գտնել նրանց վորևէ միատեսակ մոտավորությունների գումարը պակասորդով կամ հավելորդով, վորովհետև

$$k_n < \alpha < l_n$$
$$k_n' < \beta < l_n'$$

ապա

$$k_n + k_n' < \alpha + \beta < l_n + l_n'$$

և $\alpha + \beta$ հանդիսանում է ընդհանուր սահման հետևյալ ռացիոնալ գումարների համար

$$k_n + k_n' \quad \text{և} \quad l_n + l_n'$$

Կարելի յե ապացուցել, վոր իռռացիոնալ թվերի գումարման դեպքում, գումարումը պահում է իր հիմնական հատկությունները: Ապացուցենք այդ տեղափոխման հատկության նկատմամբ:

Դիցուք տված են α և β յերկու իռռացիոնալ թվերը:

Պակասորդով (կամ հավելորդով) մոտավորությունների համար

$$\lim k_n = \alpha \quad \text{և} \quad \lim k_n' = \beta$$

Գումարելով համապատասխան մասերը, կստանանք

$$\lim k_n + \lim k_n' = \lim (k_n + k_n') = \alpha + \beta$$

Նույն ձևով

$$\lim k_n' + \lim k_n = \lim (k_n' + k_n) = \beta + \alpha$$

իսկ ռացիոնալ թվերի համար տեղափոխման հատկության հիման վրա

$$k_n + k_n' = k_n' + k_n$$

Փոփոխականների հավասարության դեպքում, պետք է հավասար լինեն նաև նրանց սահմանները, այսինքն

$$\lim (k_n + k_n') = \lim (k_n' + k_n)$$

հետևապես

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

Նույն ձևով ապացուցեք գումարման զուգորդման հատկությունն իռռացիոնալ թվերի համար:

Իռռացիոնալ թվերի հանումը ևս կարելի յե ընդունել վորպես գումարման հակադարձ գործողություն. կազմել $\alpha - \beta$ յերկու իռռացիոնալ թվերի տարբերությունը՝ նշանակում է գտնել այնպիսի իռռացիոնալ թիվ γ (հունարեն գամմա տառն է), վորը β թվի հետ գումարելիս, տալիս է α թիվը.

$$\gamma + \beta = \alpha$$

Բազմապատկել α և β յերկու իռռացիոնալ թվերը նշանակում է՝ գտնել նրանց վորևէ միատեսակ մոտավորությունների արտադրյալը պակասորդով կամ հավելորդով:

Յենթադրենք

$$k_n < \alpha < l_n'$$
$$k_n' < \beta < l_n'$$

Վորովհետև

$$k_n k_n' < \alpha\beta < l_n l_n'$$

այս $\alpha\beta$ հանդիսանում է ընդհանուր սահման հետևյալ ռացիոնալ արտադրյալների համար

$$k_n k_n' \text{ և } l_n l_n'$$

Ապացուցենք, վոր իռռացիոնալ թվերի բազմապատկման դեպքում, արտադրյալը պահում է իր հիմնական հատկությունները։

Սահմանափակվենք տեղափոխման հատկությամբ.

$$\lim k_n = \alpha$$
$$\lim k_n' = \beta$$

Հետևապես

$$\lim k_n \cdot \lim k_n' = \lim (k_n \cdot k_n') = \alpha \cdot \beta$$
$$\lim k_n' \cdot \lim k_n = \lim (k_n' \cdot k_n) = \beta \cdot \alpha$$

իսկ

$$k_n \cdot k_n' = k_n' \cdot k_n \quad (\text{ինչու})$$

Հետևապես

$$\lim (k_n \cdot k_n') = \lim (k_n' \cdot k_n)$$

վորտեղից

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

Նույն ձևով ապացուցենք բազմապատկման զուգորդման և կարգավորման հատկությունները։

Իռռացիոնալ թվերի բաժանումն էլ կարելի յե ընդունել վորպես բազմապատկման հակադարձ գործողություն. կազմել α և β յերկու իռռացիոնալ թվերի $\frac{\alpha}{\beta}$ քանորդը, նշանակում է գտնել այնպիսի թիվ γ, վորը բազմապատկելով β թվով, տալիս է α թիվը, այսինքն

$$\gamma \cdot \beta = \alpha$$

Ծանոթություն: *Մի քանի դեպքերում իռռացիոնալ թվերի գործողությունները կարող են տալ ռացիոնալ հետևանք, որինակ*

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = \pm 4$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = \pm 3 \quad \text{և այլն։}$$

Բացասական իռռացիոնալ թվերի գործողությունները կատարվում են բացասական ռացիոնալ թվերի գործողությունների կանոնների հիման վրա։

§ 20. ՀԱՄԱՉԱՓԵԼԻ ՅԵՎ ԱՆՀԱՄԱՉԱՓԵԼԻ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Յերկու ուղիղ հատվածներ կոչվում են համաչափելի, յերբ նրանք ունեն ընդհանուր չափ: Յերկու ուղիղ հատվածների ընդհանուր չափ կոչվում է այն հատվածը, վորն ամբողջ թիվ անգամ պարունակվում է նրանցից յուրաքանչյուրի մեջ: *Յեթե յերկու հատվածների ընդհանուր չափը հավասար է* a *հատվածին, ապա վերջինիս ամեն մի մասը նույնպես կլինի ընդհանուր չափ տված հատվածների համար։* Յերկու ուղիղ հատվածների ամենամեծ ընդհանուր չափը կոչվում է այն ամենամեծ հատվածը, վորն ամբողջ թիվ անգամ պարունակվում է տված հատվածներից յուրաքանչյուրի մեջ։

Առհասարակ, վորեվե մեծության յերկու արժեքները կոչվում են համաչափելի, յեթե նրանք ունեն ընդհանուր չափ, այսինքն, յեթե գոյություն ունի նույն մեծության այնպիսի արժեք, վորը պարունակվում է ամբողջ անգամ յուրաքանչյուրի մեջ։ Որինակ, յերկու անկյուն կոչվում են համաչափելի, յեթե գոյություն ունի մի այնպիսի անկյուն, վորը պարունակվում է առաջինի մեջ m անգամ, իսկ յերկրորդի մեջ n անգամ, վորտեղ m և n ամբողջ թվեր են։

Յերկու ուղիղ հատվածներ (կամ, առհասարակ, վորեվե մեծության յերկու արժեքներ) կոչվում են անհամաչափելի, յեթե նրանք չունեն ընդհանուր չափ. այսինքն, յեթե գոյություն չունի այնպիսի մի հատված (կամ առհասարակ, նույն մեծության արժեք), վորը պարունակվի ամբողջ թիվ անգամ նրանցից յուրաքանչյուրի մեջ։

§ 21. ՅԵՐԿՈՒ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ԱՄԵՆԱՄԵԾ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՉԱՓ ԳՏՆԵԼԸ

Յերկու հատվածների ամենամեծ ընդհանուր չափ գտնելը նման է հաջորդաբար բաժանումների յեղանակով յերկու թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի գտնելուն և հիմնվում է հետևյալ յերկու կանոնների վրա.

1. Տված են AB և CD յերկու հատվածները (դժվար չի այդ պատկերացնել առանց գծանկարի), վորոնցից $AB > CD$։ Յերբ CD հատվածը մտնում է AB հատվածի մեջ ամբողջ թիվ անգամ, ապա CD-ն կլինի AB յեվ CD հատվածների ամենամեծ ընդհանուր չափը: Այդ կանոնը բղխում է հատվածների համաչափության սահմանումից։

2. Տված են AB և CD յերկու հատվածները (դժվար չի այդ պատկերացնել առանց գծանկարի), վորոնցից $AB > CD$։ Յենթադրենք, վոր CD հատվածը մտնում է AB-ի մեջ m անգամ (m-ը ամբողջ թիվ է) և ստացվում է EB մնացորդը, վորը փոքր է CD հատվածից։ Այդպես ուրեմն, CD-ն չի կարող մտնել AB-ի մեջ $m+1$ անգամ։ Ապացուցենք, վոր AB և CD հատվածների վորեվե ընդհանուր չափը կլինի ընդհանուր չափ նաև CD և EB հատվածների համար, յեվ հակառակը՝ CD և EB հատվածների ընդհանուր չափը կլինի ընդհանուր չափ նաև AB և CD հատվածների համար։

AB և CD հատվածների ընդհանուր չափը նշանակենք MN-ով։ Յենթադրենք MN-ը մտնում է AB-ի մեջ p անգամ և CD-ի մեջ q անգամ, այդ դեպքում MN-ը կմտնի AE-ի մեջ mq անգամ և, հետևապես, EB-ի մեջ $p-mq$ անգամ։ Վորովհետև m, p և q ամբողջ թվեր են, ապա $p-mq$ էլ ամբողջ թիվ է։ Այդպես ուրեմն MN հատվածը պարունակվում է ամբողջ թիվ անգամ նաև EB-ի մեջ։

Նշանակենք CD և EB հատվածների ընդհանուր չափը PQ-ով և յենթադրենք, վոր PQ-ն մտնում է CD-ի մեջ p_1 անգամ և EB-ի մեջ q_1 անգամ, այդ դեպքում PQ-ն կմտնի AB-ի մեջ mp_1+q_1 անգամ։ Վորովհետև mp_1+q_1 ամբողջ թիվ է, ապա ստացվում է, վոր PQ պարունակվում է ամբողջ թիվ անգամ նաև AB-ի մեջ։ Այստեղից հետևում է, վոր AB և CD, CD և EB հատվածների ամենամեծ ընդհանուր չափը նույնն է։

Տված a և b երկու հատվածների ամենամեծ ընդհանուր չափը գտնելու համար, երբ $a>b$, վերադրում ենք b-ն a-ի վրա։ Եթե b-ն մտնի a-ի մեջ ամբողջ թիվ անգամ, ապա (1-ին կանոն) b-ն կլինի a և b հատվածների ամենամեծ ընդհանուր չափը։ Եթե b-ն պարունակվի a-ի մեջ մի քանի անգամ և ստացվի c մնացորդը ($c<b$), ապա վերադրում ենք c-ն b-ի վրա։ Եթե c-ն մտնի b-ի մեջ ամբողջ թիվ անգամ, ապա (2-րդ կանոն) c-ն կլինի a և b հատվածների ամենամեծ ընդհանուր չափը։ Եթե c-ն պարունակվի b-ի մեջ մի քանի անգամ և ստացվի d մնացորդը ($d<c$), ապա կըվերադրենք d-ն c-ի վրա։ Եթե d-ն մտնի c-ի մեջ ամբողջ թիվ անգամ, ապա (2-րդ կանոն) d-ն կլինի (b և c) և (a և b) երկու զույգ հատվածների ամենամեծ ընդհանուր չափը։ Եթե d-ն պարունակվի c-ի մեջ մի քանի անգամ և ստացվի e մնացորդը ($e<d$), ապա վերադրում ենք e-ն d-ի վրա և այլն։

Վերջին մնացորդը, որը կպարունակվի ամբողջ թիվ անգամ նախորդի մեջ և կլինի a և b հատվածների ամենամեծ ընդհանուր չափը։

Այստեղ կարող են տեղի ունենալ հետևյալ երկու դեպքերից որևէ մեկը. կամ մենք կգտնենք այնպիսի մի մնացորդ, որը կպարունակվի նախորդի մեջ ամբողջ թիվ անգամ, կամ մենք անվերջ կստանանք ավելի ու ավելի փոքրացող մնացորդներ։

Առաջին դեպքում տված հատվածները համաչափելի են։ Դժվար չէ ապացուցել և հակառակ կանոնը, այն է. եթե a և b հատվածները համաչափելի են, ապա մենք անպատճառ կգտնենք այնպիսի մի մնացորդ, որն ամբողջ թիվ անգամ կպարունակվի նախորդի մեջ։ Հիրավի, համաձայն երկրորդ կանոնի a և b հատվածների ամենամեծ ընդհանուր չափն ամբողջ թիվ անգամ պարունակվում է c, d . . . հաջորդական մնացորդների մեջ, բայց որովհետև $a<b<c<d$ . . . ապա a և b հատվածների ամենամեծ ընդհանուր չափը յուրաքանչյուր մնացորդի մեջ պարունակվում է ավելի փոքր թիվ անգամ, քան նախորդի մեջ։ Այդպես ուրեմն a և b հատվածները համաչափելի եղած դեպքում, մենք հետզհետե կգտնենք այնպիսի մնացորդներ, որոնց մեջ a և b հատվածների ամենամեծ ընդհանուր չափը կպարունակվի ավելի ու ավելի փոքր թիվ անգամ։ Ամբողջ թվերի այն շարքը, որը ցույց է տալիս, թե a և b հատվածների ամենամեծ ընդհանուր չափը քանի անգամ է մտնում հաջորդական մնացորդների մեջ, ավելի ու ավելի փոքրացող ամբողջ թվերի մի շարք է և, հետևապես, չի կարող լինել անվերջ։ Ակներև է, որ, եթե ընդհանուր չափը պարունակվում է b հատվածի մեջ q անգամ, ապա հաջորդական մնացորդների թիվը փոքր է q-ից։

Երկրորդ դեպքում հատվածներն անհամաչափելի են։

§ 22. ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ԱՆՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ՕՐԻՆԱԿ

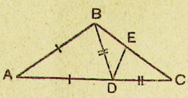
Տված է ABC հավասարասրուն եռանկյունը (գծ. 3), որի մեջ $AB=BC$ և $\angle A=\angle C=\frac{2}{5}d$

Ապացուցենք, որ AC և AB կողմերն անհամաչափելի են։ Գործադրելով § 21-ում բացատրված ընդհանուր չափը գտնելու եղանակը, կտեսնենք որ հաջորդաբար մնացորդները կրկնվում են անվերջ։

Յեթե $\angle A=\angle C=\frac{2}{5}d$, *ապա* $\angle B=2d-2\cdot\frac{2}{5}d=\frac{6}{5}d$, *այսինքն* $\triangle ABC$-*ի մեջ* $\angle B$-*ն ամենամեծ անկյունն է, հետևապես,* $AC>AB$; $AB+BC>AC$ *կամ* $2AB>AC$*։ Այդպես* $2AB>AC>AB$, *վորտեղից հետևում է, վոր* AB-*ն կարող է պարունակվել* AC-*ի մեջ միայն մեկ անգամ մնացորդով, այսինքն,* հավասարասրուն յեռանկյան մեջ, վորի հիմքին կից անկյուններից մեկը հավասար է $\frac{2}{5}d$, փոքր կողմը (*հավասար կողմերից մեկը*) պարունակվում է մեծ կողմի մեջ մեկ անգամ մնացորդով։ *Յենթադրենք* $AD=AB$*։ Այժմ § 21-ում բացատրված յեղանակով, պետք է* DC-*ն վերադնել* AB-*ի վրա, կամ, վոր միևնույն է* BC-*ի վրա։ Դիտելով* $\triangle DBC$, *գտնում ենք.* $\angle BDC=2d-\angle BDA$, *իսկ* $\triangle ABD$ *հավասարասրուն է, հետևապես,* $\angle BDA=\angle ABD$ *և* $\angle BDA=$

$$=\frac{2d-\angle BAD}{2},\ \text{այստեղից}\ \angle BDA=\frac{2d-\frac{2}{5}d}{2}=\frac{4d}{5},\ \text{այդ պատճառով}$$

$$\angle BDC=2d-\frac{4d}{5}=\frac{6}{5}d,\ \text{հետևապես,}\ \angle DBC=2d-\frac{6d}{5}-\frac{2d}{5}=\frac{2}{5}d\text{։}$$



Գծ. 3

Դուրս է գալիս, վոր $\triangle BDC$-*ն ունի հավասար անկյուններ.* $\angle C$ *և* $\angle DBC$, *հետևապես* $\triangle BDC$-*ն հավասարասրուն է և ունի այնպիսի անկյուններ, ինչպիսին՝* $\triangle ABC$-*ն։ Այդ պատճառով* $\triangle BDC$-*ի նկատմամբ ևս կրկնելով վերը կատարված հետազոտումը, կհամոզվենք, վոր* DC-*ն կպարունակվի* BC-*ի մեջ մեկ անգամ մնացորդով։ Յենթադրենք* $CE=CD$*։ Այժմ պետք է* BE-*ն վերադնել* DC-*ի վրա կամ նրան հավասար* BD-*ի վրա։ Դիտելով* $\triangle BED$-*ն այնպես, ինչպես այդ կատարեցինք* $\triangle BDC$-*ի նկատմամբ, դարձյալ կգտնենք, վոր* $\triangle BED$-*ն հավասարասրուն է.* $(BE=ED)$ *և ունի այնպիսի անկյուններ, ինչպիսին* $\triangle DBC$-*ն և ինչպիսին* $\triangle ABC$-*ն։*

Շարունակելով դատողությունները վերը բերած յեղանակով, մենք հաջորդաբար և անվերջ կանցնենք մի հավասարասրուն յեռանկյունուց՝ մյուսին, ավելի փոքր չափի, բայց նույնպիսի անկյուններով։

Նույն ձևով կարելի յե ապացուցել, վոր քառակուսու անկյունագիծն անհամաչափելի յե իր կողմին։

§ 23. *ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ՅԵՎ ԸՆԴՀԱՆՐԱՊԵՍ ՄԵԾՈՒԹՅԱՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆԸ*

Յերկու համաչափելի հատվածների հարաբերությունը կոչվում է այն ամբողջ թվերի քանորդը, վորոնք ցույց են տալիս թե քանի անգամ ընդհանուր չափը պարունակվում է նրանցից յուրաքանչյուրի մեջ։ *Յեթե ընդհանուր չափը պարունակվում է* a *հատվածի մեջ* m *անգամ և* b *հատվածի մեջ* n *անգամ, ապա* a *և* b *հատվածների հարաբերությունը հավասար է* $\frac{m}{n}$*։ Իսկ ինչ վերաբերում է ամենամեծ ընդհանուր չափին, ապա* $\frac{m}{n}$ *կարող է հավասար լինել կամ ամբողջ թվի, կամ անկրճատելի կոտորակի։ Համենայն դեպս* $\frac{m}{n}$

ռացիոնալ թիվ ե։ Նույն ձևով վորոշվում ե վորևե մեծության յերկու համաչափելի արժեքների հարաբերությունը. որինակ, յերկու անկյունների, յերկու աղեղների և այլն։

Յեթե մեզ տված են վորևե մեծության A և B համաչափելի արժեքները և յեթե ընդհանուր չափը պարունակվում ե A-ի մեջ p անգամ և B-ի մեջ q անգամ, ապա A և B արժեքների հարաբերությունը հավասար ե $\frac{p}{q}$։

Վերցնենք a և b յերկու անհամաչափելի հատվածներ։ Բաժանենք նրանցից մեկը, որինակ, b-ն, n հավասար մասերի, վորտեղ n-ը կամավոր ամբողջ թիվ ե։ b հատվածի n-րդ մասը չի կարող պարունակվել a-ի մեջ ամբողջ անգամ, վորովհետև այդ դեպքում a և b հատվածները կլինեյին համաչափելի։ Յենթադրենք b հատվածի n-րդ մասը պարունակվում ե a-ի մեջ m անգամ պակասորդով և m+1 անգամ հավելորդով, վորտեղ m-ը ամբողջ թիվ ե։ Պարզ ե, վոր $\frac{m}{n} < \frac{m+1}{n}$ և վոր $\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n} = \frac{1}{n}$։ Այս $\frac{m}{n}$ և $\frac{m+1}{n}$ կոտորակային արտահայտությունները կոչվում են a և b անհամաչափելի հատվածների հարաբերության մոտավոր արժեքներ $\frac{1}{n}$ մոտավոր ճշտությամբ, առաջինը—պակասորդով և յերկրորդը հավելորդով։ n թիվը մեծանալու դեպքում, մեծանում ե նաև a և b անհամաչափելի հատվածների հարաբերության արժեքի մոտավոր ճշտությունը։

Տված a և b յերկու անհամաչափելի հատվածների իսկական հարաբերությունը կոչվում ե այն թիվը, վորը մեծ ե այդ a և b հատվածների հարաբերության մոտավոր արժեքը պակասորդով արտահայտող ամեն մի ռացիոնալ թվից, բայց միաժամանակ փոքր ե a և b հատվածների հարաբերության մոտավոր արժեքն հավելորդով արտահայտող ամեն մի ռացիոնալ թվից։ Ակներև ե, վոր այդ թիվը չի կարող լինել ռացիոնալ, ապա նա կոչվում ե իռռացիոնալ։

Նույն ձևով վորոշվում ե վորևե մեծության յերկու անհամաչափելի արժեքների հարաբերությունը, որինակ յերկու անկյունների, յերկու աղեղների և այլն։

§ 24. ԳԱՂԱՓԱՐ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ՉԱՓՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Չափել ուղիղ հատվածի յերկարությունը նշանակում ե գտնել այդ յերկարության հարաբերությունը մի այնպիսի հատվածի յերկարությանը, վորը համարում ենք յերկարության միավոր։ Յերկարության միավոր կամ յերկարության չափ կարելի յե համարել վորևե հատված. որինակ, գործնական չափումների համար, վորպես յերկարության միավոր, ընդունված ե մետրը կամ նրա մասերը։ Յեթե մենք ասում ենք, վոր տվյալ հեռավորությունը հավասար ե 2,35 m-ի, ապա այդ նշանակում ե, վոր տվյալ հեռավորության յերկարության հարաբերությունը մեկ մետր հատվածի յերկարությանը հավասար ե 2,35 ռացիոնալ թվին։ Յեթե կամենում ենք չափել տված հատվածի յերկարությունը, ապա միշտ կարելի յե ընտրել այդ հատվածի յերկարությանը համաչափելի յերկարության միավոր։ Բայց, յեթե յերկարության միավորն ընտրված ե կամավոր, վոչ ամեն հատված կարող ե լինել համաչափելի այդ յերկարության միավորին։ Ընտրված յերկարության միավորին անհամա-

չափելի հատվածի յերկարությունը կարելի յե վորոշել կամավոր մոտավոր ճշտությամբ և այդ դեպքում հատվածի յերկարության արժեքն արտահայտվում ե ռացիոնալ թվով։ Իսկ յերկարության միավորին անհամաչափելի հատվածի իսկական յերկարությունը վորոշվում ե իռացիոնալ թվով։

§ 25. ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Յերկու հարաբերությունների հավասարությունը կոչվում ե համեմատություն։

Յերկու մեծությունները կոչվում են համեմատական, յերբ մեկ մեծության յերկու արժեքների հարաբերությունը հավասար ե մյուս մեծության համապատասխան արժեքների հարաբերությանը։

Այսպես, ուրեմն, մեծությունների համեմատականությունը վորոշելու համար բավական ե ապացուցել, վոր մեկ մեծության յերկու արժեքների հարաբերությունը հավասար ե մյուս մեծության համապատասխան արժեքների հարաբերությանը։ Յեթե քննելիք մեծությունների յերկու զույգերի արժեքներն ել համաչափելի յեն, ապա յուրաքանչյուր հարաբերությունը հավասար ե ռացիոնալ թվի և կարելի յե գտնել ճշտությամբ։ Այդ դեպքում դժվար չի լինի բաղդատել ստացված յերկու հարաբերությունները։ Իսկ յեթե տվյալ մեծությունների յերկու զույգ արժեքներն ել անհամաչափելի յեն, ապա յուրաքանչյուր հարաբերությունը հավասար ե իռացիոնալ թվի։

Յերկու իռացիոնալ թվեր կոչվում են հավասար, յերբ հավասար են նրանց վորեվե միատեսակ ասիճանի ճշտությամբ վերցրած մոտավոր արժեքները։

Այդ պատճառով յերկու մեծությունների համեմատականությունը վորոշելու համար, յերբ նրանց յերկու զույգ համապատասխան արժեքներն անհամաչափելի յեն, անհրաժեշտ ե ապացուցել, վոր յերկու հարաբերությունների մոտավոր արժեքները հավասար են իրար վորեվե միատեսակ աստիճանի ճշտության դեպքում։

Համեմատական կարող են լինել թե համասեռ և թե վոչհամասեռ մեծությունները։ Որինակ, կարող են լինել համեմատական հատվածներ, այդ դեպքում մենք գործ ունենք համասեռ մեծությունների հետ։ Վորպես վոչհամասեռ մեծությունների համեմատականության որինակ կարող ե համարվել հետևյալ թեորեմը. շրջանի մեջ կենտրոնական անկյունները համեմատական են իրենց համապատասխան աղեղներին։

Յերկու մեծությունների համեմատականությունն արտահայտվում ե մի այնպիսի համեմատությունով, *վորի անդամները մեծությունների արժեքներ չափող թվեր են։ Այդպիսի համեմատությունը յենթարկվում ե այն բոլոր կանոններին, վորոնք սահմանված են հանրահաշվի մեջ համեմատության համար։*

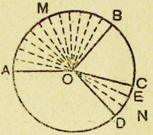
Վորպես որինակ, բերենք հետևյալ թեորեմի ապացույցը.

Շրջանի մեջ կենտրոնական անկյունները համեմատական են նրանց համապատասխան աղեղներին։

1. Անկյունները համաչափելի յեն

Տված են AOB *և* COD *համաչափելի անկյունները (գծ. 4)։ Պետք է ապացուցել.*

$$\frac{\angle AOB}{\angle COD}=\frac{\smile AMB}{\smile CND}$$



Գծ. 4

Ապացուցում։ *Յեթե* AOB *և* COD *անկյունները համաչափելի յեն, ապա նրանք ունեն ընդհանուր չափ, այսինքն գոյություն ունի մի այնպիսի անկյուն, օրինակ,* $\angle COE$, *վորն անկյուն* AOB-*ի մեջ պարունակվում է* m *անգամ և անկյուն* COD-*ի մեջ* n *անգամ, վորտեղ* m *և* n *ամբողջ թվեր են։*

Այդ դեպքում

$$\frac{\angle AOB}{\angle COD}=\frac{m}{n}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Բաժանենք $\angle AOB$-*ն՝* m, *իսկ* $\angle COD$-*ն՝* n *հավասար անկյունների, վորոնց համապատասխան աղեղները կլինեն հավասար, հետևապես* $\smile AMB$ *կբաժանվի* m, *իսկ* $\smile CND$*՝* n *նույնպիսի հավասար աղեղների, այնպես վոր*

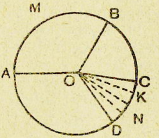
$$\frac{\smile AMB}{\smile CND}=\frac{m}{n}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Բաղդատելով (1) *և* (2) *հավասարությունները, կստանանք վորոնելի համեմատությունը։*

2. Անկյունները անհամաչափելի յեն

Տված են AOB *և* COD *անհամաչափելի անկյունները (գծ. 5)։ Պետք է ապացուցել.*

$$\frac{\angle AOB}{\angle COD}=\frac{\smile AMB}{\smile CND}$$



Գծ. 5

Ապացուցում. *Գտնենք* $\frac{\angle AOB}{\angle COD}$ *հարաբերությունը* $\frac{1}{q}$ *մոտավոր ճշտությամբ, վորտեղ* q *կամավոր ամբողջ թիվ է։ Դրա համար անկյուն* COD *բաժանենք* q *հավասար մասերի, վորոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է* $\angle COK$։ *Վերադրենք անկյուն* COK-*ն անկյուն* AOB-*ին, վորովհետև տվյալ կենտրոնական անկյուններն անհամաչափելի յեն, ուստի* $\angle COK$ *չի կարող պարունակվել* $\angle AOB$-*ի մեջ ամբողջ թիվ անգամ։ Յենթադրենք,* $\angle COK$-*ն պարունակվում է* $\angle AOB$-*ի մեջ* p *անգամ պակասորդով և* $p+1$ *անգամ հավելորդով։ Այդ դեպքում կստանանք*

$$\frac{\angle AOB}{\angle COD}=\frac{p}{q}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$\frac{1}{q}$ մոտավոր ճշտությամբ պակասորդով։

Այժմ բաժանենք $\angle COD$-ն՝ q, իսկ $\angle AOB$-ն՝ p հավասար մասերի, դրա հետևանքով $\smile CND$ կբաժանվի q հավասար աղեղների, վորոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է $\smile CK$-ին, իսկ $\smile AMB$ կբաժանվի p նույնպիսի հավասար մասերի պակասորդով, այնպես վոր

$$\frac{\smile AMB}{\smile CND}=\frac{p}{q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

$\frac{1}{q}$ մոտավոր ճշտությամբ պակասորդով։

Բաղդատելով (3) և (4) հավասարությունները, կստանանք

$$\frac{\angle AOB}{\angle COD}=\frac{\smile AMB}{\smile CND}$$

այն, ինչ պետք եր ապացուցել։

Նման դատողություն գործադրում ենք նաև այլ թեորեմների ապացուցման ժամանակ, յերբ վորոշվում է համաչափելի կամ անհամաչափելի մեծությունների համեմատականությունը։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

187. Համաչափելի յեն արդյոք ներքնաձիգը և նրա միջնագիծը, ներքնաձիգը և եջերը, յեթե եջերը հավասար են՝ 5 և 12 cm, ներքնաձիգը և եջերը, յեթե եջերը հավասար են 5 և 13 cm։

188. Ռոմբի անկյունագծերը հավասար են 1,2 cm և 1,6 cm։ Համաչափելի յեն արդյոք նրանք և ռոմբի կողմերը։

189. Հաշվեցեք քառակուսու անկյունագծի հարաբերությունը նրա կողմին 0,01 մոտավոր ճշտությամբ։

190. Հաշվեցեք $\sqrt{3}+1$ cm և $\sqrt{3}-1$ cm յերկարության յերկու հատվածների հարաբերությունը 0,01 մոտավոր ճշտությամբ։

191. Համեմատական են արդյոք հետևյալ մեծության հատվածները․ $\sqrt{5}+1$, $\sqrt{5}-1$, $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ և $\sqrt{7}-\sqrt{3}$։

192. Ապացուցեք հետևյալ թեորեմները. 1) հավասար հիմքեր ունեցող ուղղանկյունների մակերեսները համեմատական են նրանց բարձրություններին. դիտեցեք բարձրությունների համաչափելի և անհամաչափելի դեպքերը։ 2) յերկու զուգահեռ ուղիղները հատում են անկյան կողմերը համեմատական մասերի. դիտեցեք յերկու դեպքերը։

ԳԼՈՒԽ V

ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ: ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ՏԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ: ՇՐՋԱՆԻ ՄԱԿԵՐԵՍԸ

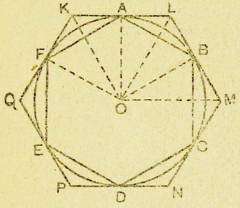
§ 26. *ՍԱՀՄԱՆՈՒՄՆԵՐ*

Կանոնավոր կոչվում է այն բազմանկյունը, վորի բոլոր կողմերը հավասար են միմյանց յեվ բոլոր անկյունները նմանապես հավասար են միմյանց։ *Հետևապես քառակուսին կանոնավոր քառանկյուն է. ռոմբը, վորի կողմերը չնայելով վոր հավասար են միմյանց, չի կարելի համարել կանոնավոր բազմանկյուն (ինչու). ուղղանկյունն ևս կանոնավոր չէ (ինչու), չնայելով վոր բոլոր անկյունները հավասար են միմյանց։*

Կանոնավոր բազմանկյունները, ըստ իրենց կողմերի և անկյունների թվի, կոչվում են կանոնավոր յեռանկյուն, կանոնավոր քառանկյուն, հնգանկյուն, վեցանկյուն և ընդհանրապես կանոնավոր n*-անկյուն։ Բազմանկյունները կոչվում են* նույնանուն, *յեթե միևնույն թվով կողմեր ունեն։*

§ 27. *ԱՐՏԱԳԾԱԾ ՅԵՎ ՆԵՐԳԾԱԾ ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ*

Բազմանկյունը կոչվում է շրջանին ներգծած, յերբ շրջանագիծն անցնում է բազմանկյան բոլոր գագաթներով. *այդ դեպքում շրջանը կոչվում է բազմանկյանն արտագծած։*



Գծ. 6

Բազմանկյունը կոչվում է շրջանին արտագծած, յերբ նրա բոլոր կողմերը շոշափողներ են շրջանագծին. *այդ դեպքում շրջանը կոչվում է բազմանկյանը ներգծած։*

ԹԵՈՐԵՄ: Յերբ շրջանագիծը բաժանենք n հավասար մասերի յեվ բաժանման այդ կետերը հաջորդաբար միացնենք ուղիղ գծերով, ապա կստացվի կանոնավոր ներգծած n-անկյուն. յերբ նույն այդ բաժանման կետերով տանենք շոշափողներ շրջանագծին, ապա կառաջանա կանոնավոր արտագծած n-անկյուն:

Տված է Շրջանագիծն A, B, C . . . F *կետերով բաժանված է* n *հավասար մասերի (գծանկար 6-ի վրա* $n=6$*). այդ կետերով շոշափողներ են տարած շրջանագծին, և յուրաքանչյուր զույգ կետերը՝* A *և* B, B *և* C, C *և* D *և այլն, միացրած են ուղիղներով։ Պահանջվում է ապացուցել, վոր՝*

1) n-անկյուն ABC . . . F-ը կանոնավոր է. 2) n-անկյուն KLM . . . Q-ն կանոնավոր է։

ԱՊԱՑՈՒՑՈՒՄ. 1) Քանի որ AB, BC . . . FA աղեղներն ըստ կառուցման հավասար են միմյանց, ապա նրանց ձգող լարերն ևս հավասար են միմյանց, այսինքն՝ $AB=BC=CD= . . . FA$։

FAB, ABC, BCD . . . անկյունները ներգծած անկյուններ են, և նրանցից յուրաքանչյուրը հենվում է նույն շրջանագծի միմյանց հավասար n—2 մասերի վրա. հետևապես $\angle FAB=\angle ABC=\angle BCD= . . .$ Այսպիսով ABC . . . F n-անկյունն ունի միմյանց հավասար կողմեր և միմյանց հավասար անկյուններ. հետևապես այդ բազմանկյունը կանոնավոր n-անկյուն է։

2) ALB, BMC . . . FKA անկյունները հավասար են միմյանց, քանի որ կազմված են շոշափողներով և բոլոր այդ անկյունները չափվում են իրենց կողմերի միջև պարփակված համապատասխանաբար միմյանց հավասար աղեղների կիսատարբերությամբ. քանի որ ուղղանկյուն յեռանկյուններ $\triangle AOL=\triangle LOB$, քանի որ նրանց AO և BO էջերը հավասար են միմյանց. բացի այդ ներքնաձիգ OL-ն ընդհանուր է. հետևապես $\angle ALO=$ $=\angle OLB$, այսինքն OL-ը հանդիսանում է ALB անկյան բիսեկտրիս։ Նույն ձևով կարելի յե ապացուցել, որ OM, ON . . . ուղիղներն արտագծած KLM . . . Q n—անկյան համապատասխան անկյունների բիսեկտրիսներն են. ուրիշ խոսքով $\angle BMO$ և $\angle AKO$ նույնպես միմյանց հավասար անկյուններ են, քանի որ դրանցից յուրաքանչյուրն առանձին-առանձին հավասար է KLM . . . Q բազմանկյան անկյան կեսին. $\angle KOL$ և $\angle LOM$-ը հավասար են միմյանց, քանի որ նրանցից յուրաքանչյուրը ներկայացնում է իրենից 180°-ի և բազմանկյուն KLMN . . . Q-ի անկյան տարբերությունը։ Զննելով $\triangle KOL$ և $\triangle LOM$, տեսնում ենք, որ OL-ն ընդհանուր կողմ է այդ յերկու յեռանկյունների համար, $\angle ALO=\angle BLO$, և $\angle LOK=\angle LOM$, հետևապես. $\triangle KOL=\triangle LOM$ և $KL=LM$։ Նույն ձևով կարելի յե ապացուցել, որ $LM=MN$, $MN=MP$ . . . ։ Ցեվ այսպես, KLM . . . Q n—անկյունը և հավասարակողմ է և նրա բոլոր անկյունները հավասար են միմյանց, այսինքն կանոնավոր է։

Զննելով գծանկար 6-ը և ուշադրության առնելով վերն ապացուցած թեորեմը, կարելի յե հետևցնել, 1) կանոնավոր բազմանկյան բոլոր անկյունների բիսսեկտրիսները հատվում են մի կետում. 2) այդ նույն կետում հատվում են կանոնավոր բազմանկյան կողմերի միջնակետերում կանգնեցրած ուղղահայացները. 3) այդ կետը հանդիսանում է արտագծած, միաժամանակ յեվ ներգծած շրջանի կենտրոն։

Կանոնավոր բազմանկյանը արտագծած և ներգծած շրջանների կենտրոնը կոչվում է կանոնավոր բազմանկյան կենտրոն։

Կանոնավոր բազմանկյանը ներգծած շրջանի շառավիղը կոչվում է կանոնավոր բազմանկյան ապոթեմ (հարթագիծ)։

§ 28 ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՆՄԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՅԵՎ ՆՐԱՆՑ ՊԱՐԱԳԾԵՐԻ ՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

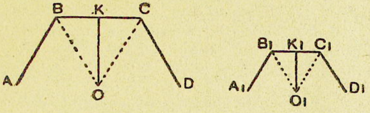
ԹԵՈՐԵՄ. Կանոնավոր նույնանուն բազմանկյունները նման են։

Ապացուցում։ *Բազմանկյունները կոչվում են նման, յեթե նրանց անկյունները համապատասխանաբար հավասար են միմյանց և կողմերը համեմատական են։ Կանոնավոր նույնանուն բազմանկյունների կողմերը համեմատական են, վորովհետև ամեն մի կանոնավոր բազմանկյան կողմերը միատեսակ են։*

Վորովհետև ամեն մի ուռուցիկ n*-անկյան ներքին անկյունների գումարը հավասար է* $2d\cdot(n-2)$, *ապա կանոնավոր* n*-անկյան ամեն մի անկյունը հավասար է* $\frac{2d\cdot(n-2)}{n}$։ *Պարզ է ուրեմն, վոր կանոնավոր նույնանուն բազմանկյունների բոլոր անկյունները հավասար են միմյանց։*

ԹԵՈՐԵՄ. Կանոնավոր նույնանուն բազմանկյունների պարագծերը համեմատական են արտագծած յեվ ներգծած շրջանների շառավիղներին։

Տված է յերկու կանոնավոր n*-անկյուն (գծ. 7-ում պատկերացրած են միայն նրանց մասերը)։*



Գծ. 7

$AB=BC=CD\ldots$ *և* $A_1B_1=B_1C_1=C_1D_1\ldots$ *տրանք բազմանկյունների յերեք հարևան կողմեր են.* O *և* O_1*-ն արտագծած և ներգծած շրջանների կենտրոններ են, այսինքն* BO *և* OC, B_1O_1 *և* O_1C_1 *ուղիղները համապատասխանաբար* $\angle B$ *և* $\angle C$, $\angle B_1$ *և* $\angle C_1$ *բիսեկտրիսներն են.* $OK\perp BC$, $O_1K_1\perp B_1C_1$, *ուստի* K *և* K_1 BC *և* B_1C_1 *կողմերի միջնակետերն են։*

Առաջին թեորեմի հիման վրա, կանոնավոր բազմանկյունների նկատմամբ կարող ենք ասել, վոր BO *և* B_1O_1 *արտագծած շրջանների շառավիղներն են, իսկ* KO *և* K_1O_1*-ը՝ ներգծած շրջանների շառավիղներն են կամ տվյալ բազմանկյունների ապոթեմներն են։ Նշանակելով բազմանկյունների պարագծերը համապատասխանաբար* P *և* P_1 *տառերով, ապացուցենք, վոր* $\frac{P}{P_1}=\frac{OB}{O_1B_1}=\frac{OK}{O_1K_1}$,

Ապացուցում։ *Վորովհետև* $P=n\cdot BC$ *և* $P_1=n\cdot B_1C_1$, *ապա այդ հավասարությունների համապատասխան մասերը միմյանց վրա բաժանելով, կստանանք*

$$\frac{P}{P_1}=\frac{n\cdot BC}{n\cdot B_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{BC:2}{B_1C_1:2}=\frac{BK}{B_1K_1}\quad\ldots\ldots(1)$$

Վորովհետև $\angle OBK=\frac{\angle ABC}{2}$ *և* $\angle O_1B_1K_1=\frac{\angle A_1B_1C_1}{2}$ *ապա* $\angle OBK=$ $=\angle O_1B_2K_1$

հետևապես

$$\triangle OKB \backsim \triangle O_1K_1B_1 \text{ (ինչու) և}$$

$$\frac{BK}{B_1K_1}=\frac{OB}{O_1B_1}=\frac{OK}{O_1K_1} \text{ (ինչու)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

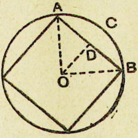
Համեմատելով միմյանց հետ (1) և (2) համասարությունները կստանանք

$$\frac{P}{P_1}=\frac{OB}{O_1B_1}=\frac{OK}{O_1K_1}$$

§ 29. ՇՐՋԱՆԻ ՇԱՌԱՎՂԻ ՑԵՎ ՆԵՐԳԾԱԾ ՔԱՌԱԿՈՒՍՈՒ, ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ՎԵՑԱՆԿՅԱՆ, ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ՑԵՌԱՆԿՅԱՆ ՑԵՎ ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ՏԱՍԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ԱՌԸՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

ԹԵՈՐԵՄ. Շրջանին ներգծած քառակուսու կողմը հավասար է շառավղի յեվ $\sqrt{2}$-ի արտադրյալին ($R\sqrt{2}$)

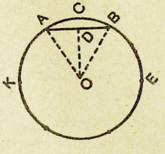
Տված է AB-ն (գծ. 8) AO շառավիղ ունեցող շրջանին ներգծած քառակուսու կողմն եւ նշանակելով այդ կողմի յերկարությունն A_4-ով, AO=OB շառավղի յերկարությունը՝ R տառով, ապացուցենք, վոր $a_4=R\sqrt{2}$։



Գծ. 8

Ապացուցում: Աղեղ ACB-ն կազմում է շրջանագծի $\frac{1}{4}$ մասը, վորը հավասար է $\frac{360^0}{4}=90^0$-ի։ Այդ դեպքում կենտրոնական անկյունն AOB=90^0-ի, և յեռանկյունն AOB-ն ուղղանկյունն եւ կիրառելով դրա նկատմամբ Պյութագորի թեորեմը, կստանանք $a_4^2=R^2+R^2=2R^2$, վորտեղից $a_4=\sqrt{2R^2}=R\sqrt{2}$

Այսպես ուրեմն, ներգծած քառակուսի կառուցելու համար հարկավոր է անցկացնել յերկու միմյանց փոխադարձ ուղղահայաց տրամագծեր և այդ տրամագծերի ծայրերը միացնել միմյանց հետ լարերով, վորոնք և կլինեն ներգծած քառակուսու կողմերը։



Գծ. 9

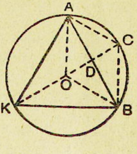
Վորովհետև $\angle AOB=90^0$ և AO=OB, ապա $\angle OAD=\angle OBD=45^0$ (ինչու)։ Տանելով O կետից քառակուսու OD կողմին ուղղահայաց, կստանանք $\angle AOD=45^0$. հետևապես $OD=AD=\frac{AB}{2}$ (ինչու)։ Ցեվ այսպես, քառակուսու ապոթեմը հավասար է նրա կողմի կեսին:

ԹԵՈՐԵՄ: Կանոնավոր վեցանկյան կողմը հավասար է մեկ շառավղի:

Տված է. AB-ն (գծ. 9) AO շառավիղ ունեցող շրջանին ներգծած կանոնավոր վեցանկյան կողմն եւ նշանակենք AB-ն՝ a_6-ով և AO-ն՝ R-ով։ Պահանջվում է ապացուցել, վոր $a_6=R$

Ապացուցում: *Յեթե AB-ն շրջանին ներգծած կանոնավոր վեցանկյան կողմն է, ապա* $\smile ACB = \frac{360^0}{6} = 60^0$. *հետևապես* $\angle AOB = 60^0$ *(ինչու): Վորովհետև յեռանկյուն AOB-ն հավասարասրուն է (ինչու), ապա* $\angle OBA = \angle OAB = 60^0$ *հետևապես, յեռանկյուն AOB-ն հավասարակողմ է, այսինքն* $AB = AO = R$ *կամ* $a_6 = R$

Վորովհետև ամեն մի շրջանագիծ բաժանվում է 360°-ի, հետևապես տվյալ շրջանին ներգծած կանոնավոր վեցանկյուն կառուցելու համար, հարկավոր է նույն շրջանի շառավղով շրջանագիծը բաժանել 6 հավասար մասի և ապա այդ բաժանման կետերը միացնել միմյանց հետ լարերով. այդպիսով ստացված կանոնավոր վեցանկյան ամեն մի կողմը հավասար կլինի նույն շրջանի մեկ շառավղին:



Գծ. 10

Անցկացնելով OD ապոթեմը և նկատելով, վոր $AD = \frac{AB}{2}$, *ըստ* Պյութագորի *թեորեմի կստանանք* $OD^2 = AO^2 - AD^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$, *վորտեղից* $OD = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ *կամ* $OD = \frac{O_6\sqrt{3}}{2}$, *այսինքն. կանոնավոր վեցանկյան ապոթեմը հավասար է նրա կողմի կեսին, բազմապատկած* $\sqrt{3}$*-ով:*

ԹԵՈՐԵՄ: Շրջանին ներգծած կանոնավոր յեռանկյան կողմը հավասար է շառավղին բազմապատկած $\sqrt{3}$-ով:

Տված է.—AB-ն (գծ. 10) AO շառավիղ ունեցող շրջանին ներգծած յեռանկյան կողմն է. նշանակելով AB-ն a_3*-ով և AO-ն R-ով, ապացուցենք, վոր* $a_3 = R\sqrt{3}$

Ապացուցում.— *Յեթե AB-ն ներգծյալ կանոնավոր յեռանկյան կողմն է, ապա* $\smile ACB = \frac{360^0}{3} = 120^0$: *Տանելով OC շառավիղը AB կողմին ուղղահայաց, յեզրակացնում ենք, վոր* $AD = DB$ *և* $\smile AC = \smile CB = 60^0$ *(ինչու): Հետևապես* $AC = CB = R$ *(ինչու): Այսպիսով,* $AC = AO$, *ուստի և* $CD = OD = \frac{R}{2}$, *վորպես OAC հավասարասրուն յեռանկյան հիմքի մասեր, վորպիսի մասերի բաժանված է OC հիմքը բարձրությամբ AD-ով (միաժամանակ այն և միջնագիծ է): Ըստ* Պյութագորի *թեորեմի ունենք* $AD^2 = AO^2 - OD^2$ *կամ* $\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = AO^2 - OD^2$, *կամ* $\frac{a_3^2}{4} = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$, *վորտեղից* $a_3 = R\sqrt{3}$

Վորպեսզի AO շառավիղ ունեցող շրջանին ներգծենք կանոնավոր յեռանկյուն, շրջանագիծը, նախկին թեորեմում ցույց տվածի նման, կբաժանենք 6 հավասար մասերի և, այդ կետերը մեկ ընդ մեջ միացնելով, կստանանք վորոնելի կանոնավոր յեռանկյունը:

Մենք տեսանք, վոր $OD = \frac{R}{2}$, *ապա ուրեմն* կանոնավոր յեռանկյան ապոթեմը հավասար է արտագծած շրջանի շառավղի կեսին:

Վորովհետև KD ⊥ AB *և* $KD = \frac{3R}{2}$, *ապա ուրեմն կանոնավոր յեռանկյան բարձրությունը* $1\frac{1}{2}$ *անգամ մեծ է արտագծած շրջանի շառավղից։*

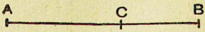
Պյութագորի *թեորեմի համաձայն ունենք.* $KD^2 = AK^2 - AD^2$ *կամ*

$$KD^2 = a_3^2 - \frac{a_3^2}{4} = \frac{3a_3^2}{4},$$ *վորտեղից կստանանք* $KD = \frac{a_3\sqrt{3}}{2}$

այսինքն, կանոնավոր յեռանկյան բարձրությունը հավասար է նրա կողմի կեսին, բազմապատկած $\sqrt{3}$-ով:

ԹԵՈՐԵՄ Ներգծած կանոնավոր տասանկյան կողմը հավասար է արտաքին յեվ միջին հարաբերությամբ բաժանած շառավղի մեծ մասին:

Բաժանել AB հատածը (ներկա դեպքում R-ը) արտաքին և միջին հարաբերությամբ, նշանակում է գտնել այդ հատվածի վրա այնպիսի մի C կետ (գծ. 11), վոր $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$։ *Նշանակելով AB հատվածը R-ով, այդ հատվածի մեծ մաս AC-ն՝* a_{10}*-ով, վերը բերած համեմատությունը կարելի յե գրել այսպես*



Գծ. 11

$$\frac{R}{a_{10}} = \frac{a_{10}}{R - a_{10}},$$ *վորտեղից՝* $R(R - a_{10}) = a_{10}^2$,

կամ $R^2 - R \cdot a_{10} = a_{10}^2$, *կամ* $a_{10}^2 + Ra_{10} - R^2 = 0$

Վճռելով այս քառակուսի հավասարումը, կստանանք

$$a_{10} = -\frac{R}{2} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4} + R^2} = -\frac{R}{2} \pm \frac{R\sqrt{5}}{2}$$

վորովհետև a_{10}*-ը դրական մեծություն է, ուստի հարկավոր է վերցնել միայն*

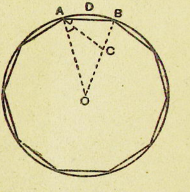
$$a_{10} = -\frac{R}{2} + \frac{R\sqrt{5}}{2},$$ *կամ* $a_{10} = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$

Այսպիսով թեորեմը պահանջում է ապացուցել, վոր

$$a_{10} = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$$

Ցենթադրենք տված է, վոր AB (գծ. 12) ներգծած կանոնավոր տասանկյան կողմն է։

Նշանակենք AB-ն a_{10}*-ով և AO-ն՝ R-ով։*



Գծ. 12

Ապացուցում— *Ցեթե AB-ն ներգծած կանոնավոր տասանկյան կողմն է, ապա* $\smile ADB = \frac{360^0}{10} = 36^0$. *հետևապես,* $\angle AOB = 36^0$, $\angle OAB = \angle OBA = 72^0$ *(ինչու)։* AC *ուղիղով* $\angle OAB$ *բաժանենք յերկու հավասար մասի. այն ժամանակ* $\angle OAC = 36^0$*-ի. հետևապես* $AC = CO$ *(ինչու)։* $\angle ACB = 180^0 - \angle CAB - \angle ABC = 180^0 - 36^0 - 72^0 = 72^0$. *հետևապես* $AC = AB$ *(ինչու)։* *Եվ այսպես* $OC = AC = AB$; ABO *յեռանկյան* BAO *ներքին անկյան* AC *բիսեկտրիսի հատկության համաձայն կստանանք*

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CB} \text{ կամ } \frac{OA}{AB}=\frac{AB}{OB-AB}$$

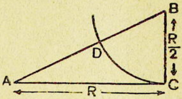
կամ

$$\frac{R}{a_{10}}=\frac{a_{10}}{R-a_{10}}$$

իսկ այս վերջին համասարությունից, ինչպես վերը տեսանք, ստացվում է

$$a_{10}=\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$$

Ներգծած կանոնավոր տասանկյուն կառուցելու համար անհրաժեշտ է նախորոք գտնել a_{10} հատվածի մեծությունը (կողմի մեծությունը)։ $a_{10}=-\frac{R}{2}+\sqrt{\frac{R^2}{4}+R^2}$ արընչության մեջ $\sqrt{\frac{R^2}{4}+R^2}$ կարելի յե ընդունել վորպես այնպիսի ուղղանկյուն յեռանկյան ($\triangle ABC$ գծ. 13) ներքնաձիգ (AB), վորի էջերը համապատասխանաբար հավասար են R-ի և $\frac{R}{2}$-ի։



Գծ. 13

Վորպեսզի ստանանք a_{10}-ը, այդ ներքնաձգից հարկավոր է հանել $\frac{R}{2}$-ը, AB ներքնաձգի մնացորդ AD մասը հավասար կլինի a_{10}-ին։

Այս բոլորից հետո, մնում է շրջանագծի վրա վերցնել մի կամավոր կետ, կարկինի տալով AD-ին հավասար բացվածք, այդ կետից սկսած շրջանագիծը բաժանել 10 հավասար աղեղների և այդ աղեղների ծայրերը հաջորդաբար միացնել լարերով. այսպիսով առաջացած բազմանկյունը կլինի ներգծած կանոնավոր տասանկյուն։

Շրջանագիծը նույն ձևով 10 հավասար մասի բաժանելով և ապա այդ բաժանման կետերը մեկ ընդ մեջ միացնելով միմյանց հետ լարերով, կստանանք ներգծած կանոնավոր հնգանկյուն։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

193. Ցույց տվեք, վոր կանոնավոր վեցանկյունը կարելի յե բաժանել 3 միահավասար ռոմբերի։

194. Ապացուցեք, վոր կանոնավոր վեցանկյան հանդիպակաց կողմերը զուգահեռ են։

195. Կառուցեք արտագծած քառակուսի և ապացուցեք, վոր նրա կողմերը հավասար են տրամագծին, իսկ անկյունագիծը յերկու անգամ մեծ է նույն շրջանին ներգծած քառակուսու կողմից։

196. Կառուցեք կանոնավոր ութանկյուն։

Ցուցմունք. Կառուցեք կամավոր շառավիղով գծած շրջանին ներգծած քառակուսի, ապա տարեք շառավիղներ, վորոնք ուղղահայաց լինեն քառակուսու կողմերին։

197. Կառուցեք կանոնավոր տասներկուանկյուն։

198. Կառուցեք կանոնավոր արտագծած յեռանկյուն և ապացուցեք, վոր նրա կողմերը յերկու անգամ մեծ են նույն շրջանին ներգծած կանոնավոր յեռանկյան կողմերից։

199. *Կառուցեք կանոնավոր քառանկյուն։*

200. *Կառուցեք կանոնավոր տասնհինգանկյուն։*

Ցուցմունք. $\frac{360^0}{15} = 24^0 = 60^0 - 36^0 = \frac{360^0}{6} - \frac{360^0}{10}$

201. *Կառուցեք հատվածներ. 1)* $a\sqrt{2}$, *2)* $a\sqrt{3}$, *ուր* a-*ն տված հատվածն է (ներգծած քառակուսու և կանոնավոր յեռանկյան կողմերը հաշվելու թեորեմները)։*

202. *Տրված է ներգծած կանոնավոր* n-*անկյուն։ Կառուցեք նույն շրջանին ներգծած կանոնավոր բազմանկյուն, վորն ունենա յերկու անգամ ավելի շատ կողմեր, այսինքն* 2n *կողմեր։*

Ցուցմունք. *Հարկավոր է տվյալ* n-*անկյան կողմերին տանել ուղղահայաց շառավիղներ և ապա այդ շառավիղների ծայրերը լարերով միացնել բազմանկյան գագաթների հետ։ Կառուցման ճշտությունն ապացուցվում է լարին ուղղահայաց տարած շառավղի հատկությունների թեորեմով։*

203. *Տրված է արտագծած կանոնավոր* n-*անկյուն։ Կառուցեք նույն շրջանին արտագծած կանոնավոր բազմանկյուն, վորն ունենա* 2n *կողմեր։*

Ցուցմունք. *Տրված* n-*անկյան գագաթները միացրեք կենտրոնի հետ, այդ ուղիղների և շրջանագծի հատման կետերով տարեք շոշափողներ։ Կառուցման ճշտությունն ապացուցելու համար հարկավոր է զննել մի քանի զույգ միմյանց հավասար յեռանկյուններ։*

204. *Հաշվեցեք հետևյալ կանոնավոր բազմանկյունների անկյունները. 1) հնգանկյան, 2) վեցանկյան, 3) յոթանկյան, 4) ութանկյան, 5) իննանկյան, 6) տասանկյան։*

205. *Հաշվեցեք* 5 cm *շառավիղ ունեցող շրջանին ներգծած կանոնավոր յեռանկյան, քառակուսու, կանոնավոր վեցանկյան և կանոնավոր տասանկյան կողմերը։*

206. *Հաշվեցեք այն շրջանների շառավիղները, վորոնք արտագծած են կանոնավոր յեռանկյան, քառակուսուն, կանոնավոր վեցանկյան, կանոնավոր տասանկյան, յեթե նրանց կողմերը 10-ական սանտիմետր են։*

207. *Ներգծած կանոնավոր յեռանկյան կողմը* 10 cm-*ով ավելի յե նույն շրջանին ներգծած քառակուսու կողմից։ Գտեք շառավղի յերկարությունը։*

208. 2 cm *յերկարության կողմեր ունեցող կանոնավոր վեցանկյան ընդհանուր գագաթից տարված են անկյունագծեր։ Հաշվեցեք այդ անկյունագծերի յերկարությունը։*

209. *Քառակուսու անկյունագիծը* 3 cm-*ով ավելի յե նրա կողմից։ Հաշվեցեք կողմի յերկարությունը։*

210. ABCD *քառակուսուց դուրս նրա* AB *կողմի վրա կառուցած է կանոնավոր* AMB *յեռանկյուն։ Գտեք* M *կետի և քառակուսու անկյունագծերի հատման կետի հեռավորությունը, յեթե* AB=5 cm։

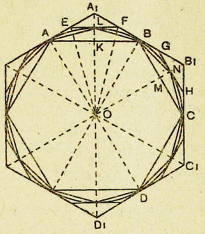
211. *Գտք այն տրապեցի զուգահեռ կողմերի միջև յեղած հեռավորությունը, վորի մեծ կողմը հավասար է* 8 cm-*ի, իսկ մնացած կողմերից յուրաքանչյուրը հավասար է այդ մեծ կողմի կեսին։*

§ 30. ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ՅԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Յերկրաչափության նախնական դասընթացում հաճախ առիթ ենք ունեցել համոզվելու, վոր շրջանագծի յերկարությունը կախում ունի նրա տրամագծի յերկարությունից. վորքան ավելի մեծ լինի տրամագիծը, այնքան ավելի մեծ կլինի շրջանագիծը և հակառակը: Գործնական այդ հատկությունն ինը-կատ առնելով, շրջանագծի յերկարության մասին՝ ավելի ձեռնտու յե դատողություն կապմել նրա տրամագծի կամ շառավղի մեծության միջոցով: Սակայն յերբ ցանկանում ենք միանգամայն ճիշտ իմանալ, թե շրջանագիծը քանի՞ անգամ է մեծ իր տրամագծից, կանգ ենք առնում այն փաստի առաջ, վոր շրջանագծի յերկարությունն ու իր տրամագծի յերկարությունն անհամաչափելի մեծություններ են: Հետևապես շրջանագծի յերկարության և նրա տրամագծի ճիշտ հարաբերության մասին խոսել չենք կարող, այլ կարող ենք միայն նրանց հարաբերության մոտավոր ճշտության մասին խոսել: Պարզելու համար, թե ինչպես են գտնում այդ մոտավոր ճշտության հարաբերությունն, անհրաժեշտ է նախորոք պարզել մի շարք թեորեմներ:

ԹԵՈՐԵՄ.—Շրջանին արտագծած յեվ նույն շրջանին ներգծած կանոնավոր բազմանկյունների պարագծերը, կողմերի թիվն անսահմանորեն կրկնապատկելու դեպքում, ունեն միյեվնույն սահմանը:

Տրված է՝ OA վորոշակի շառավիղ ունեցող շրջան (գծ. 14), արտագծած կանոնավոր $A_1B_1C_1 \dots$ n-անկյուն, և ներգծած կանոնավոր $ABC \dots$ n-անկյուն: Նշանակենք արտագծած կանոնավոր n-անկյան պարագիծը P_n, ներգծած կանոնավոր n-անկյան պարագիծը p_n տառերով: Վորովհետև միշտ ել յեռանկյան յերկու կողմի գումարը մեծ է յերրորդ կողմից, ապա $AA_1+A_1B>AB$, $BB_1+B_1C>BC$ և այլն: Այս անհավասարությունների համապատասխան մասերը գումարելով, կստանանք $P_n>p_n$: Կրկնապատկենք և ներգծած և արտագծած n-անկյունների կողմերի թիվը, ինչպես այդ ցույց է տրված նախորդ պարագրաֆի 107 և 108 խնդիրներում: Վորովհետև $AL=LB=BN=NC=\dots$, ուստի ներգծած $ALBNC \dots$ 2n-անկյունը և արտագծած $EFGH \dots$ 2n-անկյունը կանոնավոր են: Յեռանկյունների կողմերի հատկության համաձայն՝ $AL+LB>AB$, $BN+NC>BC$ և այլն: Գումարելով այդ անհավասարությունների համապատասխան մասերը, կստանանք $p_{2n}>p_n$: Նույն պատճառաբանությամբ կարող ենք ասել, վոր $AE+EF+FB<AA_1+A_1B$, $BG+GH+HC<BB_1+B_1C$ և այլն. հետևապես $P_n>P_{2n}$ (ինչու):



Գծ. 14

Շարունակելով արտագծած և ներգծած բազմանկյունների կողմերի կրկնապատկումը և դատելով նախկինի նման, մենք կհանգենք այն յեզրակացության, վոր

$$p_n<p_{2n}<p_{4n}<p_{8n}<\dots<p_{2^k\cdot n}<\dots$$

$$\text{և } P_n>P_{2n}>P_{4n}>P_{8n}>\dots>P_{2^k\cdot n}>\dots$$

Այսպես ուրեմն, ներգծած կանոնավոր բազմանկյան կողմերի թիվը կրկնապատկելիս՝ նրա պարագիծը մեծանում է, իսկ արտագծած կանոնավոր բազմանկյան պարագիծը՝ փոքրանում:

Ներգծած կանոնավոր բազմանկյան կողմերի թիվն անսահմանորեն կրկնապատկելու դեպքում, նրա պարագիծն աստիճանաբար մեծանում է, բայց միշտ էլ փոքր կմնա վերջավորյալ P_n թվից, վորովհետև

$$p_{2^{\kappa}\cdot n} < P_{2^{\kappa}\cdot n} < P_n$$

այդ պատճառով սահմանների թեորեմներից մեկի (վորի՞) հիման վրա, փոփոխական $P_{2^{\kappa}\cdot n}$ թիվը ունի մի ինչ վոր վերջավորյալ սահման:

Արտագծած կանոնավոր բազմանկյան կողմերի թիվն անսահմանորեն կրկնապատկելու դեպքում, նրա պարագիծն աստիճանաբար փոքրանում է, բայց միշտ էլ մեծ կմնա վերջավորյալ P_n թվից, վորովհետև

$$P_{2^{\kappa}\cdot n} > p_{2^{\kappa}\cdot n} > p_n$$

Ուստի փոփոխական $P_{n^{\kappa}\cdot n}$ թիվը ունի մի ինչ վոր վերջավորյալ սահման:

Այժմ ապացուցենք, վոր փոփոխական $p_{2^{\kappa}\cdot n}$ և $P_{2^{\kappa}\cdot n}$ թվերն ունեն միևնույն սահմանը. այդ վորոշումը նշանակորեն այսպես են գրում

$$\lim_{\kappa\to\infty} p_{2^{\kappa}\cdot n} = \lim_{\kappa\to\infty} P_{2^{\kappa}\cdot n}$$

Նախ հաստատենք հետևյալ յերեք ճշմարտությունները:

1. Ներգծած կանոնավոր բազմանկյան կողմերի թիվն անսահմանորեն մեծանալու դեպքում, նրա կողմը ձգտում է զերոյի:

Ներգծած կանոնավոր m-անկյան կողմը նշանակենք a_m-ով և արտագծած n-անկյան պարագիծը՝ P_n-ով, նկատի առնելով, վոր P_n-ը կայուն թիվ է, վորովհետև $p_m < P_n$ կամ $m \cdot a_m < P_n$, ապա $a_m < \frac{P_n}{m}$. m թվի անսահմանորեն աճելու դեպքում, $\frac{P_n}{m}$-ը ձգտում է զերոյի. հետևապես a_m-ը ձգտում է 0-ի, այսինքն $\lim a_m = 0$

2. Ներգծած կանոնավոր բազմանկյան կողմերի թիվն անսահմանորեն մեծանալու դեպքում, նրա ապոթեմի յեվ շրջանի շառավղի տարբերությունը ձգտում է զերոյի:

Յեռանկյան կողմերի հատկության համաձայն $AO - OK < AK$ (գծ. 14) կամ $R - l_m < \frac{a_m}{2}$, ուր R-ը շրջանի շառավիղն է և l_m-ը ներգծած կանոնավոր m-անկյան ապոթեմը: Վորովհետև $\frac{a_m}{2}$-ը $m \to \infty$ դեպքում ձգտում է զերոյի, ուստի $R - l_m$-ը $m \to \infty$ դեպքում նմանապես ձգտում է զերոյի, այսինքն

$$\lim_{m\to\infty} (R - l_m) = 0$$

կամ

$$\lim_{m\to\infty} l_m = R$$

3. Արտագծած յեվ ներգծած կանոնավոր բազմանկյունների պարագծերի տարբերությունը, նրանց կողմերի թիվն անսահմանորեն մեծանալու դեպքում, ձգտում է զերոյի:

Վորովհետև կանոնավոր բազմանկյունների պարագծերի հարաբերությունը հավասար է նրանց ապոթեմների հարաբերության, կամ $\frac{P_m}{p_m} = \frac{R}{l_m}$, ուստի վերցնելով դրանց ածանցյալ համեմատությունը, կստանանք

$$\frac{P_m - p_m}{p_m} = \frac{R - l_m}{l_m}$$

հետևապես

$$P_m - p_m = \frac{p_m(R - l_m)}{l_m}$$

վորովհետև $p_n < P_n$, $\lim\limits_{m \to \infty} (R - l_m) = 0$ և $\lim\limits_{m \to \infty} l_m = R$, ուստի $m \longrightarrow \infty$ դեպքում $\frac{p_m}{l_m}(R - l_m)$ կոտորակը հետևապես և $P_m - p_m$ ձգտում է զերոյի։ Ցեվ այսպես

$$\lim_{m \to \infty} (P_m - p_m) = 0$$

Այժմ դառնանք այն արտագծած և ներգծած կանոնավոր բազմանկյուններին, վորոնք ստացվում են նրանց կողմերի թիվը անսահմանորեն կրկնապատկելու դեպքում։ Այդ դեպքում $m = n \cdot 2^{\kappa}$, ուր n-ը՝ սկզբնական բազմանկյան կողմերի թիվն է, իսկ κ թիվը ցույց է տալիս դրական ամբողջ արժեքների շարքը։ Ակներև է, վոր $n \cdot 2^{\kappa}$ թիվը անսահմանորեն աճում է κ թվի անսահմանորեն աճելու դեպքում. հետևապես

$$\lim_{k \to \infty} (P_n \cdot 2^{\kappa} - p_n \cdot 2^{\kappa}) = 0$$

կամ

$$\lim_{k \to \infty} P_n \cdot 2^{\kappa} - \lim_{k \to \infty} p_n \cdot 2^{\kappa} = 0$$

կամ

$$\lim_{k \to \infty} P_n \cdot 2^{\kappa} = \lim_{k \to \infty} p_n \cdot 2^{\kappa}$$

Այդ ընդհանուր սահմանը նշանակենք C-ով և ցույց տանք, վոր հենց այդ նույն սահմանին ձգտում են արտագծած և ներգծած կանոնավոր բազմանկյունների պարագծերը, նրանց կողմերի թիվը անսահմանորեն մեծացնելու դեպքում, ինչպես էլ ուզում է լինի այդ մեծացման որենքը։ Ինչպիսի թիվ էլ ուզում են լինեն m-ը և κ-ն,

$$p_n \cdot 2^{\kappa} < P_m$$

հետևապես

$$\lim_{k \to \infty} p_n \cdot 2^{\kappa} \leqslant P_m$$

կամ

$$C \leqslant P_m$$

նույն ձևով

$$P_n \cdot 2^{\kappa} > p_m$$

հետևապես

$$\lim_{k \to \infty} P_n \cdot 2^{\kappa} \geqslant p_m$$

կամ

$$C \geqslant p_m$$

Բայց 3-րդ կետում ապացուցածի համաձայն, $P_m - p_m$-ը $m \to \infty$ դեպքում ձգտում է զերոյի, իսկ

$$C - p_m\,,\quad P_m - C$$

դրական տարբերություններից յուրաքանչյուրը փոքր է

$$P_m - p_m \ (\text{որովհետև } P_m \geqslant C \geqslant p_m)$$

տարբերությունից, ուստի առավել ևս ձգտում է զերոյի, այսինքն

$$\lim_{m \to \infty} P_m = \lim_{m \to \infty} p_m = C$$

դյուրին է նկատել, որ p_m-ը չի կարող հավասարվել C-ին։

Եվ հիրավի

$$p_m < P_{2m} \leqslant C, \text{ այսինքն } p_m < C$$

Նմանապես

$$P_m > P_{2m} \geqslant C, \text{ այսինքն } P_m > C$$

Նկատենք, որ հենց այդ նույն սահմանին են ձգտում ընդհանրապես բոլոր արտագծած և ներգծած թե՛ կանոնավոր և թե՛ անկանոն ուռուցիկ բազմանկյունների պարագծերն այն դեպքում, յերբ բազմանկյան կողմերն վորևե որենքի համաձայն անսահմանորեն փոքրանում են։ Այդ առաջադրության ապացուցումը չենք բերում այստեղ։

Իբրև շրջանագծի յերկարություն ընդունվում է արտագծած և ներգծած կանոնավոր բազմանկյունների պարագծերի ընդհանուր սահմանն՝ այդ բազմանկյունների կողմերի թվի անսահմանորեն կրկնապատկելու դեպքում։

Ակներև է, որ շրջանագծի յերկարությունը մեծ է ներգծած բազմանկյան պարագծից և փոքր է արտագծած բազմանկյան պարագծից։

ԹԵՈՐԵՄ: Շրջանագծի յերկարության հարաբերությունը նրա տրամագծին կայուն մեծություն է:

Վերցնենք յերկու կամավոր R_1 և R_2 շառավիղներ ունեցող շրջանագծեր։ Նշանակենք այդ շրջանագծերի յերկարությունները C_1 և C_2 տառերով։ Յուրաքանչյուր շրջանին արտագծենք կանոնավոր նույնանուն բազմանկյուններ, նշանակելով նրանց պարագծերը P_1 և P_2-ով, վորովհետև կանոնավոր բազմանկյունների պարագծերը հարաբերում են միմյանց այնպես, ինչպես նրանց շառավիղները կամ ապոթեմներն, ուստի

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2} \text{ կամ } \frac{P_1}{P_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$$

Վերջին հավասարությունը ճիշտ է վերը բերած նույնանուն յերկու բազմանկյունների նկատմամբ, անկախ նրանց կողմերի թվից. հետևապես, մենք յեզրակացնում ենք, որ իրենց բոլոր համապատասխան փոփոխումների դեպքում սահմաններ ունեցող յերկու P_1 և P_2 փոփոխական մեծությունների հարաբերությունը հավասար է նրանց սահմանների հարաբերության, այսինքն

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{C_1}{C_2}, \text{ որտեղից ստանում ենք } \frac{C_1}{C_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$$

$$C=(\text{մոտավորապես})\ \frac{P_{n\cdot 2^k}+p_{n\cdot 2^k}}{2}$$

կամ

$$2\pi R=\frac{P_{n\cdot 2^k}+p_{n\cdot 2^k}}{2}$$

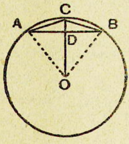
կամ, ընդունելով $R=1$-ի և վերջին հավասարության յերկու մասն էլ բաժանելով 2-ի, կստանանք

$$\pi=\frac{P_{n\cdot 2^k}+p_{n\cdot 2^k}}{4}$$

Այժմ մնում է միայն սովորելու $P_{n\cdot 2^k}$ և $p_{n\cdot 2^k}$ հաշվել $n\cdot 2$-ի ամեն մի արժեքի դեպքում: Դուրս է գալիս, վոր յեթե գիտենք p_n, ապա վորոշ ֆորմուլի միջոցով կարող ենք հաշվել p_{2n}, իսկ յեթե գիտենք p_{2n}, ապա նույն այդ ֆորմուլի միջոցով կարող ենք հաշվել p_{4n} և այլն:

Այն ֆորմուլը, վորը հնարավորություն է տալիս այդպիսի հաջորդական հաշվումներ անել, կոչվում է կրկնապատկման ֆորմուլ: Այդ ֆորմուլը հետևյալն է

$$a_{2n}=\sqrt{2R\left(R-\sqrt{R^2-\frac{a^2_n}{4}}\right)}$$



Գծ. 15

Ապացուցենք այդ առընչությունը:

Ենթադրենք $AB=a_n$, $AC=a_{2n}$ (գծ. 15), $AO=OC=R$: Վորովհետև AB-ն ամենաշատը կարող է լինել կանոնավոր յեռանկյան կողմ, ուստի $\angle AOC$ միշտ էլ սուր անկյուն կլինի (ինչու). վորովհետև $OC \perp AB$ (ինչու), ուստի յեռանկյան սուր անկյան հանդիպակաց կողմի հատկության համաձայն, ունենք

$$AC^2=AO^2+OC^2-2OC\cdot OD \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Պյութագորի թեորեմի համաձայն AOD ուղղանկյուն յեռանկյունուց կստանանք

$$OD=\sqrt{AO^2-AD^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Տեղադրելով OD-ի արժեքը հավասարության (1)-ի մեջ, կստանանք

$$AC^2=AO^2+OC^2-2OC\sqrt{AO^2-AD^2}$$

կամ

$$a_{2n}^2=R^2+R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}=2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}=$$

$$=2R\left(R-\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}\right)$$

վորովհետև

$$AD=\frac{a_n}{2} \text{ և } AD^2=\frac{a_n^2}{4}$$

ուստի կստանանք

$$a_{2n}=\sqrt{2R\left(R-\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}\right)}$$

կամ, տեղափոխելով համեմատության միջին անդամները, կստանանք

$$\frac{C_1}{2R_1}=\frac{C_2}{2R_2}$$

այն, ինչ վոր պետք եր ապացուցել։

Շրջանագծի յերկարության և նրա տրամագծի հարաբերությունը ցույց տվող կայուն թիվը ընդունված ե նշանակել հունական π («պի») տառով։

Շրջանագծի յերկարությունը նշանակելով C, շառավիղը՝ R, կստանանք $\frac{C}{2R}=\pi$, վորտեղից կստացվի

$$C=2\pi R$$

այս ֆորմուլով հաշվում են շրջանագծի յերկարությունը, յերբ հայտնի յե նրա շառավիղը։

$\frac{C_1}{2R_1}=\frac{C_2}{2R_2}$ համասարությունը կարելի յե ձևակերպել այսպես. շրջանագծերի յերկարությունները համեմատական են իրենց տրամագծերին կամ շառավիղներին։

m^0 պարունակող աղեղի յերկարության ֆորմուլը

Վորովհետև շրջանագիծը բաժանվում ե 360 հավասար մասերի, վորոնք կոչվում են աղեղնային աստիճան, ուստի մի աղեղնային աստիճանի հավասար աղեղի յերկարությունը հավասար ե $\frac{2\pi R}{360}$-ի. այդ պատճառով m աղեղնային աստիճաններ պարունակող աղեղի յերկարությունը հավասար ե $\frac{2\pi Rm}{360}$-ի։

Յեթե աղեղը պարունակում ե m^0n^1 ապա նրա յերկարությունը հավասար ե

$$\frac{2\pi R(60m+n)}{360\cdot 60}$$

Յեթե աղեղը պարունակում ե $m^0\,n'\,p''$, ապա նրա յերկարությունը հավասար ե

$$\frac{2\pi R[(60m+n)\cdot 60+p]}{360\cdot 60\cdot 60}$$

§ 31. ԳԱՂԱՓԱՐ π-Ի ՀԱՇՎՈՒՄԻ ՄԱՍԻՆ

Ինչպես տեսանք π-ն անհամաչափելի թիվ ե, ուստի այդ π-ին կարելի յե հաշվել այս կամ այն մոտավոր ճշտությամբ։

Պահպանելով նախկին նշանակումները, կարող ենք գրել.

$$P_n < C < P_n;\ p_{2n} < C < P_{2n};\ p_{4n} < C < P_{4n}\ \ldots;\ p_{n\cdot 2^k} < C < P_{n\cdot 2^k}$$

Վորքան մեծ լինի $n\cdot 2^k$ թիվը, այնքան $P_{n\cdot 2^k}$-ի և $p_{n\cdot 2^k}$-ի արժեքը մոտ կլինի C-ին։

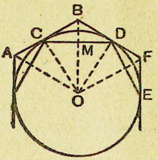
Հետևապես, կարող ենք ընդունել, վոր շրջանագծի յերկարություն C-ն մոտավորապես հավասար ե $P_{n\cdot 2^k}$ և $p_{n\cdot 2^k}$ արժեքների միջին թվաբանականին, այսինքն

Ինչպես ասացինք, յենթադրելով R=1, կստանանք

$$a_{2n} = \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}}\right)}$$

Բազմապատկելով հավասարության յերկու մասը բազմանկյան 2n կողմերի թվով, կստանանք P_{2n}: Այդ ֆորմուլի մեջ a_n-ի տեղը դնելով a_{2n}, կգտնենք a_{4n}, վորտեղից կգտնենք P_{4n}, շարունակելով հաջորդաբար այդ հաշվումները, կհասնենք, վերջապես, $P_{n \cdot 2^k}$ արժեքին:

Այժմ հետազոտենք, թե ինչպես են հաշվում արտագծած կանոնավոր բազմանկյան կողմերը և պարագիծը: Դրա համար հարկավոր է իմանալ միայն ներգծած կանոնավոր նույնանուն բազմանկյան ֆորմուլը: Յենթադրենք AB-ն արտագծած կանոնավոր n-անկյան մի կողմն է և նշանակենք այն b_n-ով:



Գծ. 16

Դիցուք CD-ն ներգծած կանոնավոր n-անկյան մի կողմն է (գծ. 16): Նշանակենք այն a_n-ով. այդ դեպքում $CM = \frac{a_n}{2}$: Վորովհետև կանոնավոր բազմանկյունների կողմերը հարաբերում են միմյանց այնպես, ինչպես շառավիղները և ապոթեմները, ուստի

$$\frac{AB}{CD} = \frac{OC}{OM}$$

վորտեղից կստացվի

$$AB = \frac{CD \cdot OC}{OM}$$

Բայց ըստ Պյութագորի թեորեմի

$$OM = \sqrt{OC^2 - CM^2}$$

հետևապես

$$AB = \frac{CD \cdot OC}{\sqrt{OC^2 - CM^2}}$$

Գործածելով մեր ընդունած նշանակումը և նկատելով, վոր OC=R, կըստանանք

$$b_n = \frac{a_n \cdot R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$$

Այս ֆորմուլի մեջ a_n-ի փոխարեն տեղադնելով հաջորդաբար

$$a_{2n},\ a_{4n},\ a_{8n}\ .\ .\ .\ a_{n \cdot 2^k}$$

կստանանք

$$b_{2n},\ b_{4n},\ b_{8n}\ .\ .\ .\ b_{n \cdot 2^k}$$

արժեքները, իսկ բազմապատկելով այդ արժեքները կողմերի թվով, կստանանք համապատասխան արժեքներ

$P_n,\ P_{2n},\ P_{4n},\ P_{8n}\ .\ .\ .\ P_{n \cdot 2^k}$-ի համար:

Հետևյալ աղյուսակում տրված են P_n-ի և p_n թվային արժեքները հաշված 0,00001-ի մոտավոր ճշտությամբ, ընդունելով R=1

n	P_n	p_n	$P_n - p_n$
6	6,92820...	6,00000...	0,92820...
12	6,63077...	6,21165...	0,41912...
24	6,31905...	6,26525...	0,05380...
48	6,29217...	6,27870...	0,01347...
96	6,28542...	6,28206...	0,00336...
192	6,28374...	6,28290...	0,00084...
384	6,28332...	6,28311...	0,00021...
768	6,28322...	6,28316...	0,00006...
1536	6,28319...	6,28318...	0,00001...

Ներկայումս այդպիսի աղյուսակներ ստանում են վոչ մեր դուրս բերած ֆորմուլների ոգնությամբ, այլ ավելի համառոտ հաշվումների միջոցով, բայց այդ ձևի հաշվումների յեղանակը սովորաբար հետազոտում են բարձրագույն մաթեմատիկայի մեջ։

Վերը բերած աղյուսակը դիտելով, դյուրին է նկատել, վոր 1) արտագծած կանոնավոր բազմանկյան կողմերի թիվը հաջորդաբար կրկնապատկելու դեպքում, նրա պարագիծն աստիճանաբար նվազում է. 2) ներգծած կանոնավոր բազմանկյան կողմերի թիվը հաջորդաբար կրկնապատկելու դեպքում, նրա պարագիծն աստիճանաբար աճում է. 3) նույն շրջանին արտագծած յեվ ներգծած կանոնավոր նույնանուն բազմանկյունների կողմերի թիվը մեծացնելու դեպքում, նրանց պարագծերի տարբերությունն աստիճանաբար նվազում է:

Այսպես ուրեմն, կարելի յե ընդունել, վոր շրջանագծի յերկարությունը մոտավորապես հավասար է շատ մեծ թվով կողմեր ունեցող ներգծած կամ արտագծած բազմանկյան պարագծին, իսկ π-ն վորոշում են հետևյալ ֆորմուլով

$$\pi = \frac{P_{n\cdot 2^{k}} + p_{n\cdot 2^{k}}}{4}$$

$n\cdot 2^{k}$ *թվի տեղը* 1536-*ը դնելուց հետո, կստանանք*

$$\pi = \frac{P_{1536} + p_{1536}}{4} = \frac{6{,}28319\ldots + 6{,}28318\ldots}{4} =$$

$$= \frac{12{,}56637\ldots}{4} = 3{,}14159\ldots$$

Գործնական նպատակների համար հաճախ բավական է լինում ընդունել $\pi = 3{,}14$ *կամ* $\pi = \frac{22}{7}$ (Արքիմեդյան *հարաբերություն*)։

Լոգարիթմների հնդանիշ աղյուսակի ոգնությամբ հաշվումներ անելու համար ոգտակար է նկատի ունենալ, վոր $\lg \pi = 0{,}49715$

$m \cdot \pi$ *և* $\frac{m}{\pi}$ *արտահայտությունների անմիջականորեն հաշվելու համար հարմար է ոգտվել հետևյալ ոժանդակ աղյուսակից.*

m	$m\pi$	$\frac{m}{\pi}$
1	3,14159...	0,31830...
2	6,28318...	0,63661...
3	9,42477...	0,95492...
4	12,56637...	1,27323...
5	15,70796...	1,59154...
6	18,84955...	1,90985...
7	21,99114...	2,22816...
8	25,13274...	2,54647...
9	28,27433...	2,86478...

Օրինակ 1. *Գտնենք շրջանագծի յերկարությունը, վորի շառավիղը հավասար է* 8,7 cm-*ի։*

$$C = 2\pi R = \pi \cdot 17{,}4 = 10\pi + 7\pi + 0{,}4\pi = \left.\begin{array}{r} 31{,}41\ldots \\ 21{,}99\ldots \\ 1{,}25\ldots \end{array}\right\} + \;= 54{,}65\ldots$$

Այսպես ուրեմն, շրջանագծի յերկարությունը մի միլիմետրի մոտավոր ճշտությամբ հավասար է 54,7 cm-*ի։*

Օրինակ 2. *Գտնենք շառավիղը, յեթե շրջանագծի յերկարությունը հավասար է* 7cm-*ի։*

$$R = \frac{C}{2\pi} = \frac{7}{2\pi} = \frac{3{,}5}{\pi} = \frac{3}{\pi} + \frac{0{,}5}{\pi} = \left.\begin{array}{r} 0{,}95\ldots \\ 0{,}15\ldots \end{array}\right\} + \;= 1{,}1\ldots$$

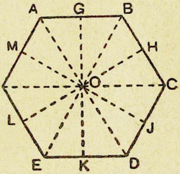
Յեվ այսպես, R = 1,1 cm-*ի։*

§ 32. ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԲԱԶՄԱՆԿՅԱՆ ՅԵՎ ՇՐՋԱՆԻ ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐԸ

ԹԵՈՐԵՄ.—Կանոնավոր բազմանկյան մակերեսը հավասար է իր պարագծի յեվ ապոթեմի (կամ ներգծած շրջանի շառավղի) արտադրյալի կիսին։

Տրված է կանոնավոր n *անկյուն* ABCD . . . *(գծ. 17),* O *կետը ինչպես ներգծած, այնպես և արտագծած շրջանի կենտրոնն է,* OG *ապոթեմն է։ Տրված կանոնավոր* n *անկյան պարագիծը հավասար է* n · AB*։ Նշանակենք վորոնելի մակերեսը* S *տառով։ Պահանջվում է ապացուցել, վոր*

$$S = \frac{n \cdot AB \cdot OG}{2}$$

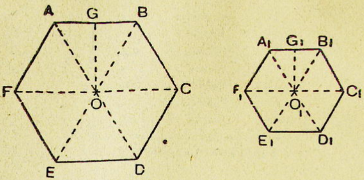


Գծ. 17

Ապացուցում. — *Վորովհետև* AOB, BOC, COD *և այլն, յեռանկյունները հավասարասրուն են (ինչու.) և հավասար են միմյանց* (AO = BO, BO = OC, ∠AOB = ∠BOC *և այլն), ուստի* S = n · ΔAOB, *վորտեղից կստանանք*

$$S = \frac{n \cdot AB \cdot OG}{2}$$

ԹԵՈՐԵՄ.—Կանոնավոր նույնանուն բազմանկյունների մակերեսները համեմատական են արտագծած շրջանների շառավիղների քառակուսիներին կամ ապոթեմների քառակուսիներին:



Գծ. 18

Ենթադրենք ABCD . . . *և* $A_1B_1C_1D_1$ . . . *(գծ. 18) կանոնավոր նույնանուն* n *անկյուն են։* AB, A_1B_1—*այդ բազմանկյունների կողմերն են,* OG *և* O_1G_1-*ն՝ ապոթեմները և* AO, A_1O_1-*ը՝ շառավիղները։*

Նշանակենք n-*անկյուն* ABCD . . . -*ի մակերեսը* S_n -*ով, իսկ* n-*անկյուն* $A_1B_1C_1D_1$ . . . -*ի մակերեսը* s_n -*ով և ապացուցենք, որ*

$$\frac{S_n}{s_n}=\frac{OG^2}{O_1G_1^2}=\frac{AO^2}{A_1O_1^2}$$

Մենք գիտենք, որ

$$S_n=\frac{n\cdot AB\cdot OG}{2};\quad s_n=\frac{n\cdot A_1B_1\cdot O_1G_1}{2}$$

Հավասարությունների համապատասխան մասերը մեկը մյուսի վրա բաժանելով, կստանանք

$$\frac{S_n}{s_n}=\frac{AB\cdot OG}{A_1B_1\cdot O_1G_1}$$

կամ

$$\frac{S_n}{s_n}=\frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{OG}{O_1G_1}$$

Բայց, այդ բազմանկյունների նմանության հետևանքով

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{OG}{O_1G_1}=\frac{AO}{A_1O_1}$$

հետևապես

$$\frac{S_n}{s_n}=\frac{OG}{O_1G_1}\cdot\frac{OG}{O_1G_1}=\frac{OG^2}{O_1G_1^2}=\frac{AO^2}{A_1O_1^2}$$

ԹԵՈՐԵՄ.—Շրջանի մակերեսը կանոնավոր արտագծած յեվ ներգծած բազմանկյունների ընդհանուր սահմանն է նրանց կողմերի թիվն անսահմանորեն մեծանալու դեպքում:

Շրջանագծի յերկարությունը նշանակենք C-*ով, շրջանի մակերեսը՝* K-*ով, արտագծած և ներգծած* n-*անկյունների մակերեսները համապատասխանաբար* S_n *և* s_n *տառերով, իսկ մնացածների համար պահպանենք նախ-*

կին նշանակումները։ Ակներև է, վոր ամեն տեսակ n թվի դեպքում կունենանք՝ $S_n > K > s_n$։ Ըստ ապացուցածի

$$S_n = \frac{P_n \cdot R}{2}, \quad s_n = \frac{P_n \cdot l_n}{2}$$

Անցնելով սահմաններին և կիրառելով արտադրյալի սահմանի թեորեմները, կարող ենք գրել

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty}\left(P_n \frac{R}{2}\right) = C \cdot \frac{R}{2}; \quad \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} p_n \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{l_n}{2} = C \cdot \frac{R}{2}$$

վորտեղից կստանանք $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} s_n$ կամ $\lim\limits_{n \to \infty} (S_n - s_n) = 0$

սակայն $S_n - K < S_n - s_n$ հետևապես $\lim\limits_{n \to \infty} (S_n - K) = 0$

$$\text{կամ } \lim_{n \to \infty} S_n = K = \lim_{n \to \infty} s_n$$

Վերջնական $K = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = C\frac{R}{2}$ ուստի $K = 2\pi R \cdot \frac{R}{2}$

$$\text{կամ } K = \pi R^2$$

Ունենալով R_1 և R_2 շառավիղներով յերկու շրջան, նշանակենք նրանց մակերեսները համապատասխանաբար K_1 և K_2-ով։ Այն ժամանակ $K_1 = \pi R_1^2$ և $K_2 = \pi R_2^2$ վորտեղից կստանանք

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$$

այսինքն, շրջանների մակերեսները համեմատական են նրանց շառավիղների քառակուսիներին։

§ 33. ՍԵԿՏՈՐԻ ՄԱԿԵՐԵՍԸ

Սեկտորի մակերեսը, վորի աղեղը պարունակում է մի աղեղային աստիճան, հավասար է $\frac{\pi R^2}{360}$, ուստի սեկտորի մակերեսը, վորի աղեղը պարունակում է m աղեղային աստիճան կամ վորի կենտրոնական անկյունը պարունակում է m անկյունային աստիճան, հավասար է $\frac{\pi R^2 m}{360}$։ Գրելով այդ արտահայտությունը $\frac{2\pi R^2 m}{2 \cdot 360}$ կամ $\frac{2\pi Rm}{360} \cdot \frac{R}{2}$ ձևով և նկատելով, վոր $\frac{2\pi Rm}{360}$-ը m^0 պարունակող աղեղի յերկարությունն է, մենք գտնում ենք, վոր սեկտորի մակերեսը հավասար է նրա աղեղի յերկարության յեվ շառավղի կես արտադրյալին։ Սեկտորի մակերեսը, վորի կենտրոնական անկյունը հավասար է m^0n'-ի, հավասար է

$$\frac{\pi R^2(60m + n)}{360 \cdot 60}$$

Սեկտորի մակերեսը, վորի կենտրոնական անկյունը հավասար է $m^0n'p''$-ի, հավասար է

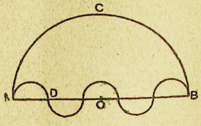
$$\frac{\pi R^2[(60m + n)60 + p]}{360 \cdot 60 \cdot 60}$$

Սեգմենտի մակերեսը հավասար է համապատասխան սեկտորի և հավասարասրուն յեռանկյան մակերեսների տարբերության։

Շրջանային ողակի մակերեսը, այսինքն այն մակերեսը, վորը պարփակված է յերկու կոնցենտրիկ շրջանագծերի միջև, հավասար է յերկու շրջանների մակերեսների տարբերության։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

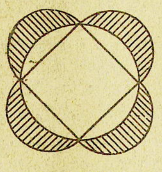
212. ACB կիսաշրջանագծի տրամագիծը (գծ. 19) բաժանված է n հավասար մասերի. $AD = \frac{AB}{n}$։ Տրամագծի վրա առաջացած յուրաքանչյուր հատվածը մի նոր կիսաշրջանագծի համար տրամագծի տեղ է ծառայում։ Ապացուցեք, վոր այդպիսով առաջացած ալիքավոր կոր գծի յերկարությունը հավասար է տված կիսաշրջանագծի յերկարության։



Գծ. 19

213. Ապացուցեք, վոր կամավոր վերցրած ուղղանկյուն յեռանկյան ներքնաձիգին հավասար տրամագիծ ունեցող կիսաշրջանի մակերեսը հավասար է այն կիսաշրջանների մակերեսների գումարին, վորոնց համար վորպես տրամագծեր հանդիսանում են նույն յեռանկյան էջերը։

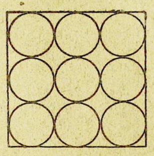
214. Շրջանին ներգծած է քառակուսի (գծ. 20)։ Քառակուսու յուրաքանչյուր կողմի վրա կառուցած է կիսաշրջան։ Ապացուցեք, վոր այդպիսով առաջացած կիսալուսինների (գծանկարում մազագծերով ծածկված մասերը) մակերեսը հավասար է քառակուսու մակերեսին։



Գծ. 20

215. Քառակուսուն ներգծած են n^2 միատեսակ շրջաններ, ուր n-ը կամավոր ամբողջ թիվ է։ Գծանկար 21-ում պատկերացրած են 3^2 ներգծած շրջաններ։ Ապացուցեք, վոր այդպիսի շրջանների մակերեսների գումարը կախված չէ n թվից և հավասար է $\frac{\pi a^2}{4}$, ուր a նշանակում է քառակուսու կողմը։

216. Շրջանագծերից մեկը մյուսից յերկար է a մետրով։ Վորոշեցեք շառավիղների տարբերությունը։



Գծ. 21

217. Ներգծած կանոնավոր յեռանկյան կողմը a cm-ով յերկար է նույն շրջանին ներգծած քառակուսու կողմից։ Վորոշեցեք. 1) շրջանագծի յերկարությունը և 2) շրջանի մակերեսը։

218. Վորոշեցեք a cm կողմ ունեցող կանոնավոր յեռանկյանը ներգծած շրջանի մակերեսը։

219. Հաշվեցեք 7 cm և 24 cm էջեր ունեցող ուղղանկյուն յեռանկյանն արտագծած շրջանագծի յերկարությունը։

220. Վորոշեցեք 20 cm և 21 cm էջեր ունեցող ուղղանկյուն յեռանկյանը ներգծած շրջանի մակերեսը։

221. Վորոշեցեք սեկտորի մակերեսը, վորի կենտրոնական անկյունը հավասար է 41° 15′ 36″, իսկ շառավիղը՝ 10 cm։

222. Վորոշեցեք 6 cm շառավիղ ունեցող շրջանի սեգմենտը, վորը հատված է կանոնավոր ներգծած վեցանկյան կողմով։

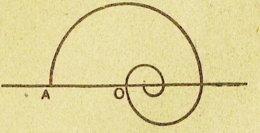
223. Յերկու շրջաններ հատվում են այնպես, վոր նրանց a cm յերկարության ընդհանուր լարը հանդիսանում է այդ շրջաններից մեկին ներգծած կանոնավոր յեռանկյան համար վորպես կողմ, իսկ մյուս շրջանի համար՝ ներգծած քառակուսու կողմ։ Վորոշեցեք այն մակերեսը, վորն ընդհանուր է այդ յերկու շրջանների համար։

224. Յերկու կոնցենտրիկ շրջանների շառավիղների տարբերությունը հավասար է 2 cm-ի, իսկ այդ շրջաններով առաջացած օղակի մակերեսը հավասար է 8π cm²։ Գտեք շառավիղները։

225. 6 cm յերկարություն շառավիղ ունեցող շրջանի մեջ կենտրոնի մի կողմում տարված են իրար զուգահեռ յերկու լար, վորոնցից մեկը հանդիսանում է ներգծած կանոնավոր յեռանկյան կողմ, մյուսը ներգծած կանոնավոր վեցանկյան կողմ։ Հաշվեցեք շրջանի այն մասի մակերեսը, վորը պարփակված է մատնանշած լարերի միջև։

Ցուցմունք.—Հարկավոր է վեցանկյան կողմով առաջացած սեգմենտի մակերեսը հանել յեռանկյան կողմով առաջացած սեգմենտի մակերեսից։

226. Տվյալ կիսաշրջանագծի շառավիղը հանդիսանում է նրա տրամագծի մյուս կողմում տարված յերկրորդ կիսաշրջանագծի համար վորպես տրամագիծ. յերկրորդ կիսաշրջանագծի շառավիղն իր հերթին հանդիսանում է յերրորդ կիսաշրջանագծի համար վորպես տրամագիծ, և այդպես կրկնվում անվերջ։ Ապացուցեք, վոր A կետից (գծ. 22) սկսվող վոլորաձև կորի յերկարության սահմանը հավասար է AO շառավիղ ունեցող շրջանագծի յերկարության։



Գծ. 22

Ցուցմունք.—Տես § 16։

227. R շառավիղ ունեցող շրջանին ներգծած է քառակուսի. այդ քառակուսուն ներգծած է յերկրորդ շրջան, վորին ներգծած է յերկրորդ քառակուսին, յերկրորդ քառակուսուն ներգծած է յերրորդ շրջան և այլն, ու այդպես անվերջ։ Ապացուցեք, վոր կառուցած բոլոր շրջանների մակերեսների գումարը հավասար է $2\pi R^2$։

Ցուցմունք.—Տես նախկին խնդրի ցուցմունքը։

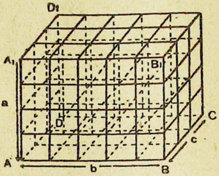
ԳԼՈՒԽ VI

ՊՐԻԶՄԱՆԵՐԻ ՅԵՎ ԲՈՒՐԳԵՐԻ ԾԱՎԱԼՆԵՐԸ

§ 34. *ԶՈՒԳԱՀԵՌԱՆԻՍՏԻ ԾԱՎԱԼԸ*

ԹԵՈՐԵՄ: Ուղղանկյուն զուգահեռանիստի ծավալը հավասար է նրա յերեք չափումների արտադրյալին:

Այս թեորեմն ավելի ընդարձակ արտահայտում են այսպես. ուղղանկյուն զուգահեռանիստի ծավալը խորանարդ միավորներով արտահայտող թիվը հավասար է զուգահեռանիստի չափումները համապատասխան գծային միավորներով արտահայտող թվերի արտադրյալին:



Գծ. 23

Ուղղանկյուն զուգահեռանիստի ծավալը նշանակենք V *տառով և նրա յերեք չափումներն արտահայտենք* a, b *և* c *թվերով, (գծ. 23): Պետք է ապացուցել, վոր* $V = abc$*: Առանձին-առանձին քննենք հետևյալ յերեք դեպքերը:*

1\. a, b *և* c *ամբողջ թվեր են:*

Բաժանենք a *գծային միավորներով չափված* AA_1 *կողը* a *հավասար մասերի և բաժանման կետերով տանենք* AC *նիստին զուգահեռ հարթություններ, այդ դեպքում տվյալ զուգահեռանիստը կբաժանվի* a *կոնգրուենտ զուգահեռանիստերի, վորոնք կունենան* 1, b *և* c *չափումները: Բաժանենք* AB *կողը* b *հավասար մասերի և բաժանման կետերով տանենք* AD_1 *նիստին զուգահեռ հարթություններ, այդ դեպքում տվյալ զուգահեռանիստը կբաժանվի* ab *կոնգրուենտ զուգահեռանիստերի, վորոնք կունենան* 1, 1 *և* c *չափումները: Բաժանենք վերջապես* BC *կողը* c *հավասար մասերի և բաժանման կետերով տանենք* AB_1 *նիստին զուգահեռ հարթություններ, այդ դեպքում տվյալ զուգահեռանիստը կբաժանվի* abc *խորանարդների, վորոնց կողերը հավասար են գծային միավորին. յուրաքանչյուր այդպիսի խորանարդ հանդիսանում է վորպես ծավալի միավոր: Հետևապես* $V = abc$*:*

2\. a, b *և* c *կոտորակ թվեր են* (a, b *և* c *թվերի մեջ կարող են լինել և ամբողջ թվեր, այդ միայն կհամառոտի դատողությունը):*

Յենթադրենք

$$a = \frac{m_1}{n_1}, \quad b = \frac{m_2}{n_2} \quad \text{և} \quad c = \frac{m_3}{n_3}$$

որտեղ m և n իրենց նշաններով ամբողջ թվեր են։ Այդ կոտորակները բերելով ընդհանուր հայտարարի, կստանանք

$$a=\frac{m_1n_2n_3}{n_1n_2n_3},\quad b=\frac{m_2n_1n_3}{n_1n_2n_3},\quad c=\frac{m_3n_1n_2}{n_1n_2n_3}$$

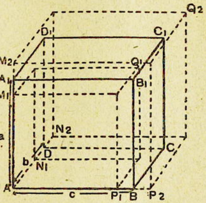
Ընդունենք a, b և c չափող գծային միավորի $\frac{1}{n_1n_2n_3}$ մասը, որպես նոր միավոր, այդ դեպքում տվյալ զուգահեռանիստի չափումները կարտահայտվեն նոր գծային միավորների հետևյալ ամբողջ թվերով. $m_1n_2n_3$, $m_2n_1n_3$ և $m_3n_1n_2$ և առաջին դեպքի հիման վրա, կստանանք. $V=(m_1n_2n_3)\cdot(m_2n_1n_3)\cdot(m_3n_1n_2)$ նոր խորանարդ միավորների, որոնք $(n_1n_2n_3)^3$ անգամ փոքր են նախկին խորանարդ միավորից։ Հետևապես նախկին խորանարդ միավորներով կստանանք

$$V=\frac{(m_1n_2n_3)(m_2n_1n_3)(m_3n_1n_2)}{(n_1n_2n_3)^3}=$$

$$=\frac{m_1n_2n_3}{n_1n_2n_3}\cdot\frac{m_2n_1n_3}{n_1n_2n_3}\cdot\frac{m_3n_1n_2}{n_1n_2n_3}=abc$$

3. a, b և c իռացիոնալ թվեր են, այսինքն անհամաչափելի յեն գծային միավորին (a, b և c թվերի մեջ կարող են լինել ամբողջ կամ կոտորակ թվեր, այդ միայն կհամառոտի դատողությունը)։

Գտնենք a, b և c թվերի մոտավոր արժեքները $\frac{1}{n}$ մոտավոր ճշտությամբ։ Դրա համար գծային միավորի $\frac{1}{n}$ մասը, որքան այդ հնարավոր է վերադնենք AA_1-ի, AB-ի և AD-ի վրա (գծ. 24)։ Յենթադրենք AM_1 հատվածը, որը փոքր է AA_1-ից, հավասար է $\frac{m_1}{n}$ գծային միավորի, իսկ AM_2 հատվածը, որը մեծ է AA_1-ից հավասար է $\frac{m_1+1}{n}$ գծային միավորի։



Գծ. 24

Այդ դեպքում $\frac{m_1}{n}$ և $\frac{m_1+1}{n}$ թվերը կլինեն a թվի մոտավոր արժեքները $\frac{1}{n}$-ի մոտավոր ճշտությամբ, առաջինը՝ պակասորդով, յերկրորդը՝ հավելորդով։

Նույն ձևով, յեթե $AN_1 < AD$ և $AN_1=\frac{m_2}{n}$, $AN_2 > AD$ և $AN_2=\frac{m_2+1}{n}$ ապա $\frac{m_2}{n}$ և $\frac{m_2+1}{n}$ թվերը կլինեն b թվի մոտավոր աժեքները $\frac{1}{n}$ -ի մոտավոր ճշտությամբ։

Նմանապես, յեթե $AP < AB$ և $AP_1=\frac{m_3}{n}$, $AP_2 > AB$ և $AP_2=$

$=\frac{m_3+1}{n}$ ապա $\frac{m_3}{n}$ և $\frac{m_3+1}{n}$ թվերը կլինեն c թվի մոտավոր արժեքները $\frac{1}{n}$-ի մոտավոր ճշտությամբ։

Կառուցենք հետևյալ յերկու ուղղանկյուն զուգահեռանիստերը. 1) AQ_1-ը հետևյալ չափումներով։

$$AM_1 = \frac{m_1}{n}, \quad AN_1 = \frac{m_2}{n} \quad \text{և} \quad AP_1 = \frac{m_3}{n}$$

և 2) AQ_2-ը հետևյալ չափումներով

$$AM_2 = \frac{m_1+1}{n}, \quad AN_2 = \frac{m_2+1}{n} \quad \text{և} \quad AP_2 = \frac{m_3+1}{n}$$

Նշանակենք AQ_1 զուգահեռանիստերի ծավալը V_1-ով, իսկ AQ_2-ի ծավալը V_2-ով։ Ակներև է, վոր $V_1 < V < V_2$ կամ յերկրորդ դեպքի հիման վրա

$$\frac{m_1}{n} \cdot \frac{m_2}{n} \cdot \frac{m_3}{n} < V < \frac{m_1+1}{n} \cdot \frac{m_2+1}{n} \cdot \frac{m_3+1}{n}$$

Վորովհետև այդ միացյալ անհավասարությունը ճիշտ է ամեն մի n ամբողջ թվի դեպքում, ապա պարզ է, վոր վորոնելի V ծավալը մեծ է a, b և c թվերի պակասորդով վերցրած վորևե մոտավոր արժեքների արտադրյալից, բայց փոքր է a, b և c թվերի հավելորդով վերցրած վորևե մոտավոր արժեքների արտադրյալից, այսինքն իռացիոնալ թվերի վորոշման համաձայն V թիվը հավասար է a, b և c իռացիոնալ թվերի արտադրյալին։

Հետևյալ ֆորմուլը

$$V = a \cdot b \cdot c \quad \text{կամ} \quad V = (b \cdot c) \cdot a$$

ցույց է տալիս, վոր ուղղանկյուն զուգահեռանիստի ծավալը հավասար է նրա հիմքի մակերեսի (նիստերից ամեն մեկը կարելի յե ընդունել, վորպես հիմք, bc թիվը չափում է AC նիստի մակերեսը) և բարձրության (ընտրված հիմքի մակերևույթին ուղղահայաց կողը հաշվում է բարձրություն) արտադրյալին։

Այստեղից հետևում է, վոր խորանարդի ծավալը հավասար է նրա կողի յերրորդ աստիճանին։

§ 35. ԿԱՎԱԼԵՐԻԻ ՈՐԵՆՔԸ: ՊՐԻԶՄԱՅԻ ԾԱՎԱԼԸ

ԿԱՎԱԼԵՐԻԻ ՈՐԵՆՔԸ: Յերկու մարմին հավասարամեծ են, յեթե նրանք ունեն հավասարամեծ հիմքեր, հավասար բարձրություններ յեվ յեթե, մարմինները հիմքերով մի հարթության վրա դնելու դեպքում, ամեն մի այլ հարթություն զուգահեռ առաջինին, հատելով այդ մարմինները, առաջացնում է նրանց հատվածքներում հավասարամեծ պատկերներ։

ԲԱՑԱՏՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Կավալերին—*իտալացի մաթեմատիկոս է (1591—1647)։*

2. Հավասարամեծ կոչվում են այն պատկերները, վորոնց մակերեսները հավասար են։

Հավասարամեծ պատկերները կարող են կոնգրուենտ չլինել, որինակ, ուղղանկյուն յեռանկյունը կարող է հավասարամեծ լինել բութանկյուն յեռանկյան (գծանկարեք այդպիսի յեռանկյուններ), քառակուսին կարող է հավասարամեծ լինել շրջանին և այլն։

3. Հավասարամեծ կոչվում են այն մարմինները, վորոնց ծավալները հավասար են:

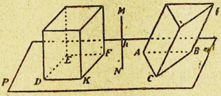
Հավասարամեծ մարմինները կարող են կոնգրուենտ չլինել, որինակ, գունդը կարող է հավասարամեծ լինել խորանարդին և այլն։ Միևնույն կտոր մոմից կարելի յե ծեփել զանազան մարմիններ, վորոնք կլինեն տարբերի ձևի, կունենան տարբեր մակերևույթներ, բայց կլինեն հավասարամեծ։

4. Կավալերիի որենքը (պրինցիպը) *թեորեմ չէ. մենք ընդունում ենք այն վորպես համարյա ակներև կամ ավելի ճիշտ, միանգամայն հասկանալի ճշմարտություն։*

Հիրավի, որենքը հեշտությամբ պարզում է մեզ, թե ինչու ուղիղ գուլը ավելի փոքր ծավալ ունի, քան շեղը, չնայած վոր այդ գուլերի թե հատակները և թե բարձրությունները իրար հավասար են. տեղավորենք գուլերը հիմքերով մի հարթության վրա, որինակ, հատակի վրա։ Ակներևէ, վոր հատակի հարթությանը զուգահեռ բոլոր հատվածքներն ուղիղ գուլի նկատամամբ կտան հավասար շրջաններ, իսկ շեղ գուլի հատվածքները կտան դեպի վերը հետզհետե աճող շրջաններ։

Այդպես ուրեմն մարմինների հիմքերին զուգահեռ տարած հարթությունները, հատելով մարմինները, բաժանում են նրանց շերտերի։ Յեթե զանազան մարմինների համապատասխան շերտերը նույն հաստության են և նրանց վերևի ու ներքևի սահմանները մակերեսներով հավասար են իրար, ապա, պարզ է, վոր այդպիսի շերտերը ծավալով էլ իրար հավասար են։ Իսկ նույն թվով և հավասար ծավալով շերտերից կազմված մարմինները ծավալով իրար հավասար են։

ԹԵՈՐԵՄ: Ամեն մի պրիզմայի ծավալը հավասար է նրա հիմքի մակերեսի յեվ բարձրության արտադրյալին:



Գծ .25

Միանգամայն միևնույն է, թե ինչպիսի պրիզմա գննել։ Վերցնենք թեք յեռանկյուն պրիզմա (գծ. 25), վորի հիմքն է յեռանկյուն ABC-ն։ Նշանակենք այդ հիմքի մակերեսը S տառով և բարձրությունը վերցնենք MN հատվածով (պրիզմայի վերևի ու ներքևի հիմքերի հարթությունների միջև յեղած տարածությունը), վորի յերկարությունը նշանակենք h-ով։ Պրիզմայի ծավալը նշանակենք V-ով։ Պրիզման հիմքով դրված է P հարթության վրա։ Կառուցենք P հարթության վրա DEFK ուղղանկյուն, հավասարամեծ ABC յեռանկյանը, հետևապես DEFK-ի մակերեսը հավասար է S-ի։ DEFK ուղղանկյան վրա, վորպես, հիմքի կառուցենք մի ուղղանկյուն զուգահեռանիստ, վորն ունենա նույն h բարձրությունը, ինչպիսին ունի մեր վերցրած յեռանկյուն պրիզման։

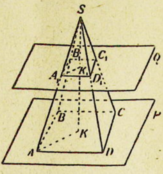
P հարթությանը զուգահեռ ամեն մի հարթություն ուղղանկյուն զուգահեռանիստի հատվածքում կտա DEFK ուղղանկյանը կոնգրուենտ ուղղանկյուն, իսկ թեք յեռանկյուն պրիզմայի հատվածքում՝ ABC յեռանկյանը կոնգրուենտ յեռանկյուն։ Կավալերիի *որենքի հիման վրա այդ զուգահեռանիստը հավասարամեծ է մեր վերցրած պրիզմային։ Հետևապես*

$$V = S \cdot h$$

§ 36. ԲՈՒՐԳԻ ԾԱՎԱԼԸ

ԹԵՈՐԵՄ: Բուրգի հիմքին զուգահեռ հարթությունը 1) հատում է կողմնային կողերից յեվ բարձրությունից նրանց համեմատական հատվածներ, 2) բուրգի հատվածքում տալիս է մի պատկեր, վորը նման է բուրգի հիմքի պատկերին:

Բացատրական գծանկար 26-ում պատկերացրած է հեռանկարային անկանոն քառանկյուն բուրգ. SK-ն նրա բարձրությունն է: Հիմքի P հարթությանը զուգահեռ Q հարթությունը հատում է բուրգի կողմնային կողերը և բարձրությունը և հատվածքում առաջացնում է քառանկյուն $A_1B_1C_1D_1$:



Գծ. 26

Ապացուցենք, վոր

1) $$\frac{AS}{A_1S}=\frac{BS}{B_1S}=\frac{CS}{C_1S}=\frac{DS}{D_1S}=\frac{KS}{K_1S}$$

2) $$A_1B_1C_1D_1 \sim ABCD$$

P *և* Q *զուգահեռ հարթությունները հատում են* ASB *կողմնային նիստի հարթությունը* AB *և* A_1B_1 *ուղիղներով, հետևապես* $AB \parallel A_1B_1$, *նույն ձևով* $BC \parallel B_1C_1$, $DC \parallel D_1C_1$ *և* $AD \parallel A_1D_1$:

Հետևապես, կստանանք հետևյալ զույգ նման յեռանկյունները ASB *և* $A_1S_1B_1$, BSC *և* $B_1S_1C_1$ *և այլն*:

Տանելով նոր հարթություն AS *և* SK *իրար հատող յերկու ուղիղներով կստանանք, վոր* $AK \parallel A_1K_1$ *և հետևապես* $\triangle ASK \sim \triangle A_1SK_1$

Նման յեռանկյունների մեջ համապատասխան կողմերը համեմատական են

$$\triangle ASB \sim \triangle A_1SB_1 \qquad \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AS}{A_1S}=\frac{BS}{B_1S}$$

$$\triangle BSC \sim \triangle B_1SC_1 \qquad \frac{BS}{B_1S}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CS}{C_1S}$$

$$\triangle CSD \sim \triangle C_1SD_1 \qquad \frac{CS}{C_1S}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DS}{D_1S}$$

$$\triangle DSA \sim \triangle D_1SA_1 \qquad \frac{DS}{D_1S}=\frac{DA}{D_1A_1}=\frac{AS}{A_1S}$$

$$\triangle ASK \sim \triangle A_1SK_1 \qquad \frac{AS}{A_1S}=\frac{AK}{A_1K_1}=\frac{KS}{K_1S}$$

Դժվար չէ նկատել, վոր, ստացված հավասարությունների մեջ մտնող բոլոր հարաբերություններն իրար հավասար են. Իրավ, առաջին տողը վերջանում է $\frac{BS}{B_1S}$ *հարաբերությամբ, վորով սկսվում է յերկրորդը, յերկրորդ տողը վերջանում է* $\frac{CS}{C_1S}$ *հարաբերությամբ, վորով սկսվում է յերրորդ և այլն: Հետևապես*

$$\frac{AS}{A_1S}=\frac{BS}{B_1S}=\frac{CS}{C_1S}=\frac{DS}{D_1S}=\frac{KS}{K_1S}$$

այսինքն ստացանք թեորեմի վորոնելի առաջին մասը։ Այժմ դուրս գրելով հարաբերությունների հետևյալ հավասարությունը

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}.=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DA}{D_1A_1}$$

և նկատելով, վոր

$$\angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1,\ \angle C=\angle C_1 \text{ և } \angle D=\angle D_1$$

վորպես համապատասխանաբար զուգահեռ կողմեր ունեցող անկյուններ, համոզվում ենք, վոր ABCD պատկերը նման է $A_1B_1C_1D_1$ պատկերին, վորովհետև նրանց անկյունները համապատասխանաբար հավասար են և կողմերը համեմատական։ Այն, ինչ պետք եր ապացուցել։

Վերադառնալով վերը ստացած միացյալ համեմատություններին, կազմենք հետևյալ ածանցյալ համեմատությունները

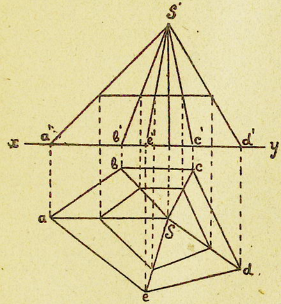
$$\frac{AS-A_1S}{A_1S}=\frac{BS-B_1S}{B_1S}=\frac{CS-C_1S}{C_1S}=\frac{DS-D_1S}{D_1S}=\frac{KS-K_1S}{K_1S}$$

կամ

$$\frac{AA_1}{A_1S}=\frac{BB_1}{B_1S}=\frac{CC_1}{C_1S}=\frac{DD_1}{D_1S}=\frac{KK_1}{K_1S}$$

Այդ հավասարություններից հետևում է, վոր բուրգի հիմքին զուգահեռ հարթությունը բաժանում է նրա կողերը և բարձրությունը համեմատական մասերի։

Ապացուցված թեորեմը և նրա հետևանքը հնարավորություն են տալիս հեշտությամբ բացատրել, վոր յեթե հորիզոնական հարթության վրա հիմքով դրված բուրգը հատվում է իր հիմքին զուգահեռ հարթությամբ, ապա բուրգի հատվածքի հորիզոնական պրոյեկցիան մի պատկեր է, վորը նման է բուրգի հիմքի պատկերին։



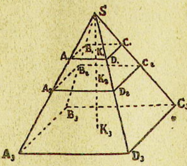
Գծ. 27

Քննենք եպյուրը, վորի վրա պատկերացրած են հորիզոնական հարթության վրա ABCDE հիմքով դրված անկանոն հնգանկյուն բուրգի պրոյեկցիաները (գծ. 27)։ Եպյուրի վրա գտեք բուրգի հատվածքի պրոյեկցիաները, յեթե բուրգը հատված է նրա հիմքին զուգահեռ հարթությամբ։ Ընդունելով, վոր բուրգը պատկերացրած է իր բնական մեծությամբ, վորոշեք հատող հարթությունը քանի միլլիմետրով է հեռացած հորիզոնական հարթությունից։ Բնական մեծությամբ և արդյոք ցույց տված հատվածքում առաջացած պատկերը։ Հատվածքի պատկերը նման է արդյոք հիմքի պատկերին։

Պատրաստեք յեռանկյուն բուրգի էպյուրը հիմքին զուգահեռ և բարձրության միջնակետով անցնող հատվածքով։

Պատրաստեցեք քառանկյուն բուրգի էպյուրը հիմքին զուգահեռ հատվածքով, վորն անցնում է հորիզոնական հարթության վերևով, բուրգի բարձրության $\frac{2}{5}$-ին հավասար հեռավորությամբ։

Ապացուցված թեորեմը պարզում է նույնպես ֆիզիկայի դասընթացում անցած հետևյալ որենքը.



Գծ. 28

Առարկայի լուսավորության փայլունությունը հակադարձ համեմատական է լույսի աղբյուրից լուսավորվող առարկայի հեռավորության քառակուսուն։

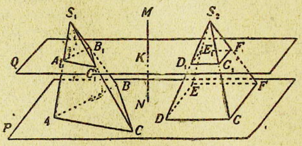
Հիրավի, յենթադրենք S-ը լույսի աղբյուրն է (գծ. 28), վորի ճառագայթները ճանապարհին հանդիպում են հետևյալ քառակուսի և զուգահեռ էկրաններին

$A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ և $A_3B_3C_3D_3$

Այդ էկրաններից յուրաքանչյուրի վրա (յենթադրենք նրանք թափանցիկ են) իջնում է միևնույն քանակությամբ լույս, այդ պատճառով լուսավորության փայլունությունը նվազում է, յերբ մեծանում է էկրանի հեռավորությունը S-ից։ Ակներև է, վոր լուսավորության փայլունությունը հակադարձ համեմատական է էկրանների մակերեսներին։ Նման պատկերների մակերեսները համեմատական են նրանց կողմերի քառակուսիներին։ Իսկ ապացուցված թեորեմի հիման վրա

$$\frac{A_1B_1}{A_3B_3} = \frac{SK_1}{SK_3} \text{ կամ } \frac{(A_1B_1)^2}{(A_3B_3)^2} = \frac{(SK_1)^2}{(SK_3)^2}$$

Յեթե, օրինակ, $SK_1 = \frac{SK_3}{4}$ ապա $A_3B_3C_3D_3$ էկրանի լուսավորության փայլունությունը 16 անգամ փոքր է $A_1B_1C_1D_1$ էկրանի լուսավորության փայլունությունից։



Գծ. 2

ԹԵՈՐԵՄ: Հավասարամեծ հիմքեր յեվ հավասար բարձրություններ ունեցող բուրգերը հավասարամեծ են:

Վերցնենք P հարթության վրա հիմքերով դրված յերկու բուրգ (գծ. 29)։ Այդ բուրգերի բարձրությունները իրար հավասար են և նշանակված են MN հատվածով։ Բուրգերի հիմքերը հավասարամեծ են, այսինքն ABC յեռանկյան մակերեսը հավասար է DEFG քառանկյան մակերեսին։

MN հատվածի կամավոր K կետով տանենք Q հարթությունը, զուգահեռ P հարթությանը։ Բուրգերի հատվածքներում կառաջանան յեռանկյուն $A_1B_1C_1$ և քառանկյուն $D_1E_1F_1G_1$: Նախորդ թեորեմի հիման վրա

$$A_1B_1C_1 \backsim ABC; \quad D_1E_1F_1G_1 \backsim DEFG$$

$$\frac{A_1C_1}{AC}=\frac{MK}{MN}; \quad \frac{D_1G_1}{DG}=\frac{MK}{MN}$$

հետևապես

$$\frac{A_1C_1}{AC}=\frac{D_1G_1}{DG} \quad \text{կամ} \quad \left(\frac{A_1C_1}{AC}\right)^2=\left(\frac{D_1G_1}{DG}\right)^2$$

Վորովհետև նման պատկերների մակերեսները համեմատական են նրանց համապատասխան կողմերի քառակուսիներին, ապա

$$\frac{\text{մակերես } A_1B_1C_1}{\text{մակերես } ABC}=\frac{(A_1C_1)^2}{(AC)^2}$$

և

$$\frac{\text{մակերես } D_1E_1F_1G_1}{\text{մակերես } DEFG}=\frac{(D_1G_1)^2}{(DG)^2}$$

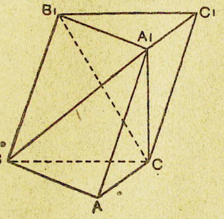
Այդ համասարությունների աջակողմյան մասերն իրար հավասար են, հետևապես, իրար հավասար են նաև ձախակողմյան մասերը

$$\frac{\text{մակերես } A_1B_1C_1}{\text{մակերես } ABC}=\frac{\text{մակերես } D_1E_1F_1G_1}{\text{մակերես } DEFG}$$

Այս համեմատության հետնորդ անդամներն իրար հավասար են ըստ պայմանի, հետևապես, համեմատության նախորդ անդամներն ևս իրար հավասար են

$$\text{մակերես } A_1B_1C_1=\text{մակերես } D_1E_1F_1G_1$$

Այսպես ուրեմն տված բուրգերի հիմքերի ընդհանուր հարթությանը զուգահեռ կամավոր հարթությունը, հատելով այդ բուրգերը, առաջացնում է նրանց հատվածքներում հավասարամեծ պատկերներ։ Հետևապես, ըստ Կավալյերիի որենքի, այդ բուրգերը հավասարամեծ են։

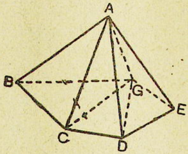


Գծ. 30

ԹԵՈՐԵՄ: Յեռանկյուն բուրգի ծավալը հավասար է նրա հիմքի մակերեսի յեվ բարձրության արտադրյալի մեկ յերրորդ մասին:

Տված է A_1ABC յեռանկյուն բուրգը (գծ. 30)։ Նշանակենք նրա ծավալը V-ով, յեռանկյուն ABC-ի մակերեսը Δ-ով և բուրգի բարձրությունը՝ h-ով (գծանկարի վրա չի նշանակված. նա հավասար է A_1 կետից ABC հարթության վրա իջեցրած ուղղահայացին)։ Պետք է ապացուցել, վոր $V=\frac{\Delta \cdot h}{3}$

Ապացուցում: A_1ABC յեռանկյուն բուրգի հիմքի վրա կառուցենք $A_1B_1C_1CAB$ յեռանկյուն պրիզման, վորի բարձրությունը հավասար լինի բուրգի բարձրության, իսկ կողմնային կողերից մեկը համատեղվի AA_1 կողի հետ։ Դրա համար շարունակելով ABA_1 և AA_1C հարթությունները, BC-ով տանենք AA_1 ուղիղին զուգահեռ մի հարթություն և A_1 կետով, զուգահեռ ABC հարթությանը, տանենք մի յերկրորդ հարթություն։ Ստացված պրիզման BA_1C և B_1A_1C հատող հարթություններով բաժանենք հետևյալ յերեք յեռանկյուն բուրգերի. A_1ABC, A_1BB_1C և $A_1B_1C_1C$։ Ապացուցենք, վոր այդ բուրգերը հավասարամեծ են։ Վորովհետև BB_1C_1C-ն զուգահեռագիծ է և B_1C անկյունագծով բաժանվում է BB_1C և CB_1C_1 յերկու հավասար յեռանկյունների, ապա A_1BB_1C և $A_1B_1C_1C$ բուրգերը, ունենալով BB_1C և CB_1C_1 հավասարամեծ հիմքեր և A_1 ընդհանուր գագաթ (հետևապես միևնույն բարձրությունը), ըստ Կավալերիի որենքի, հավասարամեծ են։ Վորովհետև $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ և այդ յեռանկյունները գտնվում են զուգահեռ հարթությունների վրա, ապա A_1ABC և $CA_1B_1C_1$ բուրգերը ($A_1B_1C_1C$ բուրգի գագաթը կարելի յե հաշվել C-ն, այդ դեպքում $A_1B_1C_1$ կլինի նրա հիմքը), ըստ Կավալերիի որենքի կլինեն նույնպես հավասարամեծ։ Այսպես ուրեմն տված յեռանկյուն բուրգը կազմում է կառուցած պրիզմայի մեկ յերրորդ մասը։ Իսկ պրիզմայի ծավալը, ինչպես գիտենք, հավասար է $\triangle \cdot h$, հետևապես, յեռանկյուն բուրգի $V=\frac{\triangle \cdot h}{3}$ այն, ինչ պետք է ապացուցել։



Գծ. 31

ԹԵՈՐԵՄ: Ամեն մի բուրգի ծավալը հավասար է նրա հիմքի մակերեսի յեվ բարձրության արտադրյալի մեկ յերրորդ մասին:

Տված է $ABCD \ldots G$ n-*անկյուն բուրգը* (*գծ.* 31)։ *Նշանակենք նրա ծավալը* V-*ով,* $BCD \ldots G$ n-*անկյան մակերեսը՝* S-*ով և բարձրությունը* h-*ով։ Պետք է ապացուցել, վոր* $V=\frac{S \cdot h}{3}$

Ապացուցում: Հիմքի կամավոր գագաթից, որինակ, G-ից տանենք $BCD \ldots G$ n-անկյան անկյունագծերը։ Այդ անկյունագծերից յուրաքանչյուրով և A գագաթով հաջորդաբար տանենք հարթություններ, վորոնք կբաժանեն տվյալ բուրգը մի շարք յեռանկյուն բուրգերի։

Ակներև է, վոր տվյալ բուրգի ծավալը հավասար է ստացած բոլոր յեռանկյուն բուրգերի գումարին, այսինքն.

$$V = ABCG + AGCD + \ldots + AGED$$

կամ ըստ նախորդ թեորեմի

$$V=\frac{BCG \cdot h}{3}+\frac{GCD \cdot h}{3}+\ldots+\frac{GED \cdot h}{3}=\frac{h}{3}\left(BCG+GCD+\ldots+GED\right)=\frac{h}{3}\cdot S=\frac{S \cdot h}{3}$$

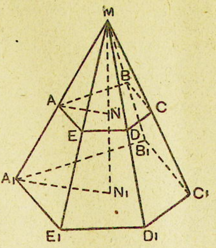
ԹԵՈՐԵՄ: Հատած բուրգի ծավալը հավասար է յերեք այնպիսի բուրգերի ծավալների գումարին, վորոնց բարձրությունը հավասար է հատած բուրգի բարձրության, իսկ հիմքերը. առաջինը՝ հատած բուրգի ներքևի հիմքը, յերկրորդը՝

հատած բուրգի վերևի հիմքը, իսկ յերրորդը՝ հատած բուրգի յերկու հիմքերի միջին համեմատականը:

Տված է AC_1 *n-անկյուն հատած բուրգը (գծ. 32)։ Նշանակենք նրա ծավալը V-ով,* $A_1B_1C_1 \ldots E_1$ *n-անկյան մակերեսը—Q-ով,* $ABC \ldots E$ *n-անկյան մակերեսը q-ով և հատած բուրգի բարձրությունը՝ h-ով։*

Պետք է ապացուցել, վոր

$$V=\frac{h}{3}\left(Q+q+\sqrt{Qq}\right)$$



Գծ. 32

Ապացուցում: *Շարունակենք հատած բուրգի կողմնային նիստերը, վորպեսզի ստացվի լրիվ* $MA_1B_1 \ldots E_1$ *n-անկյուն բուրգը։ Այդ դեպքում տվյալ հատած բուրգի ծավալը հավասար կլինի* $MA_1B_1 \ldots E_1$ *և* $MAB \ldots E$ *լրիվ բուրգերի ծավալների տարբերության։ Հետևապես, ըստ նախորդ թեորեմի*

$$V=\frac{Q\cdot MN_1}{3}-\frac{q\cdot MN}{3}=\frac{Q(MN+h)}{3}-\frac{q\cdot MN}{3}=$$

$$=\frac{1}{3}(Q\cdot MN+Q\cdot h-qMN)=\frac{1}{3}[Qh+(Q-q)MN]\;.\;.\;.\;(1)$$

Իսկ բուրգի զուգահեռ հատվածքների մակերեսները հարաբերում են այնպես, ինչպես նրանց գագաթից ունեցած հեռավորությունների քառակուսիները, այսինքն

$$\frac{Q}{q}=\frac{MN_1^2}{MN^2}$$

կամ

$$\frac{Q}{q}=\frac{(MN+h)^2}{MN^2}$$

կամ

$$\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{q}}=\frac{MN+h}{MN}$$

վորտեղից, համեմատության արտաքին և ներքին անդամների հատկության հիման վրա, կստանանք

$$MN\sqrt{Q}=MN\sqrt{q}+h\sqrt{q}$$

կամ

$$MN(\sqrt{Q}-\sqrt{q})=h\sqrt{q}$$

կամ

$$MN=\frac{h\sqrt{q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}$$

Տեղադրելով այդ արտահայտությունը (1) հավասարության մեջ կստանանք

$$V=\frac{1}{3}\left[Qh+(Q-q)\frac{h\sqrt{q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left[Qh+\frac{(\sqrt{Q}+\sqrt{q})(\sqrt{Q}-\sqrt{q})\,h\cdot\sqrt{q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}\right]=$$

$$=\frac{h}{3}\left[Q+(\sqrt{Q}+\sqrt{q})\sqrt{q}\right]=\frac{h}{3}\left[Q+\sqrt{Qq}+q\right]=$$

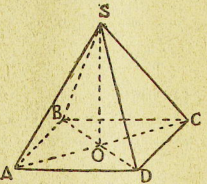
$$=\frac{h}{3}(Q+q+\sqrt{Qq})$$

§ 37. ՕԺԱՆԴԱԿ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ ՅԵՎ ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Մի շարք խնդիրների համար չափազանց կարևոր են հետևյալ յերկու թեորեմները։

ԹԵՈՐԵՄ: Յեթե բուրգի կողմնային կողերը հավասար են իրար, ապա նրանք միատեսակ են թեքված հիմքի հարթությանը յեվ բուրգի բարձրությունը ընկնում է հիմքի պատկերին արտագծած շրջանի կենտրոնը:

Վերցնենք, օրինակ, մի քառանկյուն բուրգ (գծ. 33), վորի կողմնային կողերը հավասար են իրար, այսինքն SA=SB=SC=SD։ *Յենթադրենք, վոր* SO *բուրգի բարձրությունն է և* O *կետը* SO *ուղղահայացի հետքը բուրգի հիմքի հարթության վրա։*



Գծ. 33

Բուրգի հիմքի հարթության նկատմամբ SA, SB, SC *և* SD *թեքեր են, իսկ* AO, BO, CO *և* DO *նրանց պրոյեկցիաները, հետևապես*

AO=BO=CO=DO *(ինչու)*

Այդ պատճառով ASO, BSO, CSO *և* DSO *ուղղանկյուն յեռանկյունները կոնգրուենտ են, հետևապես*

$$AO=BO=CO=DO \text{ և } \angle SAO=\angle SBO=\angle SCO=\angle SDO$$

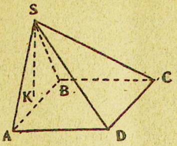
Հենց այդ հավասարություններն էլ ապացուցում են թեորեմը, վորովհետև ստացանք, վոր O *կետը հավասարապես է հեռացած* ABCD *քառանկյան բոլոր գագաթներից, այսինքն,* O *կետը բուրգի հիմքը կազմող քառանկյանն արտագծած շրջանի կենտրոնն է։*

Ապացուցված թեորեմն ունի իր հակադարձը. յեթե բուրգի բարձրությունն իջնում է նրա հիմքի բազմանկյանն արտագծած շրջանի կենտրոնը, ապա կողմնային կողերը հավասար են իրար յեվ միատեսակ են թեքված հիմքի հարթությանը:

Այս հակադարձ թեորեմը դժվար չէ ապացուցել անմիջապես, առանց դիմելու անհեթեթության բերող յեղանակին։

Վորովհետև քառակուսու և ամեն մի ուղղանկյան շուրջը կարելի յէ արտագծել շրջան, ապա այն բուրգի, վորի հիմքը քառակուսի յէ կամ ուղղանկյուն, կողմնային կողերը կարող են լինել իրար հավասար։ Մենք ասում ենք. «կարող են լինել», *վորովհետև հնարավոր են քառակուսի կամ ուղղան-*

կյուն հիմք ունեցող այնպիսի բուրգեր, վորոնց կողմնային կողերը հավասար չեն։ Հիրավի գծանկար 34-ը տալիս է ABCD քառակուսի հիմք ունեցող բուրգի հեռանկարային պատկերացումը, վորտեղ SK բարձրությունն իջնում է բուրգից դուրս։ Այդ դեպքում բոլոր կողմնային կողերը չեն կարող լինել իրար հավասար։ Ինչո՞ւ։ Կարող է՞ պատահել արդյոք, վոր այդպիսի բուրգն ունենա կողմնային յերկու հավասար կող։

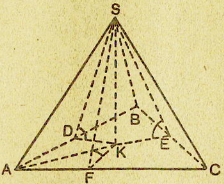


Գծ. 34

Զուգահեռագծի կամ ռոմբի շուրջը չի կարելի արտագծել շրջան։ Այդ պատճառով, յեթե բուրգի հիմքը զուգահեռագիծ է կամ ռոմբ, ապա նրա կողմնային կողերը չեն կարող լինել իրար հավասար։

ԹԵՈՐԵՄ: Եթե բուրգի կողմնային նիստերը միատեսակ են թեքված հիմքի հարթությանը, ապա բուրգի բարձրությունը ընկնում է հիմքի պատկերին ներգծած շրջանի կենտրոնը:

Բուրգի նիստերի թիվը նշանակություն չունի այս թեորեմն ապացուցելու համար, ուստի վերցնենք SABC յեռանկյուն բուրգը (գծ. 35), վորի բարձրությունն է SK-ն։ Տանենք SK-ով բուրգի հիմքի կողերին ուղղահայաց հարթություններ, վորոնք հատեն նրանց D, E և F կետերում։ Այդ դեպքում, յերկնիստ անկյան գծային անկյան վորոշման համաձայն, SDK, SEK և SFK անկյունները կլինեն այն յերկնիստ անկյունների գծային անկյունները, վորոնք առաջանում են բուրգի կողմնային նիստերով և նրա հիմքի հարթությունով։



Գծ. 35

Ուրեմն $\angle SDK = \angle SEK = \angle SFK$, *հետևապես,* KSD, KSE *և* KSF *ուղղանկյուն յեռանկյունները կոնգրուենտ են, վորտեղից* KD=KE=KF։ *Վորովհետև* KD, KE *և* KF *համապատասխանաբար ուղղահայաց են* AB, BC *և* AC *(վերհիշեք գծային անկյան կառուցումը), ապա* K *կետը հավասարապես է հեռացած* ABC *յեռանկյան կողմերից, այսինքն* K *կետն այդ յեռանկյանը ներգծած շրջանի կենտրոնն է։*

Ապացուցված թեորեմն ունի իր հակադարձը. յեթե բուրգի բարձրությունը ընկնում է նրա հիմքի բազմանկյանը ներգծած շրջանի կենտրոնը, ապա բուրգի կողմնային նիստերը միատեսակ են թեքված հիմքի հարթությանը:

Այս հակադարձ թեորեմը կարելի յե ապացուցել անմիջական դատողությամբ վերը բացատրվածի նման։

Այդպես ուրեմն, բուրգի կողմնային նիստերը կարող են միատեսակ թեքված լինել հիմքի հարթությանը միայն այն դեպքում, յեթե բուրգի հիմքը մի այնպիսի բազմանկյուն է, վորին կարելի յե ներգծել շրջան։

Ապացուցված թեորեմների հիման վրա հետևցնում ենք, վոր կանոնավոր բուրգի (բուրգը կոչվում է կանոնավոր, յերե նրա հիմքը կանոնավոր n-անկյուն է յեվ յերե կողմնային կողերն իրար հավասար են) կողմնային կողերը և նիստերը միատեսակ են թեքված հիմքի հարթությանը։

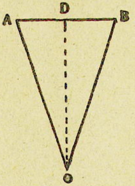
Ուշադրություն դարձրեք այն հանգամանքի վրա, վոր բուրգի կողմնային կողերի թեքի անկյունները հիմքի հարթությանը հավասար չեն կողմնային նիստերի թեքի անկյուններին։ Հիրավի (գծ. 35)

$$\sin SAK = \frac{SK}{AS} \text{ և } \sin SDK = \frac{SK}{SD}$$

Վորովհետև $AS > SD$, ապա $\sin SAK < \sin SDK$ կամ $\angle SAK < \angle SDK$։

կանոնավոր բուրգի ծավալի վորոշումը

Կանոնավոր բուրգի հիմքը կանոնավոր բազմանկյուն է։ Բուրգի բարձրությունն իջնում է նրա հիմքի բազմանկյան շուրջն արտագծած շրջանի կենտրոնը։



Գծ. 36

Գծանկար 36-ում պատկերացրած է կանոնավոր n-անկյան մի մասն, այսինքն մի յեռանկյուն, վորն առաջացել է n-անկյան շուրջն արտագծած շրջանի O կենտրոնը A և B կետերի հետ միացնելուց, վորոնք n-անկյան յերկու հարևան գագաթներն են։ Յեռանկյուն AOB-ն հավասարասրուն է և OD-ն այդ յեռանկյան բարձրությունն է։

$$AD = DB, \quad \angle AOB = \frac{360^0}{n}, \quad \angle AOD = \frac{180^0}{n}$$

Նշանակելով AB հատվածի յերկարությունը a տառով, կստանանք

$$AD = AO \cdot \sin AOD \text{ կամ } \frac{a}{2} = AO \cdot \sin\frac{180^0}{n}$$

վորտեղից

$$AO = \frac{a}{2\sin\frac{180^0}{n}}$$

$$DO = AD \cdot \operatorname{ctg} AOD \text{ կամ } DO = \frac{a \cdot \operatorname{ctg}\frac{180^0}{n}}{2}$$

Յեռանկյուն AOB-ի մակերեսը հավասար է

$$\frac{AB \cdot DO}{2} = \frac{a \cdot a \cdot \operatorname{ctg}\frac{180^0}{n}}{2 \cdot 2} = \frac{a^2 \cdot \operatorname{ctg}\frac{180^0}{n}}{4}$$

Հետևապես կանոնավոր n-անկյան մակերեսը հավասար է

$$\frac{n \cdot a^2 \cdot \operatorname{ctg}\frac{180^0}{n}}{4}$$

Է. Բուրգի բարձրությունը վորոշելու համար դիտենք բուրգի վորևե կողմնային կողով և նրա պրոյեկցիայով հիմքի հարթության վրա առաջացած ուղղանկյուն յեռանկյունը։ Կարելի յե ոգտվել գծանկար 33-ով և դիտել SOA յեռանկյունը։ Պյութագորի թեորեմի հիման վրա

$$SO^2+AO^2=AS^2 \text{ վորտեղից } SO=\sqrt{AS^2-AO^2}$$

Նշանակելով կողմնային կողի յերկարությունը b տառով, կստանանք

$$SO=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4\sin^2\frac{180^0}{n}}}$$

Նշանակենք բուրգի ծավալը V-ով, այդ դեպքում կանոնավոր n-անկյուն բուրգի (վորի հիմքի կողը հավասար է a-ի և կողմնային կողը հավասար է b-ի) ծավալը վորոշելու համար կստանանք հետևյալ ֆորմուլը

$$V=\frac{na^2\cdot\operatorname{ctg}\frac{180^0}{n}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4\sin^2\frac{180^0}{n}}}}{12}$$

Արմատատակ ֆորմուլը հետևյալ յերկու թվերի քառակուսիների տարբերությունն է

$$b \text{ և } \frac{a}{2\sin\frac{180^0}{n}}$$

վորը վեր է ածվում գումարի և տարբերության արտադրյալի

$$V=\frac{na^2\cdot\operatorname{ctg}\frac{180^0}{n}\sqrt{b+\frac{a}{2\sin\frac{180^0}{n}}}\cdot\sqrt{b-\frac{a}{2\sin\frac{180^0}{n}}}}{12}$$

Լոգարիթմների ոգնությամբ V-ն վորոշելու համար, նախ պետք է առանձին հաշվել հետևյալ մեծությունը

$$Z=\frac{a}{2\sin\frac{180^0}{n}}$$

տեղադրել z-ի գտած թվային արժեքը V ֆորմուլի մեջ՝ գտնել $b+z$ և $b-z$ և ապա լոգարիթմացնել V արտահայտությունը։

Յերկրորդ արմատանշանի տակ գտնվում է $b-z$ տարբերությունը։ Յեթե պարզվի, վոր $b=z$, ապա $V=0$։ Յեթե պարզվի, վոր $b<z$, ապա $\sqrt{b-z}$ կեղծ մեծություն է և խնդրի լուծումն անհնարին է։ Այդպես ուրեմն, անհրաժեշտ է, վորպեսզի $b>z$

$$\text{Այդ } b>z \text{ կամ } b>\frac{a}{2\sin\frac{180^0}{n}}$$

պայմանը ցույց է տալիս, վոր կանոնավոր բուրգի կողմնային (b) կողը դեպք է մեծ լինի նրա հիմքի բազմանկյան շուրջն տրտագծած շրջանի $\left(\text{տես վերը, } AO = \frac{a}{2\sin\frac{180^0}{n}}\right)$ շառավղից։

Հետազննենք, կարող են արդյոք հետևյալ կանոնավոր բուրգերի բոլոր կողերը հավասար լինել իրար. 1) յոթանկյուն, 2) քառանկյուն, 3) հնգանկյուն, 4) վեցանկյուն և այլն։

Կանոնավոր բուրգի ծավալի վորոշման վերաբերյալ ոrինակ։

Հաշվենք կանոնավոր ինննանկյուն բուրգի ծավալը, յեթե նրա հիմքի կողը հավասար է 16,5 cm, իսկ կողմնային կողը հավասար է 30,3 cm։

Լուծման գրավոր ընթացքը

$$n = 9; \quad a = 16,5; \quad b = 30,3$$

$$z = \frac{16,5}{2\sin 20^0}$$

$$\lg z = \left|\begin{array}{c} \lg 16,5 \\ \hline \lg 2 \\ \\ \lg\sin 20^0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r} 1,2175 \\ \hline 0,3010 \\ \\ \bar{1},5341 \\ \hline \bar{1},8351 \\ \hline 1,3824 \end{array}\right| \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} -$$

Այստեղ z մեծությունը կլորացրինք տասնորդական մասերով, վորովհետև նույնպիսի մասերով տված է b մեծությունը։

$$b + z = 30,3 + 24,1 = 54,4$$
$$b - z = 30,3 - 24,1 = 6,2$$

$$z = 24,1$$

$$V = \frac{9 \cdot 16,5^2 \cdot \mathrm{ctg}20^0 \cdot \sqrt{54,4} \cdot \sqrt{6,2}}{12}$$

Հաշվումը հեշտացնելու համար $\frac{9}{12}$ կոտորակը դարձնենք տասնորդական։ Վորովհետև $\frac{9}{12} = 0,75$, ապա

$$V = 0,75 \cdot 16,5^2 \cdot \mathrm{ctg}20^0 \cdot \sqrt{54,4} \cdot \sqrt{6,2}$$

$$\lg V = \left|\begin{array}{l} \lg 0,75 \\ 2\lg 16,5 \\ \lg\mathrm{ctg}\, 20^0 \\ \frac{1}{2}\lg 54,4 \\ \\ \frac{1}{2}\lg 6,2 \\ \\ \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r} \bar{1},8751 \\ 2,4350 \\ 0,4389 \\ 0,8678 \\ \\ 0,3962 \\ \hline 4,0130 \end{array}\right| \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} +$$

$$\begin{array}{r} \lg 16,5 = 1,2175 \\ \times 2 \\ \hline 2,4350 \end{array}$$

$$\lg 54,4 = 1,7356 \;\Big|\; \begin{array}{l} 2 \\ \hline 0,8678 \end{array}$$

$$\lg 6,2 = 0,7924 \;\Big|\; \begin{array}{l} 2 \\ \hline 0,3962 \end{array}$$

Պատասխանն է: $V = 10,300\ cm^3 = 0,0103\ m^3$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՅԵՎ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

228. Ի նկատի ունենալով, վոր բազմանիստերը կոչվում են նման, յեթե ունեն համապատասխանաբար հավասար բազմանիստ անկյուններ և համապատասխանաբար նման նիստեր, ապացուցեք, վոր նման ուղղանկյուն զուգահեռանիստերի ծավալները համեմատական են նրանց համապատասխան չափումների խորանարդներին։

229. Ապացուցեք, վոր բուրգի հիմքին զուգահեռ հարթությունը հատում է նրանից մի բուրգ, վորը նման է տվածին։

230. Ապացուցեք, վոր նման բուրգերի ծավալները համեմատական են նրանց համապատասխան կողերի խորանարդներին։

231. Վորոշեք այն խորանարդի ծավալը, վորի անկյունագիծը հավասար է d-ի։

232. Ուղղանկյուն զուգահեռանիստի յերկու չափումները հավասար են 2 cm-ի և 3 cm-ի, իսկ անկյունագիծը հավասար է 7 cm-ի։ Գտնել ծավալը։

233. Վորոշել այն կանոնավոր տետրաեդրի ծավալը, վորի կողը հավասար է a-ի։

234. Վորոշել այն կանոնավոր օկտաեդրի ծավալը, վորի կողը հավասար է a-ի։

235. Հաշվել այն յեռանկյուն բուրգի ծավալը, վորի հիմքի կողերը համապատասխանաբար հավասար են 33 cm, 56 cm և 65 cm, իսկ կողմնային կողերից յուրաքանչյուրը հավասար է 48,5 cm-ին։

236. Հաշվել այն կանոնավոր հատված քառանկյուն բուրգի ծավալը, վորի հիմքի անկյունագծերը համապատասխանաբար հավասար են 8 cm-ի և 18 cm-ի, իսկ կողմնային կողերից յուրաքանչյուրը հավասար է 13 cm-ի։

237. Կանոնավոր յեռանկյուն հատած բուրգի ստորին հիմքի կողը հավասար է 2,73 m-ի, վերին հիմքի կողը հավասար է 0,95 m-ի և բարձրությունը հավասար է 0,65 m-ի։ Գտնել ծավալը։

238. Ճալաքարն ունի ուղղանկյուն հիմքով հատած քառանկյուն բուրգի ձև, վորի ստորին հիմքի կողերը հավասար են 6,4 m-ի և 2,4 m-ի, վերին հիմքի կողերը՝ 2,8 m և 1,1 m և բարձրությունը՝ 1,6 m։ Դատարկությունները քարերի մեջ բռնում են ամբողջ ծավալի $15^{0}/_{0}$-ը։ Ճալաքարի տեսակարար կշիռը հավասար է 2,3-ի ։ Գտնել այդ ճալաքարի քաշը։

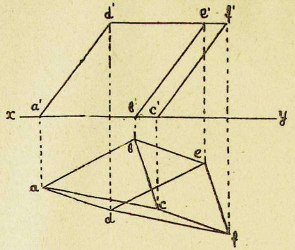
239. Խոնավ ավազը կուտած է կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի ձևով, վորի ստորին և վերին հիմքերի կողերն են 3,2 m և 1,8 m, իսկ բարձրությունն է 1,2 m: Խոնավ ավազի տեսակարար կշիռը հավասար է 1,9-ի։ Քանի՞ գրուզավիկով (ապրանքատար մեքենա) է բերված այդ ավազը, յեթե գրուզավիկի բեռ փոխադրելու ույժը հավասար է 2 տոննի։

240. Հաշվել 37-րդ գծանկարում բնական մեծությամբ պատկերացրած հնգանկյուն հատած բուրգի ծավալը։

241. Պատրաստեցեք կանոնավոր վեցանկյուն հատած բուրգի եպյուրը, յեթե նրա վերին հիմքը ստորին հիմքից գտնվում է 2 cm հեռավորության վրա։ Բուրգի ստորին հիմքի կողը հավասար է 4 cm-ի։ Հաշվել այդ հատած բուրգի ծավալը։

242. Բուրգի հիմքին զուգահեռ հարթությունը հատելով բուրգը, անցնում է նրա բարձրության միջնակետով։ Ամբողջ բուրգի ծավալի վո՞ր մասն է կազմում հատած բուրգի ծավալը։

243. Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի ստորին հիմքի կողը հավասար է 8,4 cm-ի, վերին հիմքի կողը՝ 3,5 cm-ի և կողմնային կողը՝



Գծ. 37.

6,2 cm-ի: Հաշվել այդ բուրգի լրիվ մակերևույթը և կողմնային նիստերի վրա գտնվող անկյունները:

244. Քաղվածք Գ. Գ. Լեբեդևի քիմիայի աշխատանքի գրքից: Պետ. հրատ. 1926 թ., յերես 140.

«Նյութի ամեն մի նոր մանրացման դեպքում բնորոշ է հանդիսանում նյութի մակերևույթի արագ աճեցումն իր ծավալի նկատմամբ: Այդ հատկությունը զուտ յերկրաչափական է: Յեթե խորանարդի կողը հավասար է 1 cm-ի, ապա նրա ծավալը 1 cm^3 է և մակերևույթը՝ 6 cm^2: Յեթե այդ խորանարդը վերածենք այնպիսի խորանարդների, վորոնց կողը հավասար լինի 0,1 cm-ի, ապա կստանանք 1000 մանր խորանարդիկներ, վորոնցից յուրաքանչյուրի մակերևույթը հավասար կլինի 0,06 cm^2-ի, իսկ բոլորի ընդհանուր մակերևույթը հավասար կլինի 60 cm^2-ի, սակայն ծավալը կմնա նույնը, հետևապես մակերևույթն աճում է 10 անգամ: Յեթե ստացված խորանարդիկներից յուրաքանչյուրը մտավոր կերպով վերածենք այնպիսի խորանարդիկների, վորոնց կողը հավասար լինի 0,000001 cm-ի, ապա այդ բոլոր խորանարդիկների ընդհանուր մակերևույթը կլինի 600 m^2, այսինքն կաճի 1000000 անգամ»:

Ստուգեցեք այդ հաշիվները:

245. Հաշվել ուղիղ զուգահեռանիստի ծավալը, յեթե նրա բոլոր կողերը հավասար են 7,4 cm-ի և հիմքը մի ռոմբ է, վորի անկյուններից մեկը հավասար է 42°-ի:

246. Գծանկար 37-ում 1 : 10 մասշտաբով պատկերացած է հորիզոնական հարթության վրա ABC հիմքով դրված յեռանկյուն պրիզմայի եպյուրը. DEF-ը պրիզմայի վերին հիմքն է: Կատարել հարկավոր չափումները և հաշվել պրիզմայի ծավալը:

247. Յերկաթուղային ավազաթումբը կտրվածքում ունի տրապեցի ձև, վորի փոքր (վերին) հիմքը հավասար է 8,5 m-ի, կողմնային կողը (զառիվայրի յերկարությունը) հավասար է 13,8 m-ի և ստորին հիմքի հետ կազմում է 25^0-ի անկյուն։ Թմբի յերկարությունն է 250 m։ Հաշվել, քանի՞ խորանարդ մետր հող է պարունակում այդ թումբը։

248. Քառակուսի հիմք ունեցող բուրգի ծավալը հավասար է 456,7 m^3-ի։ Բուրգի բարձրությունը հավասար է 12,65 m-ի։ Հաշվել հիմքի կողը։

249. Բուրգի հիմքը մի յեռանկյուն է, վորի յերկու կողմերը հավասար են 28,9 cm-ի և 35,2 cm-ի, իսկ նրանց միջանկյալ անկյունը հավասար է 74^0-ի։ Բուրգի բարձրությունը հավասար է 20,5 cm-ի։ Գտնել այդ բուրգի ծավալը

250. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողը հավասար է 0,12 m-ի, իսկ կողմնային կողերը թեքված են հիմքի հարթությանը $46^019'$-ի անկյան տակ։ Հաշվել այդ բուրգի լրիվ մակերևույթը և ծավալը։

251. Կանոնավոր յեռանկյուն բուրգի հիմքի կողը հավասար է 0,08 m-ի, իսկ կողմնային նիստերը թեքված են հիմքի հարթությանը $61^042'$-ի անկյան տակ։ Հաշվել այդ բուրգի լրիվ մակերևույթը և ծավալը։

252. Յեռանկյուն բուրգի հիմքը մի յեռանկյուն է, վորի կողմերը հավասար են 20 cm-ի, 26 cm-ի և 31 cm-ի. կողմնային նիստերը թեքված են հիմքի հարթությանը $56^013'$-ի անկյան տակ։ Գտնել այդ բուրգի ծավալը։

253. Ուղիղ յեռանկյուն պրիզմայի հիմքը մի հավասարասրուն յեռանկյուն է, վորի հավասար կողմերի միջև ընկած անկյունը հավասար է $23^036'$-ի, իսկ այդ անկյան հակադիր կողմը հավասար է 16,4 cm-ի։ Պրիզմայի հիմքի փոքր կողով նրա ներսը տարված է մի հարթություն, վորը հիմքի հետ կազմում է $18^029'$-ի անկյուն։ Հաշվել առաջացած բուրգի ծավալը։

254. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողերը հավասար են 6,2 cm-ի, իսկ կողմնային կողերը հավասար են 9,5 cm-ի։ Հաշվել այդ բուրգի կողմնային կողերի և կողմնային նիստերի թեքի անկյունները հիմքի հարթությանը։

255. Յեռանկյուն բուրգի հիմքը մի ուղղանկյուն յեռանկյուն է, վորի ներքնաձիգը հավասար է 8,7 cm-ի և սուր անկյունը՝ $32^041'$-ի. այդ անկյան գագաթով անցնող կողմնային կողը ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը։ Հիմքի ուղիղ անկյան գագաթով անցնող կողմնային կողը թեքված է հիմքի հարթությանը $56^013'$-ի անկյան տակ։ Գտնել այդ բուրգի ծավալը։

256. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգին, վորի կողմնային կողը հավասար է a-ի և թեքված է հիմքի հարթությանը α անկյան տակ, ներգծած է մի խորանարդ այնպես, վոր նրա չորս գագաթները գտնվում են բուրգի կողմնային կողերի վրա։ Վորոշեցեք խորանարդի ծավալը։

257. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգին, վորի հիմքի կողը հավասար է a-ի և բարձրությունը հավասար է b-ի, ներգծած է մի խորանարդ այնպես, վոր նրա չորս գագաթները գտնվում են բուրգի կողմնային նիստերի վրա։ Վորոշեցեք խորանարդի ծավալը։

258. Կանոնավոր յեռանկյուն բուրգին, վորի կողմնային կողը հավասար է a-ի և թեքված է հիմքի հարթությանը α անկյան տակ, ներգծած է մի ուղիղ յեռանկյուն պրիզմա, վորի բոլոր կողերն իրար հավասար են, այնպես, որ պրիզմայի յերեք գագաթները գտնվում են բուրգի կողմնային կողերի վրա։ Որոշեցեք պրիզմայի ծավալը։

259. Կանոնավոր յեռանկյուն բուրգի մեջ, որի հիմքի կողերը հավասար են a-ի և կողմնային կողերը թեքված են հիմքի հարթությանը α անկյան տակ, տարված է բուրգի ներսը հիմքի կողերից մեկով մի հարթություն, որը թեքված է բուրգի հիմքին β անկյան տակ։ Որոշել այն յեռանկյուն բուրգի ծավալը, որը առաջացել է տված բուրգի ներքևի մասում։

260. Խորանարդի ներսը, որի կողը հավասար է a-ի, մի գագաթից յելնող յուրաքանչյուր յերեք կողերի միջնակետերով տարված են հարթություններ։ Որոշել խորանարդի ներսն առաջացած բազմանիստի ծավալը։

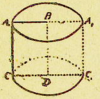
ԳԼՈՒԽ VII

ԿԼՈՐ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԸ ԵՎ ԾԱՎԱԼՆԵՐԸ

§ 38. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԳԼԱՆԻ ԵՎ ԿՈՆԻ ՄԱՍԻՆ

Մենք քննության կառնենք միայն ուղիղ կլոր *գլանները, այսինքն այնպիսի յերկրաչափական մարմիններ, վորոնք առաջանում են* ուղղանկյան՝ *իր կողմերից մեկի շուրջը պտտվելուց։*

Ամեն մի պատկեր ուղիղ առանցքի շուրջը պտտելու դեպքում, նրա յուրաքանչյուր կետը գծում է շրջանագիծ, վորի շառավիղը հավասար է այդ կետից պտտման առանցքին իջեցրած ուղղահայացին։ Պտտման առանցքի վրա գտնվող կետերն անշարժ են։ Պտտման առանցքին իջեցրած միևնույն ուղղահայացի վրա գտնվող կետերը պտտվում են միևնույն հարթության վրա։



գծ. 38

Յեթե պտտենք ուղղանկյուն ABDC (*գծ. 38*) BD *կողմի շուրջը, ապա* BD *կողմի բոլոր կետերը անշարժ կմնան,* AB *և* CD *կողմերի բոլոր կետերը կգտնվեն յերկու զուգահեռ հարթությունների վրա, իսկ* AC *կողմի բոլոր կետերը կգծեն հավասար շառավիղներ ունեցող շրջանագծեր։ Ուղղանկյունը, կես պտույտ անելով, կընդունի* BA_1C_1D *դիրքը։* A *և* C *կետերի գծած շրջանագծերը մեր հեռանկարային գծանկարում պատկերացրած են ձվաձև։*

Ուղղանկյան այն կողմը, վորը ծառայում է վորպես պտտման առանցք, կոչվում է առանցք *կամ* գլանի բարձրություն *և սովորաբար նշանակվում են* h *տառով։ Ուղղանկյան այն կողմը, վորը զուգահեռ է պտտման առանցքին, կոչվում է* գլանի ծնիչ *և նշանակվում է* l *տառով։ Ուղղանկյան այն կողմը, վորն ուղղահայաց է պտտման առանցքին, կոչվում է* գլանի հիմքի շառավիղ *և նշանակվում է* R*-ով։ Ակներև է, վոր* $h=l$*։ Ուղղանկյուն* AA_1C_1C *կոչվում է* գլանի առանցքային հատված։

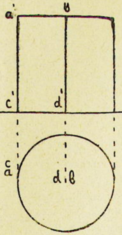
Միլլիմետրային քանոնով չափեցեք գլանի և պտտական մարմինների չափումները, վորոնք հայյուրի վրա պատկերացրված են բնական մեծությամբ (գծ. 39 և 40)։

Պատրաստեցեք այն գլանի հայյուրը, վորի շառավիղը հավասար է 4,2 cm*-ի, բարձրությունը՝* 5,3 cm*-ի և յեթե գլանի հիմքի կենտրոնն ուղղածիգ հարթությունից* 2,5 cm *հեռավորության վրա յե գտնվում։*

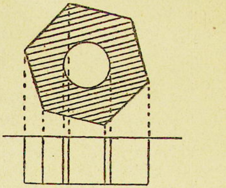
Նման ուղղանկյունների պտտվելուց առաջացած գլանները կոչվում են նման։

Այն գլանը, վորի հիմքի շառավիղը հավասար է բարձրության կեսին, կոչվում է հավասարակողմ։ *Ինչպիսի պատկեր է ներկայացնում իրենից հավասարակողմ գլանի առանցքային հատվածքը։*

Հետագայում կոն *ասելով կհասկանանք* ուղիղ կլոր կոն, *այսինքն այնպիսի յերկրաչափական մարմին, վորն առաջանում է ուղղանկյուն յեռանկյան՝ իր էջերից մեկի շուրջը պտտվելուց։*

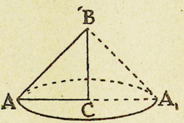


գծ. 39



գծ. 40

Այն էջը, վորի շուրջը կատարվում է պտույտը, կոչվում է առանցք *կամ* կոնի բարձրություն *և սովորաբար նշանակվում են* h *տառով։ Այն էջը, վորն ուղղահայաց է պտտման առանցքին, կոչվում է* կոնի հիմքի շառավիղ (R)*։ Ներքնաձիգը կոչվում է* կոնի ծնիչ (l)*։ Պարզ է, վոր* $l^2 = R^2 + h^2$



գծ. 41

Ուղղանկյուն յեռանկյուն ABC (*գծ. 41*) *պտտվելով* BC*-ի շուրջը և կատարելով կիսապտույտ, ընդունում է* A_1BC *դիրքը։ Հավասարասրուն յեռանկյուն* ABA_1*-ը կոչվում է* կոնի առանցքային հատված: B *կետը կոչվում է* կոնի գագաթ: *Անկյուն* ABA_1*-ը կոչվում է* կոնի գագաթի անկյուն, *անկյուն* BAC *կամ անկյուն* BA_1C *կոչվում է* կոնի հիմքի անկյուն:

Կոնը կոչվում է հավասարակողմ, յեթե նրա առանցքային հատվածը կանոնավոր յեռանկյուն է:

Այն կոները, վորոնք առաջանում են նման ուղղանկյուն յեռանկյունների պտույտներից, կոչվում են նման:

Հատած կոն կոչվում է լրիվ կոնի այն մասը, վորը սահմանափակված է հիմքի յեվ նրա զուգահեռ հատող հարթության միջեվ։

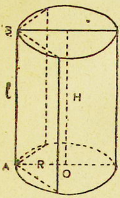
§ 39. *ԳԼԱՆԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԸ*

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ.—Ուղիղ գլանի կողմնային մակերեվույթ կոչվում է այն սահմանը, վորին ձգտում են գլանին ներգծած կամ նրան արտագծած պրիզմաների կողմնային մակերեվույթները, նրանց նիստերի թիվն անսահմանորեն մեծանալու դեպքում:

ԹԵՈՐԵՄ. — Ուղիղ գլանի կողմնային մակերեվույթը հավասար է հիմքի շրջանագծի յեվ ծնիչի արտադրյալին:

Գլանի հիմքի շրջանագծի շառավիղը նշանակելով R, *ծնիչը* l *և գլանի կողմնային մակերևույթը՝* S, *ապացուցենք, վոր* $S=2\pi Rl$

Ապացուցում.—OA *շառավիղ ունեցող գլանին ներգծած է* n-*անկյուն կանոնավոր պրիզմա (գծ. 42), նմանապես նրան արտագծած է նույնանուն կանոնավոր պրիզմա (գծանկարում պատկերացրած են ներգծած պրիզմայի միայն յերկու նիստը)։ Անսահմանորեն կրկնապատկենք այդ պրիզմաներից յուրաքանչյուրի կողմնային նիստերի թիվը։ Այդ դեպքում դրանցից յուրաքանչյուրի հիմքի պարագիծը կձգտի այն սահմանին, վորպիսին իրենից ներկայացնում է տվյալ գլանի հիմքի շրջանագիծը։ Նշանակենք* P-*ով այդ պրիզմաներից մեկի հիմքի պարագիծը և* H-*ով նրա բարձրությունը (ամեն մի պրիզմայի բարձրություն* $H=l$), *իսկ* S_1-*ով կողմնային մակերևույթը, կստանանք* $S_1=P \cdot H$։ *Անցնելով սահմանին, կստանանք.* $\lim S_1=\lim P \cdot H$, *ուր* H-*ը՝ կայուն մեծություն է։ Բայց վորովհետև ըստ սահմանումի* $\lim S_1=S$ *և* $\lim P=2\pi R$, *իսկ* $H=l$, *ուստի* $S=2 \cdot \pi \cdot R \cdot l$



գծ. 42

Գլանի լրիվ մակերևույթն ստանալու համար, անհրաժեշտ է նրա կողմնային մակերևույթին ավելացնել յերկու հիմքերի մակերեսների գումարը։

Ուղիղ գլանի լրիվ մակերևույթն արտահայտվում է հետևյալ ֆորմուլով

$$Լ.\ S=2\pi Rl+\pi R^2+\pi R^2 \quad կամ \quad Լ.\ S=2\pi Rl+2\pi R^2$$

կամ

$$Լ.\ S=2\pi R(l+R)$$

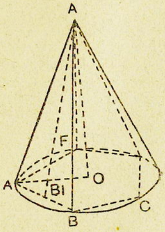
§ 40. *ԿՈՆԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԸ*

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ.—Կոնի կողմնային մակերևույթ կոչվում է այն սահմանը, վորին ձգտում է տվյալ կոնին ներգծած կամ նրան արտագծած բուրգի կողմնային մակերևույթը, նրանց կողմնային նիստերի թիվն անսահմանորեն աճելու դեպքում:

ԹԵՈՐԵՄ.—Կոնի կողմնային մակերևույթը հավասար է հիմքի շրջանագծի յեվ ծնիչի արտադրյալի կեսին:

Նշանակենք կոնի կողմնային մակերևույթը S-*ով, հիմքի շառավիղը՝* R*ով, ծնիչը՝* l-*ով։ Պահանջվում է ապացուցել, վոր* $S=2\pi R \cdot \frac{l}{2}$

կամ $S=\pi Rl$

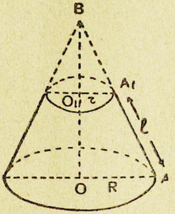


գծ. 43

Ապացուցում.—*Տվյալ կոնին (գծ. 43) ներգծած է կանոնավոր* n-*անկյուն* ABC . . . F *բուրգ։ Այդ բուրգի յուրաքանչյուր կողմնային կողը ձուլվում է կոնի ծնիչի հետ և մեծությամբ հավասար է նրան։ Թող* A_1B_1 *լինի բուրգի ապոթեմը։ Ուղղանկյուն յեռան-*

կյուն BA_1B_1-ից յեզրակացնում ենք, վոր $A_1B - A_1B_1 < BB_1$։ Յեթե բուրգի կողմնային նիստերի թիվը անսահմանորեն աճելու լինի, ապա հիմքի յուրաքանչյուր կողմը կսկսի նվազել և կարող է դառնալ ավելի քիչ առաջուց տրված ամեն մի փոքր մեծությունից, առավել ևս կնվազի BB_1 հատվածը, վորը կազմում է բուրգի հիմքի AB կողմի կեսը։ Հետևապես, $A_1B - A_1B_1$ տարբերությունը կարող է դառնալ ավելի փոքր առաջուց տրված ամեն մի փոքր մեծությունից։ Բայց վորովհետև $A_1B = l$ հաստատուն մեծություն է, A_1B_1 փոփոխական մեծություն, իսկ նրանց տարբերությունը ձգտում է զերոյի, ապա $A_1B = l = \lim A_1B_1$։ Վորովհետև կանոնավոր բուրգի կողմնային մակերևույթ S_1-ը հավասար է նրա հիմքի պարագծի P-ի և A_1B_1 ապոթեմի արտադրյալի կեսին, այսինքն $S_1 = P \cdot \frac{A_1B_1}{2}$ ապա, սահմանին անցնելով, կստանանք

$$\lim S_1 = \lim P \cdot \lim \frac{A_1B_1}{2} \quad \text{կամ} \quad S = 2\pi R \cdot \frac{l}{2} \quad \text{կամ} \quad S = \pi R l$$



գծ. 44

ԹԵՈՐԵՄ. — Հատված կոնի կողմնային մակերևույթը հավասար է յերկու հիմքերի շրջանագծերի կիսագումարի յեվ ապոթեմի արտադրյալին։

Յենթադրենք հատված կոնի մեծ հիմքի շրջանագծի շառավիղն է R (գծ. 44), փոքր հիմքինը՝ r, ծնիչը՝ l։ Ապացուցենք, վոր

$$S = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \cdot l \quad \text{կամ} \quad S = \pi l(R + r)$$

Հատված կոնի կողմնային մակերևույթը կարելի յե դիտել վորպես լրիվ AB կոնի կողմնային մակերևույթ S_1-ի և լրիվ A_1B կոնի կողմնային մակերևույթ S_2-ի տարբերություն, այսինքն

$$S = S_1 - S_2 \quad \text{բայց} \quad S_1 = \pi R \cdot AB \quad \text{և} \quad S_2 = \pi r \cdot A_1B$$

հետևապես

$$S = \pi R \cdot AB - \pi r \cdot A_1B$$

կամ

$$S = \pi R \cdot (AA_1 + A_1B) - \pi r \cdot A_1B$$

կամ

$$S = \pi R \cdot AA_1 + \pi R \cdot A_1B - \pi r \cdot A_1B \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ABO և A_1BO_1 յեռանկյունների նմանությունից ստանում ենք

$$\frac{AO}{A_1O_1} = \frac{AB}{A_1B} \quad \text{կամ} \quad \frac{R}{r} = \frac{AB}{A_1B}$$

վորից հետևցնում ենք

$$R \cdot A_1B = r \cdot AB$$

(1) հավասարության մեջ $R \cdot A_1B$-ն փոխարինելով իրեն հավասար $r \cdot AB$-ով, կստանանք

$$S = \pi R \cdot AA_1 + \pi r \cdot AB - \pi r \cdot A_1B$$

կամ

$$S = \pi R \cdot AA_1 + \pi r(AB - A_1B) \quad \text{կամ} \quad S = \pi R \cdot AA_1 + \pi r AA_1$$

$$\text{կամ} \quad S = \pi AA_1(R + r) \quad \text{կամ վերջնականապես}$$

$$S = \pi l(R + r)$$

Կոնի լրիվ մակերևույթն ստանալու համար, անհրաժեշտ է կողմնային մակերևույթին ավելացնել հիմքի մակերեսը կամ, հատած կոնի դեպքում, յերկու հիմքերի մակերեսների գումարը: Այսպես, լրիվ կոնի լրիվ մակերևույթի ֆորմուլն է

$$Լ.\ S=\pi Rl+\pi R^2 \quad \text{կամ} \quad Լ.\ S=\pi R(l+R)$$

հատած կոնի ֆորմուլը՝

$$Լ.\ S=\pi l(R+r)+\pi R^2+\pi r^2$$

կամ

$$Լ.\ S=\pi(lR+lr+R^2+r^2)$$

§ 41. ԳԼԱՆԻ ԾԱՎԱԼԸ

Գլանի ծավալի ֆորմուլը կարելի յերկու յեղանակով ստանալ:

Առաջին յեղանակը կայանում է Կավալերիի օրենքի գործադրման մեջ. դրա համար հարկավոր է կառուցել այնպիսի պրիզմա, վորի հիմքը հավասարամեծ լինի գլանի հիմքին, իսկ բարձրությունը հավասար լինի գլանի բարձրությանը:

Յերկրորդ յեղանակը հիմնված է սահմանների մեթոդի վրա, և գլանի ծավալը վորոշվում է վորպես ներգծած և արտագծած պրիզմաների ծավալների սահման, պրիզմաների կողմնային նիստերի թիվն անսահմանորեն աճելու դեպքում:

Կիրառենք յերկու յեղանակը և դուրս բերենք գլանի ծավալի ֆորմուլը

$$V=\pi R^2h$$

ուր V-ն նշանակում է գլանի ծավալ, R-ը՝ նրա հիմքի շառավիղը և h-ը՝ բարձրությունը:

Ապացուցեք, վոր նման գլանների ծավալները համեմատական են նրանց շառավիղների խորանարդներին կամ նրանց բարձրությունների խորանարդներին:

§ 42. ԿՈՆԻ ԾԱՎԱԼԸ

Կոնի ծավալի ֆորմուլը

$$V=\frac{\pi R^2h}{3}$$

ուր V նշանակում է կոնի ծավալը, R-ը՝ հիմքի շառավիղը և h-ը բարձրությունը, ֆորմուլը դուրս է բերվում ճիշտ գլանի նմանությամբ, միայն այն տարբերությամբ, վոր պրիզմաների փոխարեն վերցրվում են բուրգեր:

Ապացուցեք, վոր նման կոների ծավալները համեմատական են նրանց շառավիղների խորանարդներին կամ նրանց բարձրությունների խորանարդներին կամ նրանց ծնիչների խորանարդներին:

Հատած կոնի ծավալի ֆորմուլը

$$V=\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)$$

ուր V-ն նշանակում է հատած կոնի ծավալը, R-ը և r-ը՝ նրա հիմքերի շառավիղները և h-ը՝ բարձրությունը, ստացվում է կամ վորպես ներգծած կամ արտագծած հատած բուրգերի ծավալների սահման, կամ անմիջականորեն հետևյալ ձևով:

Դիմելով 44-րդ գծանկարին և նշանակելով OO_1-ը h-ով և BO_1-ը h_1-ով նկատում ենք, որ

$$V=\frac{\pi R^2(h+h_1)}{3}-\frac{\pi r^2h_1}{3} \quad \text{կամ} \quad V=\frac{\pi}{3}(R^2h+R^2h_1-r^2h_1)$$

կամ

$$V=\frac{\pi}{3}[R^2h+h_1(R^2-r^2)] \quad \text{կամ} \quad V=\frac{\pi}{3}[R^2h+h_1(R+r)(R-r)]\ .\ .\ .\ (1)$$

Զատենք այդ ֆորմուլից h_1-ը, որպես մի մեծություն, որը չի վերաբերում հատած կոնին։ AOB և A_1O_1B եռանկյունների նմանությունից գտնում ենք

$$\frac{R}{r}=\frac{h+h_1}{h_1} \quad \text{որտեղից} \quad Rh_1=rh+rh_1 \quad \text{կամ} \quad h_1=\frac{rh}{R-r}$$

h_1-ի այդ արժեքը տեղադրելով (1) հավասարության մեջ, կստանանք

$$V=\frac{\pi}{3}\left[R^2h+\frac{(R+r)(R-r)rh}{R-r}\right]=\frac{\pi}{3}[R^2h+(R+r)rh]=$$

$$=\frac{\pi}{3}[R^2h+Rrh+r^2h]=\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)$$

§ 43. ՊՏՏՄԱՆ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐ

Եթե հատվածն իր մի ծայրով շոշափում է պտտման առանցքը և միաժամանակ ուղղահայաց է նրան, պտտվելու դեպքում առաջացնում է շրջան։ Եթե հատվածն իր մի ծայրով շոշափում է պտտման առանցքը և միաժամանակ նրան թեք է՝ առաջացնում է կոնի կողմնային մակերևույթ։ Եթե հատվածը զուգահեռ է պտտման առանցքին՝ առաջացնում է գլանի կողմնային մակերևույթ։ Եթե հատվածը պտտման առանցքից դուրս է գտնվում և նրան (շարունակությամբ) ուղղահայաց է՝ առաջացնում է շրջանային օղակ։ Եթե հատվածը գտնվում է պտտման առանցքից դուրս և նրան (շարունակությամբ) թեք է՝ առաջացնում է հատած կոնիկողմնային մակերևույթ։

Բացատրեցեք վերն ասածները պատրաստելով համապատասխան գծանկարներ։

Պատկերների պտտումն առաջացնում է փոքր ի շատե բարդ մարմիններ։

Դիտենք եռանկյունների կամ բազմանկյունների պտտման այնպիսի դեպքեր, երբ պտտման առանցքը չի հատում պտտվող պատկերը, կամ, այլ կերպ ասած, պտտվող ամբողջ պատկերը պտտման առանցքի մի կողմում է դասավորված։ Այդ պայմանին չեն հակասում այն դեպքերը, երբ n-անկյան մեկ կամ երկու գագաթներն ընկած են լինում պտտման առանցքի վրա։

Պտտման մարմնի մակերևույթը հավասար է այն մակերևույթների գումարին, որոնք առաջանում են n-անկյան յուրաքանչյուր կողմի պտտումից. n-անկյան այն կողմը, որը գտնվում է պտտման առանցքի վրա, հաշվի չեն առնում (ինչու)։

Ենթադրենք ABCDE պատկերը (գծ. 45) պտտվում է MN առանցքի շուրջը և $BA \perp MN$, $BC \parallel MN$։ Տանենք $CC_1 \perp MN$ և $DD_1 \perp MN$։ Վորոնելի մակերևույթ S-ը հավասար է այն մակերևույթների գումարին, վորոնք առաջանում են MN-ի շուրջը AB, BC, CD և DE հատվածների պտտումից, այսինքն

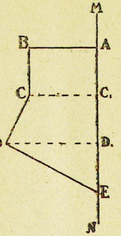
$$S = S_{AB} + S_{BC} + S_{CD} + S_{DE}$$

S_{AB}-ն AB շառավիղ ունեցող շրջանի մակերեսն է. $S_{AB} = \pi \cdot BA^2$; S_{BC}-ն $BA = CC_1$ շառավիղ և AC_1 բարձրություն ունեցող գլանի կողմնային մակերևույթն է. $S_{BC} = 2\pi \cdot BA \cdot AC_1$; S_{CD}-ն, CC_1 և DD_1 շառավիղներ և CD ծնիչ ունեցող հատած կոնի կողմնային մակերևույթն է

$$S_{CD} = \pi \cdot CD \cdot (DD_1 + CC_1)$$

S_{DE}-ն DD_1 շառավիղ և DE ծնիչ ունեցող կոնի կողմնային մակերևույթն է

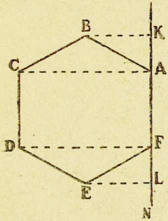
$$S_{DE} = \pi \cdot DD_1 \cdot DE$$



գծ. 45

Տեղադրելով առանձին-առանձին գտած S_{AB}, S_{BC}, S_{CD} և S_{DE} մեծությունները S ֆորմուլի մեջ, կգտնենք մեր վորոնելի մակերևույթը։

Հավասար հատվածները պտտման դեպքում կարող են տարբեր մեծության մակերևույթներ առաջացնել, նայելով թե այդ հատվածներն ինչպես են դասավորված պտտման առանցքի համեմատությամբ։ Ակներև է, վոր յերկու միմյանց հավասար և պտտման առանցքին զուգահեռ հատվածների մակերևույթները տարբեր են. առանցքից ավելի հեռու գտնվող հատվածն առաջացնում է ավելի մեծ մակերևույթ։ Սակայն յեթե յերկու հատված ունենեն հավասար յերկարություն և միատեսակ են դասավորված պտտման առանցքի նկատմամբ, ապա և պտտման դեպքում նրանց առաջացրած մակերևույթներն էլ մեծությամբ նույնը կլինեն։



գծ. 46

ՕՐԻՆԱԿ.—Վորոշենք կանոնավոր վեցանկյան, երբ կողմերից մեկի շուրջը պտտումից առաջացրած մակերևույթի մեծությունը, յեթե այդ վեցանկյան յուրաքանչյուր կողմը հավասար է a սանտիմետրի։

Կանոնավոր վեցանկյան (գծ. 46) գագաթներից ուղղահայացներ տանենք պտտման առանցքին։ Ինչպես C և D գագաթներից տարած ուղղահայացները կանցնեն A և F կետերով։

$$CA = DF = a\sqrt{3} \quad \text{և}$$

$$BK = EL = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Վորոնելի մակերևույթը նշանակելով S կստանանք

$$S = S_{AB} + S_{BC} + S_{CD} + S_{DE} + S_{EF}$$

վորովհետև

$$S_{AB} = S_{EF} \text{ և } S_{BC} = S_{DE}$$

(ինչու), ուստի

$$S = 2 \cdot S_{AB} + 2 \cdot S_{BC} + S_{CD} =$$

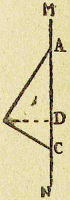
$$= 2 \cdot \pi BK \cdot AB + 2\pi (AC + BK) \cdot BC + 2\pi \cdot AC \cdot AF =$$

$$= \frac{2\pi \cdot a\sqrt{3} \cdot a}{2} + 2\pi \left(a\sqrt{3} + \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \cdot a + 2\pi \cdot a \cdot \sqrt{3} \cdot a =$$

$$= \pi a^2 \sqrt{3} + 2\pi a^2 \sqrt{3} + \pi a^2 \sqrt{3} + 2\pi a^2 \sqrt{3} = 6\pi a^2 \sqrt{3}$$

Պատասխան

$$S = 6\pi a^2 \sqrt{3} \text{ cm}^2$$



գծ. 47

Պտտման մարմինների ծավալը վորոշելիս կարող ենք հանդիպել զանազան դեպքերի, վորոնցից գննենք հետևյալ կարևորագույնները։

1. Յեռանկյունի ABC (գծ. 47) պտտվում է իր մեծ AC կողմի շուրջը։ Տանելով B գագաթից պտտման առանցքին BD ուղղահայացը, մենք տվյալ յեռանկյունը կվերածենք յերկու ուղղանկյուն յեռանկյան, այն է $\triangle$ ABD և $\triangle$ DBC, վորոնցից յուրաքանչյուրը պտտվելով առաջացնում է կոն։ Նշանակենք յեռանկյուն ABC-ի պտտվելուց առաջացած ծավալը V_{ABC}-ով, կստանանք

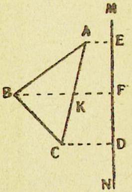
$$V_{ABC} = V_{ABD} + V_{DBC} = \frac{\pi \cdot BD^2 \cdot AD}{3} + \frac{\pi \cdot BD^2 \cdot DC}{3} =$$

$$= \frac{\pi \cdot BD^2 (AD + DC)}{3} = \frac{\pi \cdot BD^2 \cdot AC}{3}$$

2. Յեռանկյուն ABC (գծ. 48) պտտվում է յեռանկյունուց դուրս անցնող MN առանցքի շուրջը։

Յեռանկյան գագաթներից իջեցնենք պտտման առանցքին AE, BF և CD ուղղահայացները։ Մենք կստանանք յերկու՝ EABF և FBCD ուղղանկյուն տրապեցներ, վորոնք պտտվելիս առաջացնում են հատած կոներ։ Այդ յերկու կոների ծավալներից հարկավոր է հանել EACD ուղղանկյուն տրապեցի պտտումից առաջացած ծավալը, վորպեսզի ստանանք ABC յեռանկյան պտտումից առաջացած ծավալը։

Յեվ այսպես



գծ. 48

$$V_{ABC} = V_{EABF} + V_{FBCD} - V_{EACD} =$$

$$= \frac{\pi \cdot EF}{3}(BF^2 + AE^2 + BF \cdot AE +$$

$$+ \frac{\pi \cdot FD}{3}(BF^2 + CD^2 + BF \cdot CD) - \frac{\pi \cdot ED}{3}(CD^2 + AE^3 + CD \cdot AE)$$

Այս ֆորմուլով վճռվում է խնդիրը։ Մնում է ֆորմուլում յեղող հատվածների տեղը դնել նրանց թվային արժեքները և ապա կատարել հաշվումը։

Բայց ավելի լավ է նախորոք ձևափոխել, և հնարավոր յեղածին չափ ավելի պարզ ձև տալ ֆորմուլին։ Մի քանի դեպքերում նույնպես յերկար ֆորմուլները կարելի յե վերածել չափազանց կարճ ֆորմուլների։

Նկատի պետք է ունենալ, վոր պտտման առանցքի նկատմամբ միևնույն դասավորություն ունեցող յերկու միանման պատկերներ, պտտվելիս առաջացնում են միատեսակ ծավալներ։

ՈՐԻՆԱԿ. — *Վորոշենք կանոնավոր վեցանկյան՝ իր կողմերից մեկի շուրջը պտտելուց առաջացած մարմնի ծավալը, յեթե նրա յուրաքանչյուր կողմը հավասար է* a *սանտիմետրի։*

Ոգտվելով գծանկար 46-ից, կգտնենք

$$V_{ABCDEF} = V_{KBCA} + V_{ACDF} + V_{FDEL} - V_{KBA} - V_{FEL} =$$

$$= 2 \cdot V_{KBCA} + V_{ACDF} - 2 V_{KBA} =$$

$$= \frac{2\pi \cdot KA \cdot (AC^2 + BK^2 + AC \cdot BK)}{3} + \pi \cdot AC^2 \cdot AF - \frac{2\pi \cdot BK^3 \cdot AK}{3}$$

վորովհետև

$$BK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad AC = a\sqrt{3} \qquad KA = \frac{a}{2} \text{ և } AF = a$$

ուստի

$$V_{ABCDEF} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{a}{2}\left(3a^2 + \frac{a^2 \cdot 3}{4} + a \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) +$$

$$+ \pi \cdot 3a^2 \cdot a - \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3a^2}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\pi a}{3} \cdot \frac{12a^2 + 3a^2 + 6a^2}{4} + 3\pi a^3 - \frac{\pi a^3}{4} =$$

$$= \frac{21\pi a^3}{12} + 3\pi a^3 - \frac{\pi a^3}{4} = \frac{7\pi a^3}{4} + 3\pi a^3 - \frac{\pi a^3}{4} =$$

$$= \frac{6\pi a^3}{4} + 3\pi a^3 = \frac{3\pi a^3}{2} + 3\pi a^3 = \frac{9\pi a^3}{2}$$

Պատասխան

Վորոնելի ծավալը հավասար է $\frac{9\pi a^3}{2}$ cm³

§ 44. ԳՅՈՒԼԴԵՆԻ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԸ

(Գյուլդենը գերմանիացի մաթեմատիկոս էր. ծնվել է 1539 թ., մեռել 1610 թ.)։

Եթե պտտվող պատկերը չի հատվում պտտման առանցքով (պատկերի մի կողմը կարող է համատեղվել պտտման առանցքի հետ), ապա

1) Պտտման մարմնի մակերևույթը հավասար է պտտվող պատկերի պարագծի յեվ պատկերի ծանրության կենտրոնով պտտման առանցքի շուրջն առաջացող շրջանագծի յերկարության արտադրյալին:

Ծանոթություն։ *Եթե պատկերի մի կողմը համատեղվում է պտտման առանցքի հետ, ապա այդ կողմը ևս պատկերի պարագծի մասն է համարվում։*

2) Պտտման մարմնի ծավալը հավասար է պտտվող պատկերի մակերեսի յեվ պատկերի ծանրության կենտրոնով պտտման առանցքի շուրջն առաջացող շրջանագծի յերկարության արտադրյալին:

Կանոնավոր պատկերների պտտվելուց առաջացած մակերևույթներն ու ծավալները կարելի յե անմիջականորեն վորոշել վերը հիշած յեղանակներով։ Գյուլդենի թեորեմների կիրառումը հնարավորություն է տալիս արագությամբ ստուգումներ կատարել։

Դառնանք նորից կանոնավոր վեցանկյան իր կողմերից մեկի շուրջը պտտվելուց առաջացած մարմնի մակերևույթի և ծավալի վորոշմանը։ Կանոնավոր վեցանկյան ծանրության կենտրոնն ընկած է նրա կենտրոնում և պտտման առանցքից գտնվում է $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ *հեռավորության վրա (բացատրեցեք)։ Այդ պատճառով ծանրության կենտրոնը գծում է մի շրջան, վորի յերկարությունը հավասար է*

$$2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \pi a\sqrt{3}$$

$$S_{ABCDEF} = 6a \cdot \pi a\sqrt{3} = 6\pi a^2\sqrt{3}$$

Վորովհետև կանոնավոր վեցանկյունը վեր է ածվում վեց կանոնավոր յեռանկյունների, վորոնց կողմը հավասար է վեցանկյան կողմին (ինչու), հետևապես կանոնավոր վեցանկյան մակերեսը հավասար է

$$\frac{6 \cdot a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot a^2\sqrt{3}}{2}$$

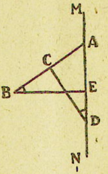
ուստի

$$V_{ABCDEF} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \pi a\sqrt{3} = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi a\sqrt{3}}{2} = \frac{9\pi a^3}{2}$$

Այս նույն արտահայտությունները S-ի և V-ի համար մենք արդեն ստացել եյինք անմիջականորեն։ Ինչպես տեսնում եք, Գյուլդենի թեորեմի կիրառումը գործը բավականաչափ հեշտացնում է։ Ուստի հարմար դեպքերում կիրառեցեք այն։

§ 45. ԳՈՏԻ

ԹԵՈՐԵՄ: *Այն մակերևույթը, վորն առաջանում է պտտման առանցքին վոչ ուղղահայաց հատվածի պտտվելուց, հավասար է այդ հատվածին, նրա միջնակետից մինչև պտտման առանցքը կանգնեցրած ուղղահայացի յերկարության շառավիղ ունեցող շրջանագծի յերկարության և հատվածի պտտման առանցքի վրա գտնվող պրոյեկցիայի արտադրյալին:*



գծ. 49

1-ին դեպք: *Հատված* AB-*ն պտտման առանցք* MN-*ին շոշափում է մի ծայրով* (*գծ.* 49): *Հատված* AB-*ի պտտվելուց առաջանում է կոնի կողմնային մակերևույթը: Ապացուցենք, վոր նա հավասար է*

$$2\pi \cdot CD \cdot AE$$

C *կետը* AB *հատվածը բաժանում է յերկու հավասար մասերի:* $CD \perp AB$, $BE \perp MN$, *հետևապես,* AE-*ն հատված* AB-*ի պրոյեկցիան է* MN *պտտման առանցքի վրա:*

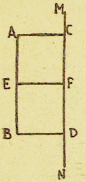
Նշանակենք վորոնելի մակերևույթը S_{AB}-*ով այն ժամանակ*

$$S_{AB} = \pi \cdot BE \cdot AB = 2\pi \cdot BE \cdot \frac{AB}{2} = 2\pi \cdot BE \cdot AC$$

Ուղղանկյուն յեռանկյունները ABE *և* ACD *նման են* (*ինչո՞ւ*). *հետևապես*

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AE}{BE}$$

վորտեղից կստացվի



գծ. 50

$$BE \cdot AC = CD \cdot AE$$

Դառնալով մեր գտած S_{AB} *արտահայտության ստանում ենք*

$$S_{AB} = 2\pi \cdot CD \cdot AE$$

այսինքն այն, ինչ վոր պետք է ապացուցեյինք:

2-րդ դեպք: *Հատված* AB-*ն զուգահեռ է պտտման առանցք* MN-*ին* (*գծ.* 50):

Հատված AB-*ի պտտվելուց առաջանում է գլանի կողմնային մակերևույթը: Ապացուցենք, վոր այն հավասար է*

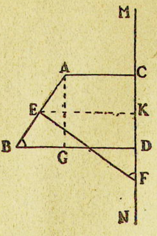
$$2\pi \cdot EF \cdot CD$$

E *կետը կիսում է* AB *հատվածը.* $AC \perp MN$, $EF \perp MN$, $BD \perp MN$ *հետևապես*

$$AC \parallel EF \parallel BD \text{ և } AC = EF = BD$$

$$S_{AB} = 2\pi \cdot BD \cdot CD = 2\pi \cdot EF \cdot CD$$

3-րդ դեպք։ *Հատված* AB *գտնվում է պտտման առանցք* MN-*ից դուրս* (*գծ.* 51) *և թեք է նրան։*



գծ. 51

Հատված AB-*ի պտտվելուց առաջանում է հատած կոնի կողմնային մակերևույթը։ Ապացուցենք, որ*

$$S_{AB} = 2\pi \cdot EF \cdot CD$$

E *կետը կիսում է* AB *հատվածը.* $AC \perp MN$, $BD \perp MN$, $EF \perp AB$

$$S_{AB} = \pi \cdot AB\,(BD + AC) = 2\pi \cdot AB \cdot \frac{BD + AC}{2}$$

Վորպեսզի այս արտահայտությունը ձևափոխենք և բերենք վորոնելի ձևին, դիմենք ոժանդակ կառուցման։ Տանենք $EK \parallel AC$։ *Այն ժամանակ* $EK \parallel BD$ *և* $EK \perp MN$։ *Վորովհետև* BACD *պատկերը տրապեց է և* EK-*ն միջին գիծն է, ապա ուրեմն*

$$EK = \frac{BD + AC}{2}$$

Տանենք $AG \perp BD$, *այն ժամանակ* $AG \parallel MN$ *և* $AG = CD$։ *Ուղղանկյուն յեռանկյուններ* EKF *և* BAG *նման են* (*ինչու*), *ուստի*

$$\frac{EK}{AG} = \frac{EF}{AB}$$

այստեղից կստացվի

$$EK \cdot AB = AG \cdot EF$$

կամ

$$EK \cdot AB = EF \cdot CD$$

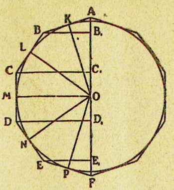
$$S_{AB} = 2\pi \cdot AB \cdot \frac{BD + AC}{2} = 2\pi \cdot AB \cdot EK = 2\pi \cdot EF \cdot CD$$

Հատված AB-*ի պտտման առանցքի նկատմամբ ունեցած բոլոր դիրքերի համար թեորեմն ապացուցվեց, բացառությամբ թեորեմում վերապահությամբ արտահայտված այն դիրքի, յերբ* AB-*ն ուղղահայաց է լինում պտտման առանցքին։*

ԹԵՈՐԵՄ.—Գնդի մակերևույթը հավասար է $4\pi R^2$, *ուր* R-*ը նշանակում է* գնդի շառավիղ:

Արտագծենք շրջանին զույգ թվով կողմեր ունեցող կանոնավոր բազմանկյուն։

Բացատրական գծանկար 52-ում պատկերացրած է շրջանին արտագծած կանոնավոր տասանկյուն, վորի շառավիղը նշանակում ենք R-*ով։* AF *ուղիղը, վորը միացնում է բազմանկյան յերկու հակադիր գագաթները, բաժանում է բազմանկյունը յերկու հավասար մասի և անցնում է շրջանի կենտրոնով։ Պտտելով բազմանկյունը և շրջանը* AF *առանցքի շուրջը, մենք* կստանանք յերկու մարմին. ներսը R շառավիղ ունեցող գունդ և արտաքուստ ել մի բարդ մարմին, վորի ձեւն այստեղ նշանակություն չունի։ Հետազոտենք այդ յերկու մարմինների մակերևույթը։ Պարզ է, վոր արտաքին մարմնի մակերևույթը ավելի մեծ է, քան գնդի մակերևույթը։ Արտաքին մարմնի մակերևույթը (նշանակենք այն S_{ABCDEF}) հավասար է S_{AB}, S_{BC}, S_{CD}, S_{DE} և S_{EF} մակերևույթների գումարին, վորոնք առաջանում են AB, BC, CD, DE և EF հատվածների AF պտտման առանցքի շուրջը պտըտելուց։



գծ 52

Նկատենք, վոր այն հատվածները, վորոնք միացնում են շրջանի O կենտրոնը կանոնավոր բազմանկյան կողմերի և շրջանագծի շոշափման K, L, M, N և P կետերի հետ, հավասար են K-ի, ուղղահայաց են բազմանկյան համապատասխան կողմերին և նրանց կիսում են (այս բոլորը բացատրեցեք մանրամասն)։

Իջեցնենք, B, C, D և E կետերից պտտման առանցքին BB_1, CC_1, DD_1 և EE_1 ուղղահայացները. այն ժամանակ առանցքի վրա կստանանք AB_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1 և E_1F հատվածները, վորոնք հանդիսանում են վորպես պրոյեկցիաներ AB, BC, CD, DE և EF հատվածների համար։

Նախկին թեորեմի համաձայն կստանանք

$$S_{AB} = 2\pi \, . \, KO \, . \, AB_1 = 2\pi R \, . \, AB_1$$
$$S_{BC} = 2\pi \, . \, LO \, . \, B_1C_1 = 2\pi R \, . \, B_1C_1$$
$$S_{CD} = 2\pi \, . \, MO \, . \, C_1D_1 = 2\pi R \, . \, C_1D_1$$
$$S_{DE} = 2\pi \, . \, NO \, . \, D_1E_1 = 2\pi R \, . \, D_1E_1$$
$$S_{EF} = 2\pi \, . \, PO \, . \, E_1F = 2\pi R \, . \, E_1F$$

Ստացած հավասարությունների համապատասխան մասերը գումարելով, ձախ մասում կստանանք S_{ABCDEF}, իսկ աջ մասերի գումարման ժամանակ փակագծերից դուրս բերելով ընդհանուր արտադրիչ $2\pi R$-ը, կստանանք

$$S_{ABCDEF} = 2\pi R\,(AB_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 + E_1F) = 2\pi R \, . \, AF$$

Առանց փոխելու մեր վերցրած շրջանի R շառավղի մեծությունը, պատկերացնենք, վոր արտագծած բազմանկյան կողմերի թիվն անսահմանորեն մեծանում է։ Բազմանկյան կողմերի թվի մեծանալու դեպքում, նրա պտտվելուց առաջացած մակերևույթը կսկսի փոքրանալ, բայց վոչ անսահմանորեն, վորովհետև AF-ի մեծությունը փոքրանալով հանդերձ, միշտ ավելի մեծ է մնում շրջանի տրամագծից։ Սահմանային դեպքում, յերբ բազմանկյան կողմերի թիվ կդառնա անվերջ, պտտման մարմնի մակերևույթը կդառնա գնդի մակերևույթ, և AF-ը կդառնա պտտվող շրջանի տրամագիծ կամ գնդի տրամագիծ։ Այսպես ուրեմն, գնդի մակերևույթը նշանակելով S, կստանանք

$$S = 2\pi R \, . \, 2R$$

վորտեղից

$$\boxed{S = 4\pi R^2}$$

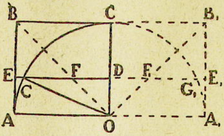
Բացատրեցեք, ինչու

1) Գնդի մակերևույթը հավասար է πD^2, ուր D-ն նշանակում է գնդի տրամագիծ.

2) Կիսագնդի լրիվ մակերևույթը հավասար է $3\pi R^2$.

3) Գնդերի մակերևույթները համեմատական են իրենց շառավիղների քառակուսիներին կամ տրամագծերի քառակուսիներին:

ԹԵՈՐԵՄ.—Գնդի ծավալը հավասար է $\frac{4\pi R^3}{3}$, ուր R-ը նշանակում է գնդի շառավիղ:



գծ. 53

Վերցնենք ABCO քառակուսին (գծ. 53), տանենք BO անկյունագիծը և ներգծենք նրան շրջանագծի մի քառորդը, ընդունելով O-ն կենտրոն և վորպես շառավիղ AO = OC: Պտտենք ABCO քառակուսին, ուղղանկյուն յեռանկյուն BCO-ն և սեկտոր AOC-ն CO-ի շուրջը:

Քառակուսու պտտվելուց առաջանում է BC կամ AO շառավիղ և CO բարձրություն ունեցող գլան, յեռանկյան պտտվելուց առաջանում է BC շառավիղ և CO բարձրություն ունեցող կոն, սեկտորի պտտվելուց առաջանում է AO կամ OC շառավիղ ունեցող կիսագունդ: Նախ ապացուցենք, վոր կիսագնդի ծավալը հավասար է գլանի և կոնի ծավալների տարբերության, կամ այն մարմնի ծավալին, վորն առաջանում է յեռանկյուն ABO-ի OC առանցքի շուրջը պտտվելուց:

Վերջին մարմինը և կիսագունդն ունեն AO շառավիղ ունեցող շրջանին հավասար ընդհանուր հիմք և ընդհանուր բարձրություն՝ OC: Ըստ Կավալյերիի օրենքի համաձայն, այդ մարմինն ու կիսագունդը հավասարամեծ կլինեն, յեթե հիմքին զուգահեռ նրանց վորևե հատվածքները հավասարամեծ են: Տանենք համեմատվող մարմինների (AOB յեռանկյան պտտվելուց առաջացող մարմնի և կիսագնդի) ընդհանուր բարձրության վրա վերցրած վորևե կամավոր D կետով մի հարթություն այնպես, վոր զուգահեռ լինի մարմինների հիմքի հարթության, այսինքն AO շառավիղ ունեցող շրջանին: Հատող հարթությունը կհատի առաջին մարմինն այն շրջանային օղակով, վորի արտաքին շառավիղն է ED-ն և ներքինը՝ FD-ն, այսինքն կստանանք

$$\pi . ED^2 - \pi . FD^2$$

մակերեսի հատումը: Նույն հատող հարթությունը կհատի կիսագունդը GD շառավիղ ունեցող շրջանով, այսինքն կտա $\pi . GD^2$ մակերեսի հատումը: Բաղդատենք

$$\pi . ED^2 - \pi . FD^2 \text{ և } \pi GD^2$$

մեծությունները:

Որովհետև $\angle FOD = \angle DFO = 45^0$ *(ինչու), ուստի* $FD = OD$։ *Միացնելով* G *և* O *կետերը, կստանանք ուղղանկյուն յեռանկյուն, վորից հետևվում է*

$$GO^2 - OD^2 = GD^2$$

Փոխարինելով GO-*ն* ED-*ով և* OD-*ն* FD-*ով, կստանանք*

$$ED^2 - FD^2 = GD^2$$

Հետևապես, $\pi \,.\, ED^2 - \pi \,.\, FD^2$ *և* πGD^2 *մեծությունները միմյանց հավասար են, ուստի կիսագունդը հավասարամեծ է* ABO *յեռանկյան* OC-*ի շուրջը պտտվելուց առաջացած մարմնին, այսինքն հավասարամեծ է* ABB_1A_1 *գլանի և* BOB_1 *կոնի ծավալների տարբերության։ Նշանակելով գնդի ծավալը* V, *նրա* $AO = OC$ *շառավիղը՝* R, *կստանանք*

$$\frac{V}{2} = \pi R^2 \,.\, R - \frac{\pi R^2 \,.\, R}{3} = \frac{2\pi R^3}{3}$$

վորտեղից վերջնականապես կստանանք

$$\boxed{V = \frac{4\pi \,.\, R^3}{3}}$$

Բացատրեցեք ինչու.

1) Գնդի ծավալը հավասար է $\frac{\pi D^3}{6}$, *ուր* D-*ն նշանակում է գնդի տրամագիծ.*

2) Գնդերի ծավալները համեմատական են նրանց շառավիղների խորանարդներին կամ տրամագծերի խորանարդներին։

գծ. 54

Ստացեք գնդի մակերևույթի և ծավալի ֆորմուլները՝ հիմք ընդունելով Գյուլդենի թեորեմը։

Գնդի մակերևույթն առաջանում է ABC *կիսաշրջանագծի (գծ. 54)* $AC = 2R$ *տրամագծի շուրջը պտտվելուց։ Պտտվող գծի պարագիծը հավասար է* ABC *կիսաշրջանագծի յերկարության, այսինքն* πR-*ի։ Կիսաշրջանագծի ծանրության կենտրոն* D-*ն կիսաշրջանագծի կենտրոնից գտնվում է* $DO = \frac{2R}{\pi}$ *հեռավորության վրա։ Նկատի առեք, վոր գնդի մակերևույթն առաջանում է վոչ թե կիսաշրջանի պտտվելուց, այլ կիսաշրջանագծի, վոչ թե պատկերի, այլ գծի պտտվելուց։*

ABCOA *կիսաշրջանի* AC-*ի շուրջը պտտվելուց առաջանում է գունդ։ Պտտվող պատկերի մակերեսը, այսինքն կիսաշրջանի մակերեսը, հավասար է* $\frac{\pi \,.\, R^2}{2}$։ *Կիսագնդի ծանրության կենտրոն* E-*ն չի համատեղվում կիսաշրջանագծի ծանրության կենտրոնի հետ և գտնվում է կիսաշրջանի կենտրոնից* $EO = \frac{4R}{3\pi}$ *հեռավորության վրա։*

Կիսաշրջանագծի և կիսաշրջանի ծանրության կենտրոնի վորոշումը տրվում է բարձրագույն մաթեմատիկայի դասընթացում։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

261. 3 cm և 4 cm յերկարության կողմեր ունեցող ուղղանկյունը նախ պտտվում է յերկար և ապա կարճ կողմի շուրջը։ Վորոշեցեք այդպիսով առաջացած գլանների լրիվ մակերևույթների և ծավալների տարբերական և քանորդական հարաբերությունները։

262. Հեռագրական 1 km յերկարության յերկաթաթելի քաշն է 160 kg։ Յերկաթի տեսակարար կշիռը հավասար է 7,8-ի։ Վորոշեցեք այդ յերկաթաթելի տրամագիծը։

263. Վորոշեցեք ապակե խողովակի քաշը, վորի արտաքին տրամագիծը հավասար է 1,7 mm-ի, ներքինը՝ 14,5 mm-ի։ Խողովակի յերկարությունն է 85 cm։ Ապակու տեսակարար կշիռն է 2,6։

264. Պատրաստեցեք յերկանաքարի եպյուր (ընտրեցեք համապատասխան մասշտաբ), վորի արտաքին տրամագիծն է 92 cm, ներքինը՝ 12 cm., իսկ հաստությունը՝ 10 cm. Գտեք յերկանաքարի քաշը։ Յերկանքի քարի տեսակարար կշիռն է 2,5։

265. Վոսկին ամենափափուկ և ամենատառաձգական մետաղներից մեկն է։ Մեկ գրամ վոսկին կարելի յե ձգելով 166 m յերկարության թել դարձնել։ Ի՞նչ հաստություն կունենա այդպիսի վոսկեթելը։

266. Յերկրագնդի ծավալը հավասար է 10^{12} km^3։ Յեթե այդպիսի գունդը դարձնենք 150.10^6 km (յերկրի և արևի միջև յեղած հեռավորությունը) յերկարության գլանի, վո՞րքան կլինի այդպիսի գլանի տրամագիծը։

267. Գծեցեք 8 cm և 10 cm յերկարության կողմեր ունեցող ուղղանկյուն։ Համարեցեք այդ ուղղանկյունը վորպես գլանի կողմնային մակերևույթ։ Ի՞նչպես ծալել այդ ուղղանկյունը, վորպեսզի ստացվի ավելի մեծ ծավալի գլան։

268. R=8 cm և h=17 cm, գլանի կողմնային մակերևույթի վրայով տարված է 20 թելանի պտուտակաձև մի գիծ։ Վորոշեցեք գծի քայլափոխը, նրա յերկարությունն ու անկյունը։

269. Դոմկրատի (հանդերձանք, վորով ծանրություններ են բարձրացնում) պտուտակի բարձրացման անկյունը հավասար է 30'-ի, իսկ պտուտակի շառավիղը՝ 8 cm։ Պտուտակի գլուխը քանի պտույտ պետք է անի, վոր դոմկրատով կարողանա բեռը բարձրացնի 10 cm բարձրության։

270. Աղյուսե դարվածքի գլանաձև սյունի բարձրությունն է 8 m և տրամագիծը՝ 0,6 m։ Աղյուսե դարվածքի տեսակարար կշիռն է 1,6։ Հաշվեցեք կիլոգրամներով, թե սյունն իր հիմքի ամեն մի քառակուսի սանտիմետրի վրա ի՞նչպիսի ճնշում է գործում։

271. Միլլիմետրերով անհրաժեշտ չափումները կատարելուց հետո՝ հաշվեցեք 5 կոպեկանոցի և 50 կոպեկանոցի լրիվ մակերևույթները և ծավալները։

272. Հարկավոր չափումներ կատարելուց հետո՝ հաշվեցեք յերկու ժեշտե սուրճամանի ծավալները. մեկը 1 kg է, մյուսը 500 գրամ։ Հիրավի՞ այդ ամաններից մեկը ծավալով 2 անգամ մեծ է մյուսից։

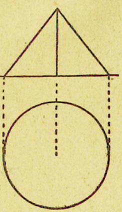
273. Գլանաձև ամանը, վորի տրամագիծն է 12 cm, վորոշ բարձրությամբ ջուր է լցրած։ Այդ ամանի մեջ ձգեցին մի կշռաքար, վորը բոլորովին սուզվեց ջրի մեջ. ամանի ջուրը այդ պատճառով 2 cm բարձրացավ։ Վորոշեցեք կշռաքարի ծավալը։

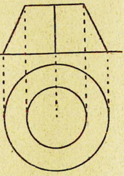
274. Քանի՞ սանտիմետր կբարձրանա ամանի միջի ջրի մակերևույթը (տես նախորդ խնդիրը), յեթե սուզվող մարմնի ծավալ 37 cm³ է։

275. Յեռանկյուն ուղիղ պրիզման, վորի հիմքը 5 cm կողմ և 6 cm բարձրություն ունեցող կանոնավոր յեռանկյուն է, գլանի համար ծառայում է վորպես սեղմ պատյան։ Հաշվեցեք այդ գլանի ծավալը։

276. Հաշվեցեք նկյուրի վրա (գծ. 55) բնական մեծությամբ պատկերացրած կոնի ծավալը, կողմնային և լրիվ մակերևույթները։

277. Հաշվեցեք նկյուրի վրա (գծ. 56) բնական մեծությամբ պատկերացրած հատած կոնի ծավալը, կողմնային և լրիվ մակերևույթները։


գծ. 55


գծ. 56

278. Տրված յեգիպտական յեռանկյան (կողմերը 3, 4 և 5 գծային միավորներ են) 1) փոքր եջի, 2) մեծ եջի շուրջը պտտվելուց առաջացած կոների լրիվ մակերևույթների և ծավալների տարբերական և քանորդական հարաբերությունները։

279. Ի՞նչպիսի անկյուն ունի այն կոնի հիմքը, վորի կողմնային մակերևույթի պարզվածքը կազմում է 132° անկյունով սեկտոր։

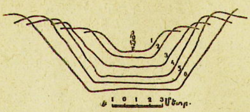
280. Ուղղանկյուն յեռանկյունը պտտվում է յուր այն եջի շուրջը, վորի յերկարությունը հավասար է 6,3 cm-ի, իսկ նրան կից անկյունը ունի 42° 36'։ Վորոշեցեք պտտվելուց առաջացած այդ կոնի ծավալը, կողմնային և լրիվ մակերևույթները։

281. Կոնի շառավիղը հավասար է 17,6 cm-ի, իսկ գագաթի անկյունը հավասար է 105°-ի։ Հաշվեցեք կոնի ծավալը։

282. Ճանապարհ վրա խճերի կույտերին տվել են կոնի ձև, վորոնց հիմքի շրջանագծի յերկարությունը հավասար է 12 m-ի, իսկ բարձրությունը, 1,25 m-ի։ Հաշվեցեք խճերի այդպիսի կույտի քաշը, յեթե խճաքարի տեսակարար կշիռը հավասար է 1,43։

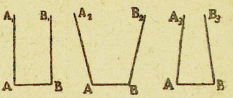
283. Հաշվեցեք հաճարե հատիկների կոնաձև կույտի քաշը, յեթե նրա հիմքի շրջանագիծը հավասար է 8,5 m-ի, բարձրությունը՝ 0,9 m-ի։ Հաճարի հատիկների տեսակարար կշիռն է 0,8։

284. Գծանկար 57-ում պատկերացրած է հողի մեջ ավեր-ռումբի պայթումից առաջացած ձագարաձև փոսի միջակտուրը։ Համարելով այդ ձագարների ձևը հատած կոներ, հաշվեցեք ձագարների ծավալները։ 1, 2, 3, 4, 5, և 6 ձագարներն առաջացել են համապատասխանաբար 45, 135, 270, 450, 900 և 1800 kg ծանրության ռումբերից։ Կազմեցեք ռումբերի քաշից կախում ունեցող ձագարի ծավալի փոփոխման գրաֆիկը։ Կատարեցեք արտակարգ հղկում և ստացեք ինչպիսի յենթադրական ծավալ կունենա 2500 kg ռումբից առաջացած ձագարը։



գծ. 57

285. Ֆիզիկայի դասընթացից գիտենք, որ հեղուկի ճնշումն ամանի հատակի վրա կախում ունի ոչ թե ամանի ձևից, այլ ամանի հատակի մակերեսի մեծությունից և ջրի մակերևույթի հատակից ունեցած բարձրությունից։ Ուստի գծանկար 58-ում բերած միջակտուր ամանների մեջ, ճնշումը հատակին միևնույն է, յեթե բոլոր ամանների մեջ հեղուկը նույն բարձրությամբ է լցրած։ Բայց հեղուկի քաշերն ամանների մեջ տարբեր են։ Ցենթադրենք ամանները լիքն են ջրով և



գծ. 58

$$AB = 1dm, \quad AA_1 = 2dm, \quad A_2B_2 = 2AB, \quad A_3B_3 = \frac{AB}{2}$$

հաշվեցեք յուրաքանչյուր ամանի ջրի քաշը և ամանների ջրի քաշերի հարաբերությունները։

286. Թեք տակառիկի բարձրությունն է 45 cm, հատակի տրամագիծը՝ 28 cm, վերին հիմքի տրամագիծը՝ 36 cm։ Այդ տակառիկը լցրած է կովի յուղով, որի տեսակարար կշիռն է 0,94։ Որոշեցեք յուղի քաշը։

287. 10 m բարձրություն ունեցող կոնի գագաթից ինչ հեռավորության վրա անցկացնել հատող հարթություն, որ անջատած կոնը ծավալով հավասարվի տված կոնի մի յերրորդին։

288. Հատած կոնի ձև ունեցող ամանի մեջ, որի R=12 cm, r=9 cm և H=8 cm (ամանի հատակն ավելի նեղ է վերին բերանից), ջուրը լցրած է մինչև ամանի բարձրության կեսը։ Ամանի մեջ ձգել են 28 cm^3 ծավալ ունեցող մի առարկա, որն ամբողջովին սուզվել է ջրի մեջ։ Ցանի սանտիմետր կբարձրանա ջրի մակերևույթը։

289. Ամանի մեջ (տես նախորդ խնդիրը) ձգած է մի առարկա, որն ամբողջովին սուզվել է ջրում, որից հետո ջրի մակերևույթը բարձրացել է 1 cm։ Հաշվեցեք առարկայի ծավալը։

290. Նախորոք վերցրեք ծաղկամանի անհրաժեշտ չափումները սանտիմետրով և ապա գտեք նրա ծավալը։

Ծանոթություն: Աստղանիշով * նշած են այն օրինակները, որոնց նկատմամբ հարմար է կիրառել Գյուլդենի թեորեմները։

Հաշվեցէք պտտման մարմինների մակերեվույթներն ու ծավալները:

291. *Եգիպտական եռանկյունը (էջերն են 3 և 4 գծային միավորներ) պտտվում է իր ներքնաձիգի շուրջը։*

Ցուցմունք. *Ներքնաձիգին իջեցրած բարձրությունը հաշվելու համար, գրեցեք եռանկյան մակերեսի երկու տեսակի արտահայտությունը։*

292*. a *կողմ ունեցող քառակուսին պտտվում է այն ուղիղի շուրջը, որն անցնում է գագաթներից մեկով զուգահեռ անկյունագծին։*

293*. a *կողմ և* 60° *անկյուն ունեցող ռոմբը պտտվում է այն ուղիղի շուրջը, որն անցնում է գագաթներից մեկով՝ զուգահեռ մեծ անկյունագծին։*

294*. R *շառավիղ ունեցող շրջանը պտտվում է այն ուղիղի շուրջը, որը գտնվում է շրջանի կենտրոնից* a *հեռավորության վրա։*

Այդպիսի մարմինը մեխանիկայում կրում է «տոր» անունը։ Վելոսիպեդային կամ ավտոմոբիլային անվադողը (փչած վիճակում) տորի ձև ունի։ Չափեցեք ավտոմոբիլային անվադողը բնականում՝ նրա մակերևույթն ու ծավալը որոշելու համար։

295*. a *և* b *կողմեր ունեցող ուղղանկյունը պտտվում է այն ուղիղի շուրջը, որը զուգահեռ է կարճ կողմին և գտնվում է անկյունագծերի հատման կետից* l *հեռավորության վրա։ Ստացվում է ըստ լայնության ուղղանկյուն հատած օղակ։ Մեքենաների վճր մասերում է պատահում այդպիսի մարմին։*

296. *Եռանկյունը պտտվում է իր* 17,6 cm *երկարություն ունեցող կողմի շուրջը. Նրան կից անկյուններն են* 72° *և* 48°*։*

297. a *կողմ ունեցող կանոնավոր եռանկյունը պտտվում է այն ուղիղի շուրջը, որն անցնում է գագաթով՝ զուգահեռ հանդիպակաց կողմին։*

298. *Համարելով երկիրը գնդաձև և ընդունելով երկրի միջօրեականը հավասար* $40 \cdot 10^3$ km-*ի, հաշվեցեք երկրագնդի մակերևույթը և ծավալը։*

299. *Արևի և մոլորակների տրամագծերի հետևյալ համեմատական աղյուսակի վրա հենվելով և համարելով նրանց գունդ, գտեք նրանց մակերևույթները և ծավալները.*

Արևը	108,6	*Մարսը*	0,528
Մերկուրին . .	0,373	*Յուպիտերը* . .	11,06
Վեներան . . .	0,999	*Սատուրնը* . . .	9,3
Երկիրը . . .	1	*Ուրանյան* . . .	4,23
Լուսինը	0,273	*Նեպտունը* . . .	3,8

Երկրի շառավղի մեծությունն ստացաք, կատարելով նախորդ վարժությունը։

300. *Որքա՞ն է գնդի ծավալը, եթե նրա մակերևույթը հավասար է* 1 m^3-*ի։*

301. *Գտեք գնդի շառավիղը, եթե նրա ծավալը հավասար է* 1 m^3-*ի։*

302. *Ապացուցեք, որ* a-*ի հավասար շառավիղ և* 2a-*ի հավասար բարձրություն ունեցող գլանի ծավալը հավասար է* a-*ի հավասար շառավիղ և* 2a-*ի հավասար բարձրություն ունեցող կոնի և* a *շառավիղ ունեցող գնդի ծավալների գումարին։*

Պատրաստեցեք այդ երեք մարմինների հեռանկարային գծանկարը և էպյուրը։ Դուք կստանաք Արքիմեդի նշանավոր մարմինները, որոնց ծա-

վալային տրնչությունների գյուտով պարծենում եր այդ հանճարեղ մաթեմատիկոսը և մեքենագետը (ապրում եր մեր դարաշրջանից առաջ III-րդ դարում)։

303. Խորանարդաձև արկղում խիտ դասավորված են միատեսակ ձուլված յերկաթե 8 գունդ։ Նույն մեծության մի յերկրորդ խորանարդաձև արկղում խիտ դասավորված են միատեսակ ձուլված յերկաթե 125 գունդ։ Գնդերով լիքն այդ արկղներից վո՞րն ե ծանր։ Խորանարդի ծավալի վո՞ր տոկոսն են կազմում դատարկություններն առաջին արկղում, վո՞ր տոկոսը՝ յերկրորդ արկղում։

304. Գտեք կիսալիտրային գավաթում լցրած մանրագնդակների թիվը, յեթե յուրաքանչյուր մանրագնդակի տրամագիծը հավասար ե 1 mm-ի։ Իսկակա՞ն ե այդ թիվը, թե՞ մոտավոր և ի՞նչ պատճառներով։

305. Գտեք անձրևային կաթիլի և մառախուղային կաթիլի քաշը, յեթե առաջինի տրամագիծը հավասար ե 2 mm-ի, իսկ յերկրորդինը՝ 0,001 mm-ի։ Մառախուղային քանի՞ կաթիլից կարող ե կազմվել անձրևային մի կաթիլը։

306. Վորոշեցեք a-ի հավասար կող ունեցող խորանարդին ներգծած գնդի մակերևույթը և ծավալը։

307. Վորոշեցեք a-ի հավասար կող ունեցող խորանարդին արտագծած գնդի մակերևույթը և ծավալը։

308. Վորոշեցեք R շառավիղ ունեցող գնդին ներգծած գլանի ծավալը և լրիվ մակերևույթը, յեթե գլանի բարձրությունը 3 անգամ մեծ ե իր հիմքի շառավղից։

309. Վորոշեցեք R շառավիղ ունեցող գնդին ներգծած կոնի ծավալը և լրիվ մակերևույթը, յեթե կոնի բարձրությունը 4 անգամ մեծ ե իր հիմքի շառավղից։

310. Վորոշեցեք a-ի հավասար կող ունեցող կանոնավոր տետրաեդրին (քառանիստ) ներգծած գնդի ծավալը։

311. Վորոշեցեք a-ի հավասար կող ունեցող կանոնավոր տետրաեդրին արտագծած գնդի ծավալը։

312. Վորոշեցեք գնդի մակերևույթը, վորը ներգծած ե այնպիսի քառանկյուն բուրգի, վորի բոլոր կողերն իրար հավասար են, իսկ յուրաքանչյուրն առանձին հավասար ե a-ի։

313. Վորոշեցեք R-ի հավասար շառավիղ և գագաթի մոտ a-ի հավասար անկյուն ունեցող կոնին ներգծած հավասարակողմ գլանի ծավալը։

314. Կոնին, վորի առանցքային հատվածքը կանոնավոր յեռանկյուն ե, ներգծած ե խորանարդ։ Քանի՞ անգամ այդ խորանարդի ծավալը փոքր ե նույն կոնի ծավալից։

315. Կոնին, վորի առանցքային հատվածքը կանոնավոր յեռանկյուն ե, ներգծած ե գունդ։ Քանի՞ անգամ այդ գնդի ծավալը փոքր ե նույն կոնի ծավալից։

316. Գտեք այն գնդի շառավիղը, վորը հավասարամեծ ե 10 m-ի հավասար կող ունեցող խորանարդին։

317. Գտեք խորանարդի կողը, վորը հավասարամեծ ե այնպիսի հավասարակողմ գլանի, վորի հիմքի շառավիղը հավասար ե 5,7 m-ի։

318. Հաշվեցեք 6,4 m շառավիղ ունեցող գնդին ներգծած այն հատած կոնի ծավալը, վորի հիմքերի շառավիղները հավասար են 3,2 cm-ի և 5,3 m-ի։

Ծանոթություն.—*Այս խնդիրը կարող է ունենալ յերկու պատասխան։*

319. *Հաշվեցեք գլանի հիմքի շառավիղը, յեթե նրա բարձրությունը հավասար է* 6,5 cm-*ի, իսկ լրիվ մակերևույթը՝* 872,4 cm^2։

320. *Գտեք հատած կոնի մեծ հիմքի շառավիղը, յեթե նրա ծավալը հավասար է* 2786,7 cm^3-*ի, բարձրությունը՝* 37,4 cm-*ի և փոքր հիմքի շառավիղը՝* 14,5 cm-*ի*։

321. *Վերքան է թեք գուլլի բերնի տրամագիծը, վորի տարողությունն է* 12,5 *լիտր, բարձրությունը՝* 45 cm *և հատակի տրամագիծը՝* 16 cm։

ԳԼՈՒԽ VIII

ԳՈՆԻՈՄԵՏՐԻԱ

§ 46. ԳՈՆԻՈՄԵՏՐԻԱՅԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԸ

Յեռանկյունների լուծման ժամանակ կիրառվում են ուղղանկյուն յեռանկյան կողմերի քանորդական հարաբերությունները, վորոնք անվանվում են սինուս, կոսինուս, տանգենս և կոտանգենս: Այդ հարաբերությունների մեծությունները, ինչպես պարզվում է յեռանկյունաչափության մեջ, կախված չեն յեռանկյան կողմերի յերկարությունից, այլ ներկայանում են նրա անկյունների ֆունկցիաները: Այդպես ուրեմն, մինչև այժմ sin, cos, tg և ctg դիտում եյինք, վորպես յեռանկյան անկյունների ֆունկցիաներ: Սակայն անկյունները կարելի յե դիտել անկախ յեռանկյուններից, և վորովհետև sin, cos, tg և ctg կախված են բացառապես անկյունների մեծությունից, և վոչ թե յեռանկյան կողմերի յերկարությունից, ապա այդ ֆունկցիաները պետք է ունենան նույն իմաստը նաև յեռանկյունից անկախ դիտվող անկյունների համար, որինակ, ընկման և անդրադարձման անկյունների համար, տեսողության անկյան, բեկման անկյան, մագնիսային դաշտում հաղորդիչի պտտման անկյան և այլն:

Այս գլխի նպատակն է.

1) լայնացնել անկյան մասին ունեցան հասկացողությունը,

2) լայնացնել աղեղի մասին ունեցած հասկացողությունը,

3) վորոշել ամեն մի անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիայի հասկացողությունը,

4) պարզել զանազան անկյունների ֆունկցիաների միջև յեղած կապը,

5) սահմանել անկյունային և շրջանային հակադարձ ֆունկցիաների հասկացողությունը:

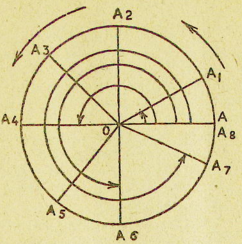
Անկյան, աղեղի և նրանց ֆունկցիաների վերաբերյալ ուսումնասիրությունը կազմում է մաթեմատիկայի այն մասը, վորը կոչվում է գոնիոմետրիա (հունարեն «գոնիա»—անկյուն և «մետրեյն»—չափել բառերից՝ կստանանք անկյունաչափություն):

§ 47. ԱՆԿՅՈՒՆԸ ՅԵՎ ԱՂԵՂԸ, ՎՈՐՊԵՍ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ: ԱՆԿՅԱՆ ՅԵՎ ԱՂԵՂԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ԳԱՂԱՓԱՐԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄԸ

Անկյունները և աղեղները մինչ այժմ զննվել են, վորպես անփոփոխ մեծություններ. անկյունը, վորպես անփոփոխ տարր վորևէ յերկրաչափական պատկերի (յեռանկյան, բազմանկյան և այլն), իսկ աղեղը, վորպես վորոշ սեկտորի կամ սեգմենտի աղեղ:

Այս պարագրաֆում անկյունը և նրա գագաթից արտագծած աղեղը կդիտենք, վորպես փոփոխական մեծություններ։

Պատկերացնենք մեզ OA հատվածը (գծ. 59), վորն ազատ պտտվում է O անշարժ ծայրի շուրջը։ Յեթե OA-ն պտտենք ժամացույցի սլաքին հակառակ ուղղությամբ, ապա նրա A ծայրը կարտագծի մի աղեղ և կընդունի նոր դիրք, վորը գծանկարի վրա նշանակված է A_1 տառով։ Այդ դիրքում հատվածն սկզբնական OA ուղղության հետ կկազմի վորևէ AOA_1 անկյուն։



գծ. 59

Յեթե շարունակենք պտտել OA հատվածը, անկյուն AOA_1-ը անընդհատ կաճի։ Դրա հետ միասին անընդհատ կաճի նաև AA_1 աղեղը, վորի շառավիղն է OA հատվածը։

Սկզբնական OA անշարժ և OA_1 շարժական շառավիղներով կազմված AOA_1 փոփոխական անկյունը կենտրոնական անկյուն է այն աղեղի նկատմամբ, վորն արտագծվում է շարժական շառավղի ծայրով։ Այդ պատճառով փոփոխական անկյունը և նրա համապատասխան փոփոխական աղեղն անկյան շարժական կողմի ամեն մի դիրքում չափվում են աստիճանների միևնույն թվով։

Յերբ անկյան շարժական կողմը կընդունի OA_2-ի դիրքն՝ ուղղահայաց նրա սկզբնական կողմին, ապա անկյունը և նրա համապատասխան աղեղը կհասնեն 90^0-ի։ Յեթե նորից շարունակենք պտտել անկյան շարժական կողմը, ապա թե՛ անկյունը և թե՛ աղեղն անընդհատ կշարունակեն աճել։ Յերբ անկյան շարժական կողմը կընդունի OA_4-ի դիրքը՝ հակառակ սկզբնականի նկատմամբ, ապա աղեղը կհասնի 180^0-ի։ Այդ մոմենտին շարժական և սկզբնական (անշարժ) կողմերի ուղղությունների տարբերությունը կարող է չափվել AOA_4 բացված անկյունով։ Վորովհետև այդ անկյան համապատասխան աղեղը պարունակում է 180 աղեղնային աստիճան, ապա AOA_4 անկյունը կպարունակի 180 անկյունային աստիճան, վոր և գրում ենք

$$\angle AOA_4 = 180^0$$

Յեթե անկյան շարժական կողմը դարձյալ շարունակենք պտտել ժամացույցի սլաքին հակառակ ուղղությամբ, ապա կստանանք 180^0-ից ավելի մեծ անկյուններ։ Յերբ անկյան շարժական կողմն ընդունի OA_6-ի դիրքը, ապա AA_6 աղեղը, ժամացույցի սլաքին հակառակ ուղղությամբ հաշված, կհասնի 270^0-ի, հետևապես

$$\angle AOA_6 = 270^0$$

Վե ճապես, յերբ անկյան շարժական կողմի ծայրը կգծի լրիվ շրջան և կվերադառնա իր սկզբնական դիրքին, ապա շարժական կողմով անցած ուղղությունների ամբողջ տարբերությունը կկազմի 360^0 և մենք կարող ենք ասել, վոր նրա OA_8 նոր դիրքն սկզբնական դիրքի հետ կկազմի

$$\angle AOA_8 = 360^0$$

Այժմ կարող ենք յերևակայել, վոր անկյան շարժական կողմը շարունակում է պտտվել նույն ուղղությամբ և գծում է իր ծայրով մի քանի շրջանագծեր։ Այդ դեպքում կարող ենք պատկերացնել 360^0-ից ավելի մեծ անկյուններ։ Օրինակ, յեթե ընդունենք 720^0-ի անկյուն, այդ նշանակում է, վոր ուղղությունը փոխվել է այնպես, վոր յերկու անգամ գծել է լրիվ շրջանագիծ։

Նույն ձևով իմաստ ունի խոսել 360^0-ից ավելի բարձր աղեղների մասին։

Այդպես ուրեմն անկյունների չափումը սերտ կապված է շրջանագծի հետ։ Այդ մասին արդեն խոսվել է յերկրաչափության այն բաժնում, վորտեղ ուսումնասիրվել են շրջանի մեջ ուղիղներով առաջացած անկյունների հատկությունները։

Մանրամասն ուսումնասիրելու համար կբաժանենք շրջանը **չորս քառորդների (կվադրանտների)** յերկու տրամագծերով, վորոնցից առաջինը (հորիզոնականը) կհամատեղվի անկյան սկզբնական կողմի հետ և կանցնի աղեղի սկզբակետով, իսկ յերկրորդը (ուղղաձիգը) կլինի ուղղահայաց առաջինին։ Հետագայում համառոտելու նպատակով ուղղակի կասենք շրջանի **«առաջին»** և **«յերկրորդ»** տրամագծերը։ Շրջանի AOA_2 սեկտորը կոչվում է **առաջին քառորդ**, A_2OA_4 սեկտորը—**յերկրորդ քառորդ**, A_4OA_6 սեկտորը—**յերրորդ** և A_6OA սեկտորը—**չորրորդ**:

Նախընթացում մենք անկյան շարժական կողմի պտտման ուղղությունն ընտրեցինք կամավոր։ Մենք կարող էյինք վերցնել պտտման հակառակ ուղղությունը։ Այդ դեպքում համաձայն մաթեմատիկայի մեջ ընդունված ընդհանուր սկզբունքի, պետք է անկյան շարժական կողմի պտտվելուց առաջացած անկյուններին և աղեղներին կցել + կամ — նշանները, վորպեսզի տարբերենք իրարից ժամացույցի սլաքի հակառակ և ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ պտտվելուց առաջացած անկյունները և աղեղները։ Դրական ուղղությունն ընտրվում է միանգամայն կամավոր։ Յերբ դրական ուղղությունն ընտրված է, ապա նրան հակառակ ուղղությունն ընդունվում է վորպես բացասական։

Պայմանավորվենք դրական համարել այն անկյունները և աղեղները, վորոնք առաջանում են շարժական կողմի պտտվելուց հակառակ ժամացույցի սլաքի ուղղության:

Պայմանավորվենք բացասական համարել այն անկյունները և աղեղները, վորոնք առաջանում են շարժական կողմի պտտվելուց ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ:

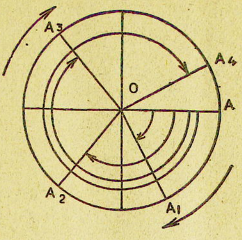
Գծանկար 60-ի վրա պատկերացրած են AA_1, AA_2, AA_3, AA_4 բացասական աղեղներ և նրանց համապատասխան AOA_1, AOA_2, AOA_3, AOA_4 բացասական անկյուններ։

Այդպես ուրեմն

1) Անկյան և աղեղի բացարձակ մեծությունը կարող է փոփոխվել 0^0-ից մինչև ∞։

2) Անկյունը կամ աղեղը կարելի յե գննել, վորպես ուղղություն ունեցող մեծություն։ Հակադիր անկյունները և աղեղներն իրարից տարբերելու համար, կարելի յե նրանց կցել + կամ — նշանը։

3) Վորպես դրական անկյունների և աղեղների ուղղություն, ընդունվում ե ժամացույցի սլաքին հակառակ պտտման ուղղությունը։



գծ. 60

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

322. Գտնել, շրջանագծի վո՞ր մասն են կազմում հետևյալ աղեղները. 1) 30°, 2) 45°, 3) 25°, 4) 72°, 5) 22° 30', 6) 108°, 7) 24', 8) 18", 9) 18° 45', 10) 2° 30", 11) 10' 40", 12) 36° 12' 18", 13) 48° 15' 36", 14) 24° 30' 30", 15) 72° 48' 20"։

323. Արտահայտել աստիճաններով, րոպեներով և վայրկյաններով շրջանագծի հետևյալ մասերը. 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{15}$; 4) $\frac{5}{24}$; 5) $\frac{7}{40}$; 6) $\frac{8}{25}$; 7) 0,1; 8) 0,15 9) 0,01; 10) 0,375; 11) 0,001; 12) 0,007; 13) $\frac{1}{81}$; 14) $\frac{1}{14}$; 15) $\frac{5}{11}$

324. Վորոշել, շրջանի վո՞ր քառորդումն են վերջանում հետևյալ աղեղները. 17°, 96°, 84°, 126°, 270°, 196°, 250°, 320°, 380°, 560°, 720°, 840°, 2200°, 5680°, — 25°, — 96°, — 300°, — 120°, — 200°, — 380°։

325. Վորոշել, շրջանի վո՞ր քառորդումն են վերջանում հետևյալ անկյունները. 80°, — 80°, 104, — 120°, 185°, 220°, 290°, —270°, — 212, — 175°, 320°, — 385°, — 1800°, 1280°, — 2100°, — 5600°։

326. Վորոշել այն անկյունը, վորը կազմում ե ժամացույցի րոպեացույց սլաքը հետևյալ ժամանակներում. 15 րոպ., 28 րոպ., 1 ժամ, 1 ժամ 15 րոպ, 2 ժամ, 12 ժամ, 24 ժամ։

327. Վորոշել այն անկյունը, վոր կազմում ե սովորական խցանահանի կոթը պտուտակելու ժամանակ՝ կատարելով $\frac{1}{4}$ պտույտ, $\frac{1}{2}$ պտույտ, $\frac{3}{4}$ պտույտ, $2\frac{1}{2}$, 5 պտույտ։

328. Վորոշել այն անկյունը, վորը կազմում ե սովորական գայլիկոնը պտուտակելու ժամանակ, կատարելով $\frac{1}{20}$ պտույտ, $\frac{1}{10}$ պտույտ, $\frac{1}{8}$ պտույտ, $1\frac{1}{2}$ պտույտ, 10 պտույտ։

329. Կազմել ընդհանուր արտահայտություններ 360°-ից փոքր դրական անկյունների և աղեղների համար, վորոնք վերջանում են շրջանի 2-րդ, 3-րդ և 4-րդ քառորդներում, նշանակելով առաջին քառորդի անկյունների բացարձակ արժեքները α-ով։

330. Կատարել նույնը բացասական անկյունների համար։

331. Ընդունելով, վոր ուղիղ անկյան մեծությունը հավասար ե d-ի, անկյան շարժական կողմի լրիվ պտույտների թիվը հավասար և n-ի ե ուղի-

ղից փոքր անկյունները հավասար են α-ի, կազմել ընդհանուր արտահայտությունները այն դրական և բացասական անկյունների և աղեղների համար, վորոնք վերջանում են շրջանի 1-ին, 2-րդ, 3-րդ և 4-րդ քառորդներում։

§ 48. ԱՂԵՂՆԵՐԻ ՅԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՌԱԴԻԱՆԱՅԻՆ ՉԱՓՈՒՄԸ

1. Աղեղների ռադիանային չափումը

Աղեղների մեծությունը սովորաբար չափվում է աղեղնային աստիճաններով, այսինքն այն շրջանագծի յերեք հարյուր վաթսուներորդական մասերով, վորի մասը կազմում է ինքն աղեղը։ Այսպես ուրեմն աղեղն արտահայտվում է նույն շառավղի ամբողջ շրջանագծի մասերով։

Գոնիոմետրիայի մեջ աստիճանային չափման հետ միասին գործածվում է նաև աղեղների չափման հետևյալ յեղանակը․ աղեղը չափվում է իր յերկարության և շառավղի հարաբերությամբ։ Ուրիշ խոսքով, վորպես աղեղի յերկարության միավոր, նրա չափման ժամանակ, ընդունվում է այդ աղեղի շառավիղը։ Հետևապես, աղեղը չափելու համար, բավական է վորոշել նրա յերկարության հարաբերությունը շառավղին և այդ հարաբերության մեծությունը վերցնել վորպես աղեղի թվային արտահայտությունը։

Օրինակ 1. Յենթադրենք ուղղած α աղեղի յերկարությունը պարունակում է 2 շառավիղ։ Այդ դեպքում $\alpha = 2$

Օրինակ 2. Յենթադրենք α աղեղի հարաբերությունը շառավղին հավասար է 0,5-ի։ Այդ դեպքում

$$\alpha = 0{,}5$$

Օրինակ 3. C շրջանագծի յերկարությունն արտահայտվում է հետևյալ ֆորմուլով

$$C = 2\pi R$$

վորտեղ R-ը—շառավիղն է։ Բայց վորովհետև ռադիանային չափումների ժամանակ շառավիղն ընդունվում է վորպես չափի միավոր, այսինքն $R = 1$ ապա․

$$C = 2\pi \sim 6{,}28$$

այսինքն շրջանագծի յերկարությունը պարունակում է 2π կամ $\sim 6{,}28$ շառավիղ, վորն ընդունված է վորպես չափի միավոր։

Օրինակ 4. Կիսաշրջանագիծը ռադիանային չափման դեպքում թվականորեն հավասար է π կամ ∞ 3,14 (ինչու)։

Խնդիր 1. Արտահայտենք ռադիանային չափով աղեղ $\alpha = 90^0$, $\beta = 270^0$;

$$1)\ \alpha = \frac{C}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad 2)\ \beta = \frac{3}{4} C = \frac{3}{4} . 2\pi = \frac{3}{2}\pi$$

Խնդիր 2. Արտահայտենք ռադիանային չափով n^0-ի աղեղը։ n^0-ի աղեղի յերկարությունը

$$\alpha = \frac{2\pi R n}{360}$$

ընդունելով, վոր $R = 1$, կստանանք

$$\alpha = \frac{2\pi n}{360}$$

կամ, կրճատելով 2-ի վրա, կստանանք

$$\alpha = \frac{\pi n}{180} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Սովորաբար (1) *ֆորմուլով ոգտվում են աղեղների աստիճանային չափումը ռադիանային չափման փոխադրելու համար։*

Որինակ 1. *Արտահայտենք ռադիանային չափով* $\smile 30^0$

$$\alpha = \frac{\pi . 30}{180} \doteq \frac{\pi}{6}$$

Ակներև է, վոր α-ի թվային արժեքը կարելի յե արտահայտել միայն վորևէ աստիճանի մոտավոր ճշտությամբ։ Ճշտությունը կախված է այն նշանների թվից, վորոնք պահվում են π թիվը հաշվելու դեպքում։ Որինակ, յեթե $\pi \backsim 3{,}14$ *ապա*

$$\alpha \backsim 0{,}52$$

Որինակ 2. *Արտահայտենք ռադիանային չափով* $\smile 150^0\ 30'$

$$\alpha = \frac{\pi . 150^0 30'}{180^0} = \frac{\pi . (150 . 60 + 30)}{180 . 60} = \frac{301}{360}\pi$$

Այստեղ աստիճանները նախորոք վերածեցինք րոպեների։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Գտնել հետևյալ աղեղների ռադիանային չափը։

332. 45^0, 60^0; 120^0; -270^0; 360^0

333. 30^0; 135^0; 15^0; 36^0; -180^0

334. 54^0; -75^0; -108^0; 162^0; -150^0

335. 72^0; $37^0\ 15'$; $280^0\ 24'$; $315^0\ 10'$

336. $22^0\ 30'$; $-67^0\ 30'$; $-13^0\ 30'$; $157^0\ 30'$

337. $20^0\ 10'\ 20''$; $-15^0\ 30'\ 12''$; $36^0\ 24'\ 30''$

Աղեղների ռադիանային *չափման յեղանակը հարմար է նրանով, վոր աղեղի թվային արտահայտությունը կախված չէ նրա շառավղի յերկարությունից։ Ունի՞ արդյոք այդ հարմարությունը ռադիանային չափման յեղանակը։*

Ինչպես յերևում է (1) *ֆորմուլի մեջ շառավիղ չի մտնում, այդ պատճառով շրջանագծի միևնույն մասը կազմող զանազան շառավիղների աղեղները ռադիանային չափման դեպքում պետք է արտահայտվեն միևնույն թվով։*

Խնդիր 3. *Այն աղեղը, վորի ռադիանային չափն է α-ն, արտահայտենք աստիճաններով։*

Յենթադրենք աղեղը պարունակում է x *աստիճան։ Այդ դեպքում* (1) *ֆորմուլի հիման վրա*

$$\alpha = \frac{\pi x}{180}$$

Լուծելով այդ հավասարումը x-*ի վերաբերյալ, կստանանք*

$$x = \frac{180 . \alpha}{\pi} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Այդ ֆորմուլով հաշվումներ կատարելու համար նկատենք, վոր բազմապատկիչ

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}31831 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

Օրինակ 1. *Արտահայտենք աստիճաններով աղեղ* $\alpha = \frac{\pi}{6}$

$$x = \frac{180^0 . \pi}{6\pi} = 30^0$$

Օրինակ 2. *Արտահայտենք աստիճաններով աղեղ* $\alpha = 1$

$$x = \frac{180^0 . 1}{\pi} \backsim 180^0 . 0{,}318 \backsim 57{,}240^0 \text{ կամ}$$

$$x = 180 . 3600'' . 0{,}31831 \sim 57^0 17' 44{,}8'' \ (0{,}05'' \text{ մ. ճ.})$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Արտահայտեք աստիճաններով, րոպեներով և վայրկյաններով այն աղեղները, վորոնց ռադիանային չափն է

338. $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{8}$

339. $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{15}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$

340. $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{4\pi}{15}$; $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{1}{4}$

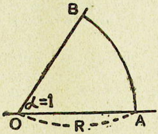
341. $1\frac{1}{2}$ $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{8}$; 5

342. 3,14; $\frac{3\pi}{8}$; $\frac{10}{9}$; 2

343. 3 ; 6,28; $\frac{8\pi}{15}$; 4

2. Անկյունների ռադիանային չափումը: Ռադիան

Անկյունների և աղեղների աստիճանային չափման դեպքում, աղեղն արտահայտվում է նույն թվով, ինչ թվով արտահայտվում է նրա վրա հենվող կենտրոնական անկյունը: Նույնպիսի համապատասխանության կարելի յե հասնել նաև աղեղների ռադիանային չափման ժամանակ:



գծ. 61

Դրա համար վորպես անկյունների միավոր ընդունենք այն անկյունը, վորը հենվում է չափի միավորին հավասար աղեղի վրա:

Ցենթադրենք ∠AOB *(գծ.* 61) *հենվում է* ⌣ AB-*ի վրա, վորը ռադիանային չափով հավասար է* 1-*ի: Ցեթե* ⌣ AB = 1, *ապա այդ աղեղի շառավիղը նշանակելով* R-*ով, կստանանք*

$$\frac{\smile AB}{R} = 1$$

$$\smile A = R \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$

(4) *հավասարությունից հետևում է, վոր յեթե անկյունների համար, վորպես չափի միավոր ընդունենք միավորին հավասար աղեղի վրա հենվող անկյունը, ապա այն* աղեղի յերկարությունը, *վորի վրա հենվում է անկյունը,* հավասար կլինի աղեղի շառավղին:

Այդպես ուրեմն, յեթե կամենում ենք, վոր կենտրոնական անկյունը և նրա համապատասխան աղեղն արտահայտվեն միևնույն թվով, ապա վորպես անկյունների չափի միավոր պետք է ընդունել այն անկյունը, վորի համապատասխան աղեղի յերկարությունը հավասար է շառավղին:

Այն անկյունը, վորի համապատասխան աղեղի յերկարությունը հավասար է շառավղի՝ կոչվում է ռադիան:

Մաթեմատիկայի տեսական հարցերում ռադիանն ընդունվում է որպես անկյունների չափման միավոր։

Մեկ ռադիանի հավասար անկյան համար աղեղը ռադիանային չափով արտահայտվում է միավորով։ Որովհետև կենտրոնական անկյունը համեմատական է իր համապատասխան աղեղին, ապա ռադիանային չափով արտահայտված աղեղը պարունակում է այնքան աղեղային ռադիանային միավորներ, որքան ռադիան է պարունակում այդ աղեղին հենվող անկյունը։

Հաշվենք ռադիանի մեծությունն աստիճանային չափով։

Ռադիանը պարունակում է այնքան աստիճան, որքան աստիճան պարունակում է շառավղին հավասար աղեղը։ Այդպիսի աղեղի ռադիանային չափը հավասար է միավորի։

Օգտվելով (3) ֆորմուլից, արտահայտենք այդ աղեղն աստիճաններով

$$x = 180^0 \cdot \frac{1}{\pi} \backsim 57^0 17' 44{,}8''$$

Հետևապես, նշանակելով ռադիանի մեծությունը ϱ*-ով, կստանանք*

$$\varrho \backsim 57^0 17' 44{,}8''$$

կամ

$$\varrho = 180^0 \cdot \frac{1}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

(5) *հավասարությունից յերևում է, որ* ռադիանի մեծությունը կախված չէ աղեղի շառավիղից:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Արտահայտեք ռադիաններով հետևյալ անկյունները, օգտվելով π *թվից*

344. 15^0; 30^0; 45^0; 60^0; 75^0; 90^0

345. 180^0; 135^0; 270^0; $22^0 30'$; $18'$; $18''$

Հաշվեցեք ռադիաններով 0,001 *մոտավոր ճշտությամբ հետևյալ անկյունները․*

346. 15^0; 30^0; 60^0; 90^0; 180^0

347. 75^0; 225^0; 300^0; $26^0 15'$; $127^0 30'$

8. Դիտողություն անկյան ռադիանային չափման մասին

Անկյունների աստիճանային չափման յերկար վարժություններից հետո կարող է տարօրինակ թվալ, որ որպես անկյունների չափման միավոր ընդունվում է մի անկյուն, որը չի կապված նախկին միավորի—անկյունային աստիճանի հետ պարզ քանորդական հարաբերությամբ։ Բացի դրանից կարող է անհնարին թվալ անկյունների մեծությունները բաղդատել մի անկյան հետ, որի աստիճանային չափը կարելի յե հաշվել միայն մոտավորապես, որովհետև հաշվելու ժամանակ հարկ է լինում օգտվել π *թվից։ Վերջապես, ռադիանին հավասար անկյունը չի կարելի կառուցել կարկինի և քանոնի օգնությամբ, որովհետև անհնարին է թե աղեղն ուղղելը և թե ուղղված հատվածը կորացնելը, այսինքն տվյալ շառավղով աղեղ դարձնելը։*

Այդ առարկությունների առթիվ նկատենք հետևյալը․

1) Ամեն տեսակի մեծությունների չափման համար միավորները կարելի յե ընտրել միանգամայն կամավոր․ այդ պատճառով, որպես անկյան միավոր, կարելի յե ընտրել ամեն մի անկյուն, որի մեծությունը կայուն է։ Այդ պայմանին ռադիանը բավարարում է։

2) Միևնույն մեծությունների համար ընդունված միավորների միջև, զանազան սիստեմի չափերի մեջ կարող է և պարզ քանորդական հարաբերություն չլինել, օրինակ, այդպիսի հարաբերություն գոյություն չունի մետրի և արշինի միջև, սակայն նրանցից յուրաքանչյուրը կարող է ծառայել վորպես յերկարության միավոր։ Հետևապես ռադիանն էլ կարող է ծառայել վորպես անկյունների միավոր, թեև նա աստիճանային չափով ճշտությամբ չի արտահայտվում։

3) Ռադիանը ճշտությամբ կառուցելու անհնարինությունը կարկնի և քանոնի օգնությամբ արգելք չի հանդիսանում գործածելու այն վորպես անկյան չափ տեսական հետախուզությունների ժամանակ։

4) Անկյունները և աղեղները ռադիանային չափով արտահայտող ֆորմուլները կազմված են պարզ ու հասկանալի և հնարավորություն են տալիս գործնական խնդիրներում հաշվումները կատարել ցանկացած աստիճանի մոտավոր ճշտությամբ։

Այդ պատճառով գոնիոմետրիայի մեջ աղեղների և անկյունների ռադիանային չափումն ավելի հաճախ է կիրառվում, քան նրանց աստիճանային չափումը։

Ներքևում բերված է ամենաշատ գործածական անկյունների և աղեղների աստիճանային չափը ռադիանայինի և հակառակը կատարելու փոխադրման աղյուսակը

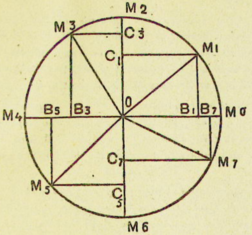
360^0	270^0	180^0	90^0	60^0	45^0	30^0	$22^030'$	18^0	15^0	10^0	1^0	$1'$	$1''$
2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{180.60}$	$\frac{\pi}{180.60.60}$

§ 49. ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ: ԱՆԿՅԱՆ ՅԵՎ ԱՂԵՂԻ ՍԻՆՈՒՍԸ ՅԵՎ ԿՈՍԻՆՈՒՍԸ

Յեռանկյունաչափության սկզբնական ծրագրի մեջ սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը վորոշվում էյին, վորպես ուղղանկյուն յեռանկյան կողմերի հարաբերություններ, միաժամանակ ապացուցելով, վոր այդ հարաբերությունները կախված են յեռանկյան միայն անկյուններից։

Հետևապես, սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը վորոշվում էյին վորպես ուղղանկյուն յեռանկյան անկյունների ֆունկցիաներ, այսինքն միայն սուր անկյունների ֆունկցիաներ։ Անկյան և աղեղի մասին ունեցած հասկացողության ընդլայնումից հետո, հնարավոր է սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը վորոշել վորպես ֆունկցիաներ ամեն տեսակի անկյունների և աղեղների համար, այն էլ անկախ յեռանկյունուց։ Միայն անհրաժեշտ է, վոր այդ ֆունկցիաների լայն հասկացողությունը չհակասի նախընթացում սահմանած ավելի նեղ հասկացողությանը։

Պատկերացրեք ձեզ մի շարժական շառավիղ, վորը պտտվում է O կետի շուրջը ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ։ Տանենք պտտման կենտրոնով յերկու փոխադարձ-ուղղահայաց ուղիղներ, վորոնց ընդունենք վորպես կոորդինատների առանցքներ (գծ. 62)։ Պտտվող շառավղի սկզբնական դիրքն ընդունենք աբսցիսների առանցքի դրական ուղղությունը։ Վերցնելով *աբսցիսների առանցքի վրա* $OM_0 = R$ *հատվածը, կստանանք պտտվող շառավիղն՝ իր սկզբնական դիրքում: Հետագայում շրջանի մեջ ուղիղներ չափելու համար վորպես միավոր կընդունենք* R *շառավիղը: Փոփոխական անկյան մեծությունը կնշանակենք φ-ով (հունարեն «ֆի» տառն է):*



գծ. 62

Դիտենք շարժական շառավիղը OM_1 *դիրքում: Իջեցնենք* M_1 *կետից ուղղահայացներ կոորդինատների առանցքներին. այդ դեպքում*

OM_1*-ի պրոյեկցիան որդինատների առանցքի վրա հավասար է* OC_1*-ին,*

OM_1*-ի պրոյեկցիան աբսցիսների առանցքի վրա հավասար է* OB_1*-ին:*

Այդ պրոյեկցիաները կոչվում են. առաջինը՝ սինուսի գիծ, *յերկրորդը՝* կոսինուսի գիծ (*յերբեմն նրանց անվանում են* յերկրաչափական սինուս յեվ յերկրաչափական կոսինուս):

Նկատենք, վոր $B_1M_1 = OC_1$ *և* $C_1M_1 = OB_1$, *այսինքն պտտվող շառավղի ծայրից աբսցիսների առանցքին իջեցրած ուղղահայացը հավասար է պտտվող շառավղի այն պրոյեկցիային, վորը գտնվում է որդինատների առանցքի վրա, իսկ պտտվող շառավղի ծայրից որդինատների առանցքին իջեցրած ուղղահայացը հավասար է պտտվող շառավղի այն պրոյեկցիային, վորը գտնվում է աբսցիսների առանցքի վրա:*

Այսպես ուրեմն, սինուսի գիծ կոչվում է շառավղի այն պրոյեկցիան, վորը գտնվում է որդինատների առանցքի վրա կամ նրան հավասար ուղղահայացը, վորն իջնում է շառավղի ծայրից աբսցիսների առանցքին. կոսինուսի գիծ կոչվում է շառավղի այն պրոյեկցիան, վորը գտնվում է աբսցիսների առանցքի վրա կամ նրան հավասար ուղղահայացը, վորն իջնում է շառավղի ծայրից որդինատների առանցքին:

Այդ անունները հասկանալի կդառնան, յեթե M_1OB_1 *անկյան սինուսը և կոսինուսը արտահայտենք* B_1OM_1 *ուղղանկյուն յեռանկյան միջոցով (գծ. 62)*

$$\sin \angle M_1OB_1 = \frac{M_1B_1}{OM_1} \text{ և } \cos \angle M_1OB_1 = \frac{OB_1}{OM_1}$$

Եթե, ըստ պայմանի, $OM_1 = R = 1$ *ապա*

$$\sin \angle M_0OM_1 = B_1M_1 \text{ և } \cos \angle M_0OM_1 = OB_1$$

այսինքն M_1OB_1 *անկյան սինուսը և կոսինուսը* թվականորեն հավասար են B_1M_1 *և* OB_1 *հատվածներին, վորոնց համար վորպես չափման միավոր ընդունված է շառավիղը։*

Պայմանավորվենք հետագայում սինուսի գծի հարաբերությունը շառավիղին անվանել անկյան սինուս, իսկ կոսինուսի գծի հարաբերությունը շառավիղին՝ անկյան կոսինուս, *վոր ինչպես տեսնում ենք, միանգամայն համապատասխանում է սինուսի և կոսինուսի սկզբնական սահմանումներին, վորպես ուղղանկյուն յեռանկյան անկյունների ֆունկցիաների։*

Վորովհետև սինուսի և կոսինուսի գծերը փոփոխվում են φ *անկյան փոփոխումից, ապա փոփոխվում են նաև նրանց հարաբերությունները շառավղին, և հետևապես, փոփոխվում են անկյան սինուսը և կոսինուսը։ Այդպես ուրեմն, լայն սահմանումով էլ* սինուսը յեվ կոսինուսը անկյան ֆունկցիաներ են:

Առաջին քառորդի սահմաններում φ *անկյան մեծանալու հետ մեծանում է նաև սինուսի գիծը, իսկ կոսինուսի գիծը փոքրանում է։ Այդ պատճառով* sin φ*-ին առաջին քառորդի սահմաններում աճում է, իսկ* cos φ*-ին՝ նվազում։*

Յերբ շարժական շառավիղը գտնվում է դեռ էս OM_0 *դիրքում, ապա* $\varphi = 0$*։ Այդ մոմենտին սինուսի գիծը հավասար է զերոյի, իսկ կոսինուսի գիծը հավասար է* R *շառավղին։*

Այդ պատճառով

$$\sin 0 = \frac{0}{R} = 0 \qquad \cos 0 = \frac{R}{R} = 1$$

Յերբ պտտվող շառավիղն ընդունի OM_2 *դիրքը, սինուսի գիծը կհավասարվի շառավղին, իսկ կոսինուսի գիծը կդառնա կետ։ Փոփոխական* φ *անկյունն այդ մոմենտին հասնում է* $\frac{\pi}{2}$ *արժեքի կամ* 90^0*-ի։*

Վորովհետև սինուսի և կոսինուսի սահմանումները վերաբերում են բոլոր անկյուններին, ապա մենք կարող ենք գրել, վոր

$$\sin\frac{\pi}{2} = \frac{R}{R} = 1 \quad \text{և} \quad \cos\frac{\pi}{2} = \frac{0}{R} = 0$$

Յեթե շարունակենք պտտել շարժական շառավիղը ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ, ապա φ *անկյունը կգերազանցի* $\frac{\pi}{2}$ *։ Անկյան սինուսի և կոսինուսի լայն սահմանումով կստանանք*

$$\sin \angle M_0OM_3 = \frac{M_3B_3}{R} \qquad \cos \angle M_0OM_3 = \frac{OB_3}{R}$$

Նկատենք, վոր M_3B_3 *հատվածն ունի* $+$ *նշանը, իսկ* OB_3 *հատվածն ունի* $-$ *նշանը, վորովհետև առաջինը գտնվում է աբսցիսների առանցքի վերևը, իսկ յերկրորդը՝ օրդինատների առանցքից դեպի ձախ։ Այդ պատճառով* sin $\angle M_0OM_3$*-ը՝ դրական է, իսկ* cos $\angle M_0OM_3$*-ը՝ բացասական։*

Յերբ շարժական շառավիղն ընդունի OM_4 *դիրքը, փոփոխական անկյունը կհասնի* π*-ի արժեքին, կոսինուսի գիծը կհավասարվի շառավղին և* կլինի բացասական, իսկ սինուսի գիծը կդառնա M_4 կետը, վորովհետև նրա յերկարությունը կհասնի զերոյի։ Այդ պատճառով

$$\sin \pi = 0 \qquad \cos \pi = -1$$

Այսպես ուրեմն, յերկրորդ քառորդի սահմաններում φ անկյան մեծանալու դեպքում $\sin \varphi$ նվազում է $+1$-ից մինչև 0, մնալով միշտ դրական, իսկ $\cos \varphi$ նվազում է 0-ից մինչև -1, մնալով միշտ բացասական։

Շրջանի յերրորդ քառորդում վերջացող անկյունների համար, որինակ, M_0OM_5 անկյան համար կստանանք

$$\sin \angle M_0OM_5 = \frac{B_5M_5}{R}$$

$$\cos \angle M_0OM_5 = \frac{OB_5}{R}$$

Կոորդինատների առանցքների վրա վերցրած հատվածների նշանները վորոշելու սկզբունքի համաձայն OB_5 և B_5M_5 հատվածներն ունեն—նշան. հետևապես, յերրորդ քառորդի անկյունների սինուսը և կոսինուսը բացասական են։

Յերբ շարժական շառավիղը կընդունի OM_6 դիրքը, փոփոխական φ անկյունը կստանա $\frac{3\pi}{2}$ արժեքը, սինուսի գիծը հավասար կլինի $-R$-ի, իսկ կոսինուսի գիծը կդառնա կետ և մենք կստանանք

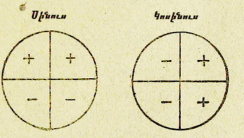
$$\sin \frac{3\pi}{2} = \frac{-R}{R} = -1 \qquad \cos \frac{3\pi}{2} = \frac{0}{R} = 0$$

Այսպես ուրեմն, յերրորդ քառորդի սահմաններում φ անկյան մեծանալու դեպքում $\sin \varphi$ նվազում է 0-ից մինչև -1, իսկ $\cos \varphi$ աճում է -1-ից մինչև 0, դրա հետ միասին յերկու ֆունկցիաներն էլ մնում են միշտ բացասական։

Չորրորդ քառորդում անկյունների սինուսը և կոսինուսն արտահայտելով ըստ սահմանումի և ի նկատ առնելով սինուսի և կոսինուսի գծերի նշանները, սինուսի համար կստանանք բացասական արժեք, իսկ կոսինուսի համար՝ դրական։ Յերբ շարժական շառավիղը կընդունի իր նախկին OM_0 դիրքը, փոփոխական անկյունը կհասնի $2\pi_1$ մեծության, սինուսի գիծը կդառնա 0, իսկ կոսինուսի գիծը՝ $+1$։ Հետևապես

$$\sin 2\pi = 0 \qquad \cos 2\pi = 1$$

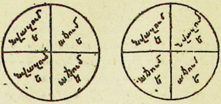
Այդպես ուրեմն, չորրորդ քառորդի սահմաններում $\sin \varphi$ աճում է -1-ից մինչև 0, մնալով միշտ բացասական, $\cos \varphi$ աճում է 0-ից մինչև $+1$, մնալով միշտ դրական։



գծ. 63

Հետևյալ դիագրամները պատկերացնում են $\sin\varphi$ և $\cos\varphi$ փոփոխման առանձնահատկությունները. գծանկար 63-ում պատկերացրած է $\sin \varphi$ և $\cos \varphi$ նշանը շըրչանի յուրաքանչյուր քառորդում։ Գծանկար 64-ը ցույց է տալիս sin φ և cos φ փոփոխման բնույթը շրջանի յուրաքանչյուր քառորդում։

Սինուս Կոսինուս



գծ. 64

Աշխատեցեք հիշել մի քանի անկյունների համար sin φ և cos φ արժեքները։ Այդ արժեքները տրվում են հետևյալ աղյուսակում

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin φ	0	$+1$	0	-1	0
cos φ	$+1$	0	-1	0	$+1$

Հարցեր: 1. Կարող են արդյոք անկյան սինուսը և կոսինուսն արտահայտվել միավորից ավելի մեծ ամբողջ թվով կամ անկանոն կոտորակով։

2. Արգումենտի ինչպիսի արժեքների դեպքում սինուսը և կոսինուսը հասնում են մաքսիմումին։

3. Արգումենտի ինչպիսի արժեքների դեպքում սինուսը և կոսինուսը հասնում են մինիմումին։

Վորովհետև անկյունները և նրանց համապատասխան աղեղները թե ռադիանային և թե աստիճանային չափով արտահայտվում են միատեսակ թվերով, ապա շրջանի աղեղը կարելի յե դիտել վորպես արգումենտ վերը քննած ֆունկցիաների համար։ Այդ դեպքում պետք է սինուսի և կոսինուսի գծերի և սինուսի ու կոսինուսի ֆունկցիաների սահմանումների մեջ «անկյուն» բառը փոխարինել «աղեղ» բառով։

Որինակ

«Սինուսի գիծ կոչվում է աղեղի պրոյեկցիան որդինատների առանցքի վրա կամ այդ պրոյեկցիային հավասար ուղղահայացը, վորն իջնում է աղեղի ծայրից աբսցիսների առանցքի վրա»։

«Աղեղի սինուս կոչվում է սինուսի գծի հարաբերությունն աղեղի շառավղին»։

Նույնը և կոսինուսի համար։

Այդ պատճառով սինուս, կոսինուս նաև տանգենս և կոտանգենս ֆունկցիաները գոնիոմետրիայի մեջ կոչվում են շրջանային ֆունկցիաներ։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Վորոշեցեք յերկրաչափական դատողությամբ սինուսի և կոսինուսի արժեքները հետևյալ անկյունների համար

348. $30^\circ;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{6};\ 120^\circ;\ 135^\circ$

349. $\frac{\pi_1}{3};\ 210^\circ;\ 240^\circ;\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{8}$

350. $60^\circ;\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{4\pi}{3};\ 45^\circ;\ 150^\circ$

Պարզ ձև տալ հետևյալ արտահայտություններին՝ փոխարինելով նրանց մեջ մտնող շրջանային ֆունկցիաները համապատասխան թվային արժեքներով.

351. $\sin 30^\circ + \cos 0 - \sin 90^\circ$

352. $\sin\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{6} - \cos^2\frac{\pi}{6}$

353. $a \cdot \cos 0 + b \cdot \cos 180 + c \cdot \cos 360$

354. $x \cdot \sin\pi - y \cdot \cos\pi$

355. $a \cdot \sin\frac{\pi}{2} - b \cdot \cos 0$

356. $\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4}$

357. $\cos^2\frac{\pi}{2} - \sin^2\frac{3\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3}$

358. $a^2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} + 2ab \cdot \cos\pi - b^2 \cdot \sin\frac{3\pi}{2}$

359. $\sin^2\frac{\pi}{3} - \cos^2\frac{7}{4}\pi_1 - \sin^2\frac{2\pi}{3}$

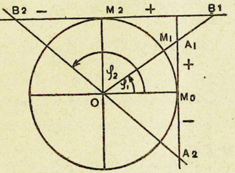
360. $a^2 \cdot \sin\frac{3\pi}{2} + 2ab \cdot \cos 0 - b^2 \sin\frac{\pi}{2}$

361. $\dfrac{\sin^2\pi - \cos^2\pi}{\sin^2\frac{\pi}{6} - \cos^2\frac{\pi}{6}}$

362. $\dfrac{a^2 \cdot \sin^2\frac{\pi}{2} + 2ab \cdot \cos 0 - b^2 \cdot \cos\pi}{a + b}$

§ 50. ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ. ԱՆԿՅԱՆ ՅԵՎ ԱՂԵՂԻ ՏԱՆԳԵՆՍԸ ՅԵՎ ԿՈՏԱՆԳԵՆՍԸ

Յենթադրենք շարժական շառավիղն ընդունել է OM_1 *դիրքը (գծ. 65)։ Տանենք շոշափողներ շրջանին* M_0 *և* M_2 *կետերով։ Անվանենք դրանց* առաջին և յերկրորդ *շոշափող։ Առաջին շոշափողը զուգահեռ է որդինատների առանցքին, իսկ յերկրորդ շոշափողը զուգահեռ է աբսցիսների առանցքին։ Շարունակելով շարժական շառավիղը մինչև այդ յերկու շոշափողների հետ հատվելը, շոշափողների վրա կստանանք* M_0A_1 *և* M_2B_1 *հատվածները։*



գծ. 65

Առաջին շոշափողի M_0A_1 հատվածն աբսցիսների առանցքից մինչև շարժական շառավղի շարունակության հետ հատվելը կոչվում է տանգենսի գիծ:

Յերկրորդ շոշափողի M_2B_1 հատվածն որդինատների առանցքից մինչև շարժական շառավղի շարունակության հետ հատվելը կոչվում է կոտանգենսի գիծ:

Պայմանավորվենք հետագայում տանգենսի գծի հարաբերությունը շառավղին անվանել անկյան տանգենս, իսկ կոտանգենսի գծի հարաբերությունը շառավղին՝ անկյան կոտանգենս:

Ապացուցենք, վոր այդ սահմանումները չեն հակասում տանգենսի և կոտանգենսի համար անցյալում տված սահմանումներին, վորպես ուղղանկյուն յեռանկյան եջերի հարաբերություններ։

Ըստ նոր սահմանումի

$$\operatorname{tg}\angle M_0OM_1 = \frac{M_0A_1}{R}$$

Իսկ M_0OA_1 ուղղանկյուն յեռանկյունուց կստանանք

$$\operatorname{tg}\angle M_0OA_1 = \frac{M_0A_1}{M_0O} = \frac{M_0A_1}{R}$$

Այսպես ուրեմն, անկյան տանգենսը յերկու սահմանումներից էլ միևնույն անկյան համար ստացվում է միատեսակ։ Սակայն յերկրորդ սահմանումն ավելի լայն իմաստ ունի. նա տարածվում է վոչ միայն սուր անկյունների, այլ և ամեն մի մեծության անկյունների վրա։

Ապացուցենք նույնը և կոտանգենսի համար։

Ըստ նոր վորոշման

$$\operatorname{ctg}\angle M_0OM_1 = \frac{M_2B_1}{R}$$

Իսկ M_2OB_1 ուղղանկյուն յեռանկյունուց կստանանք

$$\operatorname{ctg}\angle OB_1M_2 = \frac{M_2B_1}{R}$$

Բայց $\angle OB_1M_2 = \angle M_0OM_1$ (ինչու), հետևապես

$$\operatorname{ctg}\angle M_0OM_1 = \frac{M_2B_1}{R}$$

Յերկու սահմանումներից էլ $\operatorname{ctg}\angle M_0OM_1$-ի մեծությունն ստացվեց նույնը։ Հետևապես, սահմանումներն իրար չեն հակասում, միայն յերկրորդ սահմանումն ավելի լայն իմաստ ունի։

Հետազոտենք $\operatorname{tg}\varphi$ և $\operatorname{ctg}\varphi$ փոփոխումն, յերբ փոփոխվում է φ-ը 0-ից մինչև 2π։

Առաջին քառորդ. — Յերբ φ-ը մեծանում է 0-ից մինչև $\frac{\pi}{2}$, տանգենսի գիծն աճում է և գնում դեպի անվերջություն, յերբ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, դրա հետ միասին նրա նշանը միշտ մնում է դրական։ Յերբ φ-ը մեծանում է 0-ից մինչև $\frac{\pi}{2}$, կոտանգենսի գիծը նվազում է ∞-ից մինչև 0, սրա նշանը ևս մնում է դրական։

Հետևապես, առաջին քառորդի սահմաններում, $\operatorname{tg}\varphi$ անընդհատ աճում է 0-ից մինչև $+\infty$, իսկ $\operatorname{ctg}\varphi$ նվազում է $+\infty$-ից մինչև 0։

Առաջին քառորդից յերկրորդին անցնելը.—Ինչպես յերևում է 65-րդ գծանկարից, յերբ φ անկյունն անցնում է շրջանի յերկրորդ քառորդը, տանգենսի գիծն ստանում է բացասական արժեք։ Յերբ φ անկյան արժեքն անվերջ մոտ է $\frac{\pi}{2}$-ին, բայց մեծ է, քան $\frac{\pi}{2}$, տանգենսի գիծն անվերջ մեծ է, իսկ նրա նշանը բացասական է։ Կոտանգենսի գիծն սկսում է աճել, սակայն ստանում է բացասական արժեք։

Հետևապես, յերբ φ անկյունն անցնում է $\varphi = \frac{\pi}{2}$ արժեքը $\operatorname{tg}\varphi$-ի համար անցման շարունակությունն ընդհատվում է և ֆունկցիայի նշանը դրականից (+) փոխվում է բացասականի (—), իսկ նրա բացարձակ մեծությունը մնում է անվերջ մեծ։

Երկրորդ քառորդ.—*Տանգենսի գիծը փոքրանում է, մնալով միշտ բացասական և $\varphi = \pi$ դեպքում դառնում է 0։*

Կոտանգենսի գիծը մեծանում է, մնալով միշտ բացասական և հասնում է —∞, յերբ $\varphi=\pi$

Հետևապես, $\operatorname{tg}\varphi$ *մեծանում է* —∞-*ից մինչև* 0, *իսկ* $\operatorname{ctg}\varphi$ *փոքրանում է* 0-*ից մինչև* —∞

Առաջադրություն.—*Ինչպես վերը հետազոտեցինք* $\operatorname{tg}\varphi$ *և* $\operatorname{ctg}\varphi$ *առաջին և յերկրորդ քառորդներում, նույն ձևով հետազոտեցեք* $\operatorname{tg}\varphi$ *և* $\operatorname{ctg}\varphi$ *փոփոխումն յերրորդ և չորրորդ քառորդներում։ Առանձին ուշադրություն դարձրեք յերկրորդ քառորդից յերրորդին, յերրորդից չորրորդին և չորրորդից առաջինին անցնելու մոմենտների վրա։*

Հետազոտման հետևանքը պատկերացրեք դիագրամների ձևով, ինչպես այդ ցույց է տրված և գծանկարներում։

Աշխատեցեք հիշել մի քանի անկյունների համար $\operatorname{tg}\varphi$ *և* $\operatorname{ctg}\varphi$ *արժեքները։ Այդ արժեքները տրվում են հետևյալ աղյուսակում*

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\operatorname{tg}\varphi$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
$\operatorname{ctg}\varphi$	$+\infty$	0	$\pm\infty$	0	$-\infty$

Հարցեր։ 1. *Ի՞նչպիսի թվային արժեքներ կարող են ընդունել տանգենսը և կոտանգենսը։*

2. *Արգումենտի ի՞նչպիսի արժեքների դեպքում* $\operatorname{tg}\varphi$ *և* $\operatorname{ctg}\varphi$ *հասնում են մաքսիմումին։*

3. *Արգումենտի ի՞նչպիսի արժեքների դեպքում* $\operatorname{tg}\varphi$ *և* $\operatorname{ctg}\varphi$ *հասնում են մինիմումին։*

4. *Ի՞նչպիսի արժեքների դեպքում է ընդհատվում* $\operatorname{tg}\varphi$ *և* $\operatorname{ctg}\varphi$ *փոփոխման անընդհատությունը։*

5. *Ունե՞ն արդյոք անընդհատության ընդհատում* $\sin\varphi$ *և* $\cos\varphi$ *ֆունկցիաները։*

6. *Ի՞նչպես ձևակերպել «ֆունկցիայի փոփոխման մեջ անընդհատության ընդհատում» հասկացողությունը։*

Վորովհետև անկյունները և նրանց համապատասխան աղեղները թե ռադիանային և թե աստիճանային չափով արտահայտվում են միատեսակ թվերով, ապա վերը գննած անկյան ֆունկցիաները *կարելի յե դիտել նաև* վորպես աղեղի ֆունկցիաներ. *այդ դեպքում շրջանային ֆունկցիաների վորոշումների մեջ հարկավոր է միայն «անկյուն» բառը փոխարինել «աղեղ» բառով։*

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Վորոշեցեք յերկրաչափական դատողությամբ $\operatorname{tg}\varphi$ *և* $\operatorname{ctg}\varphi$ *արժեքները հետևյալ արգումենտների համար*

363. $80^{\circ};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{6};\ 120^{\circ};\ 135^{\circ}$

364. $\frac{\pi}{3};\ 210^{\circ};\ 240^{\circ};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{8}$

365. $60^{\circ};\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{4\pi}{3};\ 45^{\circ};\ 150$

Պարզ ձև տալ հետևյալ արտահայտություններին՝ փոխարինելով նրանց մեջ մտնող շրջանային ֆունկցիաները համապատասխան թվային արժեքներով։

366. $\mathrm{tg}\ 45^{\circ}+\mathrm{ctg}\ 45^{\circ}$

367. $\mathrm{tg}\ 135^{\circ}-\mathrm{ctg}\ 45^{\circ}$

368. $\sin\frac{\pi}{2}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$

369. $\cos\frac{\pi}{2}-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}$

370. $a\cdot\mathrm{tg}\frac{3\pi}{4}-b\cdot\cos\pi$

371. $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}$

372. $\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{6}-\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{3}$

373. $\mathrm{tg}^2\frac{5\pi}{4}-\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{4}$

374. $a\cdot\sin 0+b\cdot\cos 90^{\circ}+c\cdot\mathrm{tg}\ 180^{\circ}$

375. $a^3\cdot\mathrm{ctg}\ 270^{\circ}+b^3\cdot\mathrm{ctg}\ 90^{\circ}$

376. $a^2\cdot\sin 2\pi+2ab\cdot\cos\frac{3}{2}\pi+b^2\cdot\mathrm{tg}2\pi$

377. $a^2\cdot\sin 90^2-2ab\cdot\cos 0-b^2\cdot\sin 270^{\circ}$

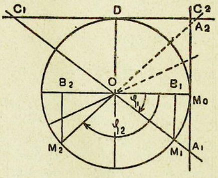
378. $\mathrm{tg}^2\pi-\dfrac{\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{2}}{\cos\pi}$

379. $\dfrac{a^2\cdot\mathrm{tg}^2-2ab\cdot\mathrm{tg}\frac{3\pi}{4}+b^2\cdot\mathrm{ctg}^2 45^{\circ}}{a+b}$

§ 51. ԲԱՑԱՍԱԿԱՆ ԱՐԳՈՒՄԵՆՏԻ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ

Նախորդ 49 և 50 պարագրաֆներում հետազոտեցինք դրական անկյունների և աղեղների չորս ֆունկցիաները։ Նրանց տված վորոշումը կարելի յե տարածել նաև արգումենտի բացասական արժեքների վրա։

Յենթադրենք, վոր մեզ տված ե վորևե բացասական արգումենտ։ Նշանակենք նրա բացարձակ մեծությունը φ-ով։ Այդ արգումենտի արժեքը, յերբ շարժական շառավիղն ընդունում ե OM_1 դիրքը (գծ. 66), նշանակենք φ_1-ով, իսկ նրա արժեքը, յերբ շառավիղն ընդունում ե OM_2 դիրքը, նշանակենք φ_2-ով։



գծ. 66

Այդ դեպքում, ըստ սահմանման, կստանանք

$$\sin\varphi_1=\frac{B_1M_1}{R}\qquad \cos\varphi_1=\frac{OB_1}{R}$$

$$\mathrm{tg}\varphi_1=\frac{M_0A_1}{R}\qquad \mathrm{ctg}\varphi_1=\frac{DC_1}{R}$$

Վորովհետև, համաձայն Դեկարտի որենքի, սինուսի, տանգենսի և կոտանգենսի գծերը—φ_1 արգումենտի արժեքի համար ունեն—նշանը, ապա հետևեցնում ենք, վոր—φ_1 արգումենտի համար համապատասխան շրջանային *ֆունկցիաները ևս բացասական են։ Վորովհետև—φ_1-ի համար կոսինուսի գիծը դրական է, ապա և* cos $(-\varphi_1)$ *դրական է։*

Արգումենտ φ_2-ի արժեքի համար.

$$\sin\varphi_2=\frac{B_2M_2}{R}\qquad \cos\varphi_2=\frac{OB_2}{R}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{M_0A_2}{R}\qquad \operatorname{ctg}\varphi_2=\frac{DC_2}{R}$$

Նկատի ունենալով գծերի նշանները, հետևցնում ենք, վոր $\sin(-\varphi_2)$ *և* $\cos(-\varphi_2)$ *բացասական են, իսկ* $\operatorname{tg}(-\varphi_2)$ *և* $\operatorname{ctg}(-\varphi_2)$ *դրական։ Նույն ձևով գծանկարից կարելի յե կազմել բոլոր չորս ֆունկցիաների արտահայտությունները յերկրորդ և յերրորդ քառորդների համար։*

Առաջադրություն: *Ինքնուրույն հետազոտեք բացասական արգումենտի ֆունկցիաների փոփոխման բոլոր չորս քառորդների համար։ Հետազոտման հետևանքով.*

1) Կազմեցեք նշանների դիագրամները,

2) Կազմեցեք ֆունկցիաների փոփոխման բնույթի դիագրամները բոլոր չորս քառորդների համար,

3) Կազմեցեք ֆունկցիաների արժեքների աղյուսակը հետևյալ արգումենտի արժեքների համար.

$$0,\ -\frac{\pi}{2},\ -\pi,\ -\frac{3}{2}\pi \text{ և } -2\pi$$

Դիտողություն: *Ուշադրություն դարձրեք, վոր բացասական մեծության բացարձակ արժեքի մեծանալու դեպքում, ինքը մեծությունը նվազում է։*

Բացասական արգումենտի և նույն իսկ դրական արգումենտի ֆունկցիաների միջև գոյություն ունի պարզ կախում։

Սինուսների համար *գծանկար 67-ից յերևում է, վոր*

$$\sin(-\varphi)=\frac{BA_1}{R} \text{ բայց } BA_1=-BA$$

հետևապես

$$\sin(-\varphi)=\frac{-BA}{R}=-\left(\frac{BA}{R}\right)=-\sin\varphi$$

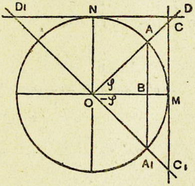
այսինքն

$$\sin(-\varphi)=-\sin\varphi \quad . . . \quad (1)$$

Կոսինուսների համար

$$\cos(-\varphi)=\frac{OB}{R} \text{ և } \cos\varphi=\frac{OB}{R}$$

հետևապես



գծ. 67

$$\cos(-\varphi)=\cos\varphi \quad . . . . \quad (2)$$

Տանգենսների համար

$$\operatorname{tg}(-\varphi)=\frac{MC_1}{R} \text{ բայց } MC_1=-MC$$

հետևապես

$$\operatorname{tg}(-\varphi)=\frac{-MC}{R}=-\left(\frac{MC}{R}\right)=-\operatorname{tg}\varphi$$

այսինքն

$$\operatorname{tg}(-\varphi) = -\operatorname{tg}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Կոտանգենսների համար

$$\operatorname{ctg}(-\varphi) = \frac{ND_1}{R} \quad \textit{բայց} \quad ND_1 = -ND$$

հետևապես

$$\operatorname{ctg}(-\varphi) = \frac{-ND}{R} = -\left(\frac{ND}{R}\right) = -\operatorname{ctg}\varphi$$

այսինքն

$$\operatorname{ctg}(-\varphi) = -\operatorname{ctg}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Այսպես ուրեմն, բացասական արգումենտի ֆունկցիան կարելի յե փոխարինել միատեսակ բացարձակ մեծության դրական արգումենտի նույնպիսի ֆունկցիայով. այդ դեպքում կոսինուսը պահում ե իր նշանը, իսկ սինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը փոխում են նշանը:

Գործնական ձևափոխումների նպատակով այդ յեզրակացությունը կարելի յե ձևակերպել հետևյալ պայմանական կանոնի *ձևով:*

Բացասական արգումենտի կոսինուսի դեպքում արգումենտի առաջի մինուս նշանը կարելի յե դեն գցել, իսկ սինուսի, տանգենսի յեվ կոտանգենսի դեպքում կարելի յե հանել այն յեվ դնել ֆունկցիայի նշանի առաջ (*այսինքն դնել նրան* sin, tg, ctg *անունների առաջ*):

Բացասական արգումենտի ֆունկցիայի արտահայտությունը դրական արգումենտի ֆունկցիայի միջոցով կոչվում ե ֆունկցիան բերել դրական արգումենտի:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Գրեցեք շրջանային չորս ֆունկցիաների արժեքներն արգումենտի հետևյալ արժեքների համար

380. $-30^0; -60^0; -90^0; -\pi$ **381.** $-\frac{3}{2}\pi; -2\pi; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}$

382. $-180^0; -\frac{\pi}{3}; -360^0; 45^0$ **383.** $-\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}; -270^0; 135^0$

Բերեք դրական արգումենտի հետևյալ ֆունկցիաները

384. $\sin -50^0, \cos -60^0; \operatorname{tg} -27^0$ **385.** $\cos -\frac{\pi}{8}; \operatorname{tg} -\frac{\pi}{6}; \mathrm{ct} -\frac{\pi}{4}$

386. $\operatorname{tg} -\frac{\pi}{3}; \operatorname{ctg} -\frac{3\pi}{2}; \sin -\frac{\pi}{6}$ **387.** $\sin -45^0; \cos -135^0 \operatorname{ctg} -270^0$

§ 52. *2π-ԻՑ ՄԵԾ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՅԵՎ ԱՂԵՂՆԵՐԻ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ: ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ*

Յերբ արգումենտը, անկյունը կամ աղեղը դրանցից վորն էլ ուզում ե լինի, այդ միևնույն ե, մեծանում և անցնում են 2π-ից, այդ դեպքում սինուսի, կոսինուսի, տանգենսի և կոտանգենսի գծերն անցնում են արժեքների նույն անընդհատ շարքը, վորը նրանք անցել են արգումենտի 0-ից մինչև 2π մեծանալու դեպքում, վորովհետև շարժական շառավիղը կրկին գրավում ե իր նախկին դիրքերը: Այսպես, որինակ, յերբ անկյունը կամ աղեղը հասնում *են 2π արժեքին, փոփոխական արգումենտի սինուսն ստանում է 0 արժեքը, վորը նա ուներ արդեն արգումենտի 0 արժեքի դեպքում.* $\sin 450^0 = 1$, *ինչպես և* $\sin 90^0 = 1$; $\sin 390^0 = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$

Եթե ֆունկցիայի արժեքները կրկնվում են արգումենտի արժեքի հավասար միջարածությունների դեպքում, ապա ֆունկցիան կոչվում է պարբերական:

Ցեթե մենք դիտելու լինենք շրջանային ֆունկցիաների փոփոխումները, ապա կտեսնենք, վոր սինուսը և կոսինուսը կրկնվում են արգումենտի 2π-ով կամ 360^0-ով փոփոխվելու դեպքում, իսկ տանգենսը և կոտանգենսը կրկնվում են արգումենտի π-ով կամ 180^0-ով փոփոխվելու դեպքում։

Հետևապես, շրջանային ֆունկցիաները պարբերական ֆունկցիաներ են:

Արգումենտի ամենափոքր հավելումը, վորի դեպքում ֆունկցիան վերադառնում է նախկին արժեքին, կոչվում է ֆունկցիայի պարբերություն:

Վորովհետև սինուսը և կոսինուսը վերադառնում են նախկին արժեքին արգումենտի 2π-ով փոփոխվելու դեպքում, իսկ տանգենսը և կոտանգենսը —π-ով, ապա

$\sin \varphi$ *և* $\cos \varphi$ *պարբերվությունը հավասար է* 2π (*կամ* 360^0)

$\operatorname{tg} \varphi$ *և* $\operatorname{ctg} \varphi$ *պարբերությունը հավասար է* π (*կամ* 180^0)

Շրջանային ֆունկցիաների այդ հատկությունը կարելի յե արտահայտել հետևյալ հավասարություններով

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$$
$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg} \alpha$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg} \alpha$$

վորտեղ k-ն վորևե դրական կամ բացասական ամբողջ թիվ է։

Այդ հավասարությունները ցույց են տալիս, վոր արգումենտին մի վորևե թվով ամբողջ շրջանագծեր գումարելու կամ նրանից հանելու դեպքում սինուսը և կոսինուսը չեն փոխվում։

Նույնպես չեն փոխվում տանգենսը և կոտանգենսը, յեթե գումարենք կամ հանենք արգումենտից վորևե թվով ամբողջ կիսաշրջանագծեր։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ոգտվելով պարբերականության հատկություններից, վորոշեցեք հետևյալ ֆունկցիաների արժեքները

388. $\sin 390^0$; $\cos 450^0$; $\operatorname{tg} 225^0$

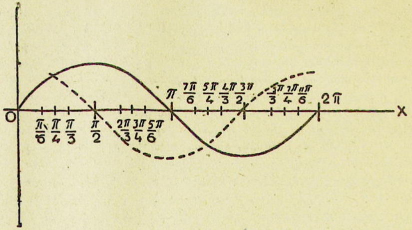
389. $\operatorname{ctg} 405^0$; $\sin 1110^0$; $\sin\frac{10\pi}{3}$

390. $\cos\frac{19\pi}{3}$; $\operatorname{tg} 4\pi$; $\sin 8\pi$

391. $\operatorname{tg} 585^0$; $\cos\frac{9\pi}{2}$; $\operatorname{ctg} 945^0$

§ 53. ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԳՐԱՖԻԿՆԵՐԸ

Պատկերացնենք շրջանային ֆունկցիաների փոփոխումը գրաֆիկորեն։ Գծանկար 68-ի վրա $y = \sin x$ *ֆունկցիայի արգումենտի արժեքները,*



գծ. 68

որոնք արտահայտված են ռադիանային չափով, նշանակում ենք աբսցիսների առանցքի վրա որևէ մասշտաբով։ Նույն մասշտաբով նշանակում ենք ֆունկցիայի արժեքներն օրդինատների առանցքի վրա։ Արգումենտի բացասական արժեքները նշանակում են աբսցիսների առանցքից դեպի ձախ։

Գծանկարի վրա ավելի յերկար գծիկներով նշանակված են $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ *և այլն արժեքները։ Ինչպես յերևում է գծանկարից ֆունկցիայի արժեքները չեն գերազանցում ընտրված միավորին և բացասական միավորից փոքր չեն լինում։ Առանձին կետերը, որոնք պատկերացնում են* $y = \sin x$ *ֆունկցիայի առանձին արժեքները, միացրած են անընդհատ գծով, որը կոչվում է սինուսոիդ և զննականորեն պատկերացնում է* y*-ի կախումն* x*-ից։ Գծանկար 68-ից յերևում է, որ ֆունկցիայի մաքսիմումը հավասար է* $+1$*, իսկ մինիմումը՝* -1*։ Յերևում է նաև, որ արգումենտի* 2π*-ով փոփոխման դեպքում ֆունկցիան ընդունում է նախկին արժեքը, այսինքն, որ ֆունկցիայի պարբերությունը հավասար է* 2π

Նույն առանցքների վրա կետային կորի ձևով կառուցված է հետևյալ ֆունկցիայի գրաֆիկը

$$y' = \cos x$$

Ինչպես յերևում է կոսինուսի գրաֆիկը պատկերացնում է իրենից նույն սինուսոիդը, միայն $\frac{\pi}{2}$*-ի չափով հրված դեպի ձախ աբսցիսների առանցքով։*

Ցույց տանք սինուսոիդի կառուցման համար մի գործնական յեղանակ, որը հաճախ կիրառվում է էլեկտրոտեխնիկական հետազոտումների ժամանակ։ Աբսցիսների առանցքի ուղղությամբ նշանակում են շրջանագծի յերկարությունը մեկ կամ մի քանի անգամ։ Շրջանագիծը բաժանում են հավասար մասերի, օրինակ 12-ի։ Ուղղած շրջանագիծը բաժանում են նույնքան հավասար մասերի։ Ակներև է, վոր աբսցիսների առանցքի վրա բաժանումները հավասար են $\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$, յեթե շառավիղն ընդունված է վորպես միավոր։ Բաժանումները շրջանի վրա նույնպես հավասար են $\frac{\pi}{6}$, իսկ շրջանագծի կետերից աբսցիսների առանցքի վրա իջեցրած ուղղահայացները սինուսի գծերն են։ Շրջանի բաժանման կետերը, կամ սինուսների գծերի ծայրերը նախագծվում են ուղղած շրջանագծի բաժանման կետերում կանգնեցրած ուղղահայացների վրա։ Գծանկար 69-ից միանգամայն պարզ է $y=\sin x$

գծ. 69

ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցման յեղանակը։

$y'=\cos x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար շրջանագծի կետերի նախագծումը կատարվում է այն ուղղահայացների վրա, վորոնք $\frac{\pi}{2}$-ով հեռացված են սինուսի գրաֆիկի համապատասխան ուղղահայացներից։

Սինուսի և կոսինուսի ֆունկցիաների գրաֆիկները առհասարակ կոչվում են **սինուսոիդներ**։

Նույն ձևով կառուցվում է $y=\operatorname{tg} x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը x-ի $-\frac{\pi}{2}$-ից մինչև $+\frac{\pi}{2}$-ի արժեքների դեպքում։ Վորովհետև այդ ֆունկցիայի պարբերությունը հավասար է π-ի, ապա ֆունկցիայի արժեքները կկրկնվեն արգումենտի π-ով փոփոխվելու դեպքում։ Բացի դրանից, տարբերվելով $\sin x$ և $\cos x$ ֆունկցիաների գրաֆիկներից, $y=\operatorname{tg} x$ ֆունկցիայի գրաֆիկն **անընդհատ գիծ** չի լինի, վորովհետև արգումենտի $\frac{\pi}{2}$ արժեքի դեպքում ֆունկցիան հասնում է $+\infty$, իսկ արգումենտի յերկրորդ քառորդ անցնելու դեպքում, ֆունկցիան ստանում է $-\infty$ արժեքը։ Տանգենսի փոփոխման անընդհատության ընդհատումն արտահայտվում է գրաֆիկի գծի ընդհատումով $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ և այլ աբսցիսների համար (գծ. 70)։

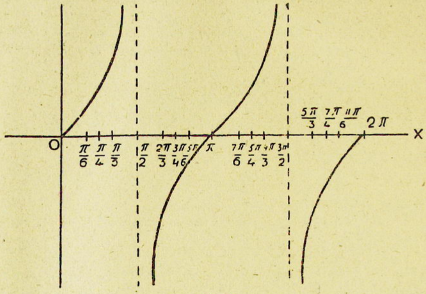
Նույն առանցքների վրա կառուցենք $y'=\operatorname{ctg} x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Դժվար չէ նկատել, վոր $y'=\operatorname{ctg} x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կարելի յե ստանալ $y=\operatorname{tg} x$ ֆունկցիայի գրաֆիկից, շուռ տալով վերջինս աբսցիսների առանցքի հատման կետի շուրջը 180^0-ով և $\frac{\pi}{2}$ չափ հեռացնելով աբսցիսների առանցքի ուղղությամբ։

Տանգենսի և կոտանգենսի ֆունկցիաների գրաֆիկները կոչվում են **տանգենսոիդներ**։

Սինուսոիդներ և տանգենսոիդները կոչվում են նաև արգումենտի սի-

նուսին, կոսինուսին, տանգենսին և կոտանգենսին ուղիղ համեմատական ֆունկցիաների գրաֆիկները, այսինքն հետևյալ ձևի ֆունկցիաների գրաֆիկները.

$$y = \alpha \cdot \sin x \qquad y = \alpha \cdot \operatorname{tg} x$$
$$y = \alpha \cdot \cos x \qquad y = \alpha \cdot \operatorname{ctg} x$$



ծգ. 70

վորոնց հանրահաշվային արտահայտության մեջ մտնում է ուղիղ համեմատականության կայուն գործակիցը։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

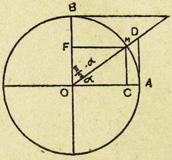
Կառուցեք հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները

392. $y = \frac{1}{2}$ cin x; $y = \frac{1}{2}\cos x$ **389.** $y = 0{,}1 \operatorname{tg} x$; $y = 0{,}1 \operatorname{ctg} x$

394. $y = \sin x$; $y = 2\cos x$ **391.** $y = 0{,}5 \operatorname{tg} x$; $y = 0{,}5 \operatorname{ctg} x$

§ 54. *ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԿԱԽՈՒՄԸ*

Լրացուցիչ *կոչվում են այն անկյունները (աղեղները), վորոնց գումարը հավասար է* $\frac{\pi}{2}$ *(կամ* 90^0*)։ Ցեթե մեկ տըրվում է արգումենտ* α*-ն, ապա նրա լրացուցիչ արգումենտը կլինի* $\frac{\pi}{2} - \alpha$ *կամ* $90^0 - \alpha$



գծ. 71

Ցենթադրենք 71-րդ գծանկարի վրա $\angle AOM = \alpha$*, այդ դեպքում* $\angle BOM = \frac{\pi}{2} - \alpha$

Անկյուն BOM-*ի համար շարժական շառավիղը կլինի նույնը, ինչպես և անկյուն* AOM-*ի համար։*

Այդ պատճառով ըստ շրջանային ֆունկցիաների վորոշման կստանանք

$$1)\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{FM}{R}$$

իսկ $\frac{FM}{R}=\frac{OC}{R}=\cos\alpha$

հետևապես

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

$$2)\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{OF}{R}, \text{ իսկ } \frac{OF}{R}=\frac{CM}{R}=\sin\alpha$$

հետևապես

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

$$3)\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{BE}{R}, \text{ իսկ } \frac{BE}{R}=\operatorname{ctg}\alpha$$

հետևապես

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

$$4)\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{AD}{R}, \text{ իսկ } \frac{AD}{R}=\operatorname{tg}\alpha$$

հետևապես

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

Լրացուցիչ արգումենտների ֆունկցիաների վերը բերած չորս առընչությունները կարելի յե արտահայտել այսպես.

Լրացուցիչ արգումենտներից մեկի ֆունկցիաները հավասար են մյուսի համանուն ֆունկցիաներին:

Յերբեմն համառոտ արտահայտում են այսպես.

Լրացուցիչ արգումենտներից մեկի ֆունկցիաները հավասար են մյուսի կոֆունկցիաներին:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Տված ֆունկցիաներն արտահայտեք լրացուցիչ արգումենտի ֆունկցիաներով.

396. $\sin 30^\circ;\ \sin\frac{\pi}{2};\ \cos\frac{\pi}{2};\ \sin 75^\circ;\ \cos 75^\circ$

397. $\operatorname{tg} 30^\circ;\ \operatorname{ctg} 15^\circ;\ \operatorname{tg} 45^\circ;\ \sin 45^\circ;\ \cos 90^\circ$

398. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3};\ \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6};\ \cos\frac{\pi}{4};\ \sin\frac{\pi}{8};\ \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$

339. $\cos 22^\circ30';\ \operatorname{tg} 44^\circ30';\ \sin 20^\circ12'15''$

400. $\operatorname{tg} 78^\circ20'45'';\ \operatorname{ctg} 1^\circ37'28'';\ \cos 88^\circ52'57''$

Պարզ ձև տալ հետևյալ արտահայտություններին

401. $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ;\quad \operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 75^\circ;\quad \cos 36^\circ - \sin 54^\circ$

402. $\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ$; $\sin 18^\circ + \cos 88^\circ$; $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} + \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{12}$

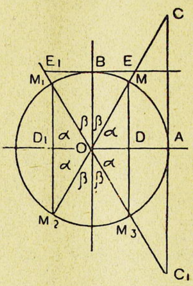
403. $\sin \alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

404. $\cos \alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; $\sin \frac{\pi}{8} - \cos \frac{3\pi}{8}$; $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{16} - \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{16}$

405. $\operatorname{tg} 22^\circ 30' + \operatorname{ctg} 67^\circ 30'$; $\cos 15^\circ 15' - \sin 74^\circ 45'$

§ 55. ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՐԳՈՒՄԵՆՏԻ ՆՎԱԶԱԳՈՒՅՆ ԱՐԺԵՔԻ ԲԵՐԵԼԸ

2-րդ, 3-րդ և 4-րդ քառորդներում վերջացող արգումենտի շրջանային ֆունկցիաները կարելի յե արտահայտել 1-ին քառորդում վերջացող արգումենտների միջոցով։ 2-րդ, 3-րդ և 4-րդ քառորդների արգումենտի ֆունկցիայի փոխարինումը 1-ին քառորդի արգումենտի ֆունկցիայով կոչվում է ֆունկցիայի բերել։



գծ. 72

Դիցուք շարժական շառավիղն ընդունել է OM_1 դիրքը, այսինքն արգումենտը, անկյունը կամ աղեղը, վերջանում է յերկրորդ քառորդում (գծ. 72)։

Արգումենտի մեծությունը կարելի յե արտահայտել հետևյալ յերկու ձևով.

$$\angle AOM_1 = \frac{\pi}{2} + \beta \text{ կամ } \angle AOM_1 = \pi - \alpha$$

վորտեղ α և β սուր անկյուններ են, վորպիսի անկյունների բաժանվում է շրջանի յերկրորդ քառորդը շարժական շառավղով։ OM_1 OM_2 և OM_3 շառավիղները, վորոնց ծայրերը համաչափ են M_1-ի հետ կոորդինատների առանցքների և կենտրոնի նկատմամբ, բաժանում են շրջանի մնացած քառորդները α և β փոխադարձ-լրացուցիչ անկյունների։

Գծանկար 72-ից յերևում է, վոր

$$\sin AOM_1 = \frac{M_1D_1}{R} = \frac{MD}{R} = \sin\alpha = \cos\beta \left(\text{վորովհետև } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos AOM_1 = \frac{OD_1}{R} = \frac{-OD}{R} = -\cos\alpha = -\sin\beta$$

$$\operatorname{tg} AOM_1 = \frac{AC_1}{R} = \frac{-AC}{R} = -\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{ctg}\beta$$

$$\operatorname{ctg} AOM_1 = \frac{BE_1}{R} = \frac{-BE}{R} = -\operatorname{ctg}\alpha = -\operatorname{tg}\beta$$

Հետևապես, յեթե յերկրորդ քառորդի արգումենտը ներկայացրած է վորպես $\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$ գումար, ապա կարելի յե գրել

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\cos\beta \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=-\operatorname{ctg}\beta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=-\sin\beta\,. \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=-\operatorname{tg}\beta$$

Յեթե յերկրորդ քառորդի արգումենտը ներկայացրած ե վորպես $\pi-\alpha$ *ապա*

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \qquad \operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \qquad \operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$$

Նույն ձևով գծանկար 72-ից կարելի յե հանել հետևյալ առընչությունները·

Երրորդ քառորդի արգումենտի համար

$$\sin(\pi-\alpha)=-\sin\alpha \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)=-\cos\beta$$

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)=-\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)=\operatorname{ctg}\beta$$

$$\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)=\operatorname{tg}\beta$$

Չորրորդ քառորդի արգումենտի համար

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)=-\cos\beta \qquad \sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)=\sin\beta \qquad \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)=-\operatorname{ctg}\beta \qquad \operatorname{tg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)=-\operatorname{tg}\beta \qquad \operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$$

Ինքնուրույն ապացուցեք ֆունկցիայի բերելու ֆորմուլները 3-րդ և 4-րդ քառորդների արգումենտների համար։

Այդպես ուրեմն, մենք տեսնում ենք, վոր բոլոր շրջանային ֆունկցիաները կարելի յե բերել ավելի, քան $\frac{\pi}{2}$ *փոքր արգումենտի ֆունկցիաների. բացի դրանից այդ արգումենտը կարող ե լինել կից աբսցիսների առանցքին կամ լրացուցիչ նրան և կից որդինատների առանցքին։ Նկատենք, վոր աբսցիսների առանցքին կից արգումենտի բերելով, մենք պահում ենք ֆունկցիայի անունը, իսկ որդինատների առանցքին կից արգումենտի բերելով փոխում ենք ֆունկցիայի անունը նրա նմանի հետ։ Բերված ֆունկցիայի նշանը վերցնում ենք +, յեթե բերվող ֆունկցիայի նշանը տվյալ քառորդում դրական ե, և —, յեթե բերվող ֆունկցիայի նշանը տվյալ քառորդում բացասական ե։*

Վերը բացատրված բերման բոլոր ֆորմուլները կարելի յե դասավորել հետևյալ տեղատու աղյուսակում

	sin	cos	tg	ctg
0	0	1	0	∞
α	$+\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\mathrm{tg}\,\alpha$	$+\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\mathrm{cin}\,\alpha$	$+\mathrm{ctg}\,\alpha$	$+\mathrm{tg}\,\alpha$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$	0
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\pi-\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
π	0	-1	0	$\pm\infty$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$+\mathrm{tg}\,\alpha$	$+\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\mathrm{ctg}\,\alpha$	$+\mathrm{tg}\,\alpha$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$	0
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
2π	0	1	0	∞

Օրինակներ: 1. *Բերենք* $\mathrm{tg}\,125^0$-*ին առաջին քառորդի արգումենտի։ Ֆունկցիայի բերելը կարելի յե կատարել կամ* $(180^0-125^0)=55^0$ *կամ* $(125^0-90^0)=35^0$։ *Առաջին արգումենտը կից ե աբսցիսների առանցքին, յերկրորդը—օրդինատների առանցքին. հետևապես*

$$\mathrm{tg}\,125^0 = -\,\mathrm{tg}\,55^0$$

կամ

$$\mathrm{tg}\,125^0 = -\mathrm{ctg}\,35^0$$

Մինուս նշանը հարկ յեղավ դնելու նրա համար, վոր յերկրորդ քառորդում տանգենսը բացասական ե, իսկ առաջին քառորդի բոլոր ֆունկցիաները դրական են։

2. *Բերենք* $\mathrm{tg}\,215^0$-*ին նվազագույն արգումենտի ֆունկցիային։ Արգումենտ* 215^0-*ին գտնվում ե յերրորդ քառորդում, վորը կարելի յե արտահայտել կամ վորպես* (180^0+35^0), *կամ վորպես* (270^0-55^0)։ *Առաջին դեպքում*

արգումենտը հեշտությամբ բերվում է 35°-ի, յերկրորդ դեպքում —55°-ի: Բերենք ըստ պայմանի նվազագույն արժեքի

$$\operatorname{tg} 215^0 = \operatorname{tg}\,(180^0 + 35^0) = \operatorname{tg} 35^0$$

Ֆունկցիայի անունը չի փոխվում. նշանը + է, վորովհետև յ'րորդ քառորդում տանգենսը դրական է:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Բերենք նվազագույն արգումենտի.

406. $\sin 194^0;\ \cos 250^0;\ \cos 173^0 15'$

407. $\sin 94^0 28';\ \sin 480^0;\ \cos 420^0$

408. $\operatorname{tg} 135^0 15';\ \operatorname{ctg} 150^0 28';\ \operatorname{tg} 205^0 32'$

409. $\operatorname{ctg} 248^0 58';\ \operatorname{tg} 300^0 12';\ \operatorname{ctg} 354^0 20'$

410. $\sin\frac{8}{5}\pi;\ \cos\frac{7}{5}\pi;\ \operatorname{tg}\frac{5}{8}\pi$

411. $\operatorname{ctg}\frac{2}{3}\pi;\ \operatorname{tg}\frac{5}{2}\pi;\ \operatorname{ctg}\frac{5}{12}\pi$

412. $\cos\frac{7}{12}\pi;\ \sin\frac{20}{3}\pi;\ \operatorname{tg}\frac{25}{4}\pi$

413. $\sin\frac{19}{9}\pi;\ \cos\frac{25}{18}\pi;\ \operatorname{tg}\frac{5}{3}\pi$

Բերենք նվազագույն դրական արգումենտի

414. $\sin(-560^0);\ \cos(-560^0);\ \operatorname{tg}(-40^0)$

415. $\operatorname{tg}(-230^0);\ \operatorname{ctg}(-230^0);\ \sin(-1000^0)$

416. $\operatorname{ctg}(-800^0);\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right);\ \cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$

417. $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right);\ \operatorname{tg}\left(-\frac{4}{3}\pi\right);\ \operatorname{ctg}\left(-\frac{7}{18}\pi\right)$

Վորոշել հետևյալ ֆունկցիաների արժեքները

418. $\sin 120^0;\ \cos 150^0;\ \operatorname{tg} 120^0$

419. $\operatorname{ctg} 150^0;\ \sin 240^0;\ \cos 210^0$

420. $\operatorname{tg} 240^0;\ \operatorname{ctg} 210^0;\ \sin 225^0$

421. $\cos 565^0;\ \operatorname{tg} 630^0;\ \operatorname{ctg} 585^0$

422. $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4};\ \operatorname{ctg}\frac{5}{4}\pi;\ \sin\frac{5}{6}\pi$

423. $\cos\frac{23}{6}\pi;\ \sin\frac{4}{3}\pi;\ \operatorname{tg}\frac{2}{3}\pi$

424. $\cos\frac{5}{6}\pi;\ \sin\frac{5}{4}\pi;\ \operatorname{tg}\frac{7}{2}\pi$

425. $\sin\frac{5}{3}\pi;\ \cos\frac{20}{3}\pi;\ \operatorname{ctg}\frac{7}{6}\pi$

Պարզ ձև տալ հետևյալ արտահայտություններին

426. $\sin(90^0 - \alpha) + \cos\alpha;\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin\alpha$

427. $\cos(90^0 - \alpha) + \sin\alpha;\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{ctg}\alpha$

428. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) + \operatorname{tg}\alpha;\ \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) - \operatorname{tg}\alpha$

429. $\operatorname{tg}(180^0 - \alpha)\cdot\operatorname{ctg}(90^0 - \alpha);\ \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\cdot\operatorname{tg}(2\pi - \alpha)$

430. $\sin(90^0 - \alpha)\cdot\cos\alpha - \cos(\pi - \alpha)\cdot\sin(\pi - \alpha)$

431. $\operatorname{tg}(2\pi - \alpha)\cdot\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\cdot\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$

432. $\sin(90^0 + \alpha) + \cos(180^0 - \alpha) + \operatorname{tg}(270^0 + \alpha) + \operatorname{ctg}(360^0 - \alpha)$

433. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha) + \operatorname{tg}(\pi - \alpha) - \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$

434. $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) - \sin(180^\circ - \alpha)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right)$

435. $\frac{\sin(-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(-\alpha)} \qquad \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\cdot\cos(\pi - \alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)}$

§ 56. ՀԱՍԿԱՑՈՂՈՒԹՅՈՒՆ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Եթե մենք դիտում ենք վորևե y փոփոխական մեծություն վորպես ֆունկցիա մյուս x փոփոխական մեծության, ապա կարող ենք y ֆունկցիայի կախումն x-ից արտահայտել վորևե հավասարումով, վորի մի մասում կլինի y-ը, իսկ մյուսում — x-ից կախված արտահայտությունը։

Որինակ

$$y = ax + b \qquad y = ax^2 \qquad y = a\cdot\sin x \qquad y = \operatorname{tg} x$$

Այդ բոլոր հավասարումների մեջ պարզ կերպով y-ը հանդիսանում է վորպես x-ի ֆունկցիա։

Տված մի քանի հավասարումներից, հակառակը, կարելի յե x-ը արտահայտել վորպես y-ի ֆունկցիա, որինակ, առաջին և յերկրորդ հավասարումներից

$$x = \frac{y - b}{a} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{y}{a}}$$

x ֆունկցիան y ֆունկցիայի նկատմամբ կոչվում է հակադարձ։

Եթե ցանկանում են համառոտ արտահայտել, վոր y-ը x-ի ֆունկցիան է, ապա գրում են

$$y = f(x)$$

f նշանը («ֆունկցիա»—fonction բառի սկզբնատառն է) ցույց է տալիս բոլոր գործողությունները, վորոնք պետք է կատարվեն x-ի հետ՝ y-ը գտնելու համար։ Ընդհակառակը, վորպեսզի արտահայտենք x-ը, վորպես y-ի ֆունկցիա, կարելի յե գրել

$$x = \varphi(y)$$

վորտեղ φ նշանը ցույց է տալիս բոլոր գործողությունները, վորոնք պետք է կատարվեն y-ի հետ՝ x-ը ստանալու համար։

Եվ այսպես, առհասարակ, յեթե ընդունենք վորպես ուղիղ հետևյալ ֆունկցիան

$$y = f(x)$$

ապա նրա հակադարձ ֆունկցիան կլինի

$$x = \varphi(y)$$

Եթե ֆունկցիայի արժեքը գտնելու համար նրա արգումենտի տված արժեքի հետ բավական է վոր կատարվի բոլոր հանրահաշվային գործողությունները, այսինք, գումարում, հանում, բազմապատկում, բաժանում, աստիճանի բարձրացնել և արմատ հանելը, ապա ֆունկցիան կոչվում է հանրահաշվային: Այդպես են, որինակ, վերը բերած ֆունկցիաներից առաջինը և յերկրորդը։

Եթե ֆունկցիայի արժեքը չի կարելի գտնել արգումենտի տված արժեքով մասնանշած վեց հանրահաշվային գործողությունների օգնությամբ, ապա ֆունկցիան կոչվում է տրանսցենդենտ (գերփորձնական)*: Այդպես են, օրինակ, վերը ֆունկցիաներից—երրորդը* ($y=a \cdot \sin x$), *չորրորդը* ($y=\mathrm{tg}\, x$) *և այլ ուղիղ շրջանային ֆունկցիաները։*

Հետևապես, մեր ուսումնասիրած ուղիղ շրջանային ֆունկցիաները— տրանսցենդենտ ֆունկցիաներ են:

Ինչպես յերևում է, տված հանրահաշվային ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիայի արտահայտությունը գտնելու համար, բավական է լուծել հավասարումն ընդունելով արգումենտը վորպես անհայտ։ Այդպես չի կարելի վարվել տրանսցենդենտի նկատմամբ հակադարձ ֆունկցիան գտնելու համար, վորովհետև չի կարելի հանրահաշվորեն լուծել հավասարումն արգումենտի նկատմամբ, ընդունելով ուղիղ ֆունկցիայի արժեքը վորպես անհայտ։ Օրինակ, չի կարելի հանրահաշվային գործողությունների օգնությամբ լուծել հետևյալ հավասարումը

$$y = \sin x$$

x*-ի նկատմամբ, յեթե հայտնի յե* y*-ի արժեքը։*

$y = \sin x$ *հավասարման լուծումն* x*-ի նկատմամբ համազոր կլիներ հետևյալ հարցի լուծմանը. ինչպիսի աղեղի համար կամ ինչպիսի անկյան համար սինուսն ունի* y*-ի արժեք։*

Առհասարակ, վորոնելով աղեղի կամ անկյան արժեքները, վորոնք ունեն տվյալ սինուս, կոսինուս, տանգենս կամ կոտանգենս, մենք վորոնում ենք համապատասխան շրջանային ֆունկցիաների հակադարձ ֆունկցիայի մասնավոր արժեքները։

Ուղիղ շրջանային ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան ներկայացնում է իրենից փոփոխական մի անկյուն կամ աղեղ, վորի փոփոխումները կախված են սինուսի, կոսինուսի, տանգենսի յեվ կոտանգենսի գծերի տառավղին ունեցած հարաբերության փոփոխումներից:

Հակադարձ շրջանային ֆունկցիաների համար մուծված են հետևյալ նշանակումները

$$\begin{array}{llll} \textit{յեթե} & y = \sin x & \textit{ապա} & x = \mathrm{arc}\sin y \\ \text{»} & y = \cos x & \textit{ապա} & x = \mathrm{arc}\cos y \\ \text{»} & y = \mathrm{tg}\, x & \textit{ապա} & x = \mathrm{arc}\,\mathrm{tg}\, y \\ \text{»} & y = \mathrm{ctg}\, x & \textit{ապա} & x = \mathrm{arc}\,\mathrm{ctg}\, y \end{array}$$

Ուղիղ շրջանային ֆունկցիայի անվան առաջադիր arc *մասնիկը լատինական* arcus, *վոր նշանակում է «աղեղ», բառի յերեք սկզբնատառերն են։*

Այդ անունները կարդացվում են այսպես. «արկուս սինուս իգրեկ, արկուս կոսինուս իգրեկ» և այլն, իսկ ֆունկցիայի և արգումենտի միջև կապ պատկերացնող հավասարումները կարելի յե կարդալ այսպես. «այն աղեղը, վորի սինուսն է իգրեկը», «այն աղեղը, վորի կոսինուսն է իգրեկը» և այլն։

Անկյան կամ աղեղի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է, ինչպես մենք գիտենք, տվյալ ուղիղ շրջանային ֆունկցիայի միայն մեկ արժեքը։

Օրինակ $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\, 45^0 = 1$ *և այլն։*

Այդ պատճառով ուղիղ շրջանային ֆունկցիաները կոչվում են միարժեք: Առհասարակ, միարժեք կոչվում են այն ֆունկցիաները, վորոնք արգումենտի յուրաքանչյուր արժեքի համար ընդունում են միայն մեկ արժեք:

Յեթե ֆունկցիան արգումենտի յուրաքանչյուր վորոշ արժեքի համար ունի յերկու արժեք, ապա նա կոչվում ե յերկարժեք: Այդպես ե, որինակ հետևյալ ֆունկցիան

$$y = \pm\sqrt{x}$$

Առհասարակ, ֆունկցիան կոչվում ե բազմարժեք, յերբ նա, արգումենտի մեկ արժեքի դեպքում, ունի մեկից ավելի արժեքներ:

Հակադարձ շրջանային ֆունկցիաները բազմարժեք են, վորովհետև արգումենտի միևնույն արժեքին կարող են համապատասխանել ֆունկցիայի անհամար արժեքները:

Վերցնենք, որինակ, հետևյալ ֆունկցիան

$$y = \operatorname{arc\,sin} x$$

Տանք x-ին վորոշ արժեք, որինակ, $x = \frac{1}{2}$

Գտնենք y-ը, յեթե $y = \operatorname{arc\,sin}\frac{1}{2}$

Մենք վորոնում ենք մի աղեղ, վորի սինուսն ե $\frac{1}{2}$: Բայց այդպիսի աղեղներ շատ կան. դրանցից ամենափոքրն ե $y = \frac{\pi}{6}$, վորը գտնվում ե առաջին քառորդում: Իսկ համաձայն բերման ֆորմուլների, $\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ աղեղը ևս ունի նույն սինուսը: Բայց վորովհետև սինուսը մի պարբերական ֆունկցիա յե, վորի պարբերությունն ե 2π, ապա նույն սինուսը կունենա հետևյալ ձևի բոլոր աղեղները

$$2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ և } 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

վորտեղ K-ն մի վորևե ամբողջ թիվ ե:

Այսպես ուրեմն, մենք ցույց տվինք, վոր

$$y = \operatorname{arc\,sin} x$$

բազմարժեք ֆունկցիա յե:

Հետագայում հակադարձ շրջանային ֆունկցիաները կկցվեն «յեռանկյունաչափական հավասարումների» լուծմանը:

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

436. Որինակների միջոցով ցույց տվեք, վոր հետևյալ ֆունկցիաները՝ arc cos x, arc tg x, arc ctg x բազմարժեք ֆունկցիաներ են:

Վորոշեք բացարձակ մեծությամբ նվազագույն արժեքները

437. $\operatorname{arc\,cos}\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}$ **438.** $\operatorname{arc\,tg} 1$; $\operatorname{arc\,ctg} 1$

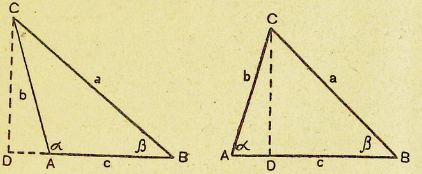
439. $\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{\sqrt{2}}$ **440.** $\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{2}$; $\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}$

§ 57. ՅԵՐԿՈՒ ԱՆԿՅԱՆ ԳՈՒՄԱՐԻ ՅԵՎ ՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅԱՆ ՍԻՆՈՒՍԸ, ԿՈՍԻՆՈՒՍԸ ՅԵՎ ՏԱՆԳԵՆՍԸ

Յերկու (α և β) անկյունների գումարի և տարբերության ֆունկցիաները կարելի յե արտահայտել այդ անկյուններից յուրաքանչյուրի ֆունկցիաներով։

Ֆորմուլներ հանելիս, մենք այնպես կհամարենք, վոր α և β անկյունները դրական են, վոր նրանց գումարը փոքր ե 180^0-ից և վոր $\alpha > \beta$։ Այնուհետև հնարավոր կլիներ ապացուցել, վոր այս գլխում դուրս բերած բոլոր ֆորմուլները մնում են ճիշտ նաեվ ամեն մի աբսոլյուտ մեծության α յեվ β անկյունների համար, *լինեն նրանք դրական, թե բացասական։ Այդ ապացուցումն իր մեծածավալության պատճառով այստեղ չենք բերում, սակայն աշակերտներին խնդրում ենք, վոր յեռանկյունաչափական ֆորմուլների վերը հիշած* հանրություն *կոչված հատկությունը նկատի առնեն, և, վորչափ վոր ֆորմուլներ կստացվեն, որինակների միջոցով ստուգեն նրանց հանրությունը։*

1. *Կառուցենք* ABC *յեռանկյունն* $A = \alpha$ *և* $B = \beta$ *անկյուններով։ Գծանկար 73-րդի ձախ կողմում պատկերացրած ե այն դեպքը, յերբ յերկու*



գծ. 73

անկյունն ել սուր են, աջ կողմում՝ յերբ անկյուն α-ն բութ ե։

Յեռանկյան c *կողմը կարելի յե առաջին դեպքում ընդունել վորպես* BD *և* AD *հատվածների գումար, իսկ յերկրորդ դեպքում, վորպես* BD *և* AD *հատվածների տարբերություն։ Այդ հատվածներից յուրաքանչյուրը գտնում ենք* CDB *և* CDA *ուղղանկյուն յեռանկյունների միջոցով*

$$BD = a \cos \beta$$

$$AD = b \cos \alpha \qquad \text{յեթե } \alpha > 90^0$$

$$AD = b \cos (180^0 - \alpha) = - b \cos \alpha, \quad \text{յեթե } \alpha > 90^0$$

Այդ պատճառով առաջին դեպքում

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha$$

յերկրորդ դեպքում

$$c = a \cos \beta - (- \cos \alpha) = a \cos \beta + b \cos \alpha$$

այսինքն ստացվեց նույնն, ինչ վոր առաջին դեպքում։

Վերջին ֆորմուլի մեջ դնում ենք կողմերի արտահայտությունները արտագծած շրջանի տրամագծի միջոցով

$$2R\sin C = 2R\sin\alpha\cos\beta + 2R\sin\beta\cos\alpha$$

Բայց $\sin C = \sin(\alpha+\beta)$ *և, կրճատելով* 2R-*ով, կստանանք*

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

2. *Վորպեսզի ստանանք* α *և* β *անկյունների տարբերության սինուսը, կատարում ենք հետևյալ ձևափոխությունները*

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin[180^0-(\alpha-\beta)] = \sin[(180^0-\alpha)+\beta]$$

Օգտվելով այնուհետև դուրս բերած գումարի սինուսի ֆորմուլով, գտնում ենք

$$\sin[(180^0-\alpha)+\beta] = \sin(180^0-\alpha)\cos\beta + \cos(180^0-\alpha)\sin\beta =$$
$$= \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

3. *Եթե* α *և* β *անկյունների գումարը փոքր է* 90^0-*ից, ապա*

$$\cos(\alpha+\beta) = \sin[90^0-(\alpha+\beta)] = \sin[(90^0-\alpha)-\beta] =$$
$$= \sin(90^0-\alpha)\cos\beta - \cos(90^0-\alpha)\sin\beta =$$
$$= \cos a\cdot\cos\beta - \sin a\cdot\sin\beta$$

Երբ $\alpha+\beta > 90^0$, *ապա*

$$\cos(\alpha+\beta) = \sin[(\alpha+\beta)-90^0] = -\sin[a-(90^0-\beta)] =$$
$$= -(\sin\alpha\cdot\sin\beta - \cos\alpha\cdot\cos\beta) =$$
$$= \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Եվ այսպես յերկու դեպքում էլ

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

4. *Տարբերության կոսինուսը*

$$\cos(\alpha-\beta) = -\cos[(180^0-(\alpha-\beta)] =$$
$$= -\cos[(180^0-\alpha)+\beta)] =$$
$$= -[\cos(180^0-\alpha)\cos\beta - \sin(180^0-a)\sin\beta]$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Դուրս բերած բոլոր ֆորմուլներն արտագրենք միասին, վորպեսզի հարմար լինի միմյանց հետ բաղդատելու և հեշտությամբ հիշելու

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \quad \ldots\ldots (1)$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta \quad \ldots\ldots (2)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \quad \ldots\ldots (3)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta \quad \ldots\ldots (4)$$

5. *Վորպեսզի արտահայտենք յերկու անկյան գումարի կամ տարբերության տանգենսն անկյուններից յուրաքանչյուրի ֆունկցիայի միջոցով, օգտվում ենք տանգենսի, սինուսի և կոսինուսի միջև յեղած փոխադարձ կախումից*

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Այս կոտորակի թե՛ համարիչը և թե հայտարարը բաժանում ենք $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ *արտադրյալի վրա*

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\quad\ldots\quad(5)$$

Նույն ձևով ստացվում է

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\quad\ldots\ldots\quad(6)$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

441. *Գտեք* $\sin(\alpha-\beta)$, *եթե* $\sin\alpha=0{,}8$, $\sin\beta=0{,}6$։

442. *Գտեք* $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, *եթե* $\operatorname{tg}\alpha=0{,}3$, $\operatorname{tg}\beta=1{,}2$։

443. *Գտեք* 75^0 *և* 285^0 *անկյունների բոլոր եռանկյունաչափական ֆունկցիաները, եթե գիտեք* 30^0 *և* 45^0 *անկյունների ֆունկցիաները։*

444. *Իմանալով* 30^0, 45^0, 60^0 *անկյունների ֆունկցիաները, գտեք* 15^0, 75^0, 105^0 *անկյունների ֆունկցիաները։*

445. *Իմանալով* 30^0 *և* 18^0 *անկյունների ֆունկցիաները, գտեք* 12^0 *և* 72^0 *անկյունների ֆունկցիաները։*

Պարզ ձև տվեք հետևյալ արտահայտություններին

446. $\sin(\alpha+30^0)+\sin(\alpha-30^0)$

447. $\sin(60^0+\alpha)+\sin(60^0-\alpha)$

448. $\sin(60^0+\alpha)-\sin(60^0-\alpha)$

449. $\sin(30^0+\alpha)+\sin(30^0-\alpha)$

450. $\cos(30^0+\alpha)-\cos(30^0-\alpha)$

451. $\cos(60^0-\alpha)-\cos(60^0+\alpha)$

452. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$

453. $\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)$

454. $\sin(30^0+\alpha)\cdot\cos(60^0-\alpha)+\cos(30^0+\alpha)\cdot\sin(60^0-\alpha)$

455. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)+2\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

456. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\cdot\sin\beta}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$

457. $\dfrac{\sin(45^0+\alpha)-\cos(45^0+\alpha)}{\sin(45^0+\alpha)+\cos(45^0+\alpha)}$

458. $\dfrac{\operatorname{tg}(45^0+\alpha)-\operatorname{tg}(45^0-\alpha)}{\operatorname{tg}(45^0+\alpha)+\operatorname{tg}(45^0-\alpha)}$

459. *Ապացուցեք, որ եթե* $\alpha>90^0$ *և* $\beta<90^0$, *ապա* $\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$

Ապացուցեք, որ նույնություններ են

460. $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

461. $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

462. $\operatorname{tg}(45^0+\alpha)=\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$

463. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}+\dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cdot\cos\alpha}=0$

464. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$

465. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha-\sin\beta}$

466. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$

467. *Արտահայտեցեք* $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$, $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ *և* $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$ α, β, γ *անկյունների ֆունկցիաների միջոցով։*

468 *Գտեք* $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$, $\sin(\alpha-\beta+\gamma)$, *յեթե* $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\sin\beta=\frac{1}{3}$ $\sin\gamma=1$

469. *Գտեք* $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$, *յեթե* $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{5}$, $\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{8}$

470. *Գտեք* $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta-\gamma)$, *յեթե* $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\gamma=\frac{2}{3}$

§ 58. ԿՐԿՆԱԿԻ ԱՆԿՅԱՆ ՑԵՎ ԱՆԿՅԱՆ ԿԵՍԻ ՍԻՆՈՒՍԸ, ԿՈՍԻՆՈՒՍԸ ՑԵՎ ՏԱՆԳԵՆՍԸ

Յեթե α *և* β *անկյունների գումարի սինուսի, կոսինուսի և տանգենսի ֆորմուլներում (1, 3 և 5 ֆորմուլները) յենթադրենք, վոր* $\alpha=\beta$ *ապա կստանանք*

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Հետագայում հաճախ հարկադրված կլինենք ոգտվել նաև հետևյալ ֆորմուլից, վորն ստացվում է (7) ֆորմուլից, յեթե նրա մեջ α*-ի փոխարեն վերցնենք* $\frac{\alpha}{2}$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

Ավելի սակավ է պատահում այն ֆորմուլը, վորը բղխում է (8) ֆորմուլից

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Վորպեսզի անկյան կեսի ֆունկցիաներն արտահայտենք ամբողջ անկյան ֆունկցիաներով, վերցնենք վերջին հավասարությունը և միացնենք նրան այն առընչությունը, վորը կապում է միևնույն անկյան սինուսն ու կոսինուսը միմյանց հետ

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha$$

Վճռելով հավասարումների այդ սիստեմը $\sin\frac{\alpha}{2}$ *և* $\cos\frac{\alpha}{2}$*-ի նկատմամբ, կգտնենք*

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$$

իսկ այստեղից կստանանք

$$\sin = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

$$\cos = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

Արմատների առաջ հարկադրված դնում ենք յերկու նշան նրա համար, վոր $\frac{\alpha}{2}$ *անկյան սինուսն ու կոսինուսը վոչ միշտ են լինում դրական յեթե, օրինակ, անկյուն* α*-ն պարունակվում ե* 180^0*-ի և* 360^0*-ի միջև, ապա ուրեմն նրա կեսը կգտնվի* 90^0*-ի և* 180^0*-ի միջև, և նրա կոսինուսը՝ բացասական ե։ Անկյան կեսի սինուսը բացասական ե, յեթե, օրինակ, ամբողջ անկյունը գտնվում ե* 360^0*-ի և* 720^0*-ի միջև, և այլն։*

Վորպեսզի անկյան կեսի տանգենսն ստանանք, բաժանում ենք սինուսի և կոսինուսի արտահայտությունները մեկը մյուսի վրա

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

Այս ֆորմուլը կարելի յե արմատից ազատել, բազմապատկելով արմատատակ քանակության թե համարիչը և թե հայտարարը $1 + \cos\alpha$*-ով*

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)}{(1 + \cos\alpha)^2}} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Իսկ յեթե համարիչն էլ հայտարարն էլ բազմապատկենք $(1 - \cos\alpha)$*-ով, այդ դեպքում*

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{(1 - \cos\alpha)^2}{(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)}} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Նկատենք, վոր վերջին այս

$$\operatorname{tg} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} \quad \text{և} \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

արտահայտություններն այլևս չունեն կրկնակի նշան։ Կրկնակի նշանն այստեղ անտեղի կլիներ, վորովհետև արմատ հանել չկա այստեղ և պարզ ե, վոր ֆորմուլի ձախ մասում մտնող ամեն մի α *անկյան սինուսը և կոսինուսն ունեն վորոշ արժեք և վորոշ նշան, վորոնցից և կախված ե ֆորմուլի ձախ մասի նշանը։ Իսկ այն հարցին, թե ինչու արմատ հանելիս, մենք նրանց առաջը դրած յերկու նշաններից պլյուսն ընտրեցինք, դրան կարելի յե պատասխանել նրանով, վոր ստուգում կատարելիս տեսնում ենք, վոր ֆոր-*

մուլնները ճիշտ են դուրս գալիս միայն այդ նշանն ընտրելու դեպքում և հերակի

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

471. Գտեք 2α անկյան բոլոր ֆունկցիաները, յեթե $\cos\alpha=0{,}6$։

472. Ապացուցեք, վոր յեթե $0<\alpha<45^0$, ապա $\sin 2\alpha<2\sin\alpha$։

473. Գտեք $22^0 30'$ անկյան բոլոր ֆունկցիաները։

474. Գտեք $\frac{\alpha}{2}$ անկյան բոլոր ֆունկցիաները, յեթե $270^0<\alpha<360^0$ և $\sin\alpha=-0{,}8$։

475. Գտեք $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, յեթե $\sin\alpha=\frac{2}{3}$։

476. Գտեք $\operatorname{tg} 2\alpha$, յեթե $\operatorname{tg}\alpha=7$։

477. Գտեք $\sin 28\alpha$, յեթե $\sin 7\alpha=\frac{\sqrt{5}}{4}$։

478. $\sin 2\alpha$ և $\cos 2\alpha$ արտահայտեցեք $\sin\alpha$-ով։

479. Գտեք $\operatorname{tg}\alpha$, յեթե $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}=3$։

480. Գտեք $\cos 4\alpha$, յեթե $\cos\alpha=\frac{1}{3}$։

481. Արտահայտեցեք 3α անկյան բոլոր ֆունկցիաներն α անկյան ֆունկցիաների միջոցով։

482. Արտահայտեցեք 4α անկյան բոլոր ֆունկցիաներն α անկյան ֆունկցիաների միջոցով։

483. Գտեք α-ն, յեթե $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}-1$

484. Պարզ ձև տվեք հետևյալ արտահայտության

$$\sin 2\alpha+\cos 2\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$$

485. Պարզ ձև տվեք $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg} 2\alpha$

486. Պարզ ձև տվեք $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

487. Պարզ ձև տվեք $\operatorname{tg}(45^0+\alpha)-\operatorname{tg}(45^0-\alpha)$

488. Պարզ ձև տվեք $\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}$

ապացուցեք, վոր նույնություններ են

489. $\cos 2\alpha=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$

490. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}$

491. $\sin 2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\cos 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$

492. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg} 2\alpha$

493. $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$

494. $\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$

495. $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}2a+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2a-\operatorname{tg}\alpha}$

496. $\operatorname{tg}^2\dfrac{a}{2} = \dfrac{2\sin a-\sin 2a}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}$

497. $\operatorname{tg}3\alpha = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^0-a)\operatorname{tg}(60^0+\alpha)$

§ 59. ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԼՈԳԱՐԻԹՄԱՑՆԵԼՈՒ ՀԱՄԱՐ ՀԱՐՄԱՐ ՁԵՎԻ ԲԵՐԵԼՈՒ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՖՈՐՄՈՒԼՆԵՐԸ

Վորովհետև յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներ պարունակող ֆորմուլներով հաշվումները սովորաբար կատարում են լոգարիթմների ոգնությամբ, ուստի շատ կարևոր է իմանալ, թե ինչպես պետք է բազմանդամ արտահայտությունները, յերբ ինարկե այդ հնարավոր է, ձևափոխել և դարձնել միանդամներ։

1. *Անկյան կեսի սինուսի և կոսինուսի ֆորմուլը դուրս բերելիս (նախկին պարագրաֆում) մենք ունեյինք հետևյալ հավասարությունը*

$$2\cos^2\frac{a}{2} = 1+\cos\alpha \quad և \quad 2\sin^2\frac{a}{2} = 1-\cos\alpha$$

Արտագրելով այդ հավասարությունները հակառակ ուղղությամբ, ստանում ենք յերկու շատ ոգտակար ֆորմուլներ, հաճախ պատահող յերկանդամները միանդամների վերածելու համար։

$$1+\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

$$1-\cos a = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

2. *Գումարենք և հանենք* $\sin(\alpha+\beta)$ *և* $\sin(\alpha-\beta)$ *արտահայտությունները (1 և 2 ֆորմուլները)։*

$$\pm\left\{\begin{array}{l}\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta\end{array}\right.$$

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\beta\cdot\cos\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\cos\beta\cdot\sin\beta$$

Մուծենք հետևյալ նշանակումները

$$\alpha+\beta = A \qquad \alpha-\beta = B$$

Այս վերջին յերկու հավասարություններից α *և* β*-ն արտահայտենք* A*-ի և* B*-ի միջոցով*

$$\alpha = \frac{B+A}{2}, \qquad \beta = \frac{A-B}{2}$$

Վերն ստացած սինուսների $(\alpha+\beta)$ *և* $(\alpha-\beta)$ *գումարի և տարբերության ֆորմուլների մեջ* $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, α *և* β *արտահայտությունները փոխարինենք* A *և* B*-ով*

$$\sin A+\sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2} \quad \ldots\ldots (12)$$

$$\sin A-\sin B = 2\sin\frac{A-B}{2}\cdot\cos\frac{A+B}{2} \quad \ldots\ldots (13)$$

*Այս ֆորմուլների ոգնությամբ յերկու սինուսի գումարն ու տարբերությունը վեր են ածվում արտադրյալի (*A *և* B *անկյունների գումարն ու տար-*

բերությունը գտնվում է առանց դժվարության)։ Այս ֆորմուլները չպետք է շփոթել սինուսների գումարի և տարբերության (1) *և* (2) *ֆորմուլների հետ։ Նրանց արտահայտությունները բերենք այստեղ բառերով.*

Սինուսների գումարը հավասար է կիսագումարի սինուսի յեվ կիսատարբերության կոսինուսի կրկնապատիկ արտադրյալին:

Սինուսների տարբերությունը հավասար է կիսատարբերության սինուսի յեվ կիսագումարի կոսինուսի կրկնապատիկ արտադրյալին:

ՈՐԻՆԱԿՆԵՐ

$$\mathrm{siu}\,62^0 + \sin 24^0 = 2\sin 43^0 \cdot \cos 19^0$$
$$\sin 87^0 - \sin 48^0 = 2\sin 22^0 \cdot \cos 65^0$$

3. *Նախկինի նման վարվենք նաև գումարի և տարբերության կոսինուսների հետ*

$$\mp\begin{cases}\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta\end{cases}$$

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = -2\cos\alpha\cdot\cos\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

կամ

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2} \quad \ldots\ldots (14)$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2} \quad \ldots\ldots (15)$$

Վորովհետև $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ *և* $\sin\frac{A-B}{2} = -\sin\frac{B-A}{2}$ *ուստի վերջին* (15) *ֆորմուլը կարելի յե պատկերացնել հետևյալ ձևով*

$$\cos A - \cos B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{B-A}{2} \quad \ldots\ldots (15')$$

(առաջին ֆորմուլում միևնույն է, կվերցնենք արդյոք A—B, *թե* B—A *վորովհետև* $\cos\frac{A-B}{2} = \cos\frac{B-A}{2}$)

Նույն ֆորմուլները բառերով.

Կոսինուսների գումարը հավասար է կիսագումարի կոսինուսի յեվ կիսատարբերության կոսինուսի կրկնապատիկ արտադրյալին:

Կոսինուսի տարբերությունը հավասար է կիսագումարի սինուսի յեվ հակադարձ կիսատարբերության սինուսի կրկնապատիկ արտադրյալին:

ՈՐԻՆԱԿՆԵՐ

$$\cos 15^0 + \cos 67^0 = 2\cos 41^0 \cdot \cos 26^0$$
$$\cos 48^0 - \cos 74^0 = 2\sin 61^0 \cdot \sin 13^0$$

4. *Յերկու տանգենսի կամ կոտանգենսի գումարի և տարբերության արտադրյալի ձևափոխումն սկսում են այդ ֆունկցիաների արտահայտությունից՝ սինուսի և կոսինուսի միջոցով*

$$\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

Իսկ վորովհետև ստացած կոտորակի համարիչը հավասար է $\sin(\alpha\pm\beta)$, *ուստի*

$$\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Հետևյալ արտահայտությունները բերեք լոգարիթմացնելու համար հարմար ձևի

498. $1 - \cos 62^0$ **499.** $1 + \cos 145^0$ **500.** $\cos 418^0 - 1$

501. $\cos 256^0 + 1$

502. $\mathrm{tg}\ 18^0 + \mathrm{tg}\ 70^0$

503. $\sin 82 - \sin 43^0$

504. $\sin 48^0 + \sin 12^0$

505. $\cos 72^0 + \cos 48^0$

506. $\sin 60^0 + \sin 30^0$

507. $\cos 75^0 - \cos 15^0$

508. $\mathrm{tg}\ 80^0 + \mathrm{tg}\ 20^0$

509. $\mathrm{tg}\ 70^0 - \mathrm{tg}\ 15^0$

510. $\cos 124^0 + \cos 218^0$

511. $\mathrm{tg}\ 92^0 + \mathrm{tg}\ 190^0$

512. $\cos 260 - \cos 8^0$

513. $\mathrm{tg}\ 314^0 - \mathrm{tg}\ 280^0$

514. $\sin 18^0\ 12' + \sin 53^0\ 46'$

515. $\sin 48^0\ 17' + \cos 15^0\ 16'$

516. $\sin 44^0\ 32' - \sin 6^0\ 53'$

517. $\cos 72^0\ 38' - \cos 21^0\ 41'$

518. $\mathrm{tg}\ 66^0\ 18' - \mathrm{tg}\ 40^0\ 54'$

519. $\mathrm{tg}\ 50^0\ 37' - \mathrm{tg}\ 62^0\ 20'$

520. $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$

521. $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\beta}$

522. $\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$

523. $\dfrac{\sin 50^0 + \sin 18}{\sin 50^0 - \sin 18}$

524. $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$

525. $\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$

526. $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$

527. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$

528. $\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\beta$

529. $(1 + \cos\alpha)\ \mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$

530. $\sin 2\alpha - 2\sin\alpha$

531. $\dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}$

532. $\mathrm{tg}(\alpha + 45^0) - \mathrm{tg}(\alpha - 45^0)$

533. $\dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \sin\alpha}$

534. $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 3\alpha}$

535. $\dfrac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a}$

536. $\dfrac{\sin a + \sin 2a + \sin 4a + \sin 5a}{\cos a + \cos 2a + \cos 4a + \cos 5a}$

537. $\dfrac{\cos a - \cos 3a - \sin a + \sin 3a}{\sin 2a + \cos 2a}$

538. $\sqrt{\dfrac{2\sin a - \sin 2a}{2\sin a + \sin 2a}}$

§ 60. ՆԱԽՈՐԴ ՖՈՐՄՈՒԼՆԵՐԸ ԿԻՐԱՌՄԱՆ ԲԵՐՈՂ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒՄՆԵՐ

Սինուսի և կոսինուսի գումարը կամ տարբերությունը ձևափոխվում են ֆունկցիաներից մեկն ու մեկը փոխարինելով լրացուցիչ անկյան համապատասխան ֆունկցիայով, և այնուհետև նախորդ պարագրաֆի ֆորմուլների կիրառմամբ

Որինակ

$$\text{cin } a - \cos\beta = \sin a - \sin(90^0 - \beta) =$$
$$= 2\sin\left(\frac{a+\beta}{2} - 45^0\right)\cos\left(\frac{a-\beta}{2} + 44^0\right)$$

Նույն ձևով կարելի կլիներ ձևափոխել և cin $a \pm \cos a$, *բայց ավելի պարզ կլինի գործածել արհեստական միջոցը, այն է—փակագծերից դուրս բերել* $\sqrt{2}$

$$\sin a \pm \cos a = \sqrt{2}\left(\sin a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \cos a\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Բայց $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$ *հավասար է* si a 45^0 *և* $\cos 45^0$

Ուստի

$$\sin a \pm \cos a = \sqrt{2}\,(\sin a \cos 45^0 \pm \cos a \sin 45^0) =$$
$$= \sqrt{2}\sin(a \pm 45^0)$$

Յեթե առաջին անդամի մեջ $\frac{1}{\sqrt{2}}$*-ը փոխարինենք* 45^0*-ի սինուսով, իսկ յերկրորդի մեջ՝ կոսինուսով, ապա կունենանք*

$$\sin a \pm \cos = \sqrt{2}\,(\sin a \cdot \sin 45^0 \pm \cos a \cos 45^0) =$$
$$= \sqrt{2}\cos(a \pm 45^0)$$

Ապացուցեք, վոր՝ յերկու հետևանքներն էլ տարբերվում են միայն արտաքին տեսքով։

2. *Տանգենսի և կոտանգենսի գումարը կամ տարբերությունն արտադրյալի վերածելու համար անցնում ենք սինուսներին և կոսինուսներին*

$$\text{tg } a + \text{ctg } \beta = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin a\cdot\sin\beta + \cos a\cdot\cos\beta}{\cos a\cdot\sin\beta} = \frac{\cos(a-\beta)}{\cos a\sin\beta}$$

3. *Հետազննենք* $1 + \sin a + \cos a$ *յեռանդամի ձևափոխումը*

$$1 + \sin a + \cos a = (1 + \cos a) + \sin a =$$
$$= 2\cos^2\frac{a}{2} + 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = 2\cos\frac{a}{2}\left(\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2}\right) =$$
$$= 2\sqrt{2}\cos\frac{a}{2}\sin\left(\frac{a}{2} + 45^0\right)$$

4. *Այն արտահայտությունների ձևափոխումները, վորոնք պարունակում են յեռանկյունաչափական յերեք այնպիսի անկյունների ֆունկցիաներ, վորոնց գումարը հավասար է* 180^0*-ի (կամ* π*-ի)։*

Յեթե $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$, *ապա* $\angle C = 180^0 - (A + B)$

ուստի

$$\sin C = \sin(A+B) \qquad \cos C = -\cos(A+B)$$
$$\text{tg } C = -\text{tg }(A+B) \qquad \text{ctg } C = -\text{ctg }(A+B)$$

Վորովհետև $\frac{C}{2} = 90^0 - \frac{A+B}{2}$ *ապա*

$$\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A+B}{2} \qquad \cos\frac{C}{2} = \sin\frac{A+B}{2}$$
$$\text{tg }\frac{C}{2} = \text{ctg }\frac{A+B}{2} \qquad \text{ctg }\frac{C}{2} = \text{tg }\frac{A+B}{2}$$

Վերը թված առընչությունների հիման վրա ունենք

$$\sin A+\sin B+\sin C=\sin A+\sin B+\sin(A+B)=$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}=$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)=$$

$$=4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}-\operatorname{tg}(A-B)=$$

$$=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}-\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin(A+B)\,[\cos(A+B)-\cos A\cos B]}{\cos A\cos B\cos(A+B)}=$$

$$=\frac{\sin(A+B)\,[\cos A\cos B-\sin A\sin B-\cos A\cos B]}{\cos(A+B)\cos A\cos B}=$$

$$=-\frac{\text{sins}\,(A+B)\sin A\sin B}{\cos(A+B)\cos A\cos B}=\operatorname{tg}C\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Լոգարիթմացնելու համար հարմար ձևի բերեք հետևյալ արտահայտությունները։

539. $\cos 17^0+\sin 35^0$
540. $\sin 12^0-\cos 62^0$
541. $\cos a-\sin\beta$
542. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta$
543. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$
544. $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta$
545. $\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha$
546. $1-2\cos^2\alpha$
547. $1+\sin\alpha$
548. $\sin\alpha-1$
549. $\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha$
550. $\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$
551. $1\pm\operatorname{tg}\alpha$
552. $1\pm\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$
553. $\dfrac{\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}}$
554. $\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta$
555. $(\sin\alpha+\sin\alpha)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2$
556. $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha}$
557. $1-\sin\alpha\cos\alpha$
558. $1-2\cos\alpha+\cos 2\alpha$
559. $1-\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha$
560. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)$
561. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$
562. $\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha$
563. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$
564. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\sin^2(\alpha+\beta)$

Ցույց տվեք, վոր

565. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$

566. $\cos\alpha+\cos\beta-\cos-\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$

567. $\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\alpha+\gamma-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=$
$=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

Ցույց տվեք, վոր յեթե $A+B+C=180^0$*-ի, ապա շեշտել հետևյալ առընդությունները.*

568. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

569. $\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$

570. $\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C = 1$

571. $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} - 2 = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

61. ՕԺԱՆԴԱԿ ԱՆԿՅԱՆ ՆԵՐՄՈՒԾՈՒՄԸ

1. *Նախորդ պարագրաֆում* $\sin\alpha\pm\cos\alpha$ *արտահայտությունը ձևափոխելու համար մուծեցինք* 45°*-ի անկյան սինուսը և կոսինուսը։ Ձեռնտու յեն նույնպես յերբեմն մուծել* 30°*-ի և* 60°*-ի անկյունները. գիտենալով այդ անկյունների յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները, մենք այդ արտահայտությունները, յերբ նրանք պատահեն, կփոխարինենք համապատասխան ֆունկցիաներով։ Մի քանի դեպքերում,* 45°, 30° *և* 60°*-ի անկյունների ֆունկցիաներով փոխարինվող արտահայտություններ ստանալու համար, հարկադրված ենք լինում մի քանի նախապատրաստական ձևափոխումներ կատարել։*

ՈՐԻՆԱԿՆԵՐ

1. $\cos\alpha + \frac{1}{2} = \cos\alpha + \cos 60^\circ = 2\cos\left(\frac{a}{2} + 30^\circ\right)\cos\left(\frac{a}{2} - 30^\circ\right)$

2. $1 + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos 45^\circ \cdot \cos\alpha} = \sqrt{2}\,\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos\alpha}$

3. $\sqrt{3} - 2\sin\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\alpha\right) = \frac{1}{2}(\sin 60^\circ - \sin)\alpha =$

$$= \sin\left(30^\circ - \frac{a}{2}\right)\cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$$

2. Օժանդակ անկյան ներմուծումով կարելի յե ամեն մի ֆունկցիա (*վորը կարող ե նույնիսկ յեռանկյունաչափական վոչ մի ֆունկցիա չպարունակել իր մեջ*) վերածել արտադրյալի:

Ցենթադրենք, թե ունենք $M \pm N$ *գումարը։ Գումարելիներից մեկն ու մեկը դուրս բերենք փակագծից.*

$$M \pm N = M\left(1 \pm \frac{N}{M}\right)$$

$\frac{N}{M}$ *կոտորակը փոխարինում ենք* $\operatorname{tg}\varphi$*-ով։ Այն ժամանակ*

$$M \pm N = M(1 \pm \operatorname{tg}\varphi)\text{։}$$

Այնուհետև, փակագծերի միջի գումարը ձևափոխելով, ինչպես այդ ցույց ե տրված այս պարագրաֆի առաջին բաժնում, կստանանք

$$M \pm N = M\sqrt{2}\,\frac{\sin(45^\circ \pm \varphi}{\cos\varphi}$$

Հաշվելու ընթացքն այսպես ե $\operatorname{tg}\varphi = \frac{N}{M}$ *ֆորմուլով գտնում ենք անկյունը, այնուհետև գտնում ենք* $45^\circ \pm \varphi$ *և հաշվումը շարունակում ըստ* $M + N$*-ի համար դուրս բերած ֆորմուլի։*

Ցեթե հայտնի յե, վոր M *և* N *ունեն դրական արժեքներ, ապա ձևափոխումը կատարվում ե պարզ ձևով. գումարի դեպքում վերցնում ենք* $\frac{N}{M} = \operatorname{tg}^2\varphi$ *և ստանում*

$$M+N=N(1+\mathrm{tg}^2\varphi)=N\frac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{N}{\cos^2\varphi}$$

Տարբերության համար, յեթե $M>N$, յենթադրում ենք $\frac{N}{M}=\sin^3\varphi$ այն ժամանակ

$$M-N=N(1-\sin^2\varphi)=N\cos^2\varphi$$

Հարկավոր է, ի միջի այլոց, նկատել, որ վերջին տեսակի ձևափոխումները շատ քիչ են թեթևացնում հաշվումները։ Անհամեմատ ավելի ձեռնտու յե լինում գումարի յուրաքանչյուր գումարելին առանձին-առանձին հաշվել լոգարիթմների օգնությամբ։

Մի քանի մասնակի դեպքերում ավելի նպատակահարմար է օժանդակ անկյան ներմուծումը, ինչպես օրինակ $a \sin a + b \cos a$ *արտահայտության ձևափոխման համար։ Վարվում ենք հետևյալ ձևով*

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=a\left(\sin\alpha+\frac{b}{a}\cos\alpha\right);\ \frac{b}{a}=\mathrm{tg}\,\varphi;$$

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=a(\sin\alpha+\mathrm{tg}\,\varphi\cos\alpha)=a\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}$$

Ընդհանրապես մասնակի դեպքերում ձևափոխումների պարզությունը կախված է հաջող ուղի ընտրելուց։ Սինուսի կամ կոսինուսի ներմուծումը ավելի պարզ ֆորմուլ է տալիս, քան տանգենսի ներմուծումը, բայց այդ հնարավոր է միայն այն դեպքում, յերբ յեռանկյունաչափական ֆունկցիայով փոխարինվող քանակության աբսոլյուտ մեծությունը մեկ միավորից փոքր եւ Քառակուսիներով կարող են փոխարինվել միայն դրական քանակությունները։

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Լոգարիթմնացնելու համար հարմար ձևի բերեք հետևյալ արտահայտությունները, ներմուծելով օժանդակ անկյուն։

572. $\sqrt{3}+1$ **573.** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ **574.** $\sqrt{3}-\mathrm{tg}\,\alpha$

575. $\sqrt{3}+2\cos\alpha$ **576.** $1+2\sin\alpha$ **577.** $1-2\sin\alpha$

578. $2\cos\alpha-1$ **579.** $\sqrt{2}+2\sin\alpha$ **580.** $3+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha$

581. $\frac{1}{2}-\cos^2\alpha$ **582.** $3-4\sin^2\alpha$ **583.** $1-2\cos^2\alpha$

584. $3-\mathrm{tg}^2\alpha$ **585.** $1+3\,\mathrm{tg}^2\alpha$ **586.** $5+\mathrm{tg}^2\alpha$

587. $\sqrt{2}+2\sin\alpha$ **588.** $3-4\cos^2\alpha$ **589.** $2\,\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha$

590. $\frac{1}{2}+\sin 18^\circ$ **591.** $\sqrt{3}+2\sin 47^\circ$

592. $\frac{\sin\alpha}{3}-\frac{\cos\alpha}{2}$ **593.** $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2$

594. $\sqrt{a^2+b^2}$ **595.** $a\pm\sqrt{a^2+b}$ ($a>0$ *դեպքում*)

596. $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos a}$ ($a>0$ և $b>0$ *դեպքում*)

597. $1-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\beta$ **598.** $\left(\frac{3}{\sqrt{9}}+\frac{5}{\sqrt{7}}\right)\sin 26^\circ$

599. $\frac{a+b}{a-b}$ **600.** $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$ (*յեթե* $0<b<a$)

601. $-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ $\left(\text{յեթե } \frac{p^2}{4}>q\right)$

602. $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ $(\text{յեթե } 0<b<a)$

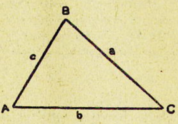
ԳԼՈՒԽ IX

ՇԵՂԱՆԿՅՈՒՆ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

§ 62. ՇԵՂԱՆԿՅՈՒՆ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԵԼԵՄԵՆՏՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ութերորդ խմբակի դասընթացում ապացուցվել եյին սինուսների թեորեմը և կոսինուսների թեորեմը. այդ թեորեմները յեռանկյան անկյունների գումարի ֆորմուլի հետ միասին հնարավորություն եյին տալիս յերեք տվյալների միջոցով վորոշել շեղանկյան յեռանկյան անհայտ ելեմենտները։

Անհայտ ելեմենտների հաշվելը սինուսների թեորեմով հարմար է, վորովհետև կողմը կամ անկյունը ստացվում է պարզ լոգարիթմացումով։



գծ. 74

Այդ նույնը չի կարելի ասել կոսինուսների թեորեմի մասին։ Յեթե ցանկանում ենք անհայտ ելեմենտի հաշվումը կատարել ըստ ֆորմուլի՝ ոգտվելով լոգարիթմային աղյուսակներից, անհրաժեշտ է նախորոք գումարի յուրաքանչյուր գումարելին առանձին հաշվել։ Այսպես, յեռանկյան a *կողմը (գծ. 74) հետևյալ ֆորմուլով՝*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cdot \cos A$$

գտնելու համար, անհրաժեշտ է նախորոք հաշվել յերկու կողմերի քառակուսիների գումարը և $2\,bc \cdot \cos A$ *արտադրյալը։ Այդ պատճառով գործնական հաշվումների ժամանակ ոգտվում են հիմնական ֆորմուլներից հանած մի շարք ավելի հարմար ֆորմուլներից։*

§ 63. ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԱՆԿՅԱՆ ԿԵՍԻ ՏԱՆԳԵՆՍԸ ՎՈՐՈՇԵԼՈՒ ՀԱՄԱՐ ՖՈՐՄՈՒԼՆԵՐ ԴՈՒՐՍ ԲԵՐԵԼԸ

Կոսինուսների թեորեմից ունենք

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - \alpha^2}{2bc}$$

Հավասարության յերկու մասերն ել մեկ միավորից հանելով ստանում ենք

$$1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} =$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2\,bc} = \frac{(a+b-c)\,(a-b+c)}{2\,bc}$$

Հիմնվելով § 59-*ի վրա, կստանանք*

$$1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2}$$

ուստի

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(a + b - c)\cdot(a - b + c)}{2\ bc}$$

կամ

$$\sin \frac{A}{2} \sqrt{\frac{(a + b - c)\ (a - b + c)}{4\ bc}}$$

նշանակելով

$$a + b + c = 2p$$

կունենանք

$$a + b - c = 2\ (p - c),\quad a - b + c = 2\ (p - b)$$

և

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)\ (p - c)}{bc}}$$

Կիրառելով նման ձևի հաշվումներ cos R-*ի և* cos C-*ի նկատմամբ և նշանակելով*

$$b + c - a = 2\ (p - a)$$

կստանանք յերկու ուրիշ ֆորմուլներ, այն է

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)\ (p - c)}{ac}} \qquad \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)\ (p - b)}{ab}}$$

Մեկ միավորին ավելացնելով հիմնական հավասարության յերկու մասերն կստանանք

$$1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\ bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2\ bc} = \frac{(a + b + c)\ (b + c - a)}{2bc}$$

Հիմնվելով § 59 *ի վրա, կստանանք*

$$1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2}$$

Ուստի

$$2\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(a + b + c)\ (b + c - a)}{2\ bc}$$

կամ

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p\ (p - a)}{bc}}$$

Կիրառելով նման ձևի հաշվումներ cos B-*ի և* cos C-*ի նկատմամբ, կըստանանք յեռանկյան անկյունների կեսերի կոսինուսների համար յերկու ուրիշ ֆորմուլներ*

$$\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p\ (p - b)}{ac}}\ ; \qquad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p\ (p - c)}{ab}}$$

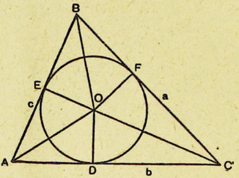
Բաժանելով սինուսների ֆորմուլները կոսինուսների համապատասխան ֆորմուլների վրա, կստանանք յեռանկյան անկյունների կեսերի տանգենսները հաշվելու համար յերեք

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)\ (p - c)}{p\ (p - a)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Դուրս բերած այս բոլոր ֆորմուլներում արմատների առաջ թողնված է միայն դրական նշան, վորովհետև յեռանկյան ամեն մի անկյան կեսը 90°-ից փոքր է, իսկ սուր անկյան սինուսը և տանգենսը միշտ դրական են։



գծ. 75

Տառացված ֆորմուլներին կարելի յե յերկրաչափական լուսաբանում տալ, հիշելով յերկրաչափության մեջ յերեք կողմերի միջոցով յեռանկյան մակերեսի հետևյալ հայտնի ֆորմուլը

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Մյուս կողմից էլ հայտնի յե, վոր $S=pr$, *ուր* r*-ը, հանդիսանում է ներգծած շրջանի շառավիղ (գծ. 75)։ Այս բոլորից հետևում է*

$$r=\frac{S}{p}=\frac{1}{p}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Անկյունների կեսերի տանգենսների համար ֆորմուլները ձևափոխելով այնպես, վոր բոլոր դեպքերում արմատատակ մեծությունները լինեն միատեսակ՝ կստանանք

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=\frac{r}{p-a}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{1}{p-b}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=\frac{r}{p-b}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{p-c}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=\frac{r}{p-c}$$

Վերջին առնչությունները կարելի յեր ստանալ անմիջականորեն այնպիսի ուղղանկյուն յեռանկյուններից, ինչպիսիներն են վեր է ածվել 73 գծանկարի ABC յեռանկյունը։ Կատարեցեք այդ։

§ 64. ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ՅԵՐԿՈՒ ԿՈՂՄԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐԻ ԿԱՄ ՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅԱՆ ՅԵՎ ՅԵՐԿՐՈՐԴ ԿՈՂՄԻ ՀԱՐԱԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՎՈՐՈՇԵԼՈՒ ՀԱՄԱՐ ՖՈՐՄՈՒԼՆԵՐ

Սինուսների թեորեմը տալիս է

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\quad \text{կամ}\quad \frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B};\ \frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$$

Առաջին հավասարության յերկու մասերին էլ մի մի միավոր ավելացնելով, կստանանք

$$\frac{a}{b}+1=\frac{\sin A}{\sin B}+1 \text{ կամ } \frac{a+b}{b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin B}$$

Ստացված հավասարության համապատասխան անդամները բաժանելով $\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$ *հավասարության վրա կստանանք*

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

Բայց

$$\frac{A+B}{2}=90^{0}-\frac{C}{2} \text{ և } \sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$$

Ուստի

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\text{cin}\frac{C}{2}}$$

Կատարենք նման ձևի հաշվումներ յեռանկյան յերկու կողմի տարբերության համար

$$\frac{a}{b}-1=\frac{\sin A}{\sin B}-1\,;\ \frac{a-b}{b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin B}$$

հավասարության յերկու մասերն էլ բաժանելով $\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$*-ի վրա, կստանանք*

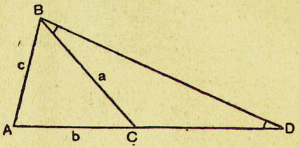
$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

Դուրս բերած ֆորմուլները կոչվում են Մոլվեյդեյի ֆորմուլներ, աստղագետ և մաթեմատիկոս Մոլվեյդեյի անունով, վորը մեռավ Լայպցիգում 1825 թվին։

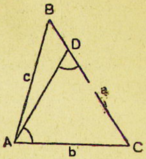
Գրեցեք Մոլվեյդեյի ֆորմուլները յեռանկյան մյուս կողմերի համար։

Մոլվեյդեյի ֆորմուլները կարելի յեր դուրս բերել անմիջականորեն յերկրաչափական հետևյալ նկատառումներից

1) *Յեռանկյուն* ABC-*ի մեջ (գծ. 76)* AC *կողմը շարունակված է այնպես, որ* BC = CD։



գծ. 76



գծ. 77

Կիրառելով սինուսների թեորեմը ABD *յեռանկյան* AD *և* AB *կողմերի նկատմամբ, կստանանք*

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin ABD}{\sin ADB}=\frac{\sin\left(B+\frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}}\quad \text{բայց}\quad B+\frac{C}{2}=B+90^{\circ}-$$

$$-\frac{A+B}{2}=90^{\circ}-\frac{A-B}{2}$$

Ուստի

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

2) *Յեռանկյուն* ABC-*ի մեջ (գծ. 77) կողմերից* AC = DC։ *Կիրառելով սինուսների թեորեմը* ABD *յեռանկյան* BD *և* AB *կողմերի նկատմամբ, կստանանք*

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin BAD}{\sin BDA}$$

$$\angle BAD=\angle BAC-\angle DAC=A-\left(90^{\circ}-\frac{C}{2}\right)=$$

$$=A-90^{\circ}+\frac{C}{2}=A-90^{\circ}+90^{\circ}-\frac{A+B}{2}=\frac{A-B}{2}$$

$$\angle BDA=180^{\circ}-\angle ADC=180^{\circ}-\left(90^{\circ}-\frac{C}{2}\right)=$$

$$=90^{\circ}+\frac{C}{2};\quad \sin BDA=\cos\frac{C}{2}$$

այստեղից կստանանք

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

§ 65. ՏԱՆԳԵՆՍՆԵՐԻ ԹԵՈՐԵՄԸ

Մոլվեյդեյի *մի ֆորմուլի համապատասխան մասերը բաժանելով մյուսի վրա, կստանանք*

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}$$

կամ, վորովհետև

$$\frac{C}{2}=90^{0}-\frac{A+B}{2} \text{ և } \operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}$$

Ստացած ֆորմուլով արտահայտվում է տանգենսների թեորեմը:

Գրեցեք տանգենսների թեորեմի արտահայտությունը յեռանկյան մյուս զույգ կողմերի նկատմամբ:

§ 66. ՑԵՌԱՆԿՅԱՆ ՄԱԿԵՐԵՍԻ ՏԱՐԲԵՐ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

1. *Նշանակելով յեռանկյան բարձրությունները* h_a, h_b, h_c, *վորոնք իջեցրված են* a, b *և* c *կողմերին՝ կստանանք*

$$S=\frac{a\,h_a}{2}=\frac{b\,h_b}{2}=\frac{c\,h_c}{2}$$

2. $$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

3. $$S=\frac{ab\sin C}{2}=\frac{ac\sin B}{2}=\frac{bc\sin A}{2}$$

4. *Վերջին ֆորմուլի մեջ կողմերից մեկը գտնելով մյուսի միջոցով, կստանանք*

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B}=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}=$$

$$=\frac{c^2\sin A\sin B\sin C}{2\sin^2 C}=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

5. $S=pr$, *ուր* r-*ը ներգծյալ շրջանի շառավիղն է:*

6. $$\frac{r}{p-a}=\operatorname{tg}\frac{A}{2};\ \frac{r}{p-b}=\operatorname{tg}\frac{B}{2};\ \frac{r}{p-c}=\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

կամ

$$r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}=(p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

այստեղից կստանանք

$$S=p(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=p(p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}=p(p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

Վերջին ֆորմուլի յերեք արտահայտությունների համապատասխան անդամները միմյանց հետ բազմապատկելով և բաժանելով հավասարության յերկու մասերն էլ S^2 վրա, կստանանք

$$S = p^2 \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

§ 67. *ՇԵՂԱՆԿՅՈՒՆ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ԼՈՒԾԵԼՈՒ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԴԵՊՔԵՐԸ*

1. Տրված են յեռանկյան մի կողմը յեվ նրան կից յերկու անկյունները:

Օրինակ, տրված են b, A *և* C*։ Գտնել յեռանկյան մնացած էլեմենտները և նրա մակերեսը։*

Յեռանկյան յերրորդ B *անկյունը վորոշվում է ըստ հետևյալ ֆորմուլի*

$$B = 180^\circ - (A + C)$$

Անհայտ a *և* c *կողմերը վորոշվում են սինուսների թեորեմով, վորից*

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} = 2 R \sin A\;;\quad c = \frac{b \sin C}{\sin B} = 2 R \sin C$$

Հենց այդ ֆորմուլներից էլ կարելի յե վորոշել արտագծած շրջանի շառավիղը

$$2R = \frac{b}{\sin B}$$

Ներգծած շրջանի շառավիղը վորոշվում է այսպես

$$r = (p - a) \operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p - b) \operatorname{tg}\frac{B}{2} = (p - c) \operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

Յեռանկյան մակերեսը վորոշվում է յերեք կողմերի միջոցով կամ $S = pr$ *ֆորմուլով։*

Ստուգման համար տվյալ b *կողմը հաշվում են Մոլվեյդեյի ֆորմուլով*

$$b = \frac{(a - c)\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A - C}{2}}$$

Թվային օրինակ.—*Վճռենք յեռանկյունը, յեթե* $b = 25{,}4$ m-*ի*

$\angle A = 48^\circ 53'$ $\quad\angle C = 93^\circ 25'$

Լուծում

$$\begin{aligned} A &= 48^\circ 53' \\ C &= 93^\circ 25' \\ \hline A + C &= 142^\circ 18' \\ B &= 37^\circ 42' \end{aligned}$$

$$\lg 2R = -\begin{array}{l} \lg b \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 1{,}4048 \\ \lg \sin B \;.\;.\;.\;.\; \bar{1}{,}7864 \end{array}$$

$$\lg 2R = 1{,}6184 \qquad R = 20{,}77 \text{ m}$$

$$\lg a = +\begin{array}{l} \lg 2R \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 1{,}6184 \\ \lg \sin A \;.\;.\;.\;.\;.\; \bar{1}{,}8770 \end{array}$$

$$\lg a = 1{,}4954 \qquad a = 31{,}29 \text{ m}$$

$$\lg c = +\begin{array}{l} \lg 2R \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 1{,}6184 \\ \lg \sin C \;.\;.\;.\;.\;.\; \bar{1}{,}9992 \end{array}$$

$$\lg c = 1{,}6176 \qquad c = 41{,}46 \text{ m}$$

$$\lg r = \begin{array}{l} \lg (p - a) \;.\;.\;.\;.\; 1{,}2490 \\ \lg \operatorname{tg}\frac{A}{2} \;.\;.\;.\;.\;.\; \bar{1}{,}6576 \end{array}$$

$$\lg r = 0{,}9066 \qquad r = 8{,}065 \text{ m}$$

$$\lg S = \begin{array}{l} \lg p \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 1{,}6905 \\ \lg r \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 0{,}9066 \end{array}$$

$$\lg S = 2{,}5971 \qquad S = 395{,}5 \text{ m}^2$$

Ստուգում

$$b=\frac{(c-a)\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C-A}{2}}$$

$$\begin{aligned} \lg b = +\lg(c-a) & \;\ldots\ldots\; 1{,}0078 \\ \lg\cos\frac{B}{2} & \;\ldots\ldots\; \bar{1}{,}9761 \\ -\lg\sin\frac{C-A}{2} & \;\ldots\ldots\; \bar{1}{,}5785 \\ \hline \lg b & = 1{,}4049 \end{aligned}$$

2. Տված են յեռանկյան յերկու կողմերը յեվ նրանցով կազմված անկյունը:

Օրինակ, տված են a, b *և* C*։ Պետք է գտնել յեռանկյան մնացած էլեմենտները և նրա մակերեսը։*

Յեռանկյան յերրորդ կողմը կարելի կլիներ ստանալ անմիջականորեն կոսինուսների թեորեմի վրա հենվելով, բայց այդ ֆորմուլն անհարմար է լոգարիթմային հաշվումների համար։ Ուստի A *և* B *անկյունները վորոշվում են տանգենսների թեորեմի և* A+B=180°—C *առընչության հիման վրա։*

Ըստ տանգենսների թեորեմի

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}} \quad \textit{այստեղից} \quad \operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{(a-b)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{(a+b)}$$

Այս ֆորմուլի վրա հիմնված վորոշվում է $\frac{A-B}{2}$ *անկյունը։*

Նշանակելով $\frac{A-B}{2}=\alpha$ *ստանում ենք*

$$A+B=180^0-C$$

$$A-B=2\alpha$$

վորտեղից

$$A=90^0+\alpha-\frac{C}{2}$$

$$B=90^0-\alpha-\frac{C}{2}$$

c *կողմն ստացվում է սինուսների թեորեմի միջոցով*

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{b\sin C}{\sin B}$$

Արտագծած շրջանի շառավիղն ստացվում է հետևյալ առընչության հիման վրա

$$2R=\frac{a}{\sin A}$$

Ներգծած շրջանի շառավիղն ըստ ֆուրմուլի $r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$

Մակերեսը $S=pr$

Ստուգումը կարելի յե կատարել հիմնվելով a *և* b *կողմերի հաշվումների վրա ըստ* Մոլվեյդեյի *ֆորմուլի։*

Թվային օրինակ a=45,3 m; b=34,8 m $\angle C=29^0 34'$

a—b=10,5; a+b=80,1; $\frac{C}{2}=14^0 47'$

$$\begin{array}{lrl} \lg \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = + \lg(a-b) & \ldots\ldots & 1,0212 \\ + \lg \operatorname{ctg}\frac{C}{2} & \ldots\ldots & 0,5786 \\ - \lg(a+b) & \ldots\ldots & 1,9036 \\ \hline \lg \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} & = & \bar{1},6962 \\ \frac{A-B}{2} & = & 26^\circ 25' \end{array}
\qquad
\begin{array}{rl} A+B = & 150^\circ 26' \\ A-B = & 52^\circ 50' \\ \hline A = & 101^\circ 38' \\ B = & 48^\circ 48' \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \lg 2R = \lg a & \ldots\ldots & 1,6561 \\ - \lg \sin A & \ldots\ldots & \bar{1},9910 \\ \hline \lg 2R & = & 1,6651 \\ 2R & = & 46,25 \end{array}
\qquad
\begin{array}{lrl} \lg c = + \lg 2R & \ldots\ldots & 1,6651 \\ + \lg \sin C & \ldots\ldots & \bar{1},6932 \\ \hline \lg c & = & 1,3583 \\ c & = & 22,82 \text{ m} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} p = & 51,46 \\ p-a = & 6,16 \\ \frac{A}{2} = & 50^\circ 39' \end{array}
\qquad
\begin{array}{lrl} \lg r = + \lg(p-a) & \ldots\ldots & 0,7896 \\ + \lg \operatorname{tg}\frac{A}{2} & \ldots\ldots & 0,0888 \\ \hline \lg r & = & 0,8784 \\ r & = & 7,6 \text{ m} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \lg S = + \lg p & \ldots\ldots & 1,7115 \\ + \lg r & \ldots\ldots & 0,8784 \\ \hline \lg S & = & 2,5899 \\ S & = & 389 \text{ m}^2 \end{array}$$

Մտուգում $a = \dfrac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$

$$\begin{array}{lrl} \lg a = + \lg(b+c) & \ldots\ldots & 1,7605 \\ + \lg \sin\frac{A}{2} & \ldots\ldots & \bar{1},8894 \\ - \lg \cos\frac{B-C}{2} & \ldots\ldots & \bar{1},9939 \\ \hline \lg a & = & 1,6560 \\ a & = & 45,29 \text{ m} \end{array}$$

3. *Տված է յերկու կողմերը և դրանցից մեկն ու մեկի դիմացի անկյունը։*

Որինակ, տված է a, b *և* A*։ Գտնենք մնացած էլեմենտները և յեռանկյան մակերեսը։*

Տված մյուս կողմի դիմացի B *անկյան արժեքն ստացվում է սինուսների թեորեմի միջոցով*

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

Այն դեպքում, յերբ $\frac{b \sin A}{a} > 1$, *լուծումը հնարավոր չէ։ Իսկ այն դեպքում, յերբ* $\frac{b \sin A}{a} = 1$, *ստանում ենք* $\sin B = 1$, *հետևապես,* $B = 90^\circ$ *և լուծման շարունակությունը կատարվում է ուղղանկյուն յեռանկյան ֆորմուլներով։*

Այն դեպքում, յերբ

$$\frac{b \sin A}{a} < 1, \quad \sin B < 1$$

և B անկյունը, ինչպես հայտնի յե, կարող ե ունենալ յերկու արժեք, վորոնցից մեկը փոքր ե 90^0-ից, իսկ մյուսը մեծ ե 90^0-ից։

Անկյուն B-ի այդ արժեքների գումարը հավասար ե 180^0-ի, ուստի այդ արժեքները կարելի յե նշանակել B_1 և 180^0-B_1։ Անկյուն B-ի արժեքների ընտրությունը կախված ե յեռանկյան կողմերի բաղդատական մեծություններից։ Յեռանկյան մեջ մեծ կողմի դիմաց գտնվում ե մեծ անկյունը։

Այն դեպքում, յերբ $a > b$, անկյուն A-ն պետք ե մեծ լինի անկյուն B-ից։ Դրա համար ել անկյուն B-ն չի կարող լինել բութ, քանի վոր այդ դեպքում անկյուն A-ն ևս բութ կլինի, իսկ յեռանկյունը յերկու բութ անկյուն ունենալ չի կարող։ Հետևապես, յերբ $a > b$ անկյուն B-ն պետք ե լինի սուր։ Այն դեպքում, յերբ $a=b$, յեռանկյունը հավասարասրուն ե, և $\angle B = \angle A$։ Այն դեպքում, յերբ $a < b$, անկյուն B-ն պետք ե մեծ լինի անկյուն A-ից։ Ուստի, յեթե անկյուն A-ն բութ ե, լուծումն անհնարին ե, Իսկ յեթե անկյուն A-ի արժեքը փոքր ե 90^0-ից, B-ի համար հնարավոր են B_1 և 180^0-B_1 յերկու արժեքները։

Յերրորդ կողմը վորոշվում ե սինուսների թեորեմով։

Զննեցեք յեռանկյան կառուցումը տված յերկու կողմերի և նրանցից մեկն ու մեկի դիմաց գտնվող անկյան միջոցով և յերկրաչափական միջոցներով ստուգեցեք տարբեր վճիռներ ստանալու հնարավորությունը։

Վորոշեցեք, ինչպիսի վճիռներ կստացվեն, յերբ տվյալ անկյունը գտնվում ե տված կողմերից մեծի և յերբ գտնվում ե փոքրի դիմաց։

Ստուգումը կատարվում ե Մոլվեյդեյի ֆորմուլով։

Թվային որինակ $a=15{,}4\ m$; $b=12{,}7\ m$; $\angle A=36^0 18'$

$$\begin{array}{rll} \lg\sin B = & +\lg b \ \dots & 1{,}1038 \\ & +\lg\sin A \ \dots & \bar{1}{,}7723 \\ & -\lg a \ \dots & 1{,}1875 \\ \hline & \lg\sin B = & \bar{1}{,}6886 \\ & B = & 29^0 13{,}5' \end{array}$$

Վորովհետև $a > b$, անկյուն B-ն չի կարող լինել բութ և $29^0 13{,}5'$ արժեքը միակն ե անկյուն B-ի համար։

$C=180^0-(36^0 18'+29^0 13{,}5')=114^0 28{,}5'$

$$\begin{array}{rll} \lg 2R = & \lg a \ \dots & 1{,}1875 \\ & -\lg\sin A \ \dots & \bar{1}{,}7723 \\ \hline & \lg 2R = & 1{,}4152 \\ & 2R = & 26{,}02 \end{array} \qquad \begin{array}{rll} \lg c = & +\lg 2R \ \dots & 1{,}4152 \\ & +\lg\sin C \ \dots & \bar{1}{,}9591 \\ \hline & \lg c = & 1{,}3743 \\ & c = & 23{,}68\ m \end{array}$$

$p=25{,}89$

$p-a=10{,}49$

$$\begin{array}{rll} \lg r = & +\lg(p-a) \ \dots & 1{,}0208 \\ & +\lg tg\frac{A}{2} \ \dots & \bar{1}{,}4894 \\ \hline & \lg r = & 0{,}5102 \\ & r = & 3{,}24\ m \end{array}$$

Ստուգում

$$\begin{array}{rll} \lg a = & +\lg(c+b) \ \dots & 1{,}5609 \\ & +\lg\sin\frac{A}{2} \ \dots & \bar{1}{,}4935 \\ & -\lg\cos\frac{C-B}{2} \ \dots & \bar{1}{,}8667 \\ \hline & \lg a = & 1{,}1875 \end{array} \qquad \begin{array}{rll} \lg S = & +\lg p \ \dots & 1{,}4131 \\ & +\lg r \ \dots & 0{,}5102 \\ \hline & \lg S = & 1{,}9233 \\ & S = & 83{,}81\ m^2 \end{array}$$

4. Տրված են յեռանկյան յերեք կողմերը

Վորոշել մնացած ելեմենտները։

Յեռանկյան անկյուններն ավելի հարմար ե հաշվել անկյունների կեսերի տանգենսների ֆորմուլներով

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Ամենից հարմար ե նախորոք ներգծած շրջանի շառավիղը հաշվել հետևյալ ֆորմուլով

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

այդ դեպքում $S=pr$

Ստուգում $A+B+C=180^\circ$

Թվային որինակ $a=82{,}5$ m; $b=48{,}3$ m; $c=56{,}6$ m

$p=93{,}7$

$p-a=11{,}2$

$p-b=45{,}4$

$p-c=37{,}1$

$$\begin{array}{rll}
\lg r = & \frac{1}{2}\lg(p-a) \ldots\ldots & 0{,}5246 \\
+ & \frac{1}{2}\lg(p-b) \ldots\ldots & 0{,}82855 \\
+ & \frac{1}{2}\lg(p-c) \ldots\ldots & 0{,}7847 \\
- & \frac{1}{2}\lg p \ldots\ldots\ldots & 0{,}98585 \\
\hline
 & & \lg r = 1{,}1520 \\
 & & r = 14{,}19 \text{ m}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \lg r \ldots\ldots & 1{,}1520 \\
- \quad \lg(p-a) \ldots\ldots & 1{,}0492 \\
\hline
\lg \operatorname{gt}\frac{A}{2} = & 0{,}1028 \\
\frac{A}{2} = & 51^\circ 43' \\
A = & 103^\circ 26'
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \lg r \ldots\ldots & 1{,}1520 \\
- \quad \lg(p-b) \ldots\ldots & 1{,}6571 \\
\hline
\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2} = & \bar{1}{,}4949 \\
\frac{B}{2} = & 17^\circ 21{,}4' \\
B = & 34^\circ 42{,}8'
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\lg\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \lg r \ldots\ldots & 1{,}1520 \\
- \quad \lg(p-c) \ldots\ldots & 1{,}5694 \\
\hline
\lg\operatorname{tg}\frac{C}{2} = & \bar{1}{,}5826 \\
\frac{C}{2} = & 20^\circ 55{,}7' \\
C = & 41^\circ 51{,}4'
\end{array}$$

Ստուգում

$A+B+C=180^\circ 0{,}2'$

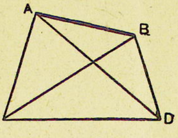
68. ՇԵՂԱՆԿՅՈՒՆ ՅԵՌԱՆԿՅԱՆ ՖՈՐՄՈՒԼՆԵՐԻ ԿՑՈՒՄԸ ԶԱՆԱԶԱՆ ՀԱՐՑԵՐԻ

1. Յերկու անմատչելի կետերի միջև յեղած հեռավորության վորոշելը

Ենթադրենք, անհրաժեշտ է վորոշել A *և* B *կետերի միջև յեղած հեռավորությունը (գծ. 78)։*

Ընտրում են C *և* D *յերկու կետերն այնպես, վոր թե մեկից և թե մյուսից տեսանելի լինեն* A *և* B *կետերը։*

CD *հեռավորությունը, վոր կոչվում է* բազիս, *ստացվում է անմիջական չափումով։ Բացի այդ, դնելով անկյունաչափ գործիքը* C *և* D *կետերում, չափում են* ACD, BCD, ADC *և* BDC *չորս անկյունները։*



գծ. 78

Յեռանկյուն ACD-*ից ստանում ենք*

$$AC = \frac{CD \cdot \sin ADC}{\sin(ADC + ACD)}$$

Յեռանկյուն CBD-*ից ստանում ենք*

$$CB = \frac{CD \cdot \sin BDC}{\sin(BCD + BDC)}$$

Այսպիսով, յեռանկյուն ACB-*ի մեջ հայտնի յեն նրա* AC *և* CB *կողմերը և նրանց միջի անկյուն* $ACB = \angle ACD - \angle BCD$։ *Կցելով վերջին յեռանկյանը Մ ո լ վ ե յ դ ե յ ի ֆորմուլը, գտնում ենք* AB *կողմը։*

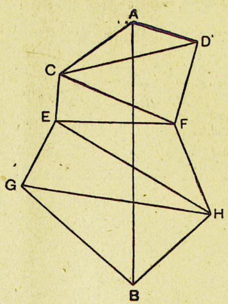
Վերստուգողական հաշվումը կայանում է նրանում, վոր AB-*ն վորոշում են* ABD *յեռանկյունուց, վորի համար նախորոք հաշվում են* AD *և* BD *կողմերը։*

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆ

603. *Գտեք յերկու անմատչելի կետերի միջև յեղած հեռավորությունը, յեթե բազիսը հավասար է* 25 m-*ի և, բազիսի մի ծայրում չափված անկյունները հավասար են* 60^0-*ի և* 35^0-*ի, իսկ բազիսի մյուս ծայրում չափված անկյունները՝* 48^0 *և* 27։

2. Տրիանգուլյացիա։ *Յերկրի միջօրեականի աղեղի յերկարությունը չափելու համար մի հարթ վայրում ընտրում են բազիս, և ապա այդ բազիսը չափում վորքան հնարավոր է մեծ ճշտությամբ։ Այնուհետև* A *և* B *ծայրակետերի միջև (գծ. 79) ընտրում են մի շարք միջանկյալ կետեր այնպես, վոր նրանցից յուրաքանչյուրում հնարավոր լինի չափել այնպիսի ուղղություններով կազմած անկյուններ, վորոնք ուղղված լինեն առնվազը դեպի յերկու տարբեր կետեր։ Բացի այդ, սահմանում են նաև բազիսի ուղղության և միջօրեականի ուղղության միջև գտնվող անկյունը։ Ստացվում է յեռանկյունների ցանց. հաջորդաբար վճռելով այդ յեռանկյունները, կարելի յե հաշվել յերկու ծայրակետերի միջև յեղած հեռավորությունը։*

Առաջին յեռանկյուն ADC-ի մեջ հայտնի յե AD կողմը և բոլոր անկյունները։ Հաշվելով յեռանկյան մնացած կողմերը և իմանալով բազիսի և միջօրեականի կազմած DAB անկյան մեծությունը, կարելի յե վորոշել միջօրեականի աղեղի յերկարությունը, վորը գտնվում է այդ յեռանկյան սահմաններում։ Մի յեռանկյունուց մյուս յեռանկյանն անցնելով, հաշվում են ամբողջ AB աղեղի յերկարությունը։ Իմանալով ծայրավայրերի լայնությունները, ստանում են աղեղի յերկարությունն աստիճաններով և ապա դրա վրա հիմնվելով հաշվում ամբողջ միջօրեականի յերկարությունը։



գծ. 79

Միջօրեականի աղեղի յերկարության չափման աշխատանքները կոչվում են տրիանգուլյացիոն *աշխատանքներ(«տրիանգուլյացիա» բառի արմատը ծագում է լատիներեն «յեռանկյուն» բառից)։*

Տրիանգուլյացիոն աշխատանքներ կատարում են մեծ տերրիտորիաների վրա և յերբեմն այսպիսի աշխատանքները տևում են մի շարք տարիներ։ Այսպես, Ֆրանսիական Մեծ Հեղափոխության ժամանակ, Ֆրանսիայում հսկա աշխատանք տարվեց միջօրեականի աղեղի յերկարությունը Բարցելոնից մինչև Դյունկերխեն չափելիս. այդ խոշոր աշխատանքը տևեց 8 տարի։ Այդ աշխատանքի վրա հիմնվելով սահմանել են մետրի յերկարությունը, վորը հավասար է յերկրի միջօրեականի $\frac{1}{4 \cdot 10^7}$ *մասին։ Հին Ռուսաստանի սահմաններում* XIX-*րդ դարի առաջին կիսում չափվեց Դանուբի ափերից մինչև Տորնեո (Շվեդյայի և Ֆինլանդիայի սահմանը) միջօրեականի* 25°20′ *աղեղի յերկարությունը։*

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

604. *Թղթի մի մեծ թերթի վրա վերցրեք միմյանցից վորքան կարելի յե հեռու գտնվող յերկու* A *և* B *կետեր, ընտրեցեք բազիս և մի շարք միջանկյալ կետեր։ Բանոնով չափեցեք բազիսը* 0,5 mm-*ի մոտավոր ճշտությամբ, տրանսպորտիրով վորոշեցեք լրացուցիչ կետերից յուրաքանչյուրում գտնվող անկյունները և հաշվեցեք* A *և* B *կետերի միջև յեղած հեռավորությունը։*

Ստուգելու համար չափեցեք այդ կետերի միջև յեղած հեռավորությունը և տոկոսներով արտահայտեցեք հաշվումից և չափումից ստացած մեծությունների տարբերությունը։

Նշանակումներ: *Յեռանկյան կողմեր՝* a, b *և* c. *անկյուններ՝* A, B *և* C. *բարձրություններ՝* h_a, h_b *և* h_c . *արտագծած շրջանի շառավիղ՝* R. *ներգծած շրջանի շառավիղ՝* r։

Գտեք անհայտ ելեմենտները, յեթե տված են

605. $a = 395,16$	$A = 84^{\circ}17'$	$B = 72^{\circ}37'$
606. $b = 48,08$	$A = 105^{\circ}19'$	$C = 43^{\circ}11'$
607. $c = 28,7$	$A = 51^{\circ}30'$	$B = 70^{\circ}46'$
608. $c = 48,04$	$A = 96^{\circ}14'$	$B = 53^{\circ}46'$
609. $a = 37,55$	$b = 41,56'$	$C = 75^{\circ}25'$
610. $a = 23,7$	$b = 28,5$	$A = 63^{\circ}24'$
611. $a = 125,3$	$c = 65,24$	$B = 29^{\circ}18'$
612. $a = 53,08$	$c = 32,32$	$B = 107^{\circ}0'$
613. $b = 829$	$c = 481$	$A = 43^{\circ}57'$
614. $b = 50,01$	$c = 44,02$	$B = 72^{\circ}11'$
615. $a = 89,5$	$b = 63,2$	$A = 38^{\circ}14'$
616. $a = 137,4$	$b = 73,2$	$B = 63^{\circ}45'$
617. $b = 1189$	$c = 721$	$B = 31^{\circ}52'$
618. $b = 24,15$	$c = 18,27$	$C = 49^{\circ}8'$
619. $a = 90,37$	$c = 78,21$	$C = 57^{\circ}28'$
620. $a = 162,5$	$c = 467,02$	$A = 30^{\circ}17'$
621. $a = 53,4$	$c = 43.8$	$A = 29^{\circ}34'$
622. $a = 25$	$b = 14$	$c = 16$
623. $a = 89,2$	$b = 75,3$	$c = 57,1$
624. $a = 85,4$	$b = 127$	$c = 45,8$
625. $a = 564$	$b = 1275$	$c = 893$
626. $a = 2364,5$	$b = 4879,2$	$c = 3700,7$
627. $R = 23,4$	$A = 71^{\circ}12'$	$B = 52^{\circ}13'$
628. $R = 56,34$	$A = 64^{\circ}28'$	$B = 72^{\circ}29'$
629. $R = 87$	$a = 98$	$b = 143$
630. $R = 102,18$	$a = 120,5$	$b = 98,9$
631. $r = 18$	$A = 25^{\circ}18'$	$B = 63^{\circ}46'$
632. $r = 27,12$	$A = 101^{\circ}10'$	$C = 46^{\circ}8'$
633. $h_a = 29,1$	$B = 115^{\circ}34'$	$C = 39^{\circ}18'$

634. *Վորոշեցեք յեռանկյան անկյունները, վորի կողմերը հարաբերում են միմյանց այնպես, ինչպես* $4 : 5 : 7$

635. *Վորոշեցեք ուղղանկյուն յեռանկյան անհայտ ելեմենտները, վորի էջերի գումարը հավասար ե* 38 cm-*ի և սուր անկյուններից մեկն ե* $54^{\circ}24'$

636. *Վորոշեցեք յեռանկյան անհայտ ելեմենտները, յեթե* A *և* C *գագաթներից* B *անկյան բիսսեկտորին իջեցրած ուղղահայացների յերկարությունները հավասար են* 15 cm-*ի և* 25 cm-*ի և անկյուն* B-*ն հավասար ե* $63^{\circ}18'$

637. *Յեռանկյուն* ABC-*ի մեջ* AB *կողմի* D *կետից տարած ե* DE *ուղիղը զուգահեռ* AC-*ին։ Վորոշեցեք յեռանկյան անհայտ ելեմենտները, յեթե* $DE = 18$ cm, $\angle ABC = 65^{\circ}33'$, $\angle BCD = 32^{\circ}17'$

638. *Վորոշեցեք զուգահեռագծի կողմերը, անկյունները և մակերեսը, յեթե անկյունագծերը հավասար են* 18 cm-*ի և* 12 cm-*ի, վորոնք հատվում են* $76^{\circ}25'$ *անկյան տակ։*

639. *Գտեք տրապեցի անկյուններն ու մակերեսը, յեթե տված են նրա չորս կողմը։*

640. *Գտեք տրապեցի մակերեսը, յեթե հիմքերը հավասար են* 85,3-*ի և* 18,4-*ի, բացի այդ, մեծ հիմքը կողերի հետ կազմում է* $55^\circ57'$-*ի և* $68^\circ34'$-*ի անկյուններ։*

641. *Գտեք* A *և* B *յերկու անմատչելի կետերի միջև յեղած հեռավորությունը, յեթե բազիսի յերկարությունը հավասար է* 225 m-*ի և բազիսի մի ծայրում չափված անկյունները հավասար են* $68^\circ45'$-*ի և* $54^\circ23'$-*ի, իսկ մյուս ծայրի չափվածները հավասար են* $75^\circ27'$-*ի և* $43^\circ53'$-*ի։*

642. *Վորոշեցեք ուղիղ կլոր կոնին արտագծած գնդի ծավալը, յեթե կոնի ծնիչը հավասար է* 25,3 cm-*ի և հիմքի հետ կազմում է* $65^\circ38'$-*ի անկյուն։*

643. *Վորոշեցեք ուղիղ կլոր կոնին ներգծած գնդի ծավալը, յեթե կոնի հիմքի շառավիղը հավասար է* 12 cm-*ի և գագաթի անկյունն է* $62^\circ34'$

644. *Վորոշեցեք ուղղանկյուն յեռանկյուն հիմք ունեցող բուրգի ծավալը, յեթե բուրգի կողը, վորն անցնում է հիմքի ուղիղ անկյան գագաթով, հավասար է* 15,4 cm-*ի և ուղղահայաց է հիմքի մակերեսին, և յեթե մյուս յերկու կողերը հիմքի մակերեսի հետ կազմում են* $64^\circ43'$-*ի և* $73^\circ25'$-*ի անկյուններ։*

645. 80,2 m *հեռավորության վրա գտնվող աշտարակը յերևում է* $62^\circ11'$ *անկյան տակ։ Վորոշեցեք աշտարակի բարձրությունը, յեթե անկյունաչափ գործիքի բարձրությունը հավասար է* 1,2 m-*ի։*

646. *Գետի ափով տարված է* 40 m *յերկարության ուղիղ գիծ, վորի ծայրերից հակառակ ափին գտնվող ծառի հիմքին տարած ուղիղները կազմում են նրա հետ* $65^\circ19'$ *և* $73^\circ18'$-*ի անկյուններ։ Վորոշեցեք գետի լայնությունը։*

ԳԼՈՒԽ X

ՑՈՒՑՉԱՅԻՆ ԼՈԳԱՐԻԹՄԱՅԻՆ ՅԵՎ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ԲԱՐՁՐ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

§ *69.* ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ 1-ԻՆ ՅԵՎ 2-ՐԴ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԲԵՐՎՈՂ ԲԱՐՁՐ ԱՍՏԻՃԱՆՆԵՐԻ ՊԱՐԶ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Բարձր աստիճանների հավասարումները, վորոնք բերվում են արդեն մեզ հայտնի գծային և քառակուսի հավասարումների, ինչպես և բարձր աստիճանների հավասարումների սիստեմները, վորոնք բերվում են ավելի ցածր աստիճանների սիստեմների, չափազանց բազմաթիվ են և նրանց լուծման յեղանակները տարբեր։ Այստեղ ընդհանուր մեթոդներ սահմանելը դժվար է, վորովհետև հավասարումների ձևի առանձնահատկությունները հաճախ հնարավորություն են տալիս մտցնել նրանց լուծման մեջ կարևոր պարզաբանումներ:

Մեկ անհայտով մեկ հավասարումը լուծելու դեպքում ոգտվում են օժանդակ *անհայտի ներմուծմամբ նախ վորևե* արհեստական կերպարանափոխությամբ, *օրինակ, արտադրիչների վերլուծելով հավասարման ձախակողմյան մասը (յեթե աջակողմյան մասը հավասար է զերոյի), հավասարման երհակ անդամները մտցնելով փակագծերի մեջ, վորևե անդամը յերկուսի բաժանելով և այլն։*

Սակայն մի քանի տիպի հավասարումների համար գոյություն ունեն վորոշ յեղանակներ, վորոնք հնարավորություն են տալիս հարմարությամբ և հաշվումների մեջ խնայողություն անելով լուծել այդ հավասարումները։ Դիտենք յերեք տիպի այդպիսի հավասարումներ։

§ 70. ՉՈՐՐՈՐԴ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ԱՆԴՐԱԴԱՐՁ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Հետևյալ ձևի 4-րդ աստիճանի լրիվ հավասարումը

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

կոչվում է անդրադարձ, *վորովհետև* a *և* b *գործակիցները կարծես թե վերադառնում են, այնպես վոր հավասարման սկզբից և վերջից* հավասարապես հեռացված *անդամների* գործակիցները միատեսակ են:

Այդպիսի հավասարումների լուծման յեղանակը հետևյալն է. բաժանում ենք հավասարման յերկու մասերը x^2*-ով.*

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

և վերցնում ենք փակագծերի մեջ միատեսակ գործակիցներով անդամները

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Այժմ յենթադրելով վոր $x + \frac{1}{x} = z$ *բարձրացնում ենք քառակուսի աստիճանի այդ հավասարության յերկու մասերը և ստանում.*

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = z^2$$

վորտեղից

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$$

Հավասարում (1) *ընդունում է հետևյալ ձևը*

$$a(z^2 - 2) + bz + c = 0$$

կամ

$$az^2 + bz + c - 2a = 0$$

Յենթադրելով, վոր $c - 2a = c_1$ *կստանանք հետևյալ քառակուսի հավասարումն*

$$az^2 + bz + c_1 = 0$$

Գտնելով նրա z_1 *և* z_2 *յերկու արմատները՝ կստանանք*

$$x + \frac{1}{x} = z_1$$

$$x + \frac{1}{x} = z_2$$

վորտեղից

$$x^2 - z_1x + 1 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

$$x^2 - z_2x + 1 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Ստանում ենք x*-ի նկատմամբ* (2) *և* (3) *յերկու քառակուսի հավասարումները, վորոնց լուծումը տալիս է անդրադարձ հավասարման չորս արմատները։ Այդ արմատները զույգ-զույգ փոխադարձ—հակադարձ են, վորովհետև նրանց յերկուական արտադրյալները հավասար են մեկ միավորի։*

Օրինակ, լուծենք հետևյալ հավասարումը

$$6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$$

Լուծման սխեման

$$6x^2+5x-38+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}=0$$

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0$$

$$x+\frac{1}{x}=z;\ 6(z^2-2)+5z-38=0;\ 6z^2+5z-50=0$$

$$z=\frac{-5\pm\sqrt{25+4\cdot6\cdot50}}{12}=\frac{-5\pm35}{12}$$

այսինքն

$$z_1=\frac{5}{2}\qquad z_2=-\frac{10}{3}$$

Այժմ z_1-ի արժեքը տեղադրելով հավասարում (2) մեջ, կստանանք.

$$x^2-\frac{5}{2}x+1=0;\ 2x^2-5x+2=0$$

վորտեղից

$$x=\frac{5\pm3}{4}\ \text{այսինքն}\ x_1=2;\ x_2=\frac{1}{2}$$

Յեվ ապա z_2-ի արժեքը տեղադրելով հավասարում (3) մեջ, կստանանք

$$x^2+\frac{10}{3}x+1=0;\ 3x^2+10x+3=0$$

վորտեղից

$$x=\frac{-5\pm4}{3}\ \text{այսինքն}\ x_3=-\frac{1}{3};\quad x_4=-3$$

Ծանոթություն

Հետևյալ ձևի անդրադարձ հավասարումների մեջ

$$ax^4\pm bx^3+cx^2\mp bx+a=0$$

հարկավոր է գործադրել հետևյալ տեղադրումը

$$x-\frac{1}{x}=z$$

§ 71. *ՅԵՐԿԱՆԴԱՄ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ*

Յենթադրենք պահանջվում է լուծել հետևյալ հավասարումը

$$x^3=8$$

Կարելի յե, ի հարկե, հավասարման յերկու մասերից էլ հանել խորանարդ արմատ և ստանալ $x=2$։ *Սակայն այդ դեպքում, մենք* կկորցնեինք հավասարման յերկու արմատները, *վորի մեջ դժվար չէ համոզվել. անցկացնենք ազատ անդամը հավասարման ձախակողմյան մասը, կստանանք*

$$x^3-8=0\ \text{կամ}\ x^3-2^3=0$$

Խորանարդների տարբերության ֆորմուլի հիման վրա

$$a^3-b^3=(a-b)\ (a^2+ab+b^2)$$

կարող ենք գրել

$$x^3-2^3=(x-2)\ (x^2+2x+4)=0$$

Իսկ յեթե յերկու արտադրիչների արտադրյալը հավասար ե զերոյի, ապա նրանցից կամ առաջին արտադրիչն ե հավասար զերոյի, կամ յերկրորդը. հետևապես

$$x - 2 = 0 \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$x^2 + 2x + 4 = 0 \dots\dots\dots\dots (2)$$

(1)-ից կստանանք

$$x_1 = 2$$

(2)-ից կստանանք

$$x = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

Այդպես ուրեմն, տվյալ հավասարումն ունի յերեք արմատ. մեկն իսկական (ճիշտ) $x_1 = 2$ և յերկուսը կեղծ

$$x_2 = -1 + i\sqrt{3}; \qquad x_3 = -1 - i\sqrt{3}$$

Տեղադրման միջոցով համոզվեցեք, վոր x_2 և x_3 արժեքները տվյալ հավասարումը դարձնում են նույնություն։

Լուծենք մի ուրիշ հավասարում ևս

$$x^4 = a^4$$

Լուծումը նախորդի նման ե. $x^4 - a^4 = 0$

Ձախակողմյան մասը վերլուծվում $(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$ այսինքն

$$(x^2 - a^2)(x^2 + a^2) = 0$$

Բացի դրանից

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

հետևապես, կստանանք

$$(x - a)(x + a)(x^2 + a^2) = 0$$

Այդ պատճառով

$$x - a = 0 \dots\dots\dots\dots (3)$$

$$x + a = 0 \dots\dots\dots\dots (4)$$

$$x^2 + a^2 = 0 \dots\dots\dots\dots (5)$$

իսկ (3)-ից կստանանք $x_1 = a$

(4)-ից » $x_2 = -a$

վերջապես (5)-ից $x^2 = -a^2$

հետևապես $x = \pm\sqrt{-a^2} = \pm ai$

այսինքն $x_3 = +ai; \quad x_4 = -ai$

Այսպես ուրեմն, տվյալ հավասարումն ունի չորս արմատ. յերկուսն իրական և յերկուսը կեղծ։

Վերը լուծած հավասարումները վերաբերում են այսպես կոչված յերկանդամ հավասարումների տիպին, վորովհետև նրանց մեջ տրվում են յերկու անդամ. մեկը պարունակում ե անհայտի վորևե աստիճանը, իսկ մյուսը —ազատ անդամն ե։ Յերկանդամ հավասարումներն ընդհանուր ձևով արտահայտում են այսպես

$$ax^n = b \qquad \text{կամ} \qquad ax^n - b = 0$$

հետևապես

$$x^n = \frac{b}{a}$$

Յենթադրենք $\frac{a}{b}$-ից n-րդ աստիճանի արմատի թվաբանական արժեքը հավասար ե a-ի, իսկ ընդունելով x-ի հարաբերությունը a-ին հավասար y-ի, կստանանք $x = ya$, հետևապես $x^n = y^n a^n$, բայց $a^n = \frac{b}{a}$, այդ պատճառով $y^n a^n = a^n$, վորտեղից $y^n = 1$ կամ $y^n - 1 = 0$

Մենք մեր խնդիրը բերինք ավելի պարզ ձևի, այսինքն նույն աստիճանի յերկանդամ հավասարման լուծմանը, բայց մեկ միավորի հավասար ազատ անդամով։

Գտնելով մեկ միավորից n-րդ աստիճանի արմատի հետևյալ n արժեքները

$$y_1, y_2 \, . \, . \, . \, . \, . \, y_n$$

կստանանք տվյալ յերկանդամ հավասարման հետևյալ n արմատները

$$x_1 = y_1 a; \; x_2 = y_2 a \, . \, . \, . \, . \, . \, ; \; x_n = y_n a$$

Դառնանք $x^3 = 8$ որինակին։ Ութից խորանարդ արմատի թվաբանական արժեքն ե 2-ը, այսինքն տվյալ դեպքում

$$a = 2$$

Ոժանդակ յերկանդամ հավասարումը կլինի

$$y^3 - 1 = 0$$

իսկ

$$y^3 - 1 = (y - 1)\ (y^2 + y + 1) = 0$$

հետևապես

$$y - 1 = 0 \quad և \quad y^2 + y + 1 = 0$$

վորտեղից

$$y_1 = 1 \qquad y_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \qquad y_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

այդ պատճառով

$$x_1 = y_1 a = 1 \, . \, 2 = 2; \quad x_2 = y_2 a = -1 + i\sqrt{3}$$

$$x_3 = y_3 a = -1 - i\sqrt{3}$$

Լուծենք հավասարման մի ուրիշ որինակ ևս

$$x^5 = 243$$

Այստեղ $a = \sqrt[5]{243} = 3$ ոժանդակ յերկանդամ հավասարումը կլինի

$$y^5 - 1 = 0$$

վորը կարելի յե արտահայտել հետևյալ ձևով

$$(y - 1)\ (y^4 + y^3 + y^2 + y + 1) = 0$$

Հետևապես

$$y - 1 = 0 \quad և \quad y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0$$

բայց $y - 1 = 0$ հավասարումը տալիս ե $y_1 = 1$ արմատը, իսկ յերկրորդ հավասարումն անդրադարձ ե։

Ենթադրելով, վոր $y + \frac{1}{y} = z$ կգտնենք $z^2 + z - 1 = 0$ վորտեղից

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

հետևապես

$$y + \frac{1}{y} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad կամ \quad y + \frac{1}{y} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Առաջին դեպքում. $y = \frac{\sqrt{5} - 1 \pm i\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$

իսկ յերկրորդ դեպքում $y = \frac{-\sqrt{5} + 1) \pm i\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$

Այդպես ուրեմն, ստացանք հինգ հետևյալ արժեքները. y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, հետևապես, $x_1 = y_1 a = 1 \cdot 3 = 3$; $x_2 = y_2 a = 3y_2$; $x_3 = y_3 a = 3y_3$

$$x_4 = y_4 a = 3y_4 \quad \text{և} \quad x_5 = y_5 a = 3y_5$$

§ 72. ՅԵՌԱՆԴԱՄ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Յեռանդամ (*անդամների թվի համեմատ*) *կոչվում են հետևյալ ձևի հավասարումները*

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

Ենթադրելով, վոր $x^n = z$, *տվյալ հավասարումը բերում ենք հետևյալ քառակուսի հավասարման*

$$az^2 + bz + c = 0$$

վորը տալիս է z_1 *և* z_2 *յերկու արմատները։ Այդ դեպքում*

$$x^n = z_1 \; ; \qquad x^n = z_2$$

այսինքն ստանում ենք յերկու յերկանդամ հավասարումներ, վորոնցից յուրաքանչյուրը տալիս է n *արմատներ. հետևապես, տվյալ յեռանդամ հավասարման համար, ընդամենը կունենանք* 2n *արմատներ։*

Ծանոթություն։ *Մենք գիտենք, վոր գծային մի անհայտով հավասարումն ունի* մեկ *արմատ, քառակուսի հավասարումն ունի* յերկու *արմատ։ Բիքառակուսի և անդրադարձ չորրորդ աստիճանի հավասարումներն ունեն* չորս *արմատ։ Յերրորդ աստիճանի յերկանդամ հավասարման օրինակը* ($x^3 = 8$) *ցույց տվեց մեզ, վոր այդ հավասարումն ունի* յերեք *արմատ։*

Առհասարակ, ամեն մի հավասարում ունի այնքան արմատներ, վորքան միավորներ ունի նրա ամենաբարձր աստիճանի անհայտի աստիճանացույցը։ *Այդ սահմանումն ապացուցվում է բարձրագույն հանրահաշվի մեջ։*

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Լուծել հետևյալ անդրադարձ հավասարումները

647. $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$

648. $15x^4 - 16x^3 - 30x^2 + 16x + 15 = 0$

649. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0$

650. $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

651. $6x^4 - 35x^3 - x^2 + 35x + 6 = 0$

652. $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2$

Լուծել հետևյալ յերկանդամ հավասարումները

653. $x^3 - 343 = 0$ **654.** $x^3 + 64 = 0$

655. $x^4 - 1 = 0$ **656.** $x^4 + 16 = 0$

657. $x^5 + 1 = 0$ **658.** $x^5 - 32 = 0$

659. $x^6 = 1$. Ցուցմունք. *Հավասարումը վեր է լուծվում հետևյալ* $(x^3 + 1)(x^3 - 1) = 0$ *հավասարման։*

660. $x^6 + 1 = 0$ Ցուցմունք։ $x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$

661. $x^8 - 1 = 0$ Ցուցմունք։ $x^8 - 1 = (x^4 + 1)(x^4 - 1)$

Լուծել հետևյալ յեռանդամ հավասարումները.

662. $x^6-3x^3+2=0$ **663.** $(x+1)^6-9(x+1)^3+20=0$

664. $x^6+4x^3+3=0$ **665.** $(x-1)^6-10(x-1)^3+16=0$

666. $5\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}-2=0$ Ցուցմունք։ *Ներմուծում ենք $\sqrt[3]{x}=z$ օժանդակ անհայտը, վորից հետո հավասարումն ընդունում է հետևյալ ձևը.*

$2z^2-5z+2=0$, *վորտեղից* $z_1=2$; $z_2=\frac{1}{2}$։ *Յեթե* $\sqrt[3]{x}=2$, *ապա* $x=8$

իսկ յեթե $\sqrt{x}=\frac{1}{2}$ *ապա* $x=\frac{1}{8}$

667. $5x^6+2x^3-7=0$ Ցուցմունք։ *Յենթադրենք* $x^3=y$, *այդ դեպքում* $5y^2+2y-7=0$, *վորտեղից* $y_1=1$; $y_2=-\frac{7}{5}$

668. $x^2\sqrt{\frac{1}{x}}-5\sqrt{x\sqrt{x}}+6=0$ Ցուցմունք։ *Լուծումը բերվում է* $y^2-5y+6=0$ *հավասարման լուծմանը։*

Դիտենք հավասարումների ելի մի քանի որինակներ, վորոնք չեն վերաբերում մատնանշած տիպերին։

1. Լուծենք հետևյալ հավասարումը

$$\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{2a}$$

Հավասարման յերկու մասերն ել բարձրացնենք խորանարդ աստիճանի, կստանանք

$$a+x+a-x+3\sqrt[3]{(a+x)^2}\cdot\sqrt[3]{a-x}+3\sqrt[3]{a+x}\cdot\sqrt[3]{(a-x)^2}=2a$$

Վերցնելով $3\sqrt[3]{a+x}\cdot\sqrt[3]{a-x}$ *փակագծերից դուրս և կատարելով նման անդամների միացում, կստանանք*

$$3\sqrt[3]{a+x}\cdot\sqrt[3]{a-x}\cdot\left(\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}\right)=0$$

Բայց փակագծերի միջի արտահայտությունը հավասար է $\sqrt[3]{2a}$ *հետևապես*

$$\sqrt[3]{a^2-x^2}=0$$

վորտեղից $a^2-x^2=0$, *այսինքն* $x=\pm a$

2. Լուծենք հետևյալ հավասարումը

$$x^2+\frac{25}{x^2}-10=2x+\frac{10}{x}+4$$

Պատկերացնենք հավասարումը հետևյալ ձևով

$$\left(x^2+\frac{25}{x^2}\right)-14=2\left(x+\frac{5}{x}\right)$$

և յենթադրենք, վոր $x+\frac{5}{x}=z$ *այդ դեպքում* $x^2+\frac{25}{x^2}=z^2-10$

հետևապես

$$z^2-2z-24=0 \quad \text{վորտեղից} \quad z_1=6; \quad z_2=-4$$

3. Լուծենք հետևյալ հավասարումը

$$16x^3-21x+5=0$$

Վորովհետև $-21 = -25 + 4$, ապա միջին անդամը վերլուծելով յերկուսի, կստանանք

$$16x^2 - 25x + 4x + 5 = 0 \quad \text{կամ} \quad x(16x^2 - 25) + (4x + 5) = 0$$

Բայց $16^2 - 25 = (4x + 5)(4x - 5)$, հետևապես, $(4x + 5)[x(4x - 5) + 1] = 0$, վորտեղից $4x + 5 = 0$ և $4x^2 - 5x + 1 = 0$, հետևապես

$$x_1 = -\frac{5}{4};\ x_2 = 1;\ x_3 = \frac{1}{4}$$

§ 73. ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

1. Լուծենք հետևյալ սիստեմը

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = a \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$xy = b \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Քառակուսի աստիճանի բարձրացնելով (1) հավասարումը կստանանք $x + y + 2\sqrt{xy} = a^2$, վորտեղից

$$x + y = a^2 - 2\sqrt{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Իսկ (2)-ով և (3)-ով դժվար չէ գտնել x և y

2. Լուծենք հետևյալ սիստեմը

$$x^2y + y^2x = 30 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$xy + x + y = 11 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Հավասարում (4)-ից կստանանք

$$xy(x + y) = 30 \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Յենթադրենք $x + y = u$; $xy = v$: Այդ դեպքում (5) և (6) հավասարումները կստանան հետևյալ ձևը

$$u + v = 11; \quad uv = 30$$

Ընդունելով u և v վորպես քառակուսի հավասարման արմատներ, կստանանք $z^2 - 11z + 30 = 0$, վորտեղից $z_1 = 6$; $z_2 = 5$, հետևապես, $u = 6$; $v = 5$ և $u = 5$; $v = 6$

Տեղադրելով առաջին զույգի արժեքները, կստանանք

$$x + y = 6; \quad xy = 5$$

վորտեղից

$$x_1 = 5; \quad y_1 = 1 \quad \text{և} \quad x_2 = 1; \quad y_2 = 5$$

Տեղադրելով յերկրորդ զույգի արժեքները, կստանանք

$$x + y = 5; \quad xy = 6$$

վորտեղից

$$x_3 = 3; \quad y_3 = 2 \quad \text{և} \quad x_4 = 2; \quad y_4 = 3$$

3. Լուծենք հետևյալ սիստեմը

$$x^3 + y^3 = 65 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$x + y = 5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Բաժանելով (7)-ի մասերը (8)-ի համապատասխան մասերի վրա, կստանանք

$$\frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{x + y} = \frac{65}{5} \quad \text{կամ} \quad x^2 - xy + y^2 = 13$$

Այժմ ձախ մասում գումարելով և հանելով $2xy$, կստանանք

$$x^2 + 2xy - 2xy - xy + y^2 = 13 \quad \text{կամ} \quad (x + y)^2 - 13 = 3xy$$

վորտեղից $xy = 4$

Հետևապես լուծումը բերվեց $x + y = 5$; $xy = 4$ սիստեմի լուծմանը։

4. Լուծենք հետևյալ սիստեմը

$$\frac{x+y}{x-y} = 4 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (9)$$

$$x^2 + y^2 = 34 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (10)$$

Հավասարում (9)-ից կստանանք $x + y = 4x - 4y$, վորտեղից $5y = 3x$, հետևապես $y = \frac{3}{5}x$

Տեղադրելով y-ի արժեքը հավասարում (10)-ի մեջ, կստանանք

$$x^2 + \frac{9}{25}x^2 - 34 = 0, \text{ վորտեղից } x^2 = 25$$

հետևապես $x = \pm 5$, այդ պատճառով $y = \pm 3$

5. Լուծենք հետևյալ սիստեմը

$$x^2 + xy = a \quad \dots\dots\dots\dots \quad (11)$$

$$y^2 + xy = b \quad \dots\dots\dots\dots \quad (12)$$

Գումարելով համապատասխան մասերը, կստանանք $(x + y)^2 = a + b$ հետևապես $x + y = \pm\sqrt{a+b}$, բայց հավասարում (11)-ից $x(x + y) = a$ կամ $x = \frac{a}{x+y}$, իսկ հավասարում (12)-ից $y(x + y) = b$ կամ $y = \frac{b}{x+y}$

$$\text{այդ պատճառով } x = \frac{a}{\pm\sqrt{a+b}} \qquad y = \frac{b}{\pm\sqrt{a+b}}$$

6. Լուծենք հետևյալ սիստեմը

$$x^2y + xy^2 = 120 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (13)$$

$$x^2y - xy^2 = 30 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (14)$$

Գումարելով համապատասխան մասերը, կստանանք

$$2x^2y = 150 \text{ կամ } x^2y = 75 \quad \dots\dots\dots \quad (15)$$

Համապատասխան մասերը հանելու դեպքում, կստանանք

$$2xy^2 = 90 \text{ կամ } xy^2 = 45 \quad \dots\dots\dots \quad (16)$$

(15)-ի և (16)-ի արտադրյալը տալիս է

$$x^3y^3 = 75 \cdot 45 \text{ կամ } (xy)^3 = 25 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9 = 125 \cdot 27$$

հետևապես $xy = 5 \cdot 3 = 15$, իսկ այդ դեպքում հավասարում (15)-ից կստանանք $x \cdot 15 = 75$, վորտեղից $x = 5$ և, հետևապես $y = 3$

Սակայն, այդ յեղանակով լուծելիս մենք կորցրինք սիստեմի արմատները։

Հիրավի՝ $(xy)^3 = 15^3$ հետևապես $(xy)^3 - 15^3 = 0$
այդ պատճառով $(xy - 15)\,[(xy)^2 + 15\,xy + 15^2] = 0$
վորտեղից $xy = 15$, վոր և տալիս է $x_1 = 5$; $y_1 = 3$

Բացի դրանից $(xy)^2 + 15\,xy + 225 = 0$; յենթադրելով, վոր $xy = z$ կստանանք $z^2 + 15\,z + 225 = 0$

վորտեղից $z = \frac{15}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$ հետևապես

$$(xy)_1 = \frac{15}{2}(-1 + i\sqrt{3}); \quad (xy)_2 = \frac{15}{2}(-1 - i\sqrt{3})$$

Տեղադնելով $(xy)_1$-ի կամ $(xy)_2$-ի արժեքները (15) և (16) հավասարումների մեջ, կգտնենք սիստեմի կեղծ արմատները։

7. Լուծենք հետևյալ սիստեմը

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=7 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$$x^2-y^2=2800 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Հավասարում (17)-ից կստանանք

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=7\sqrt{x}-7\sqrt{y}$$

վորտեղից $\sqrt{y}=\frac{3}{4}\sqrt{x}$ կամ $y=\frac{9}{16}x$

Տեղադնելով y-ի արժեքը հավասարում (18)-ի մեջ, կստանանք

$$x^2-\frac{81}{256}x^2=2800 \text{ վորտեղից}$$

$$x^2=4096 \text{ կամ } x=\pm 64 \text{ հետևապես } y=\pm 36$$

8. Լուծենք հետևյալ սիստեմը

$$x-y+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{600}{x+y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

$$x^2+y^2=776$$

Բազմապատկենք հավասարում (19)-ի մասերը $(x+y)$-ով, կստանանք

$$x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}=600$$

Յենթադրենք, վոր $\sqrt{x^2-y^2}=z$, այդ դեպքում $x^2-y^2=z^2$ հետևապես $z^2+z-600=0$, վորտեղից $z_1=24$; $z_2=-25$

Այժմ կստանանք 1) $x^2-y^2=576$; $x^2+y^2=776$, վորտեղից $y^2=100$ հետևապես $y=\pm 10$ և $x^2=676$, այսինքն $x=\pm 26$

Պիտանի յեն $x_1=26$; $y_1=10$ արմատները, իսկ $x_2=-26$ և $y_2=-10$ արմատները բավարարում են հետևյալ սիստեմին

$$x-y-\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{600}{x+y}; \quad x^2+y^2=776 \quad (a)$$

2) $x^2-y^2=625$; $x^2+y^2=776$, վորտեղից

$$x=\pm\sqrt{\frac{1401}{2}} \qquad y=\pm\sqrt{\frac{151}{2}}$$

Դրական արժեքները բավարարում են սիստեմ (a)-ին, իսկ բացասական արժեքները կողմնակի յեն վոչ միայն տվյալ սիստեմին, այլ և սիստեմ (a)-ին։

9. Լուծենք յեռանհայտ յերեք հավասարումների հետևյալ սիստեմը

$$x+y+z=9; \quad xy+xz+yz=26; \quad xyz=24$$

Առաջին հավասարումից $x+y=9-z$, յերրորդից $xy=\frac{24}{z}$ իսկ յերկրորդ հավասարումը կարելի յե ձևակերպել այսպես $xy+z(x+ =y)\,26$, վոր տեղադրումից հետո, կստանանք $\frac{24}{z}+z(9-z)=26$ վորտեղից

$$z^3-9z^2+26z-24=0$$

Այդ խորանարդ հավասարումը լուծվում է պարզ կերպով։ Հիրավի, նրան կարելի է տալ հետևյալ ձևը $z^3 - 3z^2 - 6z^2 + 18z + 8z - 24 = 0$

Այդ հավասարման անդամները զույգ-զույգ վերցնելով փակագծերի մեջ, կստանանք

$z^2(z-3) - 6z(z-3) + 8(z-3) = 0$ *կամ* $(z-3)(z^2-6z+8) = 0$ *հետևապես* $z-3=0$ *և* $z^2-6z+8=0$, *որտեղից* $z_1=3$; $z_2=4$; $z_3=2$

Ըստ տվյալ հավասարումների համաչափության, կստանանք

$x_1 = 4$	$x_2 = 3$	$x_3 = 2$
$y_1 = 3$	$y_2 = 2$	$y_3 =$
$z_1 = 2$	$z_2 =$	$z_3 = 3$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Լուծել հետևյալ հավասարումները

669. $\sqrt[3]{x+360} - \sqrt{x-128} = 2$

670. $6x^2+x-1=2\sqrt{6x^2+x-2}$ Ցուցմունք $6x^2+x-2=y$, *այդ դեպքում* $6x^2+x-1=y+1$ *հետևապես* $y+1=2\sqrt{y}$

671. x^4-81 Ցուցմունք $x^4-81=(x^2+9)(x^2-9)$

672. $x^3+x^2-4x-4=0$

673. $4x^3+5x^2-4x-5=0$

674. $x^3-y^3=37$; $x-y=1$

675. $x^3+y^3=35$; $x+y=5$

676. *Վերլուծեք* 39 *այնպիսի յերկու գումարելիների, վոր նրանց խորանարդների գումարը հավասար լինի* 17,199-*ի*։

677. $x+y=xy=x^2+y^2$ Ցուցմունք *Լուծումը բերվում է հետևյալ հավասարման* $xy(3-xy)=0$, *վորտեղից* $xy=0$ *կամ* $xy=3$ *Վերջին դեպքում*

$$x = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}; \quad y = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

678. $x-y=xy=x^2+y^2$

679. $x-y=x^2+y^2=x^3-y^3$

680. *Գտնել այնպիսի յերկու թիվ, վորոնց գումարը, արտադրյալը և քառակուսիների տարբերությունը լինեն իրար հավասար*։

681. $x-y+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = \dfrac{20}{x+y}$; $x^2+y^2=34$

682. $\dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{13}{2}$ $x^2+y^2=104$ Ցուցմունք: *Ենթադրում ենք, վոր* $\dfrac{x+y}{x-y} = z$ *և առաջին հավասարումից գտնում՝* $z_1 = \dfrac{3}{2}$ $z_2 = \dfrac{2}{3}$ *Համապատասխանաբար՝* $5y = x$ *կամ* $x = -5y$ *Յերկու դեպքում էլ*

$$y = \pm 2; \quad x = \pm 10$$

683. $\dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{5}{2}$; $x^2+y^2=20$

684. $\dfrac{x-y}{x+y} + \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{10}{3}$; $x^2+y^2=45$

685. $x+y+z=6$; $xy+xz+yz=11$; $xyz=30$

686. $x+y+z=2$; $x^2+y^2+z^2=4$; $x^3+y^3+z^3=8$

§ 74. ՑՈՒՑՉԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Այն հավասարումը, որի աստիճանի ցուցիչը պարունակում է անհայտ, կոչվում է ցուցչային:

Օրինակ $3^{x-1} = 27$ *հավասարումը ցուցչային հավասարում է, որովհետև* x *անհայտը մտնում է աստիճանի տվյալ հիմք 3-ի ցուցչի մեջ։*

Այդ հավասարումը լուծվում է հետևյալ նկատառումներով. նրա աջակողմյան մասը հավասար է 3^3*-ին, հետևապես*

$$3^{x-1} = 3^3$$

Երբ հավասար հիմքեր ունեցող աստիճանները հավասար են, ապա նրանց ցուցիչները յևս իրար հավասար են, *այսինքն*

$$x - 1 = 3$$

որտեղից

$$x = 4$$

Տեղադրելով հավասարման մեջ x*-ի գտած արժեքը հեշտությամբ կարելի յե ստուգել լուծման ճշտությունը։*

Առհասարակ, ցուցչային հավասարումը լուծելու համար, պետք է բերել նրան այնպիսի ձևի, որպեսզի նրա յերկու մասերն արտահայտվեն միևնույն հիմք ունեցող աստիճաններով *և ապա հավասարեցնել իրար այդ աստիճանների ցուցիչները։*

Լուծենք հետևյալ հավասարումը $4^x - 12 \cdot 2^x - 64 = 0$

Այդ հավասարման առաջին անդամն աստիճանի հիմքում ունի 4, իսկ յերկրորդ անդամը՝ 2։ Որովհետև $4 = 2^2$, *ապա առաջին անդամը կարելի յե ձևակերպել այսպես*

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$$

այսինքն տվյալ հավասարումը 2^x*-ի նկատմամբ հանդիսանում է որպես քառակուսի հավասարում։*

Ենթադրելով, որ $2^x = y$, *կստանանք հետևյալ քառակուսի հավասարումը*

$$y^2 - 12y - 64 = 0$$

Լուծելով այն, կգտնենք, որ $y = 16$ *կամ* $y = -4$

Վերցնելով առաջինը, կստանանք

$$2^x = 16 \text{ կամ } 2^x = 2^4, \text{ որտեղից } x = 4$$

Իսկ յեթե ընդունենք, որ $y = -4$, *ապա կստանանք* $2^x = -4$, *որն անհնարին է, որովհետև դրական հիմք ունեցող աստիճանը, տվյալ դեպքում հիմք 2-ը, չի կարող արտահայտվել բացասական թվով։*

Այդ պատճառով քառակուսի հավասարման յերկրորդ լուծումը դեն ենք գցում, որպես անպետք տվյալ ցուցչային հավասարման համար, և ստանում միայն մեկ լուծում, այն է $x = 4$

Յեթե քառակուսի հավասարման յերկրորդ արմատն էլ դրական լիներ, ապա ցուցչային հավասարումը կունենար յերկու արմատ։

Վերը լուծված յերկու օրինակներում տվյալները վերցրած են այնպես, որ աստիճանի որոնելի ցուցիչը ռացիոնալ է։

Լուծենք մի հավասարում, որի մեջ աստիճանի ցուցիչը իռացիոնալ է

$$3^{x+2} = 10^x$$

Որովհետև 10 թիվը ներկայացնում է իրենից հիմք 3-ի իռացիոնալ աստիճանը և, հակառակը, թիվ 3-ը հիմք 10-ի իռացիոնալ աստիճանը, ապա *տվյալ հավասարումը կարող է ունենալ միայն իռռացիոնալ արմատ, վորը կարելի յե հաշվել մոտավորապես լոգարիթմների ոգնությամբ։*

Մենք գիտենք, վոր, յեթե յերկու արտահայտություններ թվականորեն հավասար են, ապա, միևնույն հիմքի դեպքում, նրանց լոգարիթմները ևս իրար հավասար են։

Լոգարիթմացնելով հավասարման յերկու մասերը հիմք ընդունելով վորևե թիվ, ամենից պարզն է հիմք ընդունել թիվ 10-ը, կստանանք

$$(x+2)\cdot\lg 3 = x$$

վորտեղից

$$x = \frac{2\cdot\lg 3}{1-\lg 3}$$

Կատարելով հաշվումները, կստանանք

$$x \sim \frac{2\cdot 0{,}4771}{1-0{,}4771} = \frac{0{,}9542}{0{,}5229}$$

Այդպես ուրեմն

$$x = \frac{2\cdot\lg 3}{1-\lg 3} \sim 1{,}825$$

$$\begin{array}{r|l} -9542 & 5229 \\ \underline{5229} & \overline{1{,}825} \\ -4313 & \\ \underline{4183} & \\ -130 & \\ \underline{104} & \\ -26 & \\ \underline{26} & \\ 0 & \end{array}$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

*Լուծել հետևյալ հավասարումները (այն հավասարումները, վորոնք պահանջում են լոգարիթմների աղյուսակի գործադրումը, նշանակված են * նշանով)*

687. $4^{x+2} = 8^{x-1}$

688. $4^{x^2-8} = 2^{x-1}$

689. $9^x = 3^{x^2-3}$

690. $\sqrt{3^x} = \sqrt[3]{3^{x+1}}$

691. $\sqrt[3]{100^x} = \sqrt{10}$

692. $\sqrt[x]{5^{x-1}} = \sqrt[x+3]{5^{x+1}}$

693. $2^{x-5} = \dfrac{1}{2^{x+1}}$

694. $100^{x-6} = 0{,}1^{x-3}$

695. $3^{x+3} + 3^{x+1} + 3^x = 31$

696. $5^{x+1} - 3\cdot 5^x - 4\cdot 5^{x-1} = 30$

697. $2^{x+2} - 6\cdot 2^{x+1} - 12\cdot 2^x + 5 = 0$

698*. $3^x\cdot 2^{3x} = 576$

699. $2^{2x}\cdot 5^x = \dfrac{1}{20}$

700. $0{,}5^x = 0{,}1$

701*. $4^{x+2} = 100$

702*. $2^{x+3} - 2^x = 35$

703. $3^{x+2} - 3^x = \dfrac{8}{9}$

704. $3^{2x} - 82\cdot 3^x + 81 = 0$

705. $2^{2x+1} - 17\cdot 2^x + 8 = 0$

706*. $5^{2x-1} - 46\cdot 5^{x-1} + 9 = 0$

707. $10^{2x+3} - 101\cdot 10^{x+2} + 10^3 = 0$

708. $6^{(x-3)\cdot(5-2)} = 1$

709. $2^{2x}\cdot 3^{x+1} = 3$

710*. $3\cdot 4^x = 25\cdot 2^x$

711. $4^{2x} - 59\cdot 4^x - 320 = 0$

712*. $2^{2x} + 5\cdot 2^x = 40$

713. $10^{x+y} = 10000;\ 10^{x-4y} = 0{,}1$

714. $4^x\cdot 2^{y+1} = 16;\ 4^{x+2}\cdot 2^{y-1} = 64$

715. $9^{x+y} = 27;\ x\cdot y = \dfrac{3}{8}$

716. $27^{x-1}\cdot 9^y = 1;\ 2^{3x} = 4^y$

§ 75. ԼՈԳԱՐԻԹՄԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Լոգարիթմի նշանի տակ անհայտ պարունակող հավասարումը կոչվում է լոգարիթմային:

Օրինակ, $1+\lg(x-1)=\lg(x+44)$ *լոգարիթմային հավասարում է:*

Այդպիսի հավասարում լուծելու համար, նրա յերկու մասերն էլ ներկայացնում են մի քանի հանրահաշվային արտահայտությունների լոգարիթմների ձևով:

Տված հավասարման աջակողմյան մասն արդեն տրված է այդ ձևով, իսկ ձախակողմյան մասը ձևակերպում են այսպես. վորովհետև $\lg 10 = 1$, *ապա հավասարումը կարելի յե գրել հետևյալ ձևով*

$$\lg 10 + \lg(x-1) = \lg(x+44)$$

10 *և* $x-1$ *թվերի լոգարիթմների գումարը փոխարինում ենք այդ թվերի արտադրյալի լոգարիթմով և ստանում*

$$\lg[10(x-1)] = \lg(x+44)$$

Յեթե միևնույն հիմքով վերցրած յերկու թվերի լոգարիթմները հավասար են, ապա իրենք թվերն յել իրար հավասար են, *այսինքն*

$$10(x-1) = x+44$$

Ստացանք վոչ լոգարիթմային մի հավասարում, վորն անմիջապես լուծելով, գտնում ենք

$$x = 6$$

Ստուգելու համար անհայտի գտած թվային արժեքը տեղադրում ենք տված հավասարման մեջ և ստանում

$$1 + \lg 5 = \lg 50$$

կամ

$$1 + \lg 5 = \lg(10 \cdot 5)$$

այսինքն

$$1 + \lg 5 = 1 + \lg 5$$

Այդպես ուրեմն x*-ի գտած արժեքը բավարարում է հավասարմանը:*

Ծանոթություն. — *Արտահայտության լոգարիթմից իրեն՝ արտահայտությանն անցնելը կոչվում է* անտիլոգարիթմացում *կամ* պոտենցիացում:

Կարող է պատահել, վոր լոգարիթմային հավասարման պոտենցիացումից հետո ստացված հավասարման արմատը բերում է բացասական թվերի լոգարիթմներին. վորովհետև բացասական թվերը լոգարիթմներ չունեն, ապա այդպիսի արմատները պետք է դեն գցվեն, վորպես անպետք լոգարիթմային հավասարումների համար:

Պարզենք այդ հավասարման հետևյալ օրինակով

$$\lg(5x-4) = 2[\lg 2 + \lg(x-5)]$$

Այդ հավասարման աջակողմյան մասը 2 *և* $x-5$ *թվերի արտադրյալի քառակուսու լոգարիթմն է, այսինքն*

$$\lg(5x-4) = \lg[2 \cdot (x-5)]^2$$

Պոտենցիացնելով հավասարման յերկու մասերը, կստանանք

$$5x-4 = [2 \cdot (x-5)]^2$$

վորտեղից

$$4x^2 - 45x + 104 = 0$$

$$x = \frac{45 \pm \sqrt{2025 - 1664}}{8} = \frac{45 \pm 19}{8}$$

$$x_1 = 8; \quad x_2 = 3\frac{1}{4}$$

Տեղադնելով տված հավասարման մեջ $x=8$, *կստանանք*

$$\lg 36 = 2 \cdot [\lg 2 + \lg 3] = 2 \cdot \lg 6 = \lg (6^2) = \lg 36$$

Այդպես ուրեմն, $x=8$ *բավարարում է հավասարմանը։*

Տեղադնելով $x = 3\frac{1}{4}$, *կստանանք*

$$\lg 12\frac{1}{4} = 2 \cdot \left[\lg 2 + \lg \left(-1\frac{3}{4} \right) \right]$$

վորը բերում բացասական թվի լոգարիթմին. այդ պատճառով $x=3\frac{1}{4}$ *չի բավարարում տված հավասարմանը։*

Հավասարումն ունի մեկ արմատ $x=8$*։*

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

717. *Յերկու թվերի գումարը հավասար է 70-ի, իսկ նրանց տասնորդական լոգարիթմների գումարը հավասար է 3-ի։ Գտնել այդ թվերը։*

718. *Յերկու թվերի տարբերությունը հավասար է 48-ի, իսկ նրանց լոգարիթմների գումարը, հիմք ընդունելով 8-ը, հավասար է* $3\frac{1}{3}$*-ի։ Գտնել այդ թվերը։*

719. *Գտնել յերեք թիվ, վորոնցից առաջինը 15-ով մեծ է յերկրորդից, իսկ յերկրորդը 10-ով մեծ է յերրորդից, յեթե յերկրորդ թվի լոգարիթմը հավասար է առաջին և յերրորդ թվերի լոգարիթմների միջին թվաբանականին։*

720. *Բացատրեք, թե ինչու յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների լոգարիթմների աղյուսակում տանգենսի և կոտանգենսի լոգարիթմների աղյուսակային տարբերությունները հավասար են իրենց բացարձակ մեծությամբ, բայց հակադիր են ըստ նշանի։*

721. *Յեթե թվերի շարքը կազմում է յերկրաչափական պրոգրեսիա* q *հայտարարով, ապա ինչպիսի շարք կկազմվի նրանց լոգարիթմներով, նույն թվերի քառակուսիների լոգարիթմներով։*

722. *Ապացուցեք, վոր* $m^{\lg n} = n^{\lg m}$

723. *Ապացուցեք, վոր* $\lg_n m = \dfrac{1}{\lg_m n}$

724. *Հաշվեցեք* $y=10^{2-\lg 5}$; $z=10^{3\lg 2-\frac{1}{2}\lg 3}$; $u=0{,}1^{2\lg 2-1}$

Լուծել հետևյալ լոգարիթմային հավասարումները լոգարիթմների տված հիմքերով

725. $\lg_a (x+3) + \lg_a 2 = \lg_a (x-3) + \lg_a 3$

726. $\lg_a (x+4) + \lg_a (x-3) - \lg_a (7x-12) = 0$

727. $\lg_a x = a$

728. $\lg_2 x + 1 = a$

729. $\lg_4 x - \lg_4 8 = 1$

730. $\lg_2 (x-40) - \frac{1}{2} \lg_2 x = \lg_2 \sqrt{2}$

Լուծել տասնորդական լոգարիթմներ պարունակող հետևյալ հավասարումները և հավասարումների սիստեմները

731. $\lg(x+10)-\lg x=\lg(x-6)-\lg(x-12)$ 732. $\lg(x-5)+\lg x+\lg 2=2$

733. $\lg\sqrt{x^2+x-2}-\lg 2=\frac{1}{2}$ 734. $\frac{1}{2}\lg(x+3)-0{,}3010=\lg(x-3)-1$

735. $\lg x+\lg\sqrt{x^2-21}=1$ 736. $2\lg(x-10)+\lg(x+60)=3\lg x$

737. $1-\lg 2=\frac{1}{3}(\lg x+\frac{1}{2}\lg 5)$ 738. $1-\lg 2=\frac{1}{2}(\lg x+\lg 80)$

739. $\frac{\lg x}{1-\lg 5}=\frac{1}{3}$ 740. $[5\lg(x+1)]=1-\lg 2$

741. $\frac{\lg(x+1)}{\lg 30-1}=\lg 100$ 742. $\lg\lg x=\lg 6-\lg 2$

743. $\lg\lg(9+\lg x)=0$ 744. $\lg x+\lg y=2;\ \lg x-\lg y=1$

745. $\lg\lg x=1$ 746. $xy=10;\ \lg x-\lg y=1$

747. $x+2y=120;\ \lg x+\lg y=3$ 748. $x-y=90;\ \lg x+\lg y=3$

749. $x-9y=\sqrt{10};\ \lg x+\lg y=2$ 750. $\lg x+2\lg y=3;\ 3\lg x-4\lg y=4$

Լուծել հետևյալ հավասարումները և հավասարումների սիստեմները, վորոնց անհայտների լոգարիթմները մտնում են աստիճանների ցուցիչների մեջ.

751. $x^{\lg x}=x^2$ 752. $x^{3-\lg x}=100$

753. $x^{\lg x}=100x$ 754. $10^{\lg x}=x^{\frac{3}{2}-\lg}$

755. $x^{\lg x-4}=0{,}001$ 756. $10^{\lg(x+50)^2}=0{,}01^{-\frac{1}{2}\lg(150-x)}$

757. $x^{\lg y}=100\,000;\ 10y=x$ 758. $y=x^{\frac{1}{2}};\ y^{\lg x-1}=10$

759. $10^{\lg x}=100^{\lg y};\ x^{\lg y}=2$ 760. $10^{\lg x+\lg y}=6;\ 100^{\lg x-\lg y}=\frac{9}{4}$

§ 76. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Յուրաքանչյուր խնդիր, վոր իմեջ վորոնվում է անկյան մեծությունը, վորի յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներից մեկը վորոշ կախումն ունի մի քանի տված մեծություններից, բերում է հավասարման. *Նրա մեջ մտնում են անկյան այդ յեռանկյունաչափական ֆունկցիան և տված մեծությունները, վորոնցով նա վորոշվում է։*

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

1. *Յեթե տրվում են ուղղանկյուն յեռանկյան* a *և* b *էջերը և պահանջվում է վորոշել* a *էջին հակադիր* α *անկյունը, ապա*

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$$

2. *Յեթե հայտնի յեն յերկրի մագնիսականության ուժի* F *լարվածությունը տվյալ կետում և նրա հորիզոնական* H *բաղադրիչը, ապա նշանակելով յերկրի մագնիսականության ուժի խոնարհման անկյունը* J-*ով, կստանանք* $H=F\cdot\cos J$, *վորտեղից* $\cos J=\frac{H}{F}$

Այդ հավասարումներից վորոնելի անկյունների մեծությունները կարելի յե հաշվել յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների կամ լոգարիթմների աղյուսակների ոգնությամբ։

Անկյունը նրա յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների միջոցով վորոշող հավասարումը կարող է ավելի բարդ կազմ ունենալ. Նա կարող է պարունակել իր մեջ վորոնելի անկյան մեկից ավելի յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներ։ Մյուս կողմից, նրա մեջ, բացի իրեն՝ վորոնելի անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներից, կարող են մտնել այդ անկյունից վորոշ կախումն ունեցող այլ անկյունների յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները, որինակ, կրկնապատիկ վորոնելի անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները, նրա մինչև 90° լրացնող անկյան ֆունկցիաները և այլն։

Ամեն մի հավասարում, վորը վորոնում է անկյունը նրա յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների միջոցով կոչվում է յեռանկյունաչափական հավասարում:

Լուծել յեռանկյունաչափական հավասարումը նշանակում է վորոշել այն բոլոր անկյունները, վորոնց, տվյալ հավասարման մեջ մտնող, յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները նրան բավարարում են։

Յեռանկյունաչափական հավասարումների որինակներ

$$\sin\varphi + \cos\varphi = 1; \qquad \sin 2\varphi = \varphi\mathrm{tg}; \qquad \mathrm{tg}^2\varphi - \sqrt{3}\cdot\mathrm{tg}\,\varphi = 0$$

Այդ հավասարումներից առաջինի մեջ մտնում են φ *անկյան յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները, իսկ յերկրորդի մեջ մտնում են* φ *և* 2φ *յերկու անկյունների յեռանկյունաչափական ֆունկցիաները։*

Լուծելով յեռանկյունաչափական հավասարումը, նրան սովորաբար բերում են այնպիսի ձևի, վոր նա պարունակի իր մեջ միայն մեկ անկյան *յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներից միայն* մեկը: *Հավասարումից այդ յեռանկյունաչափական ֆունկցիայի մեծությունը վորոշելուց հետո, վորոշում են նրա համապատասխան վորոնելի անկյան մեծությունը, վորպես հակադարձ շրջանային ֆունկցիա, վորի արգումենտն է տվյալ հավասարման մեջ մտնող յեռանկյունաչափական ֆունկցիան։ Այդպես, վերը բերած որինակներից յերրորդի մեջ վորոնելի անկյունը վորոշվում է վորպես նրա տանգենսի ֆունկցիա։*

Կարող է պատահել, վոր յեռանկյունաչափական հավասարումը բոլորովին չունենա լուծում, ինչպես, որինակ, հետևյալ հավասարումը

$$2\sin\varphi + 3\cos\varphi = 5$$

պարզ կերպով չի բավարարում φ *անկյան վոչ մի մեծություններով, վորովհետև* $\sin\varphi$ *և* $\cos\varphi$ *չեն կարող գերազանցել միավորին, բացի դրանից նրանց այդ ամենամեծ մեծությունները չեն կարող համապատասխանել անկյան միևնույն մեծությանը. յեթե* $\sin\varphi = 1$, *ապա* $\cos\varphi = 0$, *և յեթե* $\cos\varphi = 1$, *ապա* $\sin\varphi = 0$։ *Այստեղից պարզ է, վոր տվյալ հավասարման ձախակողմյան մասը* φ *անկյան ամեն տեսակ մեծությունների դեպքում փոքր է 5-ից, այսինքն հավասարումը չունի լուծումներ։*

Իսկ յեթե յեռանկյունաչափական հավասարումն ունի լուծում, այսինքն բերում է նրա մեջ մտնող յեռանկյունաչափական ֆունկցիայի հնարավոր մեծությունը, ապա նրա այդ մեծությանը համապատասխանում են անվերջ *թվով անկյուններ—շնորհիվ նրան, վոր* հակադարձ շրջանային ֆունկցիաները բազմարժեք են:

Օրինակ, յեթե, լուծելով յեռանկյունաչափական հավասարումը, մենք ստանում ենք, վոր $\sin\varphi = \frac{1}{2}$, *ապա սինուսի այդպիսի մեծությունն ունեն* 30^0 *և* 150^0 *անկյունները, նաև այն բոլոր անկյունները, վորոնք ստացվում են գտած յերկու անկյանը գումարելով սինուսի փոփոխման դրական կամ բացասական ամբողջ թվով պարբերությունները, այսինքն* 360^0*: Այսպես ուրեմն, ստանում ենք* $30^0 + 360^0 \cdot n$ *և* $150^0 + 360^0 \cdot n$ *անկյունների յերկու անվերջ սերիաները, վորտեղ* n*-ը—կամավոր դրական կամ բացասական ամբողջ թիվ է:*

Յեռանկյունաչափական հավասարմանը բերվող կոնկրետ խնդիր կարող է լինել այնպիսին, վորը թույլատրում է միայն վորոշ սահմաններում ներփակված անկյունների մեծություններ: Յեթե, օրինակ, յեռանկյունաչափական հավասարումով վորոշվում է շեղանկյուն յեռանկյան անկյունը, ապա վերջինս պետք է լինի դրական և փոքր 180^0*-ից: Այդպիսի դեպքում հավասարմանը բավարարող մի շարք անկյուններից տվյալ խնդրին համապատասխանում են միայն նրանք, վորոնք ներփակված են մատնանշված սահմաններում:*

Նախ քան յեռանկյունաչափական հավասարումների օրինակների լուծմանն անցնելը, ավելի մանրամասն կերպով դիտենք հակադարձ շրջանային ֆունկցիաները:

§ 77. ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ամեն մի անկյուն, վորի տվյալ յեռանկյունաչափական ֆունկցիան ունի տվյալ x *մեծություն, կախված նրանից, թե նրա ինչպիսի ֆունկցիան է տրված, նշանակվում է*—Arc sin x, Arc cos x, Arc tg x *և* Arc ctg x*-ով: Մեզ հայտնի յե արդեն, վոր „*Arc*“-ը լատինական* arcus*—աղեղ բառի կրճատումն է, այնպես վոր* Arc sin x *նշանակում է—«այն աղեղը, վորի սինուսն ունի* x *մեծություն»:*

Ինչպես դիտենք, բոլոր հակադարձ շրջանային ֆունկցիաները բազմարժեք են, *այսինքն յեռանկյունաչափական ֆունկցիայի միևնույն մեծությանը համապատասխանում են* անվերջ շատ թվով *անկյուններ:*

Առանձնացնենք անկյունների այդ բազմադիմիությունից մի քանի վորոշ ամենապարզ անկյուններ, առաջնորդվելով հետևյալ նկատառումով.

Յեռանկյունաչափական ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրի համար կարելի յե մասնանշել անկյան յեվ աղեղի անընդհատ փոփոխման այնպիսի ինտերվալներ (միջտարածություններ), վորպեսզի նրա սահմաններում ֆունկցիան, նույնպես անընդհատ փոփոխվելով, անցնի նրա համար ամեն տեսակի թվային արժեքներ:

Սինուսի և տանգենսի համար այդպիսի ինտերվալներ ներկայանում են յեռանկյունաչափական շրջանի յերկրորդ տրամագծի աջակողմյան և ձախակողմյան կիսաշրջանագծերը, օրինակ, հետևյալ ինտերվալները. -90^0*-ից մինչև* $+90^0$; 90^0*-ից մինչև* 270^0; 270^0*-ից մինչև* 450^0 *և այլն:*

Հիրավի, անկյան անընդհատ փոփոխվելու դեպքում -90^0*-ից մինչև* $+90^0$, *նրա սինուսն անընդհատ փոփոխվում է* -1*-ից մինչև* $+1$, *տանգենսը՝* $-\infty$*-ից մինչև* $+\infty$. *անկյան փոփոխվելու դեպքում* 90^0*-ից մինչև* 270^0, *սինուսը փոփոխվում է* $+1$*-ից մինչև* -1, *տանգենսը՝* $-\infty$ *մինչև* $+\infty$

կոսինուսի և կոտանգենսի համար այդպիսի ինտերվալներ ներկայանում են յեռանկյունաչափական շրջանի առաջին տրամագծի այս կամ այն կողմերում ընկած կիսաշրջանագծերը, որինակ, 0°-ից մինչև 180°; 180°-ից մինչև 360° և այլն։

Հիրավի, անկյան անընդհատ փոփոխվելու դեպքում 0°-ից մինչև 180°, նրա կոսինուսն անընդհատ փոփոխվում է $+1$-ից մինչև -1, կոտանգենսը՝ $+\infty$-ից մինչև $-\infty$

Բոլոր φ անկյուններից, վորոնց սինուսը կամ տանգենսն ունի տվյալ x մեծություն, առանձնացնում ենք ամենապարզ φ_0 անկյունը, վորը ներփակված է -90°-ից մինչև $+90^\circ$, կամ, արտահայտելով այդ անկյուններն աղեղնային միավորներով՝ $\frac{\pi}{2}$-ից մինչև $+\frac{\pi}{2}$ ինտերվալի մեջ։ Այդ Arc sin x և Arc tg x ամենապարզ արժեքները նշանակվում են arc sin x-ով arc tg x-ով, այնպես վոր

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arc\,sin} x \leqslant +\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arc\,tg} x \leqslant +\frac{\pi}{2}$$

Բոլոր այն φ անկյուններից, վորոնց կոսինուսը կամ կոտանգենսն ունի տվյալ x մեծությունն, առանձնացնենք ամենապարզ φ_0 անկյունը, վորը ներփակված է 0-ից մինչև 180° կամ 0-ից մինչև π սահմաններում։ Նշանակելով այդ Arc cos x-ի և Arc ctg x-ի ամենապարզ արժեքները arc cos x-ով և arc ctg x-ով, կստանանք

$$0 \leqslant \operatorname{arc\,cos} x \leqslant \pi; \quad 0 \leqslant \operatorname{arc\,ctg} x \leqslant \pi$$

Վարժություններ հակադարձ շրջանային ֆունկցիաների ամենապարզ արժեքների վորոշման վերաբերյալ։

(Այն օրինակները, վորոնք պահանջում են յեռանկյունաչափական ֆունկցիաների լոգարիթմների աղյուսակների գործադրումը, նշանակված են * նշանով)։

761. Վորոշեցեք $\operatorname{arc\,sin} 1$; $\operatorname{arc\,sin}\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{arc\,sin}\frac{\sqrt{2}}{2}$; * $\operatorname{arc\,sin} 0{,}4$; $\operatorname{arc\,sin}\frac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\operatorname{arc\,sin}\left(-\frac{1}{2}\right)$; $\operatorname{arc\,sin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\operatorname{arc\,sin}(-1)$; $\operatorname{arc\,sin} 0$

762. Վորոշեցեք $\operatorname{arc\,tg}(-\infty)$; $\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3})$; $\operatorname{arc\,tg}(-1)$ $\operatorname{arc\,tg} 0$; $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\operatorname{arc\,tg} 1$; * $\operatorname{arc\,tg} 2$; $\operatorname{arc\,tg} \infty$

763. Վորոշեցեք $\operatorname{arc\,cos} 1$; $\operatorname{arc\,cos}\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{arc\,cos}\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{2}$; * $\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{3}$ $\operatorname{arc\,cos} 0$; $\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{1}{2}\right)$; $\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\operatorname{arc\,cos}(-1)$

764. Վորոշեցեք $\operatorname{arc\,ctg} \infty$; * $\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{10}$; $\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}$; $\operatorname{arc\,ctg} 1$; $\operatorname{arc\,ctg} 0$; $\operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\operatorname{arc\,ctg}(-1)$; $\operatorname{arc\,ctg}(-\infty)$

765. Կառուցեք հետևյալ անկյունները $y = \operatorname{arc\,sin}\frac{1}{4}$ և $z = \operatorname{arc\,cos}\frac{1}{4}$ և գծանկարի միջոցով ապացուցեք, վոր $\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{4} + \operatorname{arc\,cos}\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$

766. Կառուցեք հետևյալ անկյունները $u=\arc\sin\left(-\frac{1}{3}\right)$ և $v=\arc\cos\left(-\frac{1}{3}\right)$ և գծանկարից ապացուցեք, վոր $\arc\sin\left(-\frac{1}{3}\right)+$ $+\arc\cos\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{2}$

767. Ապացուցեք կառուցման միջոցով, վոր $\mathrm{acr\,tg}\,x+\mathrm{acr\,ctg}\,x=\frac{\pi}{2}$ դրական և բացասական x-ի համար։

768. Պարզ ձև տալ հետևյալ արտահայտություններին $\sin\arc\sin m$; $\sin\arc\cos\frac{4}{5}$; $\mathrm{tg}\arc\sin\frac{5}{18}$; $\mathrm{ctg}\arc\mathrm{tg}\,x$; $\sin\arc\cos(-1)$; $\sin\arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\cos\arc\sin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\cos\arc\mathrm{tg}(-1)$

Այժմ լուծենք հետևյալ հարցը, թե ինչպես, վորոշելով ամենապարզն այն անկյուններից, վորոնք համապատասխանում են նրա յեռանկյունաչափական ֆունկցիայի տվյալ մեծությանը, գտնել այն բոլոր անկյունների ընդհանուր արտահայտությունը, վորոնց համար այդ յեռանկյունաչափական ֆունկցիան ունի նույն մեծությունը։

1. Arc sin x

Նախորդ պարագրաֆում Arc sin x-ի ընդհանուր արտահայտությունն արդեն հանված է մասնավոր որինակով $x=\frac{1}{2}$ համար։ Այստեղ բերենք ընդհանուր ձևով։

Նշանակենք Arc sin x-ի ընդհանուր արտահայտությունը φ-ով, իսկ նրա arc sin x ամենապարզ արժեքը φ_0-ով, այնպես վոր $\sin\varphi=x$

Սինուսի նույն մեծությունը պատկանում է, ինչպես այդ հայտնի յե բերման ֆորմուլներից, $\pi-\varphi_0$ անկյանը։

Այդպիսով ուրեմն, մենք առայժմ ստացանք φ_0 և $\pi-\varphi_0$ յերկու անկյունները, վորոնց սինուսը հավասար է x-ի։ Այդ անկյուններից յուրաքանչյուրին կարելի յե ավելացնել ամբողջ թվով սինուսի փոփոխման պարբերությունները, այսինքն $2\pi\cdot n$, այնպես վոր ստացվում են վորոնելի անկյունների հետևյալ յերկու սերիաները

$$\varphi_1=2\pi\cdot n+\varphi_0=\pi\cdot 2n+\varphi_0$$

և

$$\varphi_2=2\pi\cdot n+\pi-\varphi_0=\pi(2n+1)-\varphi_0$$

Այդ արտահայտություններից առաջինում π բազմապատկվում է $2n$ կամավոր զույգ թվով և φ_0 ունի դրական նշան, իսկ յերկրորդ արտահայտության մեջ π բազմապատկվում է $2n+1$ կամավոր կենտ թվով և φ_0 ունի բացասական նշան։

Այդ յերկու արտահայտությունները կարելի յե միացնել հետևյալ ընդհանուր ֆորմուլով

$$\varphi=\pi\cdot m+\varphi_0(-1)^m$$

վորտեղ m-ը կամավոր ամբողջ թիվ է, վորովհետև յերբ m-ը զույգ թիվ է, յերկրորդ անդամը հավասար է $+\varphi_0$, իսկ յերբ m-ը կենտ է, նա հավասար է $-\varphi_0$-ի։

Նույն ֆորմուլը կարելի յե արտահայտել հետևյալ ձևով

$$\mathrm{Arc}\sin x = \pi \cdot m + \arcsin x \cdot (-1)^m$$

2. Arc cos x

Նշանակելով դարձյալ վորոնելի անկյան ընդհանուր արտահայտությունը φ-ով, իսկ նրա ամենապարզ արժեքը φ_0-ով, նկատենք, վոր $-\varphi_0$ բացասական անկյունն ունի կոսինուսի նույն մեծությունը, վորովհետև անկյան նշանը փոխելու դեպքում նրա կոսինուսի մեծությունը չի փոխվում։

φ_0 և $-\varphi_0$ անկյուններից յուրաքանչյուրին կարելի յե ավելացնել ամբողջ թվով կոսինուսի փոփոխման 2π պարբերությունները, այնպես վոր վորոնելի անկյան ընդհանուր արտահայտությունը կարելի յե ձևակերպել այսպես

$$\varphi = 360^0 \cdot n \pm \varphi_0 \quad \text{կամ} \quad \varphi = 2\pi \cdot n \pm \varphi_0$$

Այլապես

$$\mathrm{Arc}\cos x = 2\pi \cdot n \pm \arccos x$$

3. Arc tg x *և* Arc ctg x

Տանգենսի և կոտանգենսի փոփոխման պարբերությունը հավասար է 180^0-*ի, այսինքն* π

Ընդհանուր արտահայտությունն այն անկյունների, վորոնք ունեն տանգենսի կամ կոտանգենսի տվյալ x *մեծությունը, ստացվում է անմիջապես հետևյալ ձևով*

$$\mathrm{Arc\,tg}\, x = \pi \cdot n + \mathrm{arc\,tg}\, x$$
$$\mathrm{Arc\,ctg}\, x = \pi \cdot n + \mathrm{arc\,ctg}\, x$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

769. *Արտահայտել աղեղային միավորներով*

$$\mathrm{Arc}\sin 0;\ \mathrm{Arc}\sin 1;\ \mathrm{Arc}\sin \frac{\sqrt{2}}{2};\ \mathrm{Arc}\sin\left(-\frac{1}{2}\right)$$

770. *Արտահայտել աղեղային միավորներով*

$$\mathrm{Arc}\cos 0;\ \mathrm{Arc}\cos(-1);\ \mathrm{Arc}\cos\frac{\sqrt{3}}{2};\ \mathrm{Arc}\cos\left(-\frac{1}{2}\right)$$

771. *Արտահայտել աղեղային միավորներով*

$$\mathrm{Arc\,tg}\, 0;\ \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{1}{\sqrt{3}};\ \mathrm{Arc\,tg}\,(-\sqrt{3})$$

772. *Արտահայտել աղեղային միավորներով*

$$\mathrm{Arc\,ctg}\, 0;\ \mathrm{Arc\,ctg}\, 1;\ \mathrm{Arc\,ctg}\,(-1)$$

773. *Արտահայտել աստիճանային միավորներով*

$$\mathrm{Arc}\sin\frac{1}{2};\ \mathrm{Arc}\sin\frac{\sqrt{5}-1}{4};\ {}^*\mathrm{Arc}\sin 0{,}7$$

$$\mathrm{Arc}\cos\frac{\sqrt{2}}{2};\ \mathrm{Arc}\cos(-0{,}9);\ \mathrm{Arc\,tg}(-1)\ \ {}^*\mathrm{Arc\,ctg}\,\frac{1}{2};\ \mathrm{Arc\,ctg}\sqrt{3}$$

774. *Արտահայտեք աղեղային կամ աստիճանային միավորներով*

$y = 2\,\mathrm{Arc}\sin\frac{\sqrt{3}}{2};\quad z = \frac{1}{2}\mathrm{Arc}\sin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *և գծանկարեք այդ անկյունները յեռանկյունաչափական շրջանի մեջ։*

§ 78. ՅԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Յեռանկյունաչափական հավասարումների լուծման յեղանակը պարզելու համար բերենք այդ հավասարումների հետևյալ յերեք որինակների մանրամասն լուծումը։

1. $\sin\varphi + \cos\varphi = 1$

Փոխարինում ենք $\cos\varphi$ *լրացուցիչ անկյան կոսինուսով և հավասարման ձախակողմյան մասը ներկայացնում ենք արտադրյալի ձևով*

$$\sin\varphi + \sin(90^0 - \varphi) = 1; \quad 2\sin 45^0 \cdot \cos(\varphi - 45^0) = 1$$

$$\cos(\varphi - 45^0) = \frac{1}{2\sin 45^0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ կամ } \cos(\varphi - 45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ամենափոքր դրական անկյունը, վորն ունի կոսինուսի տվյալ մեծությունը, հավասար է 45^0*-ի. ընդհանուր արտահայտությունն այն բոլոր անկյունների, վորոնք ունեն կոսինուսի նույն մեծությունը, կլինի*

$$360^0 \cdot n \pm 45^0$$

Այսպես ուրեմն

$$\varphi - 45^0 = 360^0 \cdot n \pm 45^0; \quad \varphi = 360^0 \cdot n + 45^0 \pm 45^0$$

Այդ ընդհանուր ֆորմուլը ներփակում է վորոնելի անկյունների մեծությունների յերկու հետևյալ սերիաները, վորոնց նշանակենք φ_1*-ով և* φ_2*-ով.*

$$\varphi_1 = 360^0 \cdot n + 90^0 = 90^0(4n + 1)$$
$$\varphi_2 = 360^0 \cdot n = 90^0 \cdot 4n$$

Գծանկարենք ստացված անկյունները յեռանկյունաչափական շրջանի մեջ (գծ. 80)։ φ_1 *անկյունները վերջանում են* B *կետում,* φ_2 *անկյունները՝* A *կետում։* φ_1 *անկյուններից ամենապարզը հավասար է* 90^0*-ի, իսկ* φ_2 *անկյուններից ամենապարզը հավասար է* 0*-ի։*

Ստացված լուծումների ստուգումը

$$\varphi_1\text{-ի համար } \left.\begin{aligned} \sin\varphi_1 &= \sin 90^0 = 1 \\ \cos\varphi_1 &= \cos 90^0 = 0 \end{aligned}\right\} \sin\varphi_1 + \cos\varphi_1 = 1$$

$$\varphi_2\text{-ի համար } \left.\begin{aligned} \sin\varphi_2 &= \sin 0^0 = 0 \\ \cos\varphi_2 &= \cos 0^0 = 1 \end{aligned}\right\} \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 = 1$$

2. $\mathrm{cin}\, 2\varphi = \mathrm{tg}\,\varphi$

Տեղադրում ենք

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi; \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

Ստանում ենք

$$2\sin\varphi\cos\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

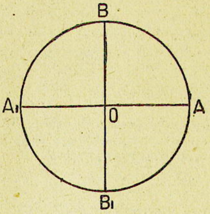
Բազմապատկելով հավասարման յերկու մասերը $\cos\varphi$*-ով, կստանանք հետևյալ հավասարումը*

$$2\sin\varphi\cos^2\varphi = \sin\varphi$$

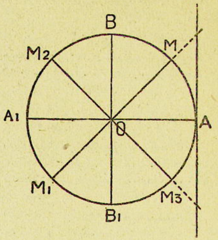
վորը համազոր է տվածին, վորովհետև վոչ տված, վոչ էլ ստացված հավասարումները չեն բավարարվում, յեթե $\cos\varphi = 0$*, վորի մեջ դժվար չե համոզվել տեղադրման միջոցով։*

Տեղափոխենք բոլոր անդամները հավասարման մի կողմը և այն ներկայացնենք արտադրյալի ձևով

$$\sin\varphi\,(2\cos^2\varphi - 1) = 0$$



գծ. 80



գծ. 81

Վորովհետև

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$$

ապա հավասարումը կընդունի հետևյալ ձևը

$$\sin\varphi\cos 2\varphi = 0$$

Ցեթե յերկու արտադրիչների արտադրյալը հավասար է զերոյի, ապա այդ արտադրիչներից մեկը հավասար է զերոյի կամ $\sin\varphi = 0$ կամ $\cos 2\varphi = 0$

1. $\sin\varphi = 0; \quad \varphi_1 = 180^0 \cdot n$

2. $\cos 2\varphi = 0; \quad 2\varphi_2 = 90^0(2n + 1); \quad \varphi_2 = 45^0(2n + 1) = 90^0 n + 45^0$

Ստուգում

φ_1-ի համար $\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}(180^0 \cdot n) = 0 \\ \sin 2\varphi_1 = \sin(360^0 \cdot n) = 0 \end{array}\right\} \sin 2\varphi_1 = \operatorname{tg}_1$

φ_2-ի համար $\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}(90^0 \cdot n + 45^0) = \pm 1 \\ \sin 2\varphi_2 = \sin(180^0 \cdot n + 45^0) = \pm 1 \end{array}\right\} \sin 2\varphi_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$

Ստացած հետևանքները պատկերացնենք 81-րդ գծանկարի վրա։ 360^0-ի սահմաններում ստանում ենք ընդամենը 6 անկյուն, վորոնք վերջանում են A, A_1, M, M_1, M_2, M_3 կետերում։

Ծանոթություն.—φ_1 անկյունները չի կարելի համարել անպայման բավարարող հավասարմանը, թեպետ և այդ անկյունները հավասարմանը, յերկու մասերը դարձնում են զերո, վորովհետև անկյան $180^0 \cdot n$-ի անսահման մոտենալուդ դեպքում $\frac{\sin 2\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}$ հարաբերության սահմանն է վոչ թե 1-ը, այլ 2-ը։ Տվյալ հավասամրանը բերող խնդրի բովանդակությունից կախված φ_1 լուծումը պետք է համարել պիտանի կամ անպետք։

3. $\operatorname{tg}^2\varphi - \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}\varphi = 0$

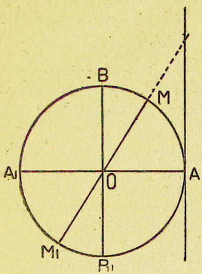
Հավասարման ձախակողմյան մասն արտադրիչների վերլուծելով, կստանանք

$$\operatorname{tg}\varphi(\operatorname{tg}\varphi-\sqrt{3})=0$$

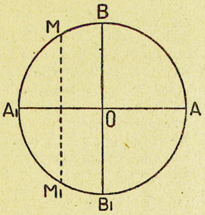
1) $\operatorname{tg}\varphi=0;\quad \varphi_1=180^0\cdot n$

2) $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3};\quad \varphi_2=180^0\cdot n+60^0$

Գծանկարելով այդ անկյունները յեռանկյունաչափական շրջանի մեջ



գծ. 82



գծ. 83

(գծ. 82), կստանանք A, A_1, M *և* M_1 *չորս կետերը, վորոնցում կարող են վերջանալ վորոնելի անկյունների աղեղները։ Լուծման ստուգումն առանձին դժվարություններ չի ներկայացնում։*

4. *Լուծենք մի հավասարում ևս*

$$\cos 3\varphi-4\cos^2\varphi=0$$

Գործադրելով φ *և* 2φ *անկյունների նկատմամբ գումարի կոսինուսի ֆորմուլը, գտնում ենք* $\cos 3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi$ *արտահայտությունը, վորը և տեղադնելով տվյալ հավասարմանը, կստանանք*

$$4\cos^3\varphi-3\cos\varphi-4\cos^2\varphi=0$$

կամ

$$\cos\varphi(4\cos^2\varphi-4\cos\varphi-3)=0$$

1) $\cos\varphi=0;\quad \varphi_1=\frac{\pi}{2}(2n+1)$

2) $4\cos^2\varphi-4\cos\varphi-3=0$

Այստեղից $\cos\varphi=\frac{4\pm\sqrt{16+48}}{8}=\frac{4\pm 8}{8};\quad \cos\varphi=\frac{3}{2}$ *կամ* $\cos\varphi=-\frac{1}{2}$

Վորովհետև $\cos\varphi$ *իր բացարձակ մեծությամբ չի կարող մեծ լինել* 1*-ից, ապա մնում է վոր*

$$\cos\varphi=-\frac{1}{2},\quad \varphi_2=2\pi n\pm\frac{2\pi}{3}$$

Գծանկարելով ստացած φ_1 *և* φ_2 *անկյունները յեռանկյունաչափական շրջանի մեջ (գծ. 83), կստանանք* B, B_1, M *և* M_1 *չորս կետերը, վորոնցում կարող է վերջանալ վորոնելի* φ *անկյան աղեղը։ Ստուգումը դժվար չէ կատարել ինքնուրույն։*

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Լուծել հետևյալ հավասարումները

775. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

776. $\sin \varphi + \cos \varphi = 0$

777. $\sin x + \sin 3x - \sin 5x = 0$

778. $\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

779. $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$

780. $\sin \alpha + \sin 2\alpha = \sin 3\alpha + \sin 4\alpha$

781. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

782. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

783. $2\cos 2\alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 4$

784. $\cos x = \sin 2x + \sin 4x$

785. $\sin \varphi + \sqrt{3} \cdot \cos \varphi = 2$ Ցուցմունք: *Բաժանեցեք հավասարումը 2-ի վրա և ձախակողմյան մասը ներկայացրեք գումարի սինուսի ձևով։*

786. $\cos x - \sqrt{3} \cdot \sin x = 1$ Ցուցմունք: *Ձևակերպեք հավասարումը նույն ձևով, ինչպես նախորդը։*

787. $\operatorname{tg}(\varphi + 15^0) = 3\operatorname{tg}(\varphi - 15^0)$

788. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(45^0 + x) = 2$

789. $\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} 3y = 0$

790. $3\operatorname{tg}\varphi \sin 2\varphi = 1 + 4\cos^2\varphi$

791. $2\operatorname{ctg} \varphi \cdot \sin 2\varphi = 1 + 2\sin^2 \varphi$

792. $4\sin^2 x + \sin^2 2x = 3$

793. $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$

794. $\sin^2 2x - \sin^2 x = \sin^2 30^0$

795. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} 2x = 0$

796. $\sin 3x \cdot \operatorname{ctg} x = 0$

797. $\cos \frac{x}{2} + \cos x = 1$

798. $\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\cos 2x}$

799. $\sin(x + 30^0) \cdot \sin(x - 30^0) = \sin 30^0$

800. $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x - 45^0) \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(x + 45^0)$

801. $\sqrt{2} \cdot \cos 2x = \cos x + \sin x$

802. $\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} 2x = 2$

803. $\frac{1 + \cos 2x}{2\cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$

804. $\frac{1 - \cos 2x}{2\sin x} = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$

Եռանկյունաչափական հավասարումների բերող խնդիրներ

*(Այն խնդիրները, վորոնք պահանջում են լոգարիթմների աղյուսակների գործածումը նշանակված են * նշանով)*

805. *Ինչպիսի անկյան տակ պետք է տանել շրջանի մեջ յերկու տրամագծեր, վորպեսզի այն ուղղանկյան մակերեսը, վորի համար նրանք ներկայանում են անկյունագծեր,* m *անգամ փոքր լինի նույն շրջանին ներգծած քառակուսու մակերեսից* ($m = 2$,* $m = 3$)։

806. *Վորոշել այն ռոմբի անկյունները, վորի կողմը* $\frac{4}{\sqrt{3}}$ *անգամ մեծ է ներգծած շրջանի շառավղից։*

807*. *Վորոշել շրջանին արտագծած այն հավասարակող տրապեցի անկյունները, վորի հիմքերից մեկը 2 անգամ մեծ է մյուսից։*

808. 75^0*-ի անկյունը բաժանված է յերկու այնպիսի անկյունների, վորոնց սինուսները հարաբերում են միմյանց այնպես, ինչպես* $\sqrt{2} : 1$։ *Գտնել այդ անկյունները։*

809. *Վորոշել այն անկյունները, ինչպիսինների բաժանվում է ուղիղ անկյունն այն կետերի յերկրաչափական տեղով, վորոնց ուղիղ անկյան կողմերից ունեցած հեռավորությունները հարաբերում են միմյանց այնպես, ինչպես* $m : n$ *Կատարել հաշվումը* 1)* *յեթե* $m = 3$, $n = 2$; 2) *յեթե* $m = \sqrt{3}$ $n = 1$

810. 60^{0}-ի անկյունը բաժանված ե յերկու այնպիսի անկյունների, վորոնց տանգենսները հարաբերում են միմյանց այնպես, ինչպես 5 : 3 Գտնել այդ անկյունները։

811. Վորոշել այն ուղղանկյուն յեռանկյան սուր անկյունները, վորի պարագիծը $5+2\sqrt{6}$ անգամ մեծ ե ներգծած շրջանի տրամագծից։

Ցուցմունք: *Օգտվեցեք ուղղանկյուն յեռանկյանը ներգծած շրջանի շառավղի հետևյալ ֆորմուլից* $r=\frac{a+b-c}{2}$, *վորտեղ* a *և* b *եջերն են, իսկ* c-*ն ներքնաձիգը։*

812*. Քառակուսու գագաթներից տարած են ուղիղներ այնպես, վոր նրանք այդ քառակուսու ներսն առաջացնում են մի նոր քառակուսի, վորի մակերեսը հավասար ե տվյալ քառակուսու մակերեսի կեսին։ Վորոշել այդ ուղիղներով և տվյալ քառակուսու կողմերով կազմված անկյունները։

813. Հավասարասրուն յեռանկյանը ներգծած ե մի քառակուսի այնպես, վոր նրա յերկու գագաթները գտնվում են յեռանկյան հիմքի վրա և մեկական գագաթները՝ սրունքների վրա։ Վորոշել յեռանկյան անկյունները, յեթե քառակուսու մակերեսը կազմում ե յեռանկյան մակերեսի $\frac{4}{5}$ մասը։

814*. Ուղիղ պրիզման հիմքում ունի ուղղանկյուն հավասարասրուն յեռանկյուն։ Վորոշել այն յերկնիստ անկյունը, վորն առաջանում ե պրիզմայի հիմքով և այն հարթությունով, վորը հատելով պրիզման՝ նրա հատվածքում տալիս ե հավասարակողմ յեռանկյուն։

815. Հարթությունից դուրս գտնվող կետից տարված են յերկու թեքեր, վորոնցից մեկը հարթության հետ կազմում ե 30^{0}-ով ավելի մեծ անկյուն, քան մյուսը։ Վորոշել այդ անկյունները, յեթե թեքերից մեկը $\sqrt{3}$ անգամ մեծ ե մյուսից։

816. Վորոշել կանոնավոր քառանկյուն բուրգի կողմնային կողերի և կողմնային նիստերի թեքի անկյունները հիմքին, նույնպես կողմնային յերկնիստ անկյունները, յեթե գագաթի հարթ անկյունը հավասար ե α-ի։

* Կատարել հաշվումը, յեթե $\alpha = 60^{0}$։

817. Լուծեք խնդիր 811-ը ընդհանուր ձևով կանոնավոր n-անկյուն բուրգի համար։

818. Վորոշել գնդի շուրջն արտագծած հատած կոնի ծնիչի թեքի անկյունը հիմքի հարթությանը, յեթե այդ կոնի ծավալը $1\frac{3}{4}$ անգամ մեծ ե գնդի ծավալից։

819. Գնդին ներգծած են յերկու ուղիղ կոն, վորոնց գագաթները գտնվում են գնդի տրամագծերից մեկի հակառակ ծայրերում։ Վորոշել այն անկյունը, վորի տակ այդ կոների ընդհանուր հիմքերի տրամագիծը յերևվում ե գնդի կենտրոնից, յեթե կոների ծավալների հարաբերությունը հավասար ե 2-ի։

820. Վորոշել կոնի բարձրությամբ և ծնիչով կազմված անկյունը, յեթե հարթության վրա նրա կողմնային մակերևույթի բացվածքի (պարզվածքի) անկյունը հավասար ե β-ի։

Կատարել հաշվումն 1) յեթե $\beta = 180^{0}$; 2) * յեթե $\beta = 120^{0}$

ԳԼՈՒԽ XI

ՄԻԱՑՈՒՄՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԸ: ՆՅՈՒՏՈՆԻ ԲԻՆՈՄԸ

§ 79. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՄԻԱՑՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Յենթադրենք, ունենք n քանակությամբ առարկաներ, վորոնց կարող ենք դասավորել ըստ մեր ցանկության։ Վորովհետև ներկա դեպքում մեզ հետաքրքրում է միայն այդ առարկաների խմբավորումը և վոչ իրենք՝ առարկաները, ուստի հարմարության համար այդ առարկաները (ինչպիսի առարկաներ էլ ուզում է լինեն) նշանակենք տառերով։

Ավելի հարմար կլինի նշանակումների համար վերցնել մի տառ, որինակ a և համարակալել առարկաները 1-ից մինչև n, հատկացնելով a տառին ցուցիչներ կամ ինդեքսներ այնպես, վոր յուրաքանչյուր առարկային, առաջինից մինչև n-րդը, հատկացված լինեն հետևյալ կոչումները

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$$

Պայմանավորվենք խմբավորումների մեջի այդ նշանակումներն անվանել էլեմենտներ:

Այն խմբերը, վորոնց մեջ էլեմենտները մտնում են մեկ-մեկ, յերկու-յերկու, յերեք-յերեք, չորս-չորս և այլն, ընդունված է անվանել միացումներ:

Միացումները կարող են լինել յերեք տեսակի

1. Դասավորումներ (ֆրանսերեն Arrangements), այսինքն այնպիսի միացումներ, վորոնց մեջ յուրաքանչյուրն ունի նույն թվով էլեմենտներ, իսկ տարբերվել կարող են կամ էլեմենտներով, կամ էլեմենտների հաջորդական կարգով:

Որինակ, վերցնելով յերեք էլեմենտ

$$a_1, a_2, a_3$$

կարելի յե դրանց զույգ-զույգ, բայց տարբեր-տարբեր ձևով խմբավորել, վորը գրում են այսպես

$$\begin{array}{ccc} a_1a_2 & a_1a_3 & a_2a_3 \\ a_2a_1 & a_3a_1 & a_3a_2 \end{array}$$

Այսպիսի միացումներն իրենցից ներկայացնում են դասավորումներ, վորովհետև a_1a_2 և a_1a_3 խմբերը միմյանցից տարբերվում են իրենց մեջ մըտնող a_2 և a_3 էլեմենտներով, իսկ a_1a_2 և a_2a_1 խմբերը տարբերվում են միայն էլեմենտների հաջորդական կարգով։

Յեթե խմբավորման յենթակա տված բոլոր էլեմենտների թիվը է n, իսկ մենք ցանկանում ենք նրանցից կազմել յուրաքանչյուրն m էլեմենտից բաղկացած միացումներ (վորտեղ $m < n$), ապա, վորպեսզի կարճենք նշանակումներով մի գրություն, վորից յերևա, թե տված է n էլեմենտներից m-ական դասավորումների թիվ, ոգտվում ենք A_n^m նշանակումից („Arrangements" բառի գլխատառից)։

2. Տեղափոխումները (Permutations) *իրենցից ներկայացնում են* դասավորումների մասնակի դեպք, յերբ միացումների մեջ մտնում են տված բոլոր ելեմենտները. *հետևապես տարբերությունը կլինի միայն հաջորդական կարգի մեջ։*

Օրինակ, յեթե տված ե յերեք ելեմենտներ

$$a_1,\ a_2,\ a_3$$

ապա տեղափոխումներ կլինեն հետևյալ միացումները

$$\begin{array}{ccc} a_1a_2a_3 & a_2a_1a_3 & a_3a_1a_2 \\ a_1a_3a_2 & a_2a_3a_1 & a_3a_2a_1 \end{array}$$

Տեղափոխումների նշանակ (սիմվոլ) P_n*-ը կարդացվում ե այսպես.* «n ելեմենտներից բաղկացած տեղափոխումների թիվը»։

3. Զուգորդումներ (Combinaisons) կոչվում են այնպիսի միացումները, վորոնցից յուրաքանչյուրը նույն թվով ելեմենտներից բաղկացած լինելով, մյուսներից տարբերվում ե առնվազը մի ելեմենտով։

Օրինակ, a_1, a_2, a_3, *յերեք ելեմենտներով կարելի յե կազմել յերկյակների զուգորդումներ*

$$a_1a_2 \qquad a_1a_3 \qquad a_2a_3$$

Զուգորդման նշանակ C_n^m*-ը կարդացվում ե այսպես.* «n ելեմենտներից m-ական ելեմենտներ պարունակող զուգորդումների թիվը»։

Հաջորդաբար վերլուծենք մատնանշած յերեք տիպի միացումների հատկությունները։

§ 80. ԴԱՍԱՎՈՐՈՒՄՆԵՐ

Տված ե n *ելեմենտ*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_{n-1},\ a_n$$

և պահանջվում ե դրանցից կազմել յուրաքանչյուրն m *ելեմենտից բաղկացած բոլոր հնարավոր դասավորումները* ($m \leqslant n$)։

Ակներև ե, վոր n *ելեմենտներից մի-մի ելեմենտ պարունակող դասավորումների թիվը հավասար ե այդ ելեմենտների թվին, այսինքն*

$$A_n^1 = n \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Այժմ այդ ելեմենտներից կազմենք յերկյակ ելեմենտներ պարունակող խմբավորումներ։

Այդ նպատակի համար վերցնենք ելեմենտ a_1*-ը և նրան հերթով մնացած բոլոր ելեմենտները մեկ-մեկ միացնենք, վորից հետո, կստանանք յերկյակների դասավորումներ, վորոնք կսկսվեն* a_1*-ով*

$$a_1a_2,\ a_1a_3,\ a_1a_4,\ \dots,\ a_1a_{n-1},\ a_1a_n$$

Բայց նույն ձևի գործողություն կարելի յե կրկնել ըստ հերթի և հետևյալ a_2 *ելեմենտի հետ, վորի համար դարձյալ կստանանք* $n-1$ *յերկյակների դասավորումներ*

$$a_2a_1,\ a_2a_3,\ a_2a_4,\ \dots,\ a_2a_{n-1},\ a_2a_n$$

սրանք ել բոլորն սկսվում են a_2*-ով։*

Այսպիսի կարգով բոլոր ելեմենտներն ըստ հերթի մի առ մի վերցնելուց հետո, նրանցից յուրաքանչյուրի համար կստանանք $n-1$ *յերկյակների դասավորումներ*

$$\begin{array}{lll} a_1a_2 & a_1a_3 & \dots\ a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2a_3 & \dots\ a_2a_n \end{array}$$

$$a_3a_1 \qquad a_3a_2 \;.\;.\;.\; a_3a_n$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$a_n a_1 \qquad a_n a_2 \;.\;.\;.\; a_n a_{n-1}$$

Այս փոքրիկ աղյուսակում հորիզոնական տողերի թիվը հավասար է n-ի (ըստ բոլոր ելեմենտների թվի), իսկ յուրաքանչյուր տողում յերկյակների դասավորումների թիվը հավասար է n — 1-ի. հետևապես, n ելեմենտներից յերկյակների բոլոր դասավորումների թիվը կլինի n(n—1) կամ

$$A_n^2 = n(n-1) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Այժմ գտնենք n ելեմենտներից կազմված յեռյակների բոլոր դասավորումների թիվը։ Դրա համար վերցնենք վորևե յերկյակ խմբավորում, որինակ a_1a_2, կցենք նրան մնացած n—2 ելեմենտները մի առ մի, ըստ հերթի, կստանանք n—2 յեռյակների դասավորումներ, վորոնք կսկսվեն a_1a_2-ով

$$a_1a_2a_3,\; a_1a_2a_4,\; a_1a_2a_5,\; .\;.\;.\;, a_1a_2a_n$$

Կրկնելով նույն ձևի գործողություն բոլոր յերկյակ դասավորումների հետ, կստանանք

$$a_1a_2a_3 \qquad a_1a_2a_4 \;.\;.\;.\; a_1a_2a_n$$

$$a_1a_3a_2 \qquad a_1a_3a_4 \;.\;.\;.\; a_1a_3a_n$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$a_n a_{n-1}a_1 \qquad a_n a_{n-1}a_2 \;.\;.\;.\; a_n a_{n-1}a_{n-2}$$

Այստեղ հորիզոնական տողերի թիվն է n (n — 1)՝ ըստ բոլոր յերկյակների դասավորումների թվի, իսկ յուրաքանչյուր տողում՝ n—2 յեռյակների դասավորումներ, հետևապես, n ելեմենտներից բաղկացած բոլոր յեռյակ դասավորումների թիվը կլինի n (n — 1) (n — 2) կամ

$$A_n^3 = n(n-1)(n-2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Շարունակելով նույն ձևի դատողություններ, կստանանք

$$A_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

$$A_n^5 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

$$A_n^6 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \text{ և այլն } . \; . \; . \; (6)$$

Զննելով (1), (2), (3), (4), (5), (6) հավասարությունները, դժվար չէ նըկատել նրանց մեջ գոյություն ունեցող որինականությունը. այսինքն, յուրաքանչյուր հավասարության առաջին մասում արտադրիչների թիվը հավասար է համապատասխան դասավորումների ելեմենտների թվին և արտադրիչներից ամենամեծն է n, վորը հավասար է բոլոր ելեմենտների թվին, իսկ հետևյալները մեկական միավորով նվազում են։ Այդպիսով, առհասարակ

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \; . \; . \; . \; [n-(m-1)] \quad (m \text{ արտադրիչներ})$$

կամ

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \; . \; . \; . \; (n-m+1)$$

այսինքն, n **ելեմենտներից m-ական ելեմենտներ պարունակող դասավորումների թիվը հավասար է n-ով սկսվող յեվ հաջորդաբար նվազող m ամբողջ թվերի արտադրյալին։**

Դուրս բերած ֆորմուլով հնարավոր է միանգամից գտնել A_n^m-ի արժեքը, m-ի և n-ի ամեն մի արժեքի դեպքում։

Որինակ

$A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$; $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$; $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ *և այլն։*

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Դասարանում ավանդում են 10 տեսակ առարկաներ և որական պարապում են 5 տարբեր դասեր։ Քանի՞ ձևով կարելի յե դասավորել որվա դասերը։

Ակներև է, վոր որական դասերի բոլոր հնարավոր ձևի դասավորումներն իրենցից ներկայացնում են 10 ելեմենտից 5-ական ելեմենտներ պարունակող դասավորումներ։

Ուստի կստանանք

$$A_{10}^{5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$$

2. Քանի՞ ձևով կարելի յե դասարանում միմյանց կողքի նստեցնել 28 աշակերտ, յեթե ունենք 4 տեղանի 7 նստարան։

$$A_{28}^{4} = 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 = 491\,400$$

3. Քանի՞ ամբողջ թվեր կարելի յե կազմել, այնպես, վոր յուրաքանչյուրն արտահայտված լինի յերեք բովանդակալից թվանշաններով։

Պատասխանն է

$$A_{9}^{3} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

4. Քանի՞ ձևով կարելի յե արևային սպեկտրի յոթ գույներից կազմել քառագույն շերտ։ Հարցը պարզ է. պետք է 7 ելեմենտներից քառյակների խմբավորումներ կազմել, հետևապես $A_{7}^{4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

§ 81. ՏԵՂԱՓՈԽՈՒՄՆԵՐ

Ինչպես ասացինք, տեղափոխումները դասավորումների մասնակի դեպքն են, այն տարբերությամբ, վոր այստեղ յուրաքանչյուրի մեջ մտնում են տված բոլոր ելեմենտները, այսինքն $n = m$ հետևապես

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

ուրիշ խոսքով, n ելեմենտներից բաղկացած տեղափոխումների թիվը հավասար է բնական առաջին n թվերի արտադրյալին:

Այդ արտադրյալն ընդունված է կրճատ ձևով գրել այսպես $n!$ (n տառը բացականչական նշանի հետ), այնպես վոր, որինակ

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 8!$$

և առհասարակ

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\,n = n!$$

Այդ նշանակումը կարդացվում է «ֆակտորիալ n»*)։ Կիրառելով դուրս բերած ֆորմուլները, կարող ենք միանգամից հաշվել

$$P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3! = 6$$

$$P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6! = 720$$

$$P_8 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 8! = 40\,320$$

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Քանի՞ իննանիշ թիվ կարելի յե գրել, վորոնցից յուրաքանչյուրն արտահայտված լինի 9 տարբեր բովանդակալից թվանշաններով։ Վորոնելի թիվը կլինի

$$P_9 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 9 = 9! = 362\,880$$

---

*) Ֆակտոր մաթեմատիկայում նշանակում է արտադրիչ:

2. *Տասներկու մարդու քանի՞ տեսակի դասավորությամբ կարելի յե նստեցնել սեղանի շուրջը, վորի վրա դարսած են սեղանի 12 սպասք։*

Պատասխան

$$P_{12} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \; . \; . \; . \; 12 = 12! = 479\,001\,600$$

3. *Տասներեք վագոնից բաղկացած մարդատար գնացքի վագոնները քանի՞ տեսակ կարելի յե տեղափոխել և բոլոր տեղափոխումները կատարելու համար վորքան ժամանակ ե հարկավոր, յեթե յուրաքանչյուր խմբավորման համար կորցնեյին 10 րոպե։*

Պատասխան

1. $$P_{13} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \; . \; . \; . \; 13! = 6\,227\,020\,000$$

2. $$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 10}{60 \cdot 24 \cdot 7 \cdot 52} = 118\,800$$ *տարի։*

§ 82. *ԶՈՒԳՈՐԴՈՒՄՆԵՐ*

Յենթադրենք, տված ե 4 ելեմենտներ

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$$

և պահանջվում ե դրանցից կազմել յեռյակների զուգորդումներ։

Պարզ ե, վոր զուգորդումների թիվը կլինի չորս

$$a_1a_2a_3,\ a_1a_2a_4,\ a_1a_3a_4,\ a_2a_3a_4$$

Դրանցից յուրաքանչյուրում կատարենք տեղափոխումներ։

Վորովհետև $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, *ուստի բոլոր տեղափոխումները (զուգորդումների թվին համաձայն) կլինեն* $4 \cdot 6 = 24$

$a_1a_2a_3$	$a_1a_2a_4$	$a_1a_3a_4$	$a_2a_3a_4$
$a_1a_3a_2$	$a_1a_4a_2$	$a_1a_4a_3$	$a_2a_4a_3$
$a_2a_1a_3$	$a_2a_1a_4$	$a_3a_1a_4$	$a_3a_2a_4$
$a_2a_3a_1$	$a_2a_4a_1$	$a_3a_4a_1$	$a_3a_4a_2$
$a_3a_1a_2$	$a_4a_1a_2$	$a_4a_1a_3$	$a_4a_2a_3$
$a_3a_2a_1$	$a_4a_2a_1$	$a_4a_3a_1$	$a_4a_3a_2$

Դժվար չե նկատել, վոր այս աղյուսակի խմբավորումներն ամփոփում են 4 ելեմենտներից բոլոր յեռյակ դասավորումները, այսինքն

$$A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Հետևապես տվյալ դեպքի համար կարելի յե գրել

$$C_4^3 = 4; \quad P_3 = 6$$

և այն ժամանակ

$$C_4^3 \cdot P_3 = 24$$

հետևապես

$$C_4^3 \cdot P_3 = A_4^3$$

Ստացված հետևանքը հնարավորություն ե տալիս գտնել C_4^3, *յեթե տրված են* A_4^3 *և* P_3, *վորովհետև*

$$C_4^3 = \frac{A_4^3}{P_3}$$

Բայց այն դատողությունները, վորոնք հասցրին մեզ այդ հետևանքին, կախում չունեն n*-ի և* m*-ի մասնակի արժեքներից։ Յեվ հիրավի, յեթե ընդունենք, վոր կազմել ենք* n *ելեմենտներից* m *ելեմենտներ պարունակող բոլոր* զուգորդումները *(նրանց թիվը ե* C_n^m*), և նրանցից յուրաքանչյուրում* *կատարենք բոլոր* տեղափոխումները *(նրանց թիվն է P_m), ապա ամբողջությամբ ստացված խմբավորումները կներկայացնեն* n *էլեմենտներից* m*-ական էլեմենտներ պարունակող բոլոր հնարավոր* դասավորումները, *վորոնց թիվն է* A_n^m, *հետևապես*

$$C_n^m \cdot P_m = A_n^m$$

վորտեղից և կստանանք

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$$

կամ

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ (n-m+1)}{m!}$$

այսինքն, n էլեմենտներից m-ական էլեմենտներ պարունակող զուգորդումների թիվը հավասար է n-ով սկսվող յեվ աստիճանաբար նվազող m ամբողջ թվերի արտադրյալին՝ բաժանած ֆակտորիալ m-ի վրա:

Որինակ

$$C_5^3 = \frac{A_5^3}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

$$C_9^4 = \frac{A_9^4}{P_4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$$

$$C_{13}^5 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1287$$ *և այլն:*

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. *Միևնույն պաշտոնի համար* 10 *թեկնածվից պետք է ընտրվեն* 3 *հոգի: Ընտրության քանի՞ տարբեր դեպքեր կարող են տեղի ունենալ:*

Պատասխան

$$C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

2. *Խաղաթղթի կապոցի* 52 *կարտից քանի՞ տեսակ կարելի յե* 13 *կարտ ընտրել:*

Փնտրելիք թիվը հավասար է 52 *էլեմենտից* 13*-ական էլեմենտներ պարունակող զուգորդումների թվին*

$$C_{52}^{13} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50\ .\ .\ .\ 40}{1 \cdot 2 \cdot 3\ .\ .\ .\ 13} = 635\ 013\ 559\ 600$$

3. *Միմյանց հանդիպեցին* n *մարդ, վորից հետո* 120 *անգամ ձեռքի սեղմումների փոխանակում տեղի ունեցավ: Քանի՞ մարդ եյին իրար հանդիպողները:*

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = 120$$

հետևապես

$$n^2 - n - 120 = 0 \qquad n = 16$$

§ 83. ԶՈՒԳՈՐԴՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻՔԱՆԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

1. C_n^m-ին հավասար $\frac{A_n^m}{P_m}$ քանորդը պետք է լինի ամբողջ թիվ (ինչու), բայց ինչպես տեսանք

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ (n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ .\ .\ .\ m}$$

Հավասարության աջ մասը պետք է ամբողջ թիվ լինի. հետևապես, բնական շարքի m հաջորդական թվերի արտադրյալը նույն շարքի առաջին m թվերի արտադրյալի բազմապատիկն է։

2. Վերջին հավասարության աջ մասի համարիչը և հայտարարը բազմապատկենք ֆակտորիալ $(n-m)!$-ով։

Այն ժամանակ

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ (n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ .\ .\ .\ 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\ .\ .\ .\ m\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ .\ .\ .\ (n-m)}$$

բայց համարիչը

$$n(n-1)\ .\ .\ .\ (n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ .\ .\ .\ 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

իսկ հայտարարը

$$1\cdot 2\cdot 3\ .\ .\ .\ m\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ .\ .\ .\ (n-m) = m!\ (n-m)!$$

հետևապես

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Օրինակ՝

$$C_{11}^3 = \frac{11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3} = 165$$

Մյուս կողմից

$$C_{11}^3 = \frac{11!}{3!\ 8!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = 165$$

3. Կարելի յե ապացուցել, վոր

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

Նշանակենք $n-m$ տարբերությունը k տառով. $n-m=k$. յերկրորդ հատկության համաձայն կարելի յե գրել

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Փոխարինելով k-ն իր արժեքով, կստանանք

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!\ [n-(n-m)]!} = \frac{n!}{(n-m)!\ m!}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

բայց

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

(1) և (2) հավասարությունների աջ մասերը միմյանց հավասար են, ուստի ձախ մասերը էլ հավասար կլինեն, ուստի

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

այսինքն, n էլեմենտներից m-ական էլեմենտներ պարունակող զուգորդումների թիվը հավասար է m-ը մինչև n լրացնող n—m թիվ էլեմենտներ պարունակող զուգորդումների թվին:

Որինակ

$$C_7^2 = C_7^5$$

վորովհետև

$$5 = 7 - 2$$

Հիրավի

$$C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21 \qquad C_7^5 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 21$$

Վորովհետև առաջին դեպքում հաշվումն ավելի պարզ է, ապա, գտնելով C_7^5*-ը, պետք է* C_7^2*-ը հաշվելու հարց առաջացնել։ Ընդհանրապես, հաշվումները տնտեսելու նպատակով ձեռնտու յե* C_n^m*-ի փոխարեն գտնել* C_n^{n-m}*-ը, յեթե* $n - m < m$

Որինակ

1) C_{10}^7; *այստեղ* $n = 10$ *և* $m = 7$

Հետևապես

$$C_{10}^7 = C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

2) C_{11}^8; *այստեղ* $n = 11$ *և* $m = 8$

$$C_{11}^8 = C_{11}^3 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 165$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

821. *Կազմեցեք* A_7^4; A_{10}^7; P_5; P_8; C_{13}^3; A_{14}^5; C_{15}^4

822. *Կազմեցեք* C_9^6; C_{12}^7; C_m^5; C_m^{n+1}

823. *Ստուգեցեք հետևյալ հավասարությունները*

1) $C_{10}^4 = C_{10}^6$; 2) $C_{15}^9 = C_{15}^6$; $C_{10}^6 + C_{10}^5 = C_{11}^6$

Լուծեցեք հետևյալ հավասարումները

824. $C_x^2 = 36$; $\qquad C_{x-3}^2 = 21$

825. $C_x^8 = 8(x - 1)$; $\qquad C_{x+1}^8 = 20x$

826. $C_x^4 = \frac{5x(x - 3)}{4}$ $\qquad C_x^3 + C_x^2 = 15(x - 1)$

827. *Գտեք* n*-ը, յեթե*

$$C_{n+1}^{n-1} = 10$$

828. *Գտեք* n*-ը և* m*-ը, յեթե*

$$A_n^m = 272 \text{ և } C_n^m = 136$$

829. *Վորքան է* P_n*-ը, յեթե*

$$C_n^7 = C_n^3$$

830. *Վորոշեցեք* n*-ը, յեթե*

$$C_{n+2}^4 = 11C_n^2$$

831. *Քանի՞ յերկնիշ թիվ կարելի յե կազմել հետևյալ թվանշաններից* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9։

832. *Քանի՞ հնգանիշ թիվ կարելի յե կազմել հետևյալ թվանշաններից* 1, 2, 3, 4, 5։

833. *Քանի՞ յեղանակով կարելի յե* 10 *թեկնածվից* 4 *տարբեր պաշտոնների համար ընտրել* 4 *մարդ։*

834. *Քանի՞ էլեմենտ պետք ե վերցնել, վոր նրանցից ընտրած քառյակների դասավորումների թիվը* 12 *անգամ ավելի շատ լինի յերկյակների դասավորումների թվից։*

835. n *էլեմենտներից կազմած յեռյակ զուգորդումների թիվը* 5 *անգամ պակաս ե, քան* $n+2$ *էլեմենտներից կազմած քառյակ զուգորդումների թիվը։*

836. $2n$ *էլեմենտներից* $n-1$*-ական էլեմենտներ պարունակող զուգորդումների թիվը հարաբերում ե* $2n-2$ *էլեմենտներից* n*-ական էլեմենտներ պարունակող զուգորդումների թվին այնպես, ինչպես* $77:20$ *Գտնել* n*-ը։*

837. *Քանի՞ յեռանիշ թիվ կարելի յե կազմել* 1, 3, 5, 7, 9 *կենտ թվերից։*

838. *Դասընթացներում անցնում են* 8 *տարբեր առարկաներ և որական* 6 *դասախոսություն ե լինում։ Որական դասախոսությունները քանի՞ յեղանակով կարելի յե դասավորել։*

839. *Տասը մարդու քանի՞ տեսակի դասավորությամբ կարելի յե նըստեցնել սեղանի շուրջը, վորի վրա դարսած են սեղանի* 10 *սպասք։*

840. $C_n^3 : C_n^2 = 2$ *Գտնել* n*-ը։*

841. $C_n^3 : C_n^5 = \frac{5}{3}$ *Գտնել* n*-ը։*

842. $A_n^2 : C_n = \frac{3}{7}$ *Գտնել* n*-ը։*

§ 84. *ՆՅՈՒՏՈՆԻ ԲԻՆՈՄԸ (ԱՄԲՈՂՋ ՑԵՎ ԴՐԱԿԱՆ ՑՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ)*

Ինչպես գիտենք, Բինոմ *նշանակում ե յերկանդամ, որինակ* $x+a$։ *Այստեղ* x*-ը կոչվում ե յերկանդամի* գլխավոր *տառ։ Պետք ե հետազոտենք* $x+a_k$ *ձևի յերկանդամներ, ուր* $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ *այսինքն վերցնելու յենք* n *բինոմներ*

$$x+a_1;\ x+a_2;\ x+a_3;\ \ldots;\ x+a_n$$

վորտեղ բինոմների յերկրորդ անդամները տարբեր են։

Հերթով կազմենք այդպիսի յերկու, յերեք և չորս բինոմների արտադրյալները

$$(x+a_1)(x+a_2) = x^2 + (a_1+a_2)x + a_1a_2$$

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) = x^3 + (a_1+a_2+a_3)x^2 + $$
$$+ (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)x + a_1a_2a_3$$

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4) = x^4 + (a_1+a_2+a_3+a_4)x^3 +$$
$$+ (a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4)x^2 +$$
$$+ (a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4)x + a_1a_2a_3a_4$$

Դիտելով բազմապատկությունից հետո ստացված արտահայտությունների կազմությունը, դյուրին ե նկատել, վոր բոլոր անդամները դասավորված են գլխավոր տառի աստիճանի նվազման կարգով, և վոր առաջին ան-

դամի մեջ այդ տառի ցուցիչը հավասար է բինոմների արտադրիչների թվին։ Մյուս անդամների մեջ x-ի ցուցիչներն աստիճանաբար մեկական միավորով նվազում են։

Յերկու բինոմների արտադրյալում կա յերեք անդամ, յերեք բինոմների արտադրյալում՝ չորս անդամ, չորս բինոմների արտադրյալում՝ հինգ անդամ, այսինքն արտադրյալի անդամների թիվը մեկով ավելի յե բինոմների թվից։

Բոլոր տեղերում առաջին անդամների գործակիցը մեկ միավոր է։ Յերկրորդ անդամների գործակիցները ներկայացնում են a_1 a_2 a_3 . . . տառերի մեկական զուգորդումների գումարը, յերրորդ անդամների գործակիցները՝ միևնույն տառերի յերկյակների զուգորդումների գումարը, չորրորդներինը՝ յեռյակների զուգորդումների գումարը, և այլն։

Մատնանշած հատկությունները կախում չունեն բազմապատկվող բինոմների թվից։ Վորպեսզի յերևան բերենք այդ, յենթադրենք, վոր այդ հատկությունները պահպանում են ուժը n բինոմներ պարունակող P_n· արտադրյալի համար

$$P_n = (x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) \; . \; . \; . \; (x + a_n)$$

և ապացուցենք, վոր նրանք պահպանվում են $n + 1$ բինոմ պարունակող P_{n+1} արտադրյալի համար

$$P_{n+1} = P_n (x + a_{n+1}) =$$

$$= (x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) \; . \; . \; . \; (x + a_n)(x + a_{n+1})$$

Մուծենք հետևյալ նշանակումները

$$S_n^1 = a_1 + a_2 + \; . \; . \; . \; + a_n$$

$$S_n^2 = a_1a_2 + a_1a_3 + \; . \; . \; . \; + a_{n-1}a_n$$

$$S_n^3 = a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \; . \; . \; . \; + a_{n-2}a_{n-1}a_n$$

. . . .

$$S_n^{n-1} = a_1a_2 \; . \; . \; . \; a_{n-1} + \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$S_n^n = a_1a_2a_3 \; . \; . \; . \; a_n$$

Բերած հավասարությունների ձախ մասում գտնվող S-ը, վորը ցույց է տալիս գումար, ունի յերկու ինդեքս. ներքևինը համապատասխանում է n բազմապատկվող բինոմների թվին (P_n արտադրյալում), իսկ վերևինը ցույց է տալիս, թե բոլոր ելեմենտներից $(a, a, \; . \; . \; . \; , a_n)$ քանի՞սն են մտնում համապատասխան գումարի յուրաքանչյուր զուգորդման մեջ։

Վորովհետև

$$P_{n+1} = P_n (x + a_{n+1}) \quad \text{իսկ}$$

$$P_n = x^n + S_n^1x^{n-1} + S_n^2x^{n-2} + \; . \; . \; . \; + S_n^{n-1}x + S_n^n \; . \; . \; . \; (1)$$

ապա

$P_{n+1} = x^{n+1} + S_n^1x^n + S_n^2x^{n-1} + \; . \; . \; . \; + S_n^{n-1}x^2 + S_n^nx$ (x-ի վրա բազմապատկելուց) $+ a_{n+1}x + a_{n+1}S_n^1x^{n-1} + \; . \; . \; . \; + a_{n+1}S_n^{n-1}x + a_{n+1}S_n^n$ (a_{n+1}-ի վրա բազմապատկելուց)։

Ուստի, խմբելով գլխավոր տառի նույն աստիճաններ ունեցող անդամները, կստանանք

$$P_{n+1} = x^{n+1} + (S_n^1 + a_{n+1})x^n + (S_n^2 + a_{n+1}S_n^1)x^{n-1} + \; . \; . \; . \; +$$

$$+ (S_n^n + a_{n+1}S_n^{n-1})x + a_{n+1}S_n^n$$

Բայց $(n+1)$ *բինոմների համար մեր նշանակումների համաձայն գործակիցը* x^n*-ի դեպքում*

$$S^1 + a_{n+1} = S^1_{n+1}$$

$S^2_n + a_{n+1}S^1_n$ *գործակիցը* x^{n-1}*-ի դեպքում ներկայացնում է* $n+1$ *տառերի յերկյակների զուգորդումների գումարը, վորովհետև* S^2_n*-ը պարունակում է յերկյակների բոլոր զուգորդումները, բացի* a_{n+1}*-ը, իսկ* $a_{n+1}S^1_n$ *գումարելին պարունակում է* a_{n+1}*-ի մեջ ներփակված բոլոր յերկյակ զուգորդումները. ուստի*

$$S^2_n + a_{n+1}S^1_n = S^2_{n+1}$$

Սրա նման

$$S^n_n + a_{n+1}S^{n-1}_n = S^n_{n+1}$$

և վերջապես

$$a_{n+1}S^n_n = S^{n+1}_{n+1}$$

Հետևապես

$$P_{n+1} = x^{n+1} + S^1_{n+1}x^n + S^2_{n+1}x^{n-1} + \ldots + S^n_{n+1}x + S^{n+1}_{n+1} \quad \ldots (2)$$

այսինքն, P_{n+1} *արտադրյալը կազմված է նույն օրենքով, ինչ օրենքով* P_n *արտադրյալը՝*

Բայց մենք տեսանք, վոր $n=4$*-ի դեպքում* P_n *արտադրյալի կազմելու օրենքը ճիշտ է. հետևապես, նա մնում է իր ուժի մեջ և* $n+1$*-ի համար, այսինքն, հինգ բազմապատկվող բինոմների համար, կամ* P_5 *արտադրյալի համար։ Իսկ յեթե նա ճիշտ է* P_5*-ի համար, ապա ճիշտ է նաև* P_6*-ի համար, և այլն։*

Հետևյալ հավասարության մեջ ընդունելով

$$P_n = (x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots(x+a_n)$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$$

կստանանք

$$P_n = (x+a)^n$$

(ինդեքսը դեն ենք ձգում)։ Ահա, հենց սա յե այսպես կոչված Նյուտոնի բինոմը: *Տեսնենք, ինչ է դառնում* (1) *հավասարության աջ մասը բինոմների տարբեր յերկրորդ անդամները միևնույնով փոխարինելու դեպքում։*

Դյուրին է նկատել, վոր այդ դեպքում

$$S^1_n = a + a + a + \ldots + a = na = C^1_n \cdot a$$

$$S^2_n = a^2 + a^2 + \ldots + a^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^2 = C^2_n \cdot a^2$$

$$S^3_n = a^3 + a^3 + \ldots + a^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^3 = C^3_n \cdot a^3$$

և առհասարակ

$$S^k_n = C^k_n \cdot a^k$$

Հավասարություն (1)*-ն ընդունում է հետևյալ ձևը*

$$(x+a)^n = x^n + C^1_n x^{n-1}a + C^2_n x^{n-2}a^2 + \ldots + C^{n-1}_n x a^{n-1} + a^n$$

Բաց անելով C^k_n *նշանակների արժեքն ստանում ենք*

$$(x+a)^n = x^n + nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}a^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n-3}a^3 + \ldots + nxa^{n-1} + a^n$$

Այս հավասարության աջ մասի կազմությունը ցույց է տալիս, վոր $(x+a)$ բինոմի n-րդ աստիճանն արտահայտվում է x տառի նկատմամբ n-րդ աստիճանի այնպիսի բազմանդամով, վորը դասավորված է x-ի աստիճանների նվազման կարգով և միևնույն ժամանակ a տառի աստիճանների աճեցման կարգով: Բազմանդամի անդամների թիվը մեկ միավորով մեծ է բինոմի ցուցչից:

Յուրաքանչյուր անդամի մեջ x յեվ a աստիճանների ցուցիչների գումարը հավասար է n-ի, այսինքն բինոմի ցուցչին:

Ծայրանդամների գործակիցները մեկական միավորներին:

Միջանկյալ անդամների գործակիցները ներկայացնում են հաջորդաբար n էլեմենտներից մեկերի, յերկյակների, յեռյակների յեվ այլ զուգորդումների թվեր:

Ծայրանդամներից հավասարապես հեռացած անդամների գործակիցները, օրինակ յերկրորդինը և նախավերջինինը միատեսակ են, վորովհետև

$$C_n^1 = C_n^{n-1}$$

և, ընդհանրապես, ըստ զուգորդումների հատկության

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Յեթե n-ը զույգ է, միջին անդամն ունի ամենամեծ գործակիցը. յեթե n-ը կենտ է, միշտ վերլուծման մեջտեղում յերկու անդամները կունենան միատեսակ ամենամեծ գործակիցները:

Կիրառենք դուրս բերած այս ֆորմուլը $n=6$ և $n=7$ դեպքերի համար, ընդունելով $a=1$ (այս դեպքում a-ի բոլոր աստիճանները կդառնան մեկական միավորներ):

$$(x+1)^6 = x^6 + 6x^5 + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} x^4 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x + 1$$

կամ

$$(x+1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$$

Այստեղ չորրորդ անդամի (այսինքն միջին անդամի) գործակից 20-ն ամենամեծն է:

Միևնույն ձևով

$$(x+1)^7 = x^7 + 7x^6 + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} x^5 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^4 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^3 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^2 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x + 1$$

կամ

$$(x+1)^7 = x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1$$

Այստեղ յերկու անդամների (սկզբից չորրորդի և վերջից չորրորդի) գործակիցները նույնն են և միաժամանակ ամենամեծը:

§ 85. ՆՅՈՒՏՈՆԻ ԲԻՆՈՄԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԱՆԴԱՄԻ ՖՈՐՄՈՒԼԸ

Դիտելով վերլուծած անդամների կազմությունը, մենք տեսնում ենք, օրինակ, վոր 3-րդ անդամը կլինի $C_n^2 x^{n-2} a^2$

4-րդ » » $C_n^3 x^{n-3} a^3$ և այլն,

այսինքն, գործակիցը ներկայացնում է n էլեմենտներից կազմված այնպիսի զուգորդումների մի թիվ, վորոնցից յուրաքանչյուրը բաղկացած է այնքան էլեմենտներից, վորքան վորոշվելիք թվի կարգն է՝ մեկ միավորով պակաս, «a» տառը մտնում է վորպես աստիճան այդ ելեմենտների թվին հավասար ցուցչով, իսկ «x»-ի ցուցիչն է այդ թիվը մինչեվ «n» լրացուցիչ թիվը:

Հետևապես, կարելի յե գրել մի ընդհանուր արտահայտություն բինոմի (k+1) կարգի ուզած ամեն մի անդամի համար, այսինքն այնպիսի անդամի, վորին նախորդում են k անդամներ: Նշանակելով այդպիսի (k+1)-րդ անդամը k+1 նշիչ ունեցող T տառով, կստանանք

$$T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} a^k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Նման ձևով, նախորդ անդամը կլինի

$$T_k = C_n^{k-1} x^{n-k+1} a^{k-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Բաժանելով (1)-ի համապատասխան մասերը (2)-ի վրա, կստանանք

$$\frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} \cdot \frac{a}{x}$$

վորովհետև բաժանելիս կարելի յե $x^{n-k}a^{k-1}$*-ով կրճատել:*

Պարզենք $\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}}$ *հարաբերության իմաստը*

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ (n-k+2)(n-k+1)}{k!} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$C_n^{k-1} = \frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ (n-k+2)}{k!} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Բաժանելով (3) հավասարության համապատասխան մասերը (4) հավասարության վրա, կրճատումից հետո կստանանք

$$\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = \frac{n-k+1}{k}$$

հետևապես,

$$\frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{a}{x}$$

$$T_{k+1} = T_k \cdot \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{a}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Հավասարություն (5)-ը հնարավորություն է տալիս իր նախորդ անդամով վորոշել հաջորդը:

«k+1» կարգի անդամի գործակիցն ստանալու համար հարկավոր է «k» կարգի անդամի գործակիցը բազմապատկել (n—k+1)-ով, այսինքն նախորդող անդամ «x»-ի ցուցչով, յեվ բաժանել «k»-ի վրա, այն է վորոշվողի նախորդող անդամների թվի վրա: «a»-ով բազմապատկելը համապատասխանում է «a» աստիճանը մեկ միավորով բարձրացնելուն. «x»-ի վրա բաժանելը նման ձևով իջեցնում է «x»-ի աստիճանը մեկ միավորով:

Օրինակ, տված է վերածել $(x+a)^8$

Առաջին անդամը կլինի x^8*. յերկրորդը՝* $C_8^1 x^7 a = 8x^7 a$

Այժմ կիրառենք (5) հավասարության հատկությունները

$$T_3 = T_{2+1}$$

այսինքն, այդ դեպքի համար $k=2$, $n-k+1=8-2+1=7$

Հետևապես

$$T_3 = T_2 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{a}{x}$$

կամ

$$T_3 = 8x^7a \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{a}{x} = \frac{8 \cdot 7}{2} x^6a^2 = 28\,x^6a^2$$

Այնուհետև

$$T_4 = 28\,x^6a^2 \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{a}{x} = 56x^5a^3$$

վորովհետև այժմ

$$k = 3 \quad \text{և} \quad n - k + 1 = 6$$

Յեվ այսպես

$$(x + a)^8 = x^8 + 8x^7a + 28x^6a^2 + 56x^5a^3 + \ldots$$

Հետևյալ անդամը հինգերորդն ե։ Նշանակում ե նրա գործակիցն ստանալու համար պետք ե բազմապատկել 5-ով (չորրորդ անդամում x-ի ցուցիչը) և բաժանել 4-ի վրա (այսինքն՝ վորոշվողի նախորդող անդամների թվով). հետևապես, նա հավասար կլինի

$$\frac{56 \cdot 5}{4} = 70$$

Հինգերորդ անդամն ամբողջովին հավասար կլինի $70x^4a^4$-ի։ Բայց վերածման մեջ պետք ե լինեն 9 անդամներ. հետևապես, հինգերորդը միջինն ե ամենամեծ գործակցով. դրա համար ել մնացած անդամները գրում ենք միանգամից, վորովհետև գործակիցները կրկնվում են նվազող կարգով, x-ի աստիճանները նվազում են և a-ի աստիճաններն աճում մեկ միավորով. հետևապես

$$(x+a)^8 = x^8 + 8x^7a + 28x^6a^2 + 56x^5a^3 +$$
$$+ 70x^4a^4 + 56x^3a^5 + 28x^2a^6 + 8xa^7 + a^8$$

Ինչպես տեսնում ենք, հավասարապես հեռացած գործակիցների միատեսակության հետևանքով հաշվումը պարզվում ե, վորովհետև n-ի զույգ լինելու դեպքում բավական ե հաշվել $\frac{n}{2}+1$ գործակիցը, իսկ n-ի կենտ լինելու դեպքում $\frac{n+1}{2}$ գործակիցները։

Նախորդ որինակում $n = 8$, և բավական եր, վոր մենք հաշվեյինք $\frac{8}{2}+1=5$ գործակիցները։

Յեթե n-ը կենտ ե, որինակ $n=5$, բավական ե, վոր հաշվենք 3 գործակիցներ $\left(\frac{5+1}{2}=3\right)$

$$(x+a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$$

§ 86. ԲԻՆՈՄԻ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

1. Բինոմի բոլոր գործակիցների գումարը հավասար ե 2^n

Հիրավի, յենթադրելով $x=a=1$, կստանանք

$$(x+a)^n = (1+1)^n = 2^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-1} + 1$$

Օրինակ $(x+a)^5$*-ի վերածման մեջ գործակիցների գումարն է*

$$1+5+10+10+5+1=32=2^5$$

$(x+a)^8$*-ի վերածման մեջ նույն ձևով*

$$1+8+28+56+70+56+28+8+1=256=2^8$$

2. Զույգ կարգի անդամների գործակիցների գումարը հավասար է կենտ կարգի անդամների գործակիցների գումարին:

Հիրավի, բինոմի մեջ a*-ն փոխարինենք* a*-ով. այն ժամանակ կստանանք*

$$(x-a)^n=x^n-C_n^1x^{n-1}a+C_n^2x^{n-2}a^2-C_n^3x^{n-3}a^3+\ .\ .\ .+(-1)^n a^n$$

Կենտ կարգի բոլոր անդամները, վորպես a*-ի զույգ աստիճաններ պարունակողներ, կլինեն դրական. զույգ կարգի բոլոր անդամները, վորպես* a*-ի կենտ աստիճաններ պարունակողներ, կլինեն բացասական:*

Ինչ վերաբերում է վերջին անդամին, n*-ի զույգ լինելու դեպքում նա կենտ կարգի կլինի, այսինքն, դրական, իսկ* n*-ի կենտ լինելու դեպքում նա զույգ կարգի կլինի և, հետևապես, բացասական:*

Ընդունելով $(x-a)^n$ *բինոմի մեջ* $x=a$*, կստանանք*

$$0=1-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\ .\ .\ .+(-1)^n$$

այստեղից

$$C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ .\ .\ .=1+C_n^2+C_n^4+C_n^6+\ .\ .\ .$$

ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Գտեք վերածումներն ըստ Նյուտոնի բինոմի

843. $(a+b)^7$ 844. $(x-y)^5$ 845. $(1+a)^8$
846. $(x+a)^5$ 847. $(c+1)^{12}$ 848. $(b+x)^9$
849. $(2a-b)^5$ 850. $(\sqrt{2}-b)^6$ 851. $(x+\sqrt{a})^{15}$
852. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^7$ 853. $(\sqrt{x}+\sqrt{a})^9$ 854. $(2x-3y)^9$
855. $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)^{12}$ 856. $\left(\sqrt{2a}+\sqrt{3b}\right)^3$ 857. $\left(\sqrt[3]{2a}-\sqrt[3]{2x}\right)^6$

858. *Գտեք* $(x-2)^{13}$ *վերածման 5-րդ անդամը:*
859. *Գտեք* $(x-1)^6$ *վերածման 3-րդ անդամը:*
860. *Գտեք* $(a+\sqrt{b})^{12}$ *վերածման 9-րդ անդամը:*
861. *Գտեք* $(2x+3)^{12}$ *վերածման մինչին անդամը:*

862. *Գտեք* $\left(\sqrt[3]{p}+\frac{1}{\sqrt[9]{p^2}}\right)^{11}$ *վերածման մեջ* p^2 *պարունակող անդամի համարը:*

Ցուցմունք: $T_{k+1}=C_n^kx^{n-k}a^k$, *բայց* $x=p^{\frac{1}{3}}$, $a=p^{-\frac{2}{9}}$, *հետևապես*

$$\left(p^{\frac{1}{3}}\right)^{11-k}\left(p^{-\frac{2}{9}}\right)^k=p^2,$$ *վորտեղից կստանանք* $k=3$

863. *Գտեք* $\left(\frac{\sqrt{x}}{b}+\frac{b}{\sqrt[3]{x}}\right)^{13}$ *վերածման* x^1 *պարունակող անդամը:*

864. Գտեք $\left(x+\frac{a}{x}\right)^{10}$ վերածման x չպարունակող անդամը։

865. Գտեք $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6$ վերածման մեջ ռացիոնալ անդամների գումարը։

866. $\left[a\sqrt[3]{a}+a^{-1,6(6)}\right]^n$ վերածման 2-րդ և 3-րդ անդամների գործակիցների գումարը հավասար է 78-ի։ Գտեք այն անդամը, վորը կախում չունի a-ից (այսինքն պարունակում է a^0)։

867. $(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^n$ վերածման 3-րդ անդամի գործակիցը հավասար է 780-ի։ Գտեք 9-րդ անդամը։

868. $(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})^n$ վերածման 3-րդ անդամի գործակիցը հավասար է 120-ի։ Գտեք 7-րդ անդամը։

869. Գտեք $\left(\sqrt[3]{a^2}-\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\right)^{12}$ վերածման մեջ $a^{-\frac{1}{2}}$ պարունակող անդամը։

870. Ինչի՞ յե հավասար $(x+a)^n \pm (x-a)^n$

871. Օգտվելով Նյուտոնի բինոմի ֆորմուլից հաշվեցեք $(1,2)^{10}$-ի արժեքը յերեք տասնորդական նշաններով։

872. Գտեք x-ի արժեքը $\left(x+\frac{1}{x}\right)^x$ հավասարման մեջ, վորի վերածման մեջ ըստ Նյուտոնի բինոմի սկզբից 3-րդ անդամի և վերջից 3-րդ անդամի արտադրյալը հավասար է 14 400-ի։

$(\sqrt{1+z}-\sqrt{1-z})^m$ բինոմի վերածման յերրորդ անդամի գործակիցը հավասար է 28-ի։ Գտեք վերածման միջին անդամը։

873. Ինչի՞ յե հավասար $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^4$

874. Ինչի՞ յե հավասար $(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^{12}$

Ց Ա Ն Կ

ԳԻՆՆ Է 1 Ռ. 80 ԿՈՊ.

Թ ի ֆ լ ի ս
Պոլիգրաֆտրեստի 6-րդ տպարան

Գրաւեպկար № 1747

Տիրաժ 4000, Պատվեր № 2040.