Հայկական գիտահետազոտական հանգույց
Armenian Research & Academic Repository

Սույն աշխատանքն արտոնագրված է «Ստեղծագործական համայնքներ ոչ առևտրային իրավասություն 3.0» արտոնագրով

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonComercial 3.0 Unported (CC BY-NC 3.0) **license.**

Դու կարող ես.

պատճենել և տարածել նյութը ցանկացած ձևաչափով կամ կրիչով

ձևափոխել կամ օգտագործել առկա նյութը ստեղծելու համար նորը

You are free to:

Share — copy and redistribute the material in any medium or format

Adapt — remix, transform, and build upon the material

1527

512
Р 13

2010

ՏԱՐԵՐՔ
ՀԱՆՐԱՀԱՇՈՒՈՅ

ԳԱՂԻՈՅ ԼԻՍԷՆԵՐՈՒ ԾՐԱԳՐՈՅՆ ՀԱՄԵՄԱՏ

ՅՕՐԻՆԵԱՑ

Գ. Յ. ԹԱԳՒՈՐԵԱՆ

ՆԱԽԿԻՆ ԱՇԱԿԵՐՏ ԿԱՅՍԵՐԱԿԱՆ ԼԻՍԷԻ ԵՒ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ
ԴԱՍԱՏՈՒ ԶԱՓԱԿԱՆ ԵՒ ԲՆԱԿԱՆ ԳԻՏՈՒԹԵԱՆՑ

Կ. ՊՕԼԻՍ
ՏՊԱԳՐՈՒԹԻՒՆ Յ. ԳԱՎԱՖԵԱՆ

1880

ՏԱՐԵՐՔ

ՀԱՆՐԱՀԱՇՈՒՈՅ

Հեղինակին ստորագրութիւնը չկրող օրինակք անվաւեր են։

ՏՊԱԳՐ. Յ. ԳԱՎԱՖԵԱՆ
Կ. Պոլիս. — Քիւրքճի խան, Թիւ 7, 23, 26

ՏԱՐԵՐՔ
ՀԱՆՐԱՀԱՇՈՒՈՑ

ԳԱՂԻՈՑ ԼԻՍԷՆՆԵՐՈՒ ԾՐԱԳՐՈՑՆ ՀԱՄԵՄԱՏ

512
Թ-13

ՅՕՐԻՆԵԱՑ
Պ. Յ. ԹԱԳՒՈՐԵԱՆ
ՆԱԽԿԻՆ ԱՇԱԿԵՐՏ ԿԱՅՍԵՐԱԿԱՆ ԼԻՍԷԻ ԵՒ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ
ԴԱՍԱՏՈՒ ՉԱՓԱԿԱՆ ԵՒ ԲՆԱԿԱՆ ԳԻՏՈՒԹԵԱՆՑ

Հ.Ս.Խ.Հ ՀԱՆՐԱՅԻՆ ԳՐԱԴԱՐԱՆ
С.С.Р.А Публичная Библиотека
7/XI 1922
имени А. Мясникяна
Ա. ՄՅԱՍՆԻԿՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ

Կ. ՊՕԼԻՍ
ՏՊԱԳՐՈՒԹԻՒՆ Յ. ԳԱՎԱՖԵԱՆ
1880

15765 — ԱԶ

ԱԶԴ

Հաստատեալ ճշմարտութիւն մ՚է թէ համարողական ուսումը կամ աւելի ընդարձակ առմամբ մաթեմաթիքան մարդկային միտքը զօրացնելու և իմաստասիրելու կարողութիւնը զարգացնելու զօրաւորագոյն միջոց մի, հետեւաբար ամենազգի գիտութեանց ուսման անհրաժեշտ օժանդակ մի է. ուստի թէ նախնական և թէ բարձրագոյն դպրոցաց մէջ առաջին կարեւորագոյն տեղին բռնած է յԵւրոպա, ուր մեծ ուշադրութիւն կը նուիրուի այս գիտութեան ուսուցման:

Առ այս բազմատեսակ աշխատութիւններ հրատարակուած են Եւրոպական լեզուներով չափագիտական ուսմանց այլ և այլ ճիւղերուն վերայ, իւրեանց մանրամասնութեանց և խորութեանց մէջ ներկայացուցած և հետզհետէ զարգացուցած են և դիւրացուցած նոցա ուսումն:

Արդարեւ մեր ազգին մէջ ալ մինչեւ ցարդ Մաթեմաթիքայի զանազան ճիւղերուն վերաբերեալ դասագրքեր հրատարակուած են. մանաւանդ թուաբանութեան մասին, բայց ասոր հետ խոստովանելու է որ հանրահաշուական ուսման վերաբերեալ հրատարակութիւնք յոյժ նուազ և անկատար են. և լոկ գործնական կանոններ կը պարունակեն առանց տեսական ապացուցմանց, առաջարկութեանց լուծմունք չեն քննադատուած և իւրեանց համառօտութեան մէջ դուրս թողուած են շատ մը կարեւոր մասեր: Այս պակասը մերովսանն լեցնելու և գոհացուցիչ և նոր ու դիւրուսոյց մեթոտով հանրահաշուաց դասագիրք մի պատրաստելոյ համար, ձեռք զարկի սոյն աշխատութեան զոր այսօր պատիւ ունիմ ընծայել Ազգիս:

Այս աշխատութեան մէջ գլխաւորապէս Գաղիացի նշանաւոր չափագէտ Պէրթրանի, Ամիօյի, Պռիօյի հետեւած եմ որոց դասագրքերը խիստ մեծ ընդունելութիւն գտած են Գաղիոյ մէջ:

Գործոյն մէջ ըստ կարելւոյն աշխատեցանք խիստ պիտանի տեղեկութիւններ տալ այնպիսեաց համար՝ որ կը

ցանկան երկրաչափական ասպարիզի մէջ և կամ արուեստական բարձրագոյն վարժարանները մտնել :

Ինչպէս գործոյս վերայ ակնարկ մի նետողը կը տեսնէ, Ա. Բ. և Գ. աստիճանի հաւասարութեանց, նոյնպէս փոխադարձ հաւասարութեանց, մեծագունի և փոքրագունի, յառաջատուութեանց և նշանակաց եւն. վերայ ընդարձակ տեղեկութիւններ և իւրաքանչիւր դասուց վերայ վարժութիւններ կը պարունակէ սոյն դասագիրքն : Գալով առաջարկութեանց՝ զայնս բազմատեսակ ընելու և կնճռոտներու լուծումը դիւրացնելու մասին մասնաւոր խնամք տարած եմք : Լեզուն ալ ջանացած եմք որ ըստ կարի պարզ և դիւրըմբռնելի լինի, ինչպէս որ կը վայլէ դասական գործի մը:

Կը յուսամք որ ազգային վարժարանաց չափական գիտութեանց Մեծ. Ուսուցիչք կը նուիրեն մեր աշխատութեան արժանաւոր եղած ուշադրութիւնն և կ'ընդունին զայն իբրեւ յարմարագոյն և օգտակար դասագիրք մը հանրահաշուոյ, որով և պսակած կը լինին մեր վաստակն որոյ միակ նպատակն եղած է նպաստել ճիշդ գիտութեանց մեր Ազգին մէջ տարածման :

Գ. Ց. ԹԱԳՒՈՐԵԱՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՒ

ԳԻՐՔ Ա.

1. Ամեն քանակութիւն, ինչ բնութենէ որ ըլլայ. հանրահաշուոյ մէջ, այբուբենական տառերով կը նշանակուի. ինչպէս **ա** գիրը քանակութիւն մը կը ցուցնէ նոյնպէս ալ ուրիշ գրեր. բայց ընդհանրապէս սովորութիւն եղած է, ծանուցեալ քանակութիւնները այբուբենական առաջին տառերով, իսկ անծանօթը՝ վերջիններով նշանակել :

2. Հանրահաշուոյ մէջ յատուկ նշաններ հնարուած են կատարելի գործողութիւն մը յայտնելու համար. գումարման նշանը + (աւելի) է, ուստի, ցուցնելու համար որ 8 պէտք գումարուի 5 ի վրայ, կը նշանակենք 8+5 :

Բարձման նշանը — (պակաս) է. ուստի 8—5 կը նշանակէ թէ 8 էն 5 պէտք պակսի :

Բազմապատկութեան նշանը × (բազմապատկեալ) է. ուստի 8×5 կը նշանակէ թէ 8 ը 5 անգամ պէտք մեծնայ. եթէ արտադրիչք թուանշաններ չեն, առանց բազմապատկութեան այս նշանին կը գրուին քովէ քով. ինչպէս **ա բ** կը ցուցնէ **ա** ին **բ** ով բազմապատկութիւնն. իսկ եթէ թուանշաններ են, այս համառօտութիւնը անկարելի է :

Հանրահաշուական արտադրեալին մէջ՝ թուանշանով արտադրիչը համարտադրին կը կոչուի :

Բաժանման նշանը : (Բաժանեալ) է. ուստի **ա** : **բ** կը նշանակէ թէ **ա** պէտք բաժնենք **բ** ով. այս նշանին

տեղ կը գործածուի նաեւ հորիզոնական գիծը (—) որոյ վերայ կը գրուի հասարակ կոտորակի ձեւով բաժանելին և տակը բաժանողը այսպէս $\frac{\text{ա}}{\text{բ}}$:

3. Յարաբերութեան նշաններ. Հաւասարութեան նշանը = (հաւասար) է. ցուցնելու համար թէ ա հաւասար է բ ի կը գրենք $\text{ա}=\text{բ}$: Այս հաւասարութեան մէջ ա առաջին անդամ է և բ երկրորդ :

Անհաւասարութեան նշանները > և < են. զոր օրինակ $\text{ա}>\text{բ}$ կը նշանակէ թէ ա ը մեծ է բ էն, և $\text{ա}<\text{բ}$ կը նշանակէ թէ ա ը փոքր է բ էն :

Այս նշանը $\geqslant$ մեծ կամ հաւասար, $\leqslant$ նշանը փոքր կամ հաւասար կը նշանակէ. անհունութեան նշանն է ∞ :

ԴԱՍ Ա·

ԳՈՐԾԱԾՈՒԹԻՒՆՔ ՏԱՌԻՑ ԵՒ ՆՇԱՆԱՑ

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Ա. — *Գտնել երկու թիւ, որոց գումարը ըլլայ 33 եւ տարբերութիւնը 5:*

ԹՈՒԱԲԱՆԱԿԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄ. — Այս թուոց տարբերութիւնը 5 ըլլալով, մեծ թիւը հաւասար է փոքր թուոյն և 5ին գումարին : Արդ 33ը կը պարունակէ երկու անգամ փոքր թիւ աւելի 5 : Եթէ 33էն 5 պակսեցնեմք, մնացորդը հաւասար է փոքր թուոյն երկու անգամին. այսինքն 28 հաւասար է 2 անգամ 14ի :

Փոքր թիւը 14 ըլլալով մեծ թիւը կ'ըլլայ 14էն 5 աւելի կամ 19 :

ՀԱՆՐԱՀԱՇՈՒԱԿԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄ. — Դնեմք երկու թուոց փոքրագոյնը ք, մեծը կ'ըլլայ $\text{ք}+5$. ուստի ըստ առաջարկութեան

$$2\text{ք}+5=33$$

որ հաւասարութիւն մի է :

Այս հաւասարութեան մէջ կը տեսնեմք որ 33ը երկու թուոց գումարն է. 2ք արտադրեալը հաւասար է 33ի և 5ի մէջ եղած տարբերութեան, կամ որ նոյն է,

$$2\text{ք}=28$$

այս նոր հաւասարութիւնը 2ով բաժնելով կ'ունենամք

$$\text{ք}=14$$

որ է փոքր թիւը. մեծը կ'ըլլայ $14+5=19$:

Եթէ ուզեմք սոյն առաջարկութեան հանրական լուծումն տալ, ծանուցեալ թիւերը տառերով կը ներկայացնեմք և այսպէս ամեն նոյն տեսակ առաջարկութիւնք դիւրութեամբ կը լուծուին : Օրինակի համար դնեմք երկու թուոց գումարը Գ, և տարբերութիւնը Տ, միշտ փոքր թիւը ք սեպելով կ'ունենամք

$$\text{ք}=\frac{\text{Գ}-\text{Տ}}{2}$$

քին այսպէս նշանակուած արժէքը տարազ կը կոչուի :

Այս տարազէն հետեւեալ կանոնը կը հետեւցնենք :

Երկու թուոց փոքրը գտնելու համար, պէտք է իրենց տարբերութիւնը գումարէն բառնալ և մնացորդին կէսը առնուլ :

ՍԱՀՄԱՆՔ

4. ՀԱՆՐԱՀԱՇՈՒԱԿԱՆ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹԻՒՆՔ. — Հանրահաշուական գործողութիւնն երկու մասերու կը բաժնուի. *1. Հանրահաշուական գործողութիւնք. 2. Հաւասարութեանց եւ առաջարկութեանց լուծում:*

5. ՀԱՆՐԱՀԱՇՈՒԱԿԱՆ ՔԱՆԱԿՈՒԹԻՒՆ. — Հանրահաշուական քանակութիւն կը կոչուին այն ամեն քանակութիւնք որ տառերով են : Ինչպէս (2աբգ. $4\text{ա}-\text{բ}+2\text{գ}$) որք հանրահաշուական քանակութիւններ են : Հանրա-

հաշուական քանակութեան մը + կամ — նշանով զատուած իւրաքանչիւր մասը եզր կը կոչուի․ ինչպէս $4ա-3բ+2գ$ համրահաշուական քանակութեան եզերք են $4ա$, $3բ$, $2գ$ ։

Եզր մը դրական կամ բացասական է, ըստ այնմ որ նախադաս նշանն + կամ — է ։ Համրահաշուական քանակութեան մը առաջին եզրը երբ դրական է կրնայ առանց + նշանի գրուիլ․ զորօրինակ $3ա+6բ-9գ$ քանակութեան առաջին $3ա$ եզրը պէտք է դրական նկատել․ բայց երբ բացասական ըլլայ, իւր — նշանը անհրաժեշտ ունենալու է ։

6. ՄԻԵԶՐ. — Համրահաշուական քանակութիւն մը երբոր մէկ եզր միայն ունի այսինքն երբ տառերը + կամ — նշանով չեն յօդուած, *միեզր* կը կոչուի․ ինչպէս $2աբգ$ և $\frac{3գդ}{4ա}$, քանակութիւնք ։ Նմանապէս երկու եզր ունեցող քանակութիւնք *երկեզր* կը կոչուին, երեք եզր ունեցողք՝ *եռեզր* եւայլն ։ Զորօրինակ $2ա+3բ$, և $3ա-բ$, երկեզր, և $4ա-3բ+2գ$ եռեզր քանակութիւն է․ ընդհանրապէս շատ եզր պարունակող քանակութիւնք *բազմեզր* կը կոչուին, որպէս $6աբ-4գդ+5դե-ե$ քանակութիւնք ։ Համրահաշուական քանակութիւն մի երբ յայտարար չունի ամբողջ է, երբ ունի՝ կոտորակաւոր․ զորօրինակ,

$$5ա^3+6աբգ-4ադ-ե$$

ամբողջ է և $\frac{ա^2բ}{գ^2+դ^2}$ կոտորակաւոր ։

7. ԻՐԵՐԱՆՄԱՆ ԵԶԵՐՔ. — Երբոր երկու միեզր մի եւ նոյն տառերէ բաղկացեալ են և միայն իրենց համարտադրիչով կը տարբերին, *իրերանման* կ'ըսուին ։

Ինչպէս $\frac{4աբ}{2ագ}$ և $\frac{2աբ}{ագ}$, նոյնպէս $4աբգ$ և $\frac{աբգ}{6}$ միեզերք իրերանման են ։ Երբ բազմեզր մը միեզրերը իրերա-

նման են, յաւելմամբ և կամ բարձմամբ կրնանք զայն իւր ամենապարզ ձեւոյն վերածել ։

Ինչպէս $3ա-2ա+5ա-7ա+8ա-3գ$ ։

Այս բազմեզեր եզրերուն կարգը կրնամք փոխել առանց իրենց նշանները փոխելու և գրել այսպէս

$$3ա+5ա+8ա-2ա-7ա-3գ$$

որ հաւասար է $16ա-9ա-3գ$ ի կամ $7ա-3գ$ ի

ուստի կը հետեւցնեմք.

8. ԿԱՆՈՆ. — *Բազմեզր մը իւր ամենապարզ ձեւոյն վերածելու համար, պէտք է եւել եւ պակաս նշան ունեցող իրերանման եզրերն զատ զատ գումարել, համարտադրիչներն իրարու վրայ յաւելցնելով, յետոյ փոքր գումարը մեծէն հանել եւ տալ մնացորդին՝ եւել կամ պակաս նշանը ըստ երկու գումարաց մեծին նախադաս նշանին ։*

Եթէ միեզեր մը տառից մեզէն յատուկ արժէքներ տամք, նշանակեալ գործողութիւնները կատարելէ զկնի, միեզեր արժէքը կունենամք ինչպէս $\frac{3աբ}{2գ}$

Դնեմք $ա=5$, $բ=4$ և $գ=8$, միեզեր թուաւոր արժէքը պիտի ըլլայ $\frac{3\times5\times4}{2\times8}$ որ հաւասար է $3\frac{3}{4}$ ի ։

Նոյնպէս բազմեզեր մը արժէքը կ'ունենամք, զայն իւր պարզագոյն ձեւոյն վերածելէ յետոյ, իւրաքանչիւր տառի դրուած արժէքին համեմատ նշանակեալ գործողութիւնքն կատարելով ։

Զորօրինակ, ունենամք հետեւեալ բազմեզրը:

$$աբ+2գդ-դե+\frac{3ադ}{2բ}-գե$$

Դնեմք ա=10, բ=4, գ=3, դ=1, ե=4

$$աբ+2գդ-դե+\frac{3ադ}{2բ}-գե$$ բազմեզրին հաւասար է

$$40+6-4+\frac{30}{8}-12 \text{ կամ } 33\frac{3}{4} \text{ ի:}$$

ԴԱՍ Բ.

ՅԱՒԵԼՈՒՄ

9. — Մէկէն աւելի քանակութիւններ իրարու վրայ գումարելով մէկ քանակութեան վերածելու գործողութիւնը *յաւելում* կը կոչուի:

1. Յաւելում միեզերաց

ՕՐԻՆԱԿ Ա. Ունենամք գումարել 5ա, 3բ և 4գ միեզրերը.

Նախ երկու եզերաց 5ա+3բ գումարը կառնեմք, յետոյ այս գումարին վրայ կը յաւելումք 4գ

5ա+3բ+4գ

որ է տրուած միեզերաց գումարն: Ուստի կը հետեւցընեմք.

10. ԿԱՆՈՆ. — *Մէկէ աւելի միեզերաց յաւելումն ընելու համար պէտք է զանոնք կարգաւ գրել իրենց նշանով զատուած:*

11. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ. — Շատ մը միեզրերու գումարը միեզեր կրնամք վերածել նոցա համարատադրիչները գումարելով. ինչպէս $\frac{5}{6}$աբգ, 2աբգ, 4աբգ. միեզերք իրերանման են, և որոց գումարն է

$$\frac{5}{6}աբգ+2աբգ+4աբգ.$$

որ հաւասար է $\frac{5}{6}$ անգամ աբգի արտադրելոյն, 2 և 4 անգամ նոյն արտադրելոյն գումարին, արդ $\frac{5}{6}$, 2 և 4 համարատադրիչներուն գումարն է $6\frac{5}{6}$ կամ $\frac{41}{6}$. ուստի առաջարկեալ միեզերաց ամենապարզ գումարը $\frac{41}{6}$ աբգ է:

ՕՐԻՆԱԿ Բ. 5աբ, 4աբ, աբ

Գումար 5աբ+4աբ+աբ. որ ըսել է 5 անգամ աբ, աւելի 4 անգամ և 1 անգամ նոյն արտադրեալն. արդ 5, 4 և 1 թուոց գումարն է 10. ուրեմն միեզերաց ամենապարզ գումարն 10աբ է:

Այս գումարին մէջ երրորդ՝ աբ եզեր համարատադրիչը 1 է որ սովորաբար չը գրուիր:

12. ՍԿԶԲՈՒՆՔ Ա. — Գումար մը՝ թուոյ մը վրայ աւելցնելու համար, պէտք է աւելցնել գումարին իւրաքանչիւր մասը նոյն թուոյն վրայ,

ինչպէս Ռ+(ա+բ+գ)=Ռ+ա+բ+գ:

13. ՍԿԶԲՈՒՆՔ Բ. — Գումար մը թուէ մը բառնալու համար, պէտք է բառնալ նոյն թուէն գումարին իւրաքանչիւր մասը:

ինչպէս Ռ—(ա+բ+գ)=Ռ—ա—բ—գ.

14. ՍԿԶԲՈՒՆՔ Գ. — Երկու թուոց տարբերութիւնը թուոյ մը վրայ աւելցնելու համար, պէտք է նախ առաջինը աւելցնել և ապա երկրորդը բառնալ. Այսպէս

Ն+(ա—բ)=Ն+ա—բ.

Երբ Ն-ին վրայ ա աւելցնեմք, թիւ մը կ'ունենամք որ բուն գումարէն բ աւելի է, ուստի բուն գումարը պիտի ըլլայ Ն+ա—բ։

2. Յաւելում բազմեզերաց

Դնեմք երկու բազմեզերք ա+բ—գ և դ—զ+ե—է. զոր պէտք է գումարել։ դ—զ+ե—է բազմեզեր արժէքն է դրական և բացասական եզրերուն գումարաց տարբերութիւնն, այսինքն (դ+ե)—(զ+է)։ Արդ պէտք է ա+բ—գ բազմեզեր վրայ նախ դ+ե երկեզրը յաւելուլ և ապա զ+է երկեզրը բառնալ. Երկու ա+բ—գ, դ+ե քանակութեանց գործողութիւնները կը կատարեմք, նախ ա+բ—գ-ի վրայ դ կը յաւելումք, յետոյ ա+բ—գ+դ գումարին վրայ ե, և կ'ունենամք ա+բ—գ+դ+ե բազմեզրը, ուստի պէտք է բառնալ զ+է երկեզրը, ասոր համար նախ զ-ը կը բառնամք և յետոյ այս գումարէն է, առաջին անգամ բարձման հետևորդն է

ա+բ—գ+դ+ե—զ

երկրորդ անգամինը

ա+բ—գ+դ+ե—զ—է

որ է առաջարկեալ երկու բազմեզերաց գումարն։

Այս գումարը կ'ստանայինք, եթէ երկրորդ բազմեզրը իւր նշանօք առաջին բազմեզեր հետ գրէինք։ Ուստի կը հետևի

15. ԿԱՆՈՆ. — *Շատ մը բազմեզրներ գումարելու համար պէտք է բոլոր բազմեզերաց եզրերը յաջորդաբար իրենց նշանօք գրել։*

ԴԱՍ Գ.

ԲԱՐՁՈՒՄ

16. Երկու քանակութեանց տարբերութիւնը գտնելու գործողութիւնը բարձում կը կոչուի։ Այս տարբերութիւնը փոքր քանակութեան վերայ յաւելցնելով՝ մեծ քանակութիւնը կ'ստանամք։

1. Բարձում միեզերաց

17. ԿԱՆՈՆ. — *Միեզր մը միեզրէ մը բառնալու համար պէտք է բառնալի միեզրը միւսին աջ կողմը գրել — նշանով զատուած։ Ինչպէս 4ա—6բ երկեզրը, 4ա-ին եւ 6բ-ին մէջ եղած տարբերութիւնն է։*

18. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ. — Երկու համանման եզերաց տարբերութիւնը միեզեր կրնայ վերածիլ, նոյն եզերաց համարտադրիչներուն տարբերութիւնը դնելով։ Ինչպէս եթէ ուզեմք $\frac{20}{3}$աբէն 4աբ միեզրը բառնալ, $\frac{8}{3}$ը, $\frac{20}{3}$ի և 4ին տարբերութիւնը ըլլալով, $\frac{20}{3}$աբի և 4աբի տարբերութիւնը եւս $\frac{8}{3}$աբ է. ուստի կը գրեմք

$$\frac{20}{3}\text{աբ}-4\text{աբ}=\frac{8}{3}\text{աբ}.$$

19. ԿԱՆՈՆ. — *Տարբերութիւն մը գումարէ մը բառնալու համար, պէտք է առաջին թիւը բառնալ եւ երկրորդը յաւելուլ։ Զորօրինակ.*

Ն—(ա—բ)=Ն—ա+բ

ՅՈՒՑՈՒՄ. — Երբ Ն գումարէն միայն ա քանակութիւնը բառնամք տարբերութիւն մի կ'ստանամք որ փնտրու-

ուած տարբերութենէն բ քանակութեան չափ փոքր կ'ըլլայ. ուրեմն բ քանակութիւնը եւս գումարելով ր—ա տարբերութեան վրայ կ'ունենամք ր—ա+բ: Այս ստացուած տարբերութեան վրայ երբ ա—բ քանակութիւնը յաւելումք ր թիւը կ'ունենամք. ինչպէս ր—ա+բ+ա—բ ինչ որ պէտք էր ցուցնել:

Բարձում բազմեզերաց

20. ԿԱՆՈՆ. — *Բազմեզր մը միեզրէ մը եւ կամ այլ բազմեզրէ բառնալու համար, պէտք է գրել իր բոլոր եզրերը՝ միեզեր կամ բազմեզեր աջ կողմը հակառակ նշանով:*

ՕՐԻՆԱԿ Ա. Բառնալ 2ֆ միեզրէն ա—բ+գ—դ բազմեզը. 2ֆ միեզեր աջ կողմը կը գրեմք ա—բ+գ—դ բազմեզրը, իւր նշանները փոխելով կ'ստանամք

2ֆ—ա+բ—գ+դ

մնացորդը, որոյ վերայ եթէ ա—բ+գ—դ քանակութիւնը գումարեմք կ'ունենամք

2ֆ—ա+բ—գ+դ+ա—բ+գ—դ

գումարը զոր պարզելով նորէն կ'ստանամք 2ֆ. վասնզի ա—բ+գ—դ երկու անգամ պարունակեալ է իւր մէջ հակառակ նշանօք. ուրեմն 2ֆ միեզեր ա—բ+գ—դ բազմեզրէն ունեցած տարբերութիւնն է

2ֆ—ա+բ—գ+դ

ՕՐԻՆԱԿ Բ. Նմանապէս ֆ—ն+ր բազմեզրէն ա—բ+գ—դ բազմեզրը բառնալու համար պէտք է գրել իր բոլոր եզրերը ֆ—ն+ր բազմեզեր ետեւէն միայն նշանները փոխելով. այսպէս,

ֆ—ն+ր—ա+բ—գ+դ

1002
31

Պարզութիւն բազմեզերաց իրերանման եզրերու

21. Յաւելման կամ բարձման մէջ, երբ բազմեզերք իրերանման եզրեր ունենան, սոցա գումարը կամ տարբերութիւնը կրնայ պարզուիլ, եթէ այս եզրերը հետեւեալ երկու կանոններով միացնեմք:

1°. *Երբ իրերանման եզերք նման նշանօք են, զայնս կրնանք գումարել եւ գումարը + կամ — նշանով գրել ըստ իրերանման եզերաց նշաններուն որք + կամ — նշանօք են:*

2°. *Երբ իրերանման եզերք տարբեր նշանօք են, դրական եւ բացասական եզրերը զատ զատ գումարելէ զկնի, փոքր գումարը մեծէն կը բառնամք եւ մնացորդին կուտանք մեծ գումարին նշանը:*

ՕՐԻՆԱԿ Ա. Գումարել 2ա+5բ, 6ա—9գ, և 11դ+7ա բազմեզրը, որոց իրերանման եզերք դրական են:

Սոցա գումարն է

2ա+5բ+6ա—9գ+11դ +7ա

կամ 2ա+6ա+7ա+5բ—9գ+11դ.

Նման եզրերը գումարելով

15ա+5բ—9գ+11դ

պարզ ձեւը կ'ստանամք:

ՕՐԻՆԱԿ Բ. Գումարել 7ա+3բ, 6ա—3գ, 4դ—2ա, 8ե—10ա բազմեզրերը:

Այս բազմեզերաց գումարն է

7ա+3բ+6ա—3գ+4դ—2ա+8ե—10ա

կամ 7ա+6ա—2ա—10ա+3բ—3գ+4դ+8ե:

ՀԱԽՀ ՀԱՆՐԱՅԻՆ ԳՐԱԴ...
С.С.Р.А Публичная Библиотека
7/XI 1922
имени А. Мясникяна
Ա. ՄՅԱՍՆԻԿՅԱՆԻ ԱՆՎ...

Նախ դրական երկու եզրերը գումարելով կ'ստանամք 7ա+6ա=13ա. այս գումարէն 2ա և 10ա եզրերը փոխանակ զատ զատ բառնալու, սոցա գումարը 12ա

կը բառնամք և կ'ունենամք ա մնացորդը․ հետևաբար առաջարկեալ բազմեզերաց պարզ գումարն է

ա+3բ—3գ+4դ+8ե ։

Իրերամիման եզերաց պարզման մէջ դրական եզերաց գումարը՝ բացասական եզերաց գումարէն մեծ էր, ահա սմա հակառակ օրինակ մի ։

ՕՐԻՆԱԿ Գ. Գումարել 10ա+5բ+2ա—9գ, 5դ—11ա, 6ե—7ա բազմեզրը ։

Սոցա գումարն է

10ա+5բ+2ա—9գ+5դ—11ա+6ե—7ա

կամ 5բ—9գ+5դ+6ե+10ա+2ա—11ա—7ա ։

փոխանակ 5բ—9գ+5դ+6ե բազմեզեր վերայ (10ա+2ա) գումարը կամ 12ա աւելցնելու և այս գումարէն (11ա+7ա) կամ 18ա բառնալու

5բ—9գ+5դ+6ե

բազմեզեր վերայ 12ա—18ա կամ —6ա կը գումարեմք և կ'ստանամք

5բ—9գ+5դ+6ե—6ա ։

Յաւելման կամ բարձման մէջ իրերամիման եզրերը դիւրութեամբ պարզելու համար ամբողջ թուոց յաւելման կամ բարձման պէս իրերամիման եզրերը մէկ սիւնի մէջ իրարու տակ կը գրեմք և ապա ստացուած գումարը կամ տարբերութիւնը յետին բազմեզեր տակ կը դնենք հորիզոնական գծով զատուած (ամենեւին մտքէ հանելու չէ բարձման մէջ բառնալի եզերաց նշանները փոխելը) ։

ՅԱՒԵԼՄԱՆ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

12ա— բ+3գ— դ
7ա—2բ—4գ+ դ
4ա+5բ+3գ—2դ
ա— բ+ գ— դ
―――――――――
24ա+ բ+3գ—3դ

7ա+6բ+ 4գ+ դ
3ա—2բ · · · +2դ
— ա · · · + 6գ— դ
4ա+5բ+ 2գ— դ
―――――――――
13ա+9բ+12գ+ դ

ԲԱՐՁՄԱՆ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

11ա—5բ—9գ+4դ
8ա+4բ—4գ—2դ
―――――――――
3ա—9բ—5գ+6դ

$\frac{4}{5}$ա—$\frac{3}{4}$բ+գ—4
$\frac{1}{2}$ա—$\frac{1}{3}$ · · · +1—դ
―――――――――
$\frac{3}{10}$ա—$\frac{5}{12}$բ+գ—5+դ

22. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ․ — Երբ բազմեզեր մի քանի եզրերը փակագծի մէջ առնեմք, պէտք է իւրաքանչիւր եզերաց նշանները հակառակ նշանի դառնան, եթէ փակագծին նշանը պակաս է. եւ նոյն մնան՝ երբ փակագծին նշանն աւելի է ։

Ինչպէս ա—բ+գ—դ+ե բազմեզրը կրնամք գրել այսպէս ա—(բ—գ)+(ե—դ)

ՎԱՐԺՈՒԹԻՒՆՔ

Գումարելու է 1. 10աբ—11ագ—13բգ+ 8
4աբ— 6ագ— 7բգ+ 6
9աբ+ 4ագ— 9բգ+13
—աբ+ 8ագ+ 6բգ—10

Գումարելու է 2. 8ա+6բ—5գ+$\frac{1}{3}$
—5ա— բ+ գ+4
6ա+$\frac{5}{6}$բ+2գ—3
$\frac{3}{5}$ա—$\frac{1}{7}$բ+4գ—$\frac{1}{5}$

Բառնալու է 3. 8ա+16բ—5գ եռեզրէն 10ա—4բ—3գ—$\frac{1}{5}$ը

Բառնալու է 4. 15աբ+5ագ—6բգ+10 բազմեզրէն հետեւեալ չորս բազմեզերաց գումարը

2աբ—11ագ 5+բգ—$\frac{1}{5}$
3աբ— 7ագ+42բգ+2
8աբ+16ագ+ 4բգ+$\frac{1}{3}$
—7աբ+ ագ—16բգ—$\frac{1}{2}$
―――――――――

Գումարելու է 5. $5{\cdot}10^5+6{\cdot}9^4-7{\cdot}6^3+15{\cdot}6^2+4{\cdot}3$

$8{\cdot}10^5-3{\cdot}9^4+6\,6^3-5{\cdot}6^2+7{\cdot}3$

${\cdot}10^5+5{\cdot}9^4+10{\cdot}6^3+9{\cdot}6^2+9{\cdot}3$

Գումարելու է 6. $աք^3+աբք^2+ա^2բք$

$բք^3+գդք^2-դեք$

$-եք^3+բզք^2+եգք$

Գումարելու է 7. $աք^ն+ա^2ք^{ն-1}+ա^3ք^{ն-2}+ա^4ք^{ն-3}+\dots$

$ք^ն-16ք^{ն-1}-բ^3ք^{ն-2}+8ք^{ն-3}+\dots$

$-2ք^ն+8ք^{ն-1}+3ք^{ն-2}-5ք^{ն-3}+\dots$

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Ա. — Մարդ մը երկու որդի ունէր. իր տարիքը անդրանիկ տղուն տարիքէն ա աւելի էր, անդրանիկ տղուն տարիքը կրտսերին տարիքէն բ աւելի էր. ի՞նչ կ'ըլլայ հօր և որդւոց տարիքներուն գումարը, եթէ կրտսեր տղուն տարիքը ք ըլլայ: Պատ. $3ք+2բ+ա$

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Բ. — Ուղղանկեան մը մեծ կողը փոքրէն ա մետր աւելի է, որչա՞փ կ'ըլլայ իր շրջապատը եթէ փոքր կողը ք ըլլայ: Պտ. $4ք+2ա$

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Գ. — Գտնել հինգ յաջորդական թուոց գումարը, փոքրագոյն թիւը ք ըլլալով: Պատ. $5ք+10$

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Դ. — Եռանկեան մը Ա, Բ, Գ երեք անկիւններէն մին Ա՝ միւս Բ անկիւնէն ա աստիճան չափ փոքր է. քանի՞ է երրորդ անկեան չափը գիտնալով Ա հաւասար ք աստիճանի: Պատ. $180^0-2ք+ա$

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Ե. — Գտնելու է երեք թիւ, այնպէս որ առաջիններուն գումարը ըլլայ ա վերջիններունը ըլլայ բ, առաջնոյն և վերջնոյն գումարն ըլլայ գ:

Պատ. $ա=\frac{ա+բ+գ}{2}-բ$ $բ=\frac{ա+բ+գ}{2}-գ$ $գ=\frac{ա+բ+գ}{2}-ա$

ԴԱՍ Դ.

ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒԹԻՒՆ

23. Երբ քանակութիւն մը ուրիշ քանակութեամբ մը մեծցնենք, առաջնոյն վրայ որ *բազմապատկելի* կ'ըսուի, այն գործողութիւնը կ'ընեմք՝ ինչ որ երկրորդը՝ որ *բազմապատկիչ* կը կոչուի, կազմելու համար միութեան վրայ կ'ընեմք: Այս ստացուած երրորդ քանակութիւնը *արտադրեալ* կը կոչուի:

24. ՔԱՆԱԿՈՒԹԵԱՆ ՄԸ ԿԱՐՈՂՈՒԹԻՒՆԸ. — Քանակութեան մը այլ և այլ անգամ ինքիրմով բազմապատկուելէն յառաջ եկած արտադրեալը *կարողութիւն* կը կոչուի. ինչպէս ա ա ա ա ա արտադրեալն ա ին հինգերորդ կարողութիւնն է: Այս կարողութիւնը համառօտիւ կը գրըուի այսպէս $ա^5=ա\,ա\,ա\,ա\,ա$. 5ը՝ որ ա էն քիչ մը վերը գրուած է ա ին կարողութիւնը ցուցնելու համար՝ *ցուցիչ* կ'ըսուի:

25. ՀԱՄԱՍԵՌ ԵԶԵՐՔ. — Երբ բազմեզեր մը եզերք միեւնոյն կարողութիւնը ունին՝ *համասեռ* կը կոչուին, ինչպէս $4ա^3բ-5աբ^3+6բ^4$, բազմեզեր եզերք:

26. ԴԱՍԱՒՈՐԵԱԼ ԲԱԶՄԵԶՐ. — Բազմեզր մը դասաւորեալ է իր պարունակած գրերէն անոր նկատմամբ որոյ ցուցիչները երթալով կ'աճին կամ կը նուազին, այդ ատեն այդ գիրը նոյն եզերաց *գլխաւոր* գիրը կը կոչուի:

ինչպէս $4ա^8-6ա^7+7ա^6+2ա^4-8ա^2-8$

Բազմեզրը ա գրոյն նկատմամբ դասաւորեալ է. որովհետեւ ա գրոյն ցուցիչները ձախէն դէպ ի յաջ կը նուազին, այս բազմեզրը 8րդ կարողութեամբ է, և իր *գլխաւոր* գիրն է ա:

Բազմապատկութեան մը արտադրեալը փոփոխութիւն մը չկրեր եթէ արտադրչաց կարգը փոխեմք:

Եթէ արտադրելոյ մը արտադրիչներէն մին թուով մը բազմապատկեմք, արտադրեալը եւս բազմապատկուած կ'ըլլայ։

Բազմապատկութիւն միեւնոյն բազմապատկչին այլ եւ այլ կարողութեանց

Բազմապատկելու է $ա^4$ը $ա^2$ով։

Բազմապատկչին մէջ աը երկու անգամ արտադրիչ է. արդ $ա^4 \times ա^2$ արտադրեալը հաւասար է $ա^4$ բազմապատկելոյն $ա^2$ արտադրչով բազմապատկութեան արդիւնքին. Նախ $ա^4$, աով բազմապատկուելով կ'ըլլայ $ա^5$, յետոյ՝ $ա^5$ը աով բազմապատկելով կ'ըլլայ $ա^6$. այս վերջին արտադրելոյն ցուցիչը երկու արտադրչաց ցուցիչներուն գումարին հաւասար է. ուստի կը հետեւի

27. ԿԱՆՈՆ. — *Միեւնոյն քանակութեան երկու կարողութեանց արտադրեալը գտնելու համար՝ պէտք է արտադրիչներուն ցուցիչները գումարել։*

28. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ. — Յիշեալ կանոնը հետեւեալ տարազին մէջ բացատրուած կը տեսնուի $ա^մ \times ա^ն = ա^{մ+ն}$

Բազմապատկութիւն երկու միեզերաց

Բազմապատկելու է $8ա^2բ^3գ$, $6ա^4բգ^2$ով.

Գիտեմք որ $6ա^4բգ^2$ բազմապատկիչը միութեան 6, $ա^4$, բ, $գ^2$ արտադրիչներով բազմապատկուելէն ելած արտադրեալն է. փնտռուած արտադրեալը ունենալու համար $8ա^2բ^3գ$ բազմապատկելին միեւնոյն արտադրիչներով կը բազմապատկեմք. ասոր համար $8ա^2բ^3գ$ին $8ա^2$, $բ^3$, գ արտադրիչները 6ով, $ա^4$ով, բով և $գ^2$ով կը բազմապատկեմք և արտադրեալը կ'ըլլայ $48ա^6բ^4գ^3$։ Ուստի կը հետեւցնեմք.

29. ԿԱՆՈՆ. — *Միեզր քանակութիւնք իրարմով բազմապատկելու համար պէտք է կազմել ուրիշ միեզր մը, որուն համարտադրիչը երկու արտադրչաց համարտադրիչներուն արտադրեալը ըլլայ,*

որ բազմապատկչին եւ բազմապատկելւոյն բոլոր գրերը պարունակէ ցուցիչներուն գումարով։

Բազմապատկութիւն միեզեր բազմեզրով

Բազմապատկելու է ե ը $ա-բ+գ$ բազմեզրով.

Արդէն գիտեմք որ միութիւնը ա. բ. գ ով բազմապատկուելէ յետոյ, միութեան և աին, միութեան և գին արտադրելոց գումարէն բին ու միութեան արտադրեալը բառնալով՝ $ա-բ+գ$ արտադրեալը յառաջ կուգայ։ Ասոր համար տրուած բազմապատկելին կը բազմապատկեմք $ա-բ+գ$ բազմապատկչին իւրաքանչիւր եզրով, վերջը աե և գե արտադրելոց գումարէն բե կը պակսեցնեմք և կ'ունենամք

$$աե+գե-բե \quad կամ \quad աե-բե+գե$$

որ փնտռուած արտադրեալն է։ Ուստի կը հետեւցնեմք.

30. ԿԱՆՈՆ. — *Միեզր մը բազմեզրով բազմապատկելու համար, պէտք է բազմապատկել բազմեզրը միեզրով եւ գրել արտադրեալքն մին միւսոյն ետեւէն իրենց նշաններով։*

Ուրիշ օրինակ. Բազմապատկեմք $6ա^2բ-4գ+6դե$ բազմեզրը $8աբ^2$ միեզրով որոց արտադրեալն է

$$48ա^3բ^3-32աբ^2գ+48աբ^2դե ։$$

Միեւնոյն արտադրեալը կ'ընդունիմք եթէ $8աբ^2$ միեզրը՝ $6ա^2բ-4գ+6դե$ բազմեզրով բազմապատկեմք։

Բազմապատկութիւն բազմեզերաց

Բազմապատկելու է $ա-բ+գ$ բազմեզրը $դ+ե-զ$ բազմեզրով. գիտեմք որ $դ+ե-զ$ բազմապատկիչը միութեան և դ, ե արտադրիչներուն արտադրելոց գումարէն միութեան և զ արտադրչաց արտադրեալը բառնալով ստացուած է. ուստի $ա-բ+գ$ կը բազմապատկեմք $դ+ե-զ$ բազմապատկչին իւրաքանչիւր եզրով, և յետոյ կը բառնամք երկու $(ա-բ+գ)դ$, $(ա-բ+գ)ե$ ար-

տադրելոց գումարէն՝ երրորդ արտադրեալ $(ա-բ+գզ)$։ Այս գործողութիւնը հանրահաշուական ձեւով այսպէս կը գրուի․

$$(ա-բ+գ)(դ+ե-զ)=(ա-բ+գ)դ+(ա-բ+գ)ե-(ա-բ+)զ։$$

Բուն արտադրեալը կ'ստանամք եթէ բազմապատկելույն բազմապատկչին + նշանով եղերաց արտադրեալներուն գումարէն — նշանով եղերաց արտադրեալներուն գումարը բառնամք։ Հետեւաբար արտադրելոյն իւրաքանչիւր եզրը + կամ — նշանը կ'ունենայ ըստ բազմապատկչին և բազմապատկելույն նշանաց որք նոյն կամ տարբեր նշանօք են։

31. Բացասական $(-ա)$ թուոյ մը դրական $բ$ թուով արտադրեալն է

$$(-ա)(բ)=-(ա\times բ)։$$

Երկու $(-ա)$ և $(-բ)$ բացասական թուոց արտադրեալն է

$$(-ա)(-բ)=աբ։$$

Այս նշանաց կանոնը հետեւեալ աղիւսակին մէջ աղէկ կը տեսնուի․

$$+ա\times+բ=+աբ$$
$$-ա\times+բ=-աբ$$
$$+ա\times-բ=-աբ$$
$$-ա\times-բ=+աբ$$

Սոյն կանոնին վրայ օրինակ մ'առնեմք․ $ա-բ$ բազմապատկելու է $գ-դ$ ով վերը ըսածնուս համեմատ ունիմք

$$(ա-բ)(գ-դ)=ագ+(-բ)գ+(-դ)ա+(-բ)(-դ)։$$

Այս արտադրելոց գումարն է

$$ագ-բգ-ադ+բդ։$$

Այս գործողութենէ կը հետեւի նաեւ․

32. ԿԱՆՈՆ․ — *Երկու բազմեզր իրարմով բազմապատկելու համար, պէտք է բազմապատկել բազմապատկելոյն բոլոր եզրերը բազմապատկչին իւրաքանչիւր եզրով, որոց արտադրեալը գրել + կամ — նշանով, ըստ բազմապատկելոյն եւ բազմապատկչին եզերաց որք նոյն կամ տարբեր նշանօք են։*

Այս կանոնը միեզերաց վրայ դրուած կանոնին պէս է, միայն պէտք է մէկէն աւելի եզերաց բազմապատկութիւնը ընել։

Հանրահաշուական բազմապատկութիւնը թուաբանականին պէս է․ բազմապատկիչը բազմապատկելոյն տակը կը գրեմք և մասնական արտադրեալները բազմապատկչին տակ հորիզոնական գծով մը զատուած․ վերջը արտադրելոց նման եզերաց գումարը կ'առնեմք, վերածելով իրենց ամենապարզ ձեւոյն․ վերածութիւնը դիւրացնելու համար, պէտք է դասաւորել բազմապատկելին և բազմապատկիչը գրերէն մէկովը, որ երկու արտադրչաց մէջ կը գտնուի․ մասնական արտադրեալք նոյն գրոյն նկատմամբ դասաւորուած կ'ըլլան և վերածելի եզրեր կ'ունենամք․ ահա այս կանոնին վրայ օրինակ մի․

Բազմապատկելի․ $3գ^{4}-5ագ^{3}-4ա^{2}գ^{2}+7ա^{3}գ-2ա^{4}$

Բազմապատկիչ․ $2գ^{3}-5ագ^{2}-3ա^{2}գ+4ա^{3}$

$2գ$ ով $6գ^{7}-10ագ^{6}-8ա^{2}գ^{5}+14ա^{3}գ^{4}-4ա^{4}գ^{3}$

$-5ագ^{2}$ ով $-15ագ^{6}+25ա^{2}գ^{5}+20ա^{3}գ^{4}-35ա^{4}գ^{3}+10ա^{5}գ^{2}$

$-3ա^{2}գ$ ով $-9ա^{2}գ^{5}+15ա^{3}գ^{4}+12ա^{4}գ^{3}-21ա^{5}գ^{2}+6ա^{6}գ$

$+4ա^{3}$ ով $12ա^{3}գ^{4}-20ա^{4}գ^{3}-16ա^{5}գ^{2}+28ա^{6}գ-8ա^{7}$

Ընդ. ար․ $6գ^{7}-25ագ^{6}+8ա^{2}գ^{5}+61ա^{3}գ^{4}-47ա^{4}գ^{3}-27ա^{5}գ^{2}+34ա^{6}գ-8ա^{7}$

ՏԵՍՈՒԹԻՒՆՔ

Երկու բազմեզեր արտադրելոյն վրայ

33. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Ա․ — *Երկու բազմեզեր արտադրեալը կը պարունակէ առ առաւելն բազմապատկելոյն եւ բազմապատկչին եզերաց թուով եզրեր եւ առ նուազն երկու եզր։*

Երկու բազմեղեր բազմապատկութեան մէջ բազմապատկիչն որչափ եղր որ ունենայ նոյն թուով մասնական արտադրեալք կան։ Եթէ բազմեղերք միեւնոյն գրէն երբէք չունին, մասնական արտադրելոց գումարը նման եղրեր չունենար․ ուրեմն այս արտադրեալը բազմապատկելոյն և բազմապատկչին եղերաց թուով եղրեր ունի։ Ինչպէս

$2ա+3բ-4գ$ եռեղրը $5դ-6ե$ երկեղրով բազմապատկելով կ'առնումք․

$$10ադ+15բդ-20գդ-12աե-18բե+24գե$$

բազմեղրը՝ որ վեց եղր ունի։

ՕՐԻՆԱԿ․ Առնեմք երկու բազմեղրեր, որք միեւնոյն գրոյն նուազելի կարողութեամբն են։

$$2ա^5+3ա^4+4ա^3-5ա^2$$
$$6ա^3-7ա^2+8ա$$

$2ա^5$ բազմապատկելոյն $6ա^3$ բազմապատկչով արտադրելոյն ցուցիչը՝ միւս եղերաց արտադրելոց ցուցիչներէն մեծ է, քանզի երկու արտադրիչք միեւնոյն գրով նուազող դասաւորութեամբ են։ Նմանապէս $5ա^2$ և $8ա$ յետին եղերաց արտադրելոյն դասաւորեալ գիրը արտադրելոյն մէջ ամենափոքր ցուցիչով է, հետեւաբար եղերաց վերածումը կատարելէ զկնի $2ա^5×6ա^3$ կամ $12ա^8$ առաջին եղրը և $5ա^2×8ա$ կամ $40ա^3$ վերջին եղրը պիտի ունենամք, որովհետեւ այս միեղերք անպարզելի են։ Ուստի ընդունուած արտադրեալը առ նուազն երկու եղր պիտի ունենայ։

Եթէ $ա^6+2ա^4բ^2+4ա^2բ^4+8բ^6$ բազմեղրը $ա^2-2բ^2$ երկեղրով բազմապատկեմք եղերաց նուազագոյն արտադրեալ մը կ'առնումք որ է

$$ա^8-16բ^8 ։$$

Այս օրինակէս և նախընթաց ցուցումէն կը հետեւի՝ թէ արտադրելոյ մը մէջ երկու արտադրչաց գրերը գտնուելու են։

34. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Բ. — *Երկու համասեռ բազմեղերաց արտադրեալը նոյնպէս համասեռ է եւ երկու արտադրչաց կարողութեանց գումարն ունի։*

Երբ բազմապատկելին՝ բազմապատկչին եղրերով բազմապատկեմք, մասնական արտադրելոց կարողութիւնը՝ երկու արտադրչաց կամ բազմեղերաց կարողութեանց գումարով է. որովհետեւ համասեռ են․ ուրեմն այս արտադրելոց գումարը այսինքն երկու բազմեղերաց արտադրեալը համասեռ և երկու արտադրչաց ցուցիչներուն գումարն ունի։

35. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ․ — Նախընթաց տեսութեան յաճախակի պէտք ունիմք, երբ ուզեմք հասկնալ թէ համասեռ եղերաց արտադրելոյն ցուցիչները ճիշդ են։

Ինչպէս $3ա^4բ-2ա^3բ+6ա^2բ^3-4աբ^4$

Արտադրեալը յառաջ եկած ըլլայ $ա^3+2աբ$ երկեղեր $3աբ-2բ^2$ երկեղրով բազմապատկուելէն․ սխալը բացորոշ է․ քանզի $2ա^3բ$ եղրը միւս եղերաց կարողութեամբ չէ։

36. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Գ. — *Երկու քանակութեանց գումարին իրենց տարբերութեան արտադրեալը՝ նոցա քառակուսիներուն տարբերութեանը հաւասար է։*

Դիցուք երկու քանակութիւնք $ա$ և $2բ$, որոց գումարն է $ա+2բ$. երբ $ա-2բ$ով բազմապատկեմք, $ա^2-4բ^2$ արտադրեալը կ'առնումք․

Ինչպէս

$$\begin{array}{r} ա+2բ \\ ա-2բ \\ \hline ա^2+2աբ \\ -2աբ-4բ^2 \\ \hline ա^2 \quad - \quad 4բ^2 \end{array}$$

Այս տեսութեան համեմատ հետեւեալ երկեղերաց արտադրեալը կ'առնումք առանց բազմապատկութեան գործողութիւնը կատարելու։

$$(3աբ+6բ^2)\ (3աբ-6բ^2)=9ա^2բ^2-36բ^4$$

և $$(5ա^2բ+4բ)\ (5ա^2բ-4բ)=25ա^4բ^2-16բ^2$$

37. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ. — $(ա+բ)\ (ա-բ)=ա^2-բ^2$. Այս տարազը յաճախակի կը գործածուի. ոչ թէ միայն արտադրելոյն եզրերը գտնելու համար, այլ արտադրելոյ մը եզրերը տրուած ըլլալով՝ արտադրչաց եզրերը նաեւ գտնելու համար. ինչպէս $ա^2-բ^2$ երկու քառակուսիներու տարբերութիւնը արտադրողք են $ա+բ$ և $ա-բ$. որոց մին քառակուսի արմատաց գումար և միւսը նոյն արմատոց տարբերութիւնն է։

Զորօրինակ առնեմք

$$(ա^2+աբ+բ^2)^2-(ա^2-աբ+բ^2)^2$$ երկեզրը

որոյ երկու եզերաց քառակուսի արմատք են

$$ա^2+աբ+բ^2 \text{ և } ա^2-աբ+բ^2 ։$$

Այս քառակուսի արմատոց գումարն է $2\,(ա^2+բ^2)$ և տարբերութիւնը $2աբ$։ Ուստի ունիմք

$$(ա^2+աբ+բ^2)^2-(ա^2-աբ+բ^2)^2=4աբ(ա^2+բ^2)$$ եւայլն։

Բազմապատկութիւն այլեւայլ բազմեզերաց

38. Երբ այլեւայլ բազմեզերք գտնուին իրարմով բազմապատկելի, պէտք է առաջինը երկրորդով բազմապատկել, յետոյ այս նոր արտադրեալը երրորդ բազմեզրով, և այս երրորդ արտադրեալն ալ չորրորդ բազմեզրով, և այսպէս շարունակ մինչեւ վերջ։

Զորօրինակ, ունենամք հետեւեալ $Բ_1$, $Բ_2$, $Բ_3$, $Բ_4$ ⋯$Բ_ն$ բազմեզրերը բազմապատկելի իրարմով. նախ $Բ_1$ բազմեզրը $Բ_2$ բազմեզրով բազմապատկելով կ'առնամք $Ք_1$ արտադրեալը, յետոյ $Ք_1$ նոր արտադրեալը $Բ_3$ով բազմապատկելով կ'ընդունիմք $Ք_2$ որ $Ք_1$ին բոլոր եզերաց $Բ_3$ին բոլոր եզրերով արտադրելոց գումարն է. այսինքն $Բ_1$ին, $Բ_2$ին և $Բ_3$ին մէջ մտնող եզերաց արտադրելոց

գումարն. այս ստացուած $Ք_2$ արտադրեալը՝ $Բ_4$ բազմեզրով բազմապատկուելով չորս բազմեզերաց արտադրելոց գումարը կ'առնամք. և եթէ շարունակեմք մինչեւ $Բ_ն$. բոլոր բազմեզերաց իրարմով բազմապատկութեամբ արտադրեալը կ'ունենամք։

ՎԱՐԺՈՒԹԻՒՆՔ

1. $(ա+բ+գ)^2=(ա+բ)^2+2\,(ա+բ)\,գ+գ^2$
$=ա^2+2աբ+բ^2+2ագ+2բգ+գ^2$
$=ա^2+բ^2+գ^2+2աբ+2ագ+2բգ$ ։

2. Բազմապատկելու է $ք^7+ք^6+ք^5+ք^4+ք^3+ք^2+ք$ բազմեզրը $ք-1$ երկեզրը։

3. Ստուգելու է հետեւեալ բազմեզերաց արտադրեալը

$(ա+բ+գ)\,(ա+բ-գ)\,(ա+գ-բ)\,(բ+գ-ա)=2ա^2բ^2+2ա^2գ^2+2բ^2գ^2-ա^4-բ^4-գ^4$

4. Պէտք է ցուցնել թէ երբ երկու ամբողջ թուոց (ա և բ) որք երկուքն ալ զոյգ կամ անզոյգ ըլլան՝ գումարին քառակուսիններուն կէսը իրենց քառակուսիններուն գումարին հաւասար է.

Պատ. երբ $ա=բ$ ։

5. Բազմապատկելու է $(4ա+7բ)$, $(2ա-3բ)$, $(7ա^2բ^3գ+8աբ^2գ^3)$ և $(9ա^2բ^3գ-6աբ^2գ^3)$ բազմեզրը.

6. Բազմապատկելու է $ա^5-ա^4ք+ա^3ք^2-ա^2ք^3+աք^4-ք^5$ բազմեզրը $ա+ք$ երկեզրով։

Հետեւեալ գործողութիւնները կատարելու է։

7. $(ա+բ)^3-(ա-բ)^3-2բ^3$ ։
8. $(1+2ա-3բ)^2-(3բ-2ա-1)^2$ ։
9. $(\frac{7}{2}ա^2+4աք-\frac{9}{2}ա^2)\ (3ք^2-աք-\frac{1}{4}ա^2)$ ։
10. $(ա+բ-գ-դ)^2-(գ+դ-ա-բ)^2$ ։

ԴԱՍ Դ.

ԲԱԺԱՆՈՒՄ

39. Բաժանումը այն գործողութիւնն է որոյ մէջ երկու թիւեր գրուած են, առաջին բաժանելի և երկրորդն բաժանարար կոչուած, որոցմով կ'ստանամք երրորդ թիւ մը, որ քանորդ կը կոչուի և որ բաժանարարով բազմապատկուելով յառաջ կը բերէ բաժանելին։

Միեւնոյն քանակութեան երկու կարողութեանց բաժանում

40. ԿԱՆՈՆ. — *Միեւնոյն գրով քանակութեան մը երկու կարողութիւնք իրարմով բաժանելու ըլլալու համար, պէտք է որ բաժանելւոյն կարողութիւնը բաժանարարին կարողութենէն մեծ ըլլայ. այս բաժանման քանորդը նոյն գրով է եւ իւր կարողութիւնը բաժանարարին եւ բաժանելւոյն կարողութեանց տարբերութիւնն է:*

ՕՐԻՆԱԿ. — $ա^6$ ըլլայ բաժանելի և $ա^4$ բաժանարար. այս բաժանումը հնարաւոր է. քանզի բաժանելւոյն կարողութիւնը բաժանարարին կարողութենէն մեծ է. բաժանման քանորդն է $ա^{6-4}$ այսինքն $ա^2$. Եթէ $ա^2$ը $ա^4$ով բազմապատկեմք $ա^6$ բաժանելին կ'ընդունիմք, որովհետեւ գիտեմք որ կարողութեան բազմապատկութիւնն ընելու համար, զայնս իրարու վրայ կը գումարեմք. ուստի $ա^2$ փնտռուած քանորդն է:

Եթէ բաժանելւոյն կարողութիւնը բաժանարարին կարողութենէն փոքր գտնուէր, ինչպէս եթէ $ա^4$ը $ա^6$ով ուզէինք բաժնել, ամբողջ քանորդ մը չէինք ունենար. որովհետեւ $ա^4$ բաժանելւոյն ցուցիչէն $ա^6$ բաժանարարին ցուցիչը չը բարձուիր, ուրեմն $ա^4$ չը բաժնուիր. այս երկու քանակութեանց քանորդը միայն կը նշանակուի կոտորակով $\frac{ա^4}{ա^6}$:

41. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ. — *Այս նախադասութենէն կը հետեւի*

$$\frac{ա^ն}{ա^{ն'}} = ա^{ն-ն'}$$ *հաւասարութիւնը.*

որուն մէջ ն և ն՛ ամբողջ թիւեր են և ն ն՛էն մեծ:

Դիցուք ն=ն՛ բաժանելւոյն և բաժանարարին ցուցիչները հաւասար ըլլալով, քանորդը միութիւն մ'է զոր կը նշանակեմք $ա^0$ ձեւով:

Ուստի կը հետեւի որ միեզեր մէջ զէրօ ցուցիչով քանակութիւն մի կարեմք թէ գրել և թէ զանց առնել, որովհետև 1ով բազմապատկել կամ բաժնել ըսել է: Ինչպէս

$$6ա^3բ^0գ^2 = 6ա^3գ^2 \text{. և } աբ^2դ = աբ^2գ^0դ$$

Երկու ամբողջ միեզերաց բաժանում

42. Դիցուք $70ա^5բ^3գ^2դ^5$ բաժանելի $14ա^2բգ^2$ բաժանարար. առնցմով միեզր քանորդ մը կ'ուզեմք գտնել որ բաժանարարով բազմապատկուելով բաժանելին յառաջ պիտի բերէ: Ըստ բազմապատկութեան կանոնի (**29**) բաժանելւոյ 70 համարտադրիչը քանորդին և բաժանարարին համարտադրչաց արտադրելոյն հաւասար է. ուրեմն քանորդին համարտադրիչը ստանալու համար 70ը 14ով կը բաժնեմք և կը գտնեմք 5: Նոյն կանոնով ա գրին 5 ցուցիչը հաւասար է քանորդին և բաժանարարին նոյն գրին ցուցիչներուն գումարին. ուրեմն քանորդին ա գրին ցուցիչը ստանալու համար 5էն 2 բառնալու է, հետեւաբար կ'ունենամք 3: Նմանապէս բ ին ցուցիչը 2. գալով գ գրին ցուցչին, բաժանարարին և բաժանելւոյն մէջ հաւասար ըլլալով քանորդին մէջ այն գիրը չմնար. իսկ դ գիրը բաժանարարին մէջ չը գտնուելով և միայն բաժանելւոյն մէջ գտնուելով, քանորդին մէջ եւս իւր ցուցիչով կը գտնուի:

Փնտռուած քանորդն է ուրեմն $5ա^3բ^2դ^5$:

Ուստի կը հետևի

43. ԿԱՆՈՆ. — *Միեզր մի ուրիշ միեզրով բաժնելու համար, 1° բաժանելույն համարտադրիչը բաժանարարին համարտադրչով բաժնելու է, 2° գրելու է այն գիրերը որք բաժանելույն մէջ բաժանարարին նոյն գիրերուն ցուցիչներէն մեծ ցուցիչ ունին, 3° այս գիրերը բաժանարարին և բաժանելույն նոյն գրոց ցուցիչներուն տարբերութեանը ցուցիչ ունենալու են: Եթէ գիր մը միայն բաժանելույն մէջ գտնուի, քանորդին մէջ իւր ցուցիչը կը պահէ:*

Ըստ նախընթաց կանոնին հետևեալ միեզերաց իրարմով բաժանման քանորդը կ'ստանամք.

$$\frac{25ա^5բ^4գ^3}{5ա^4բ^3գ} = 5աբգ^2. \quad և \quad \frac{13ա^4բ^3գ^2դ}{26ա^4բ^2գդ} = \frac{1}{2}բգ:$$

ԱՅԼ ՕՐԻՆԱԿ. Բաժնելու է $10ա^4բ^3$ միեզրը $5ա^5բ^2$ միեզրով. առաջարկեալ միեզերք բաժանական չեն. քանզի բաժանարարին ա գրին ցուցիչը՝ բաժանելույն նոյն գրին ցուցիչէն մեծ է: Նոյնպէս $16ա^2բ^2գ$ միեզրը $9ա^2բ^2գդ$ միեզրով չբաժնուիր քանզի բաժանելին բաժանարարին դ գիրը չունի:

Բաժանում բազմեզերաց միեզրով

44. ՕՐԻՆԱԿ Ա. Բաժնելու է $ա-բ+գ$ բազմեզրը դ միեզրով:

Այս բաժանման քանորդն է բաժանելույն իւրաքանչիւր եզերաց բաժանարարով բաժնուելով ստացուած քանորդաց գումարը. ինչպէս

$$\frac{ա-բ+գ}{դ} = \frac{ա}{դ} - \frac{բ}{դ} + \frac{գ}{դ}:$$

Այս քանորդը դ ով բազմապատկելով կ'ստանամք

$$\frac{ա}{դ}\times դ - \frac{բ}{դ}\times դ + \frac{գ}{դ}\times դ \text{ որ ըսել է } ա-բ+գ:$$

Ինչպէս կը տեսնուի քանորդէն թէ բաժանելույն եզերք ինչ նշանով որ են քանորդին իւրաքանչիւր եզրը ևս միևնոյն նշանով է:

Նախընթաց գործողութենէն կը հետևի *բազմեզեր միեզրով բաժանումը միեզեր միեզրով բաժանման պէս է:*

45. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Ա. — *Միեզր մը բազմեզրով բաժանական չէ, որովհետև բազմեզեր մը միեզրով, կամ միեզեր մը բազմեզրով բազմապատկութեան արտադրեալը միեզր չէ: Ուստի, զոր օրինակ, $16ա^4բգ$ միեզրը՝ $8ա^3-3աբ$ երկեզրով բաժանական չէ:*

46. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Բ. — *Երկու բազմեզրեր իրարմով բաժանական ըլլալու համար, բաժանելին բաժանարարին բոլոր գրերը պարունակելու է. հակառակ պարագային մէջ չբաժնուիր. քանզի եթէ բաժնուէր քանորդին և բաժանարարին արտադրեալը բաժանելին պիտի ըլլար, և բաժանելույն այս կամ այն եզեր մէջ երկու արտադրչաց գրերը պիտի գտնուէին: Զոր օրինակ $ա^3+բգ+դ^4-ե$ բազմեզրը $ա^2-ե$ միեզրով չբաժնուիր, քանզի բաժանելին իւր մէջ ե գիրը չպարունակեր:*

Բաժանում բազմեզերաց

47. Ունենամք բաժնել հետևեալ երկու ամբողջ

$$4ա^4-9ա^2բ^2+6աբ^3-բ^4 \text{ և } 2ա^2-3աբ+բ^2 \text{ բազմեզրերը:}$$

Այս բազմեզերց առաջինը երկրորդով բաժանական է, վասն զի իւր մէջ կը պարունակէ երկրորդին բոլոր գրերն:

Եթէ այս երկու բազմեզրերը իւրեանց հասարակ գրերէն միով դասաւորեմք, օրինակի համար ա ով, բաժանելույն առաջին $4ա^4$ եզրը հաւասար է բաժանարարին առաջին եզեր քանորդին առաջին եզրով բազմապատկութեան արտադրելոյն (**32**). արդ $4ա^4$, $2ա^2$ ով բաժնելով՝ քանորդին առաջին եզրը կ'ստանամք որ է $2ա^2$. գալով իւր նշանին պէտք է որ $2ա^2$ բաժանելույն

նշանը ունենայ, որովհետեւ այս երկու միեզերաց արտադրեալը դրական նշանով է (**32**)։

Արդ այս քանորդին առաջին եզրը և նշանը գտնալով, $2ա^2-3աբ+բ^2$ բաժանարարը կը բազմապատկեմք $2ա^2$ եզրով և կ'ունենամք արտադրեալ

$$4ա^4-6ա^3բ+2ա^2բ^2,$$

զոր բառնալով $4ա^4-9ա^2բ^2+6աբ^3-բ^4$ բաժանելիէն, մնացորդ կ'ունենամք $6ա^3բ-11ա^2բ^2+6աբ^3-բ^4$ որ քանորդին անծանօթ եզերաց բաժանարարով բազմապատկութեան արտադրեալն է։ Հետեւաբար մնացորդին $6ա^3բ$ եզրը բաժանարարին $2ա^2$ առաջին եզրով բաժնելով, քանորդին երկրորդ եզրը կ'ունենամք, որ է $3աբ$, + նշանով, քանզի $3աբ$ ի $2ա^2$ով արտադրեալը $6ա^3բ$ է դրական նշանով (**32**)։ Արդ կը բազմապատկեմք $2ա^2-3աբ+բ^2$ բաժանարարը քանորդին $3աբ$ եզրով և կ'ունենամք $6ա^3բ-9ա^2բ^2+3աբ^3$, զոր բառնալով նախորդ մնացորդէն, կ'ունենամք $-2ա^2բ^2+3աբ^3-բ^4$։ Այս մնացորդը կը պարունակէ քանորդին անծանօթ եզերաց բաժանարարին եզերօք բազմապատկութեան արտադրեալը. մնացորդին $-2ա^2բ^2$ առաջին եզրը բաժանարարին $2ա^2$ առաջին եզրով կը բաժնեմք և կ'ընդունիմք $-բ^2$. յետոյ $2ա^2-3աբ+բ^2$ բաժանարարը բազմապատկելով $-բ^2$ով և ստացուած $-2ա^2բ^2+3աբ^3-բ^4$ արտադրեալը երկրորդ մնացորդէն հանելով զրօ կ'ունենամք։ Ուրեմն $4ա^4-9ա^2բ^2+6աբ^3-բ^4$ բաժանելւոյն $2ա^2-3աբ+բ^2$ բաժանարարով բաժանման քանորդն է $2ա^2+3աբ-բ^2$ բազմեզրն, և սորա ու բաժանարարին արտադրեալն հաւասար է առաջարկեալ բաժանելւոյն։

Ուստի կը հետեւի

48. ԿԱՆՈՆ. — *Նախ երկու առաջարկեալ բազմեզրերը դասաւորելու է իրենց հասարակ եղած գրերին միոյն նկատմամբ. յետոյ բաժանելւոյն առաջին եզրը բաժանարարին առաջին եզրով*

բաժնելու է. ասով քանորդին առաջին եզրը կ'ունենամք՝ որ + կամ — նշանով է, ըստ այնմ զի եզերաց նախադաս նշանք նման կամ հակառակ են։ Այս բաժանելիէն բառնալու է բաժանարարին եւ քանորդին առաջին եզրով բազմապատկութեան արտադրեալը։ Ասկէ վերջ մնացորդը դարձեալ բաժնելու է բաժանարարով. արդիւնքը քանորդին երկրորդ եզրն է + կամ — նշանով ըստ նախորդ նշանաց եզերացն. յետոյ քանորդին այս երկրորդ եզրն ալ բաժանարարով բազմապատկելով բառնալու է այս երկրորդ բաժանելիէն, եւ այսպէս շարունակելու է գործողութիւնը մինչեւ որ մնացորդնիս ըլլայ զրօ։

Նշանաց կանոնը հետեւեալ կերպով կ'ամփոփեմք.

1°. Եթէ բաժանելին եւ բաժանարարը + նշանօք են, քանորդը եւս + նշանով է։ 2°. Եթէ բաժանելին + նշանով եւ բաժանարարը — նշանով է, քանորդն — նշան ունի։ 3°. Եթէ բաժանելին — նշանով եւ բաժանարարը + նշանով է, քանորդը — նշանով է։ 4°. Եթէ բաժանելին եւ բաժանարարը — նշանօք են, քանորդը + նշանով է։

Այս կանոնը աւելի դիւրաւ ըմբռնելու համար հարկ է ուշ դնել հետեւեալ աղիւսակին։

$$+ա:+բ=+\frac{ա}{բ}$$

$$+ա:-բ=-\frac{ա}{բ}$$

$$-ա:+բ=-\frac{ա}{բ}$$

$$-ա:-բ=+\frac{ա}{բ}$$

49. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ Ա. — Հանրահաշուական բաժանման մէջ, ինչպէս թուոց բաժանման համար կ'ընեմք, բաժանարարը բաժանելւոյն աջ կողմը կը դրուի ուղղագծով մը զատուած, քանորդը բաժանարարին տակ կը դրուի. ինչպէս հետեւեալ գործողութիւնը եւս կը ցուցնէ։

	Բաժանելի	Բաժանարար
	$4ա^4-9ա^2բ^2+6աբ^3-բ^4$	$2ա^2-3աբ+բ^2$
	$-4ա^4+6ա^3բ-2ա^2բ^2$	$2ա^2+3աբ-բ^2$
1· Մնացորդ	$6ա^3բ-11ա^2բ^2+6աբ^3$	Քանորդ
	$-6ա^3բ+9ա^2բ^2-3աբ^3$	
2· Մնացորդ	$-2ա^2բ^2+3աբ^3-բ^4$	
	$2ա^2բ^2-3աբ^3+բ^4$	
3· Մնացորդ	0	

Բաժանման գործողութիւնը կրնայ աւելի համառօտել, եթէ բարձումը մտօք կատարեմք և մնացորդներն միայն գրեմք . ինչպէս

Բաժանելի	$ք^5+6ք^4+6ք^3+6ք^2+ք+1$	$ք^2+ք+1$ բաժանարար
1· Մնացորդ	$5ք^4+5ք^3+6ք^2+ք+1$	$ք^3+5ք^2+1$ քանորդ
2· Մնացորդ	$ք^2+ք+1$	
	0	

50. ՑԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ Բ· — *Երկու բազմեղերց իրարմով բաժանականութեան պայմանք երեք են .*

1° *Բաժանելւոյն առաջին եզրը, բաժանարարին առաջին եզրով և բաժանելւոյն յետին եզրը բաժանարարին յետին եզրով բաժանական ըլլալու է .*

2° *Իւրաքանչիւր մնացորդին առաջին եզրը բաժանարարին առաջին եզրով բաժանական ըլլալու է · քանզի մնացորդին առաջին եզրը բաժանարարին առաջին եզեր՝ քանորդին ստացուելիք եզրով բազմապատկութեան արտադրեալն է .*

3° *Այլեւայլ մասնական բաժանումներ յաջորդաբար կատարելէ վերջ, քանորդէն այնպիսի եզր մ'ունենալու է որ բաժանարարով բազմապատկուելով մասնական բաժանելին յառաջ բերէ · որովհետեւ պէտք է որ մնացորդն զրօ ըլլայ :*

Այս պայմանները հարկաւոր են, և եթէ մին ինուցանէ պակասի բաժանումը անհնար կ'ըլլայ, բազմեղեր ձեւով քանորդ չենք կրնար ունենալ :

Այս պայմանները բաւական են, քանզի այս կերպով անանկ բազմեղը մը կ'ընդունիմք, որ բաժանարարով բազմապատկուելով՝ բաժանելին յառաջ կը բերէ :

51. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Ա· — *Երբ Ք ով ամբողջ բազմեղը մը ք ին նուազող կարողութեամբ դասաւորեալ է, այս բազմեղեր ք—ա երկեզրով բաժանման մնացորդը ընդունելու համար ք՝ ա ով կը ներկայացնեմք .*

Ինչպէս (ք—ա) բաժանարարը առաջին աստիճանի ըլլալով՝ բաժանելին այս բաժանարարով կրնամք բաժնել, մինչեւ որ մնացորդը իր աստիճանէն փոքր ըլլայ, այսինքն ք չունենայ . ուրեմն դիցուք բաժանելին Ք . ամբողջ քանորդը Ո և բաժանման մնացորդը Մ . հետեւեալ տարազը ունիմք ըստ դրութեան

$$Ք=(ք-ա)Ո+Մ$$

Այս հաւասարութիւնը միշտ կ'ունենամք ք ին ինչ արժէք որ տրուի . քանզի երբ (ք—ա)ը Ո ով բազմապատկեմք և արտադրելւոյն վրայ Մ գումարեմք՝ նոյն Ք բազմեղը պիտի ընդունիմք, առանց ք մասնաւոր արժէք մ'ունենալու . ուրեմն կրնամք ենթադրել ք=ա, որդ այս դրութեամբ (ք—ա) Ո արտադրեալը կ'ոչնչանայ · բայց Մ իր մէջ ք չպարունակելուն համար արժէքը չփոխեր, ուստի եթէ Քա ով նշանակեմք Ք բազմեղեր առած արժէքը երբ ք՝ ա ի փոխեմք · վերի հաւասարութիւնը հետեւեալ պարզ ձեւոյն կը վերածի

$$Ք_ա=Մ$$

ինչ որ կ'ուզէինք հաստատել :

52. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ · 1° *Երբ Ք ով բազմեղը ք՝ ա ի փոխելով կ'ոչնչանայ այս բազմեղը ք—ա ով բաժանական է ·*

քանզի գրութեամբ ք=ա ոչինչ ըլլալով բաժանման Մ մնացորդը նաեւ ոչինչ կ'ըլլայ ։

2°. Երբ ք ով բազմեգր մը ք—ա ով բաժանական է այս բազմեգրը զրոյի կը վերածի․ եթէ ք գիրը ա ի փոխենք, քանզի Մ մնացորդը գրութեամբ ոչինչ է ։ Այսպէս ք ով ամբողջ բազմեգր մը ք—ա ով բաժանական ըլլալու համար բաւական է որ ք ա ի փոխելով բազմեգրը զրոյի վերածուի ։

Նախընթաց տեսութիւնը շատ պիտանի է․ ուստի ելած հետեւութիւնք են (տալիք օրինակացս մէջ մ ամբողջ թիւ մ'է) ։

1°. $(ք^{մ}—ա^{մ})$ միշտ (ք—ա) ով բաժանական է․ քանզի ք՝ ա ի փոխուելով այս բազմեգրը կ'ոչնչանայ ։

2°. $(ք^{մ}+ա^{մ})$ ամենեւին (ք—ա) ով չբաժնուիր․ քանզի բաժանելոյն մէջ ք ա ի փոխուելով $2ա^{մ}$ մնացորդը կ'ունենամք․

3°. $(ք^{մ}—ա^{մ})$ բազմեգրը (ք+ա) ով բաժանական է․ երբ մ զոյգ թիւ մ'է․ եթէ անզոյգ ըլլար չպիտի բաժնուէր․ քանզի առաջարկեալ բազմեգրը՝ (ք+ա) ով բաժնել ըսելը [ք—(—ա)] ով բաժնել ըսել է․ ուրեմն բաժանման մնացորդը առնալու համար (—ա)ը ք ի փոխել պէտք է․ արդ $(—ա)^{մ}$ հաւասար է $ա^{մ}$ ի, որովհետեւ մ զոյգ թիւ մ'է․ եթէ մ անզոյգ ըլլար $(—ա)^{մ}$ հաւասար պիտի ըլլար $—ա^{մ}$ ի․ ուրեմն բաժանման մնացորդը առաջին պարագային մէջ զրօ, իսկ երկրորդին մէջ $—2ա^{մ}$ է ։

4°. $(ք^{մ}+ա^{մ})$ը (ք+ա) ով կը բաժնուի երբ մ անզոյգ ըլլայ եւ չբաժնուիր երբ մ զոյգ ըլլայ, քանզի (—ա)ը ք ի փոխելով, բաժանելին կ'ըլլայ $[(—ա)^{մ}+ա^{մ}]$․ երբ մ անզոյգ ըլլայ բաժանելին կ'ոչնչանայ․ երբ զոյգ ըլլայ բաժանելին $2ա^{մ}$ի կը վերածուի ։

Ահաւասիկ բաժանման վերայ նշանաւոր օրինակ մը, որոյ վերայ վերի օրինակաց գործողութիւնները պիտի կատարեմք ։

Բաժանելի

$$Ա_0ք^{մ}+Ա_1ք^{մ-1}+Ա_2ք^{մ-2}+\cdots+Ա_{մ-2}ք^2+Ա_{մ-1}ք+Ա_{մ} \;\Big|\; ք—ա \quad \text{Բաժանարար}$$

$$Ա_0ք^{մ-1}+\left.\begin{matrix}Ա_0ա\\+Ա_1\end{matrix}\right|ք^{մ-2}+ա..$$

$$1.\,\text{Մնց}\left\{\begin{matrix}Ա_0ա\\+Ա_1\end{matrix}\right|ք^{մ-1}+Ա_2ք^{մ-2}\cdots+Ա_{մ-2}ք^2+Ա_{մ-1}ք+Ա_{մ}$$

$$2.\,\text{Մնց.}\left\{\begin{matrix}Ա_0ա^2\\+Ա_1ա\\+Ա_2\end{matrix}\right|ք^{մ-2}+Ա_{մ-2}ք^2+Ա_{մ-1}ք+Ա_{մ}$$

Քանորդին առաջին եզրը $Ա_0ք^{մ-1}$ է․ բաժանարարը այս եզրով բազմապատկելէն յետոյ, արտադրեալը բաժանելիէն կը բառնամք, եւ կ'ընդունիմք առաջին մնացորդը․ որոյ առաջին եզրն է $(Ա_0ա+Ա_1)ք^{մ-1}$, եւ որոյ միւս եզերք բաժանելոյն մնացեալ եզերք են ։

Քանորդին երկրորդ եզրը $(Ա_0ա+Ա_1)ք^{մ-1}$ է․ երկրորդ մնացորդին առաջին եզրը ընդունելու համար, քանորդին առաջին եզրը ա ով բազմապատկելու է եւ բաժանելոյն երրորդ եզրը վերան յաւելցնելու է․ այս կերպով կ'առնամք $(Ա_0ա^2+Ա_1ա+Ա_2)ք^{մ-2}$ առաջին եզրը բաժանման երկրորդ մնացորդին, հետեւաբար քանորդին երկրորդ եզրն է $(Ա_0ա^2+Ա_1ա+Ա_2)ք^{մ-2}$․ գործողութիւնք այս կերպով շարունակուելու են․ ուստի կը հետեւի

53. ԿԱՆՈՆ․ —․ ք ով մրդ. աստիճանի ամբողջ բազմեգր մը ք—ա ով բաժանման քանորդը՝ (մ—1) կարողութեամբ բազմեգր մ'է․ այս բազմեգրը ք ին նուազմամբ առաջարկեալ բազմեգեր սկս դասաւորեալ է․ առաջին եզեր համարտադրիչը բաժանելոյն առաջին եզեր համարտադրիչն է ։ Երկրորդ եզեր համարտադրիչը ընդունելու համար, առաջինը ա ով բազմապատկելու է եւ արտադրեալն վերայ բաժանելոյն երկրորդ եզեր համարտադրիչը յաւելցնելու է ։ Երրորդ եզեր համարտադրիչը ընդունելու համար նոր ընդունուած եզեր համարտադրիչը ա ով բազմապատկելով բաժանելոյն երրորդ եզեր վերայ յաւելցնելու է․ ընդհանրապէս Նրդ. եզեր համարտադրիչը՝ նախորդ եզեր համարտադրիչն ա ով բազմապա-

կոչմեան արտադրեալն է։ Եթէ բաժանելին ամբողջ բազմանդամ չէ պակաս եզրերը լեցնելու է եւ այս եզերաց համարատարիչը զրօ սեպելու է։

ՕՐԻՆԱԿ. Գտնել $3x^5-4x^4-2x^2+7$ բազմեղեր $(x-2)$ով բաժանման քանորդը և մնացորդը։

Բաժանելին կը գրեմք այսպէս

$$3x^5-4x^4-2x^2+7$$

Բաժանման գործողութիւնը կատարելով ստացուած քանորդն է $3x^4+2x^3+4x^2+6x+12$ և մնացորդն 31։

Եթէ վերը գրուած օրինակաց գործողութիւնները նախընթաց կանոնով կատարեմք պիտի գտնեմք

1. $\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\dots+a^{m-3}x^2+a^{m-2}x+a^{m-1}$.

2. $\frac{x^m+a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\dots+a^{m-3}x^2+a^{m-2}x+a^{m-1}+\frac{2a^m}{x-a}$

3. $\frac{x^m-a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\dots-a^{m-3}x^2+a^{m-2}x-a^{m-1}$,

եթէ m զոյգ է.

4. $\frac{x^m+a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\dots+a^{m-3}x^2-a^{m-2}x+a^{m-1}$,

եթէ m անզոյգ է.

և $\frac{x^m+a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\dots-a^{m-3}x^2+a^{m-2}x-a^{m-1}+\frac{2a^m}{x+a}$

եթէ m զոյգ թիւ մ'է։

54. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Բ. — Երբ xով ամբողջ Ա բազմեղը $(x-a)$ով $(x-b)$ով զատ զատ բաժանական է, սոցա արտադրեալով եւս բաժանական է։

Արդարեւ $x=a$ ըլլալով՝ Ա բազմեղը զրոյի կը վերածուի ըստ նախընթաց տեսութեան. եթէ բաժանման քանորդը Ո սեպենք

$$\text{Ա} = (x-a)\,\text{Ո}\,:$$

xին արժէքը ինչ որ ալ ըլլայ, այս հաւասարութիւնը չփոխուիր, ուրեմն կրնամք սեպել $x=b$։ Եթէ այս դրութեան մէջ Ոին արժէքը Ո_b սեպենք վերի հաւասարութիւնը կ'ըլլայ

$$0 = (b-a)\,\text{Ո}_b\,:$$

Արդ $(b-a)$ տարբերութիւնը ոչինչ չէ դրութեամբ. ուրեմն $\text{Ո}_b=0$. Ո բաժանական է $(x-b)$ով ըստ (**52**) տեսութեան. քանորդը Ո'ով ներկայացնելով ունիմք

$$\text{Ո} = (x-b)\,\text{Ո}'.$$

և հետեւաբար

$$\text{Ա} = (x-a)(x-b)\,\text{Ո}'\,:$$

Այս հաւասարութենէ յայտնի կը տեսնուի թէ Ա բաժանական է $(x-a)(x-b)$ արտադրեալով։

ՎԱՐԺՈՒԹԻՒՆՔ

1. Բաժնել $a^2+b^2+c^3-2ab-2ac+2bc$ բազմեղը $a-b-c$ եռեղով։ Պատ. $a-b-c$։

2. Բաժնել $a^5-a^4b-4a^3b^2-a^3+4a^2b^3+6a^2b-a^2+4ab^2-2ab-3b+1$ բազմեղը $a^2+2ab-1$ եռեղով։
Պատ. $a^3-3a^2b+2ab+3b-1$։

3. Բաժնել $32x^5+243$ երկեղը $2x+3$ երկեղով.

4. Հետեւեալ բազմեղերը երկեղերով բաժանման մնացորդը գտնել առանց բաժանման քանորդը փնտռելու։

$3a^3+5a^2-6a$ բազմեղեր $a-1$ երկեղով.

$6a^4-3a^3b+2a^2b^2-4ab^3+b^4$ բազմեղեր $(a+b)$ երկեղով։

a^5+1 երկեղեր $a-1$ երկեղով։

5. Բաժնել $33ab+18a^2-12ad-30b^2+42ac+124bc+8bd-16c^2-32cd$ բազմեղը $6a+15b-2c-4d$ բազմեղով։
Պատ. $3a-2b+8c$։

6․ Բաժնել $8աք^3+15ք^4−4ք^3+7աք^2+10ք^2+2ա^2ք^2+2աք−33ք+8ա^2ք+ա^3ք−2ա^4+24ա−72−3ա^3+25ա^2$ բազմեզրը $ք+3ք^2+աք+8−ա^2$ բազմեզրով: Պատ. $5ք^2+(ա−3)ք+(2ա^2+3ա−9)$:

7․ Բաժնել $−ք^5+(ա−1)ք^4+(ա−1)ք^3+(ա−1)ք^2+ա^2$ բազմեզրը $−ք+1$ երկեզրով:

8. Գիտնալ թէ ե՞րբ $ք^մ−ա^մ$ բաժանական է $(ք−ա)$ երկեզրով:
Պատ. մ բաժանական ըլլալու է 2 ով:

9. Ցուցնել եթէ մ անզոյգ է, որ $ք^{2մ}+2ք^մբ^մ+բ^{2մ}$ բաժանական է $(ք+բ)^2$ ով:

10․ Ի՞նչ թուոյ փոխանակելու ենք $ա^4+նա^2բ^2+բ^4$ բազմեզեր համարտադրիչը որպէս զի այս բազմեզրը՝ $ա^2−աբ+բ^2$ եռեզրով բաժանական ըլլայ: Պատ. $ն=1$:

ԴԱՍ Ե․

ՀԱՆՐԱՀԱՇՈՒԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՔ

55. ՍԱՀՄԱՆ․ — Երկու քանակութեանց բաժանման քանորդը հանրահաշուական կոտորակ կ'ըսուի․ այս կոտորակաց չորս գործողութիւնք թուաբանական կոտորակաց չորս գործողութեանց պէս են:

56. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Ա․ — *Երբ $\frac{գ}{դ}$ կոտորակին երկու եզրերը միևնոյն թուով բազմապատկեմք կամ բաժնեմք, կոտորակը իւր արժէքը չփոխեր:*

Զոր օրինակ $\frac{գ}{դ}$ կոտորակը՝ գ համարիչին դ յայտարարով բաժանման քանորդն է․ ուստի կը հետևի

$$\left(\frac{գ}{դ}\right)դ=գ:$$

Եթէ այս հաւասարութեան երկու անդամները մով բազմապատկեմք, կ'ստանամք

$$\left(\frac{գ}{դ}\right)դմ=գմ$$

հաւասարութիւնը, որոյ երկու անդամները դմ արտադրեալով բաժնելով կ'ունենամք $\frac{գ}{դ}=\frac{գմ}{դմ}$:

Եթէ $\frac{գմ}{դմ}$ կոտորակին երկու եզրերը մով բաժնեմք $\frac{գ}{դ}$ կոտորակը կստանամք․ և եթէ նոյն կոտորակին երկու եզրերը մով բազմապատկեմք $\frac{գմ}{դմ}$ կոտորակը կ'ստանամք:

57. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ․ Կոտորակի մը եզրերը իրենց թուաւոր կամ հանրահաշուական հասարակ արտադրչօք բաժնելով, կոտորակը իւր ամենապարզ ձևոյն կը վերածուի:

Առնեմք $\frac{8ա^5բ^5−72ա^3բ^7}{10ա^5բ^5−30ա^4բ^6}$ կոտորակը և պարզենք․

Այս կոտորակին երկու եզերաց հասարակ արտադրիչք են $8ա^3բ^5$ համարչին մէջ և $10ա^4բ^5$ յայտարարին մէջ. հետևաբար կը գրեմք

$$\frac{8ա^3բ^5(ա^2−9բ^2)}{10ա^4բ^5(ա−3բ)},$$

որոյ երկու եզրերը $2ա^3բ^5$ արտադրեալով բաժնելով կ'ըստանամք $\frac{4(ա^2−9բ^2)}{5ա(ա−3բ)}$ պարզուած կոտորակը:

Այս ստացուած կոտորակին մէջ կը տեսնեմք որ $ա^2−9բ^2$ երկեզրը՝ երկու քառակուսիներու տարբերութիւնն է․ հետևաբար հաւասար է $(ա+3բ)(ա−3բ)$ արտադրելոյ․ ուստի համարիչը և յայտարարը $(ա−3բ)$ երկեզրով բաժնելով կ'ունենամք $\frac{4(ա+3բ)}{5ա}$ ամենապարզ ձևը:

Կոտորակ մը պարզելու համար իւր երկու եզերաց մեծագոյն հասարակ բաժանարարը պէտք էր գտնել, բայց առ այժմ անպատեհ կը սեպենք այս գործողու-

թիւնները դի բարձրագոյն հանրահաշուոյ կը վերաբերին։

58. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ Բ. — *Այլեւայլ կոտորակներ հաւասարակ յայտարարի վերածելու համար, կոտորակին իւրաքանչիւր երկու եզրը միւս յայտարարներուն արտադրեալով կրնամք բազմապատկել։*

Զոր օրինակ. ունենամք

$$\frac{ա^2}{3բ^2},\quad \frac{ա-բ}{4(ա+բ)},\quad \frac{ա+բ}{8(ա-բ)},\quad \frac{(ա^2+բ^2)}{12(ա^2-բ^2)}$$ կոտորակները։

Գիտեմք որ $(ա+բ)$, $(ա-բ)$ երկեզերաց արտադրեալը $ա^2-բ^2$ է, առաջարկեալ կոտորակաց յայտարարներուն փոքրագոյն բաժանելին $24բ^2(ա^2-բ^2)$ է. հետեւաբար կոտորակաց յայտարարները $24բ^2(ա^2-բ^2)$ի վերածելու համար, կոտորակաց իւրաքանչիւր յայտարարով $24բ^2(ա^2-բ^2)$ը կը բաժնեմք և բաժանման քանորդով իւրաքանչիւր կոտորակաց երկու եզրերը կը բազմապատկեմք և կ՚ստանամք հետեւեալ նոր կոտորակները.

$$\frac{8ա^2(ա^2-բ^2)}{24բ^2(ա^2-բ^2)},\quad \frac{6բ^2(ա-բ)^2}{24բ^2(ա^2-բ^2)},\quad \frac{3բ^2(ա+բ)^2}{24բ^2(ա^2-բ^2)}\quad և\quad \frac{2բ^2(ա^2+բ^2)^3}{24բ^2(ա^2-բ^2)}$$

որք առաջարկեալ կոտորակաց հետ նոյն են և հաւասարակ յայտարար ունին։

Յաւելում

59. Գումարելու է հաւասարակ յայտարար ունեցող հետեւեալ $\frac{ա}{ե}+\frac{բ}{ե}+\frac{գ}{ե}+\frac{դ}{ե}$ կոտորակները։

Բազմեզեր մը միեզրով բաժանման կանոնէն գիտեմք արդէն

$$\frac{ա}{ե}+\frac{բ}{ե}+\frac{գ}{ե}+\frac{դ}{ե}=\frac{ա+բ+գ+դ}{ե}$$

ուստի կը հետեւի

60. ԿԱՆՈՆ. — *Այլեւայլ կոտորակաց յաւելումը կատարելու համար, նախ հաւասարակ յայտարարի վերածելու է եթէ հարկ կայ, եւ ապա համարիչաց գումարը հաւասարակ յայտարարով բաժնելու է։*

Բարձում

61. Բառնալու է $\frac{բ}{ե}$ կոտորակէն $\frac{ա}{ե}$ կոտորակը. բարձման մնացորդն է $\frac{ա-բ}{ե}$. քանզի եթէ այս տարբերութեան վրայ $\frac{ա}{ե}$ կոտորակը յաւելումք կ՚ստանամք $\frac{բ}{ե}$ կոտորակը. ուստի կը հետեւի

62. ԿԱՆՈՆ. — *Կոտորակ մը ուրիշ կոտորակէ մը բառնալու համար, նախ հաւասարակ յայտարարի վերածելու, ապա համարիչաց տարբերութիւնը հաւասարակ յայտարարով բաժնելու է։*

Բազմապատկութիւն

63. Բազմապատկելու է $\frac{ա}{բ}$ կոտորակը՝ $\frac{գ}{դ}$ կոտորակով. ըստ (**56**) տեսութեան ունիմք

$$\left(\frac{ա}{բ}\right)բ=ա$$

$$\left(\frac{գ}{դ}\right)դ=գ$$

զորս անդամ առ անդամ բազմապատկելով ունիմք $\left(\frac{ա}{բ}\right)$

$\left(\frac{գ}{դ}\right)բդ=ագ$ կամ որ նոյնն է $\left(\frac{ա}{բ}\right)\left(\frac{գ}{դ}\right)=\frac{ագ}{բդ}$.

ուստի կը հետեւի

64. ԿԱՆՈՆ. — *Կոտորակ մը ուրիշ կոտորակով բազմապատկելու համար, համարիչաց արտադրեալը՝ յայտարարներուն արտադրեալով բաժնելու է։*

Բաժանում

65. Բաժնելու է $\frac{ա}{բ}$ կոտորակը՝ $\frac{գ}{դ}$ կոտորակով, քանորդն է $\frac{ա}{բ}\times\frac{դ}{գ}=\frac{ադ}{բգ}$. քանզի եթէ $\frac{ադ}{բգ}$ քանակութիւնը՝ $\frac{գ}{դ}$ բաժանարարով բազմապատկեմք $\frac{ա}{բ}$ արտադրեալը, այսինքն առաջարկեալ բաժանելին կ'ստանամք. ուստի կը հետեւի

66. ԿԱՆՈՆ. — *Կոտորակ մը ուրիշ կոտորակով բաժնելու համար, բաժանելի կոտորակը՝ շրջուած բաժանարար կոտորակով բազմապատկելու է:*

67. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Բ. — *Եթէ $\frac{ա}{բ}, \frac{ա'}{բ'}, \frac{ա''}{բ''} \dots$ այլեւայլ կոտորակք իրարու հաւասար են, համարիչաց գումարը յայտարարներուն գումարով բաժնելով՝ առաջարկեալ կոտորակաց հաւասար կոտորակ մը կ'ստանամք.*

Գտնեմք ւ այս կոտորակաց հասարակ արժէքը. հետեւաբար պիտի ունենամք

$$ա=բւ,\quad ա'=բ'ւ,\quad ա''=բ''ւ$$

Այս հաւասարութիւնները անդամ առ անդամ գումարելով և երկրորդ անդամին մէջ ւ հասարակ արտադրիչ գտնելով ունիմք $ա+ա'+ա''+\dots=(բ+բ'+բ''+\dots)ւ$ այս հաւասարութեան երկու անդամները $(բ+բ'+բ''+\dots)$ բաժնելով կ'ստանամք

$$\frac{ա+ա'+ա''+\dots}{բ+բ'+բ''+\dots}=ւ=\frac{ա}{բ}$$

ինչ որ կ'ուզէինք հաստատել:

68. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ. Կոտորակաց գումարը կատարե-

լէ յառաջ, իւրեանց երկու եզրերը միեւնոյն մ թուով կրնանք բազմապատկել այսպէս

$$\frac{ա}{բ}=\frac{ամ}{բմ},\ \frac{ա'}{բ'}=\frac{ա'մ}{բ'մ},\ \frac{ա''}{բ''}=\frac{ա''մ}{բ''մ}$$

կոտորակաց արժէքները չեն փոխուած. ուստի կը հետեւի

$$\frac{ամ+ա'մ+ա''մ+\dots}{բմ+բ'մ+բ''մ+\dots}=\frac{ամ}{բմ}=\frac{ա}{բ}:$$

Այս ծանօթութիւնը շատ կարեւոր է հաւասարութեանց լուծմանց մէջ:

69. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Գ. — *Եթէ դրական եզերօք այլեւայլ կոտորակք անհաւասար են, սոցա համարիչաց գումարը յայտարարներուն գումարով բաժնելով ուրիշ կոտորակ մը կ'ընդունեմք, որոյ արժէքը առաջարկեալ կոտորակաց ամենամեծ եւ ամենափոքր արժէից մէջ կը գտնուի:*

Զոր օրինակ $\frac{ա}{բ}<\frac{ա'}{բ'}<\frac{ա''}{բ''}<\frac{ա'''}{բ'''}$:

Եթէ գտնեմք $\frac{ա}{բ}=ւ$ ուստի $ա=բւ$. հետեւաբար $ա'>բ'ւ$. $ա''>բ''ւ$. $ա'''>բ'''ւ$:

Այս անհաւասարութիւնները անդամ առ անդամ գումարելով կ'ստանամք

$$ա+ա'+ա''+ա'''>(բ+բ'+բ''+բ''')ւ.$$

հետեւաբար $\frac{ա+ա'+ա''+ա'''}{բ+բ'+բ''+բ'''}>ւ$ կամ $\frac{ա+ա'+ա''+ա'''}{բ+բ'+բ''+բ'''}>\frac{ա}{բ}$

Եթէ գտնեմք $\frac{ա'''}{բ'''}=ւ$. ուստի $ա'''=բ'''ւ$.

հետեւաբար կ'ունենամք

$$ա''<բ''ւ,\ ա'<բ'ւ \text{ և } ա<բւ$$

զորս անդամ առ անդամ գումարելով կ'ստանամք

$$ա+ա'+ա''+ա'''<(բ+բ'+բ''+բ''')ւ.$$

ուստի կը հետեւցնեմք

$$\frac{ա+ա'+ա''+ա'''}{բ+բ'+բ''+բ'''}<ւ \quad \text{կամ} \quad \frac{ա+ա'+ա''+ա'''}{բ+բ'+բ''+բ'''}<\frac{ա'''}{բ'''}$$

ինչ որ կ'ուզէինք հաստատել։

ՎԱՐԺՈՒԹԻՒՆՔ

1. Գումարելու է հետեւեալ կոտորակները.

$$\frac{ա}{ա+բ}, \quad \frac{ա}{ա-բ}, \quad \text{և} \quad \frac{գ^2-2ա^2}{ա^2-բ^2}.$$

2. Բաժնելու է $\frac{ա+բ}{ա^3-բ^3}$ կոտորակէն $\frac{1}{ա^2-բ^2}$ կոտորակը, և $\frac{ա+բ}{ա-բ}$ կոտորակէն $\frac{ա-բ}{ա+բ}$ կոտորակը։

5. Վերածելու է հետեւեալ կոտորակները իրենց ամենապարզ ձեւոյն.

$$\frac{3ա-4բ}{7}-\frac{2ա-բ-գ}{3}+\frac{15ա-4գ}{12}$$

Պատ. $\frac{85ա-20բ}{84}$։

4. Պարզելու է $\frac{4(ա+բ)}{գ+5դ}\left(\frac{գ+դ}{4}-\frac{գ-դ}{6}\right)$ կոտորակը.

Պատ. $\frac{ա+բ}{3}$։

5. Պարզելու է

$$\frac{ա-\frac{ագ(1-բ)}{գ+ա^2բ}}{1+\frac{ա^2(1-բ)}{գ+ա^2բ}}$$ կոտորակը.

Պատ. $աբ$.

6. Պարզելու է $\frac{1-ա^2}{(1+ախ)^2-(ա+խ)^2}$ կոտորակը.

Պատ. $\frac{1}{1-խ^2}$։

7. Ստուգելու է $\frac{\frac{գ}{ա+բ}-\frac{գ}{ա+2բ}}{\frac{գ}{ա+2բ}-\frac{գ}{ա+3բ}}=\frac{\frac{գ}{ա+բ}}{\frac{գ}{ա+3բ}}$ հաւասարութիւնը.

8. Պարզելու է $\frac{ն^3-2ն^2}{ն^2-4ն+4}$ կոտորակը.

Պատ. $\frac{ն^2}{ն-2}$։

9. Պարզելու է $\frac{խ^2-3խյ+խզ+2յ^2-2յզ}{խ^2-յ^2+2յզ-զ^2}$ կոտորակը.

Պատ. $\frac{խ-2յ}{խ^2+յ-զ}$։

10. Պարզելու է $\frac{8խ^3-10խ^2-16խ-3}{6խ^4-22խ^3+31խ^2-23խ-7}$ կոտորակը.

Պատ. $\frac{4խ+3}{3խ^2-5խ+7}$։

ԴԱՍ Զ·

ՀԱՆՐԱՀԱՇՈՒԱԿԱՆ ԱՐՄԱՏԱԿԱՆՔ

70. ՍԱՀՄԱՆՔ. — Երբ ուզենք մի միեզրը՝ նրդ կարողութեան հանել, իւր համարտադրիչը նրդ կարողութեան կը հանեմք և նով կը բազմապատկեմք միեզեր բոլոր ցուցիչները։ Հետեւաբար միեզեր համարտադրիչը նրդ կատարեալ կարողութիւն մ'է. և եթէ իւր ցուցիչները նի բազմապատիկներ են, այս միեզեր նրդ արմատը գտնելու համար նախ համարտադրչին նրդ արմատը կը գտնեմք և ապա միեզեր ցուցիչները նով կը

բաժնեմք. զոր օրինակ ունենամք հետեւեալ միեզրը

$$\sqrt[ն]{գ^{ն} ա^{4ն} բ^{3ն} դ^{ն}} = գ ա^{4} բ^{3} դ .$$

Ընդհանրապէս ամեն միեզր արմատաւոր չէ. այսինքն իւր ն-րդ արմատը ճշդութեամբ մի միեզր չէ, այս պարագայիս մէջ միեզրը յատուկ նշանով մի կը ներկայացնեմք, ինչպէս $\sqrt[ն]{Ա}$. որ կը ցուցնէ թիւ մը, որոյ ն-րդ կարողութիւնը հաւասար է Ա-ի. այս թիւը արմատական կ'ըսուի. ն արմատականի որոշիչ. նմանապէս $\sqrt[ն]{\ }$ եւս արմատական կը կոչուի:

31. $\sqrt[ն]{Ա}$ ԻՆ ԱՅԼԵՒԱՅԼ ԱՐԺԷՔՆԵՐԸ. — *Եթէ թիւերը դրական ըլլային $\sqrt[ն]{Ա}$-ի արժէքը եւս մի և որոշ պիտի ըլլար. բայց հանրահաշուոյ մէջ թուոց բացասական արժէքներ եւս կ'ուտան աւելի ընդարձակ իմաստներ ունենալու համար: Հետեւեալ պարագաները նկատողութեան պիտի առնեմք:*

1° Եթէ Ա դրական, և ն զոյգ ըլլայ, Ա ին ն-րդ արմատը երկու արժէք ունի հաւասար և հակառակ նշանով. որովհետեւ եթէ $\sqrt[ն]{Ա}$ թիւը ն-րդ կարողութեան հանեմք, իւր նախադաս նշանը ինչ որ ալ ըլլայ միշտ Ա կ'առնամք. որովհետեւ զոյգ թուով բացասական արտադրչաց բազմապատկութեան արտադրեալը դրական է. զոր օրինակ $\sqrt{9}$ թուոյ արմատք են -3 և $+3$. որովհետեւ այս երկու թուոց քառակուսին 9 է:

2° Եթէ Ա դրական և ն անզոյգ թիւ մ'է, առ այժմ $\sqrt[ն]{Ա}$ թուաբանութեան տուած նշանակութենէ աւելի հանրական չկարեմք տալ. այսպէս $\sqrt[3]{27}=3$:

3° Եթէ Ա բացասական և ն զոյգ թիւ մ'է, $\sqrt[ն]{Ա}$

դրական և կամ բացասական ոչ մէկ թիւ մ'է, վասն զի դրական և բացասական թուոյ մը զոյգ կարողութիւնը միշտ դրական է: Այս պարագայիս մէջ $\sqrt[ն]{Ա}$ ին արմատը երեւակայական է կ'ըսուի:

4° Եթէ Ա բացասական և ն անզոյգ թիւ մ'է. դիցուք $Ա = -Ա'$. հետեւաբար $\sqrt[ն]{Ա}=\sqrt[ն]{-Ա'}=-\sqrt[ն]{Ա'}$, որովհետեւ ն անզոյգ ըլլալով $-\sqrt[ն]{Ա'}$ ին ն-րդ կարողութիւնը պիտի ըլլայ $-Ա'$ կամ Ա: Այսպէս $\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{27}=-3$. որովհետեւ -3 ին խորանարդը -27 է: Այս հանրական տեսութիւնք խիստ կարեւոր են վերջը պիտի տեսնեմք սոցա կարեւորութիւնը:

Արմատականաց փոփոխումը

32. ՍԿԶԲՈՒՆՔ Ա. — *Երբ արմատական մը արտադրիչով մը բազմապատկուած է, այս արտադրիչը արմատականին մէջ անցնելու համար որոշիչին նշանակած կարողութեանը հանելու է. այսպէս.*

$$ա\sqrt[ն]{բ}=\sqrt[ն]{ա^{ն}բ} .$$

Զայս հաստատելու համար $ա\sqrt[ն]{բ}$ և $\sqrt[ն]{ա^{ն}բ}$, ն-րդ կարողութեան կը հանեմք և հաւասար արդիւնքներ կ'առնամք. որովհետեւ ն-րդ արտադրչաց ն-րդ կարողութիւնը հետեւեալ կերպով կ'առնամք

$$(ա\sqrt[ն]{բ})^{ն}=ա^{ն}(\sqrt[ն]{բ})^{ն}=ա^{ն}բ .$$

երկրորդը եւս

$$(\sqrt[ն]{ա^{ն}բ})^{ն}=ա^{ն}բ :$$

Միեւնոյն տարազը յիշեալ սկզբան փոխադարձը կը հաստատէ. այսինքն արմատականի մէջէն դուրս կրնամք հանել արտադրիչ մը երբ որոշիչին նշանակած արմատը գտնենք:

73. ՍԿԶԲՈՒՆՔ Բ. — *Արմատականի մը արժէքը անփոփոխ կը մնայ երբ իր որոշիչը եւ ցուցիչը միեւնոյն թուով բազմապատկեմք։ Այսպէս,*

$$\sqrt[մ]{ա^ն} = \sqrt[մր]{ա^{նր}}:$$

Զայս հաստատելու համար բաւական է $\sqrt[մ]{ա^ն}$ և $\sqrt[մր]{ա^{նր}}$ մրդ կարողութեան հանել, այս կերպով հաւասար արդիւնքներ կ'ստանամք. որովհետեւ երկրորդ ստացուածքը այսինքն $\sqrt[մր]{ա^{նր}}$ մրդ կարողութեան հանելով կ'ստանամք $ա^{նր}$։ Առաջնոյն գալով ունիմք

$$(\sqrt[մ]{ա^ն})^{մր} = \{(\sqrt[մ]{ա^ն})^{մ}\}^{ր} = (ա^ն)^ր = ա^{նր}.$$

ինչպէս կը տեսնուի երկու արդիւնք հաւասար են։

74. ԱՐՄԱՏԱԿԱՆԻ ՊԱՐԶՈՒԹԻՒՆ. — Երբ արմատական նշանը որ եւ իցէ կարողութեան ելած թիւ մը պարունակէ միշտ կրնայ պարզուիլ։

1°. *Եթէ արմատի որոշիչը կարողութեան աստիճանին հաւասար է երկու գործողութիւնք կը ջնջուին. Այսպէս,*

$$\sqrt[մ]{ա^մ} = ա.$$

2°. *Եթէ արմատի որոշիչը եւ կարողութեան ցուցիչք հասարակ արտադրիչ մի ունենան զայն կրնամք ջնջել. Այսպէս*

$$\sqrt[մր]{ա^{նր}} = \sqrt[մ]{ա^ն}.$$

3°. *Եթէ արմատական նշանի տակ արտադրիչ մի գտնուի որոյ ցուցիչը արմատի որոշիչին բազմապատիկը ըլլայ. զայն արմատական նշանէ դուրս կրնամք հանել երբ այս ցուցիչը որոշիչով բաժնեմք. քանզի ունիմք ըստ* **(72)***ի.*

$$\sqrt[մ]{ա^{մր}բ} = ա^ր\sqrt[մ]{բ}.$$

75. ԱՐՄԱՏԱԿԱՆԱՑ ՄԻԵՒՆՈՅՆ ՈՐՈՇԻՉԻ ՎԵՐԱԾՈՒԹԻՒՆ. — Դիցուք երկու արմատականք $\sqrt[մ]{ա^ր}$, $\sqrt[ն]{բ^ս}$. առաջնոյն որոշիչը և ցուցիչը ն-ով այսինքն երկրորդին որոշիչով կրնամք բազմապատկել. յետոյ երկրորդին որոշիչը և ցուցիչը բազմապատկել առաջնոյն մ որոշիչով **(73)** այս կերպով կ'ստանամք. $\sqrt[մն]{ա^{րն}}$ և $\sqrt[մն]{բ^{սմ}}$. այս արմատականք միեւնոյն որոշիչը ունին։

Որեւէ երկու արմատականներ միեւնոյն որոշիչի վերածելու համար իւրաքանչիւրին որոշիչը եւ ցուցիչը միւսոյն որոշիչով բազմապատկելու է։

Նմանապէս այլեւայլ թուով արմատականները միեւնոյն որոշիչի վերածելու համար, իւրաքանչիւրին որոշիչը եւ ցուցիչը միւս արմատականաց որոշիչներուն արտադրեալով բազմապատկելու է։

Այսպէս,

$$\sqrt[մ]{ա^ա},\quad \sqrt[ն]{բ^բ},\quad \sqrt[ր]{գ^գ},\quad \sqrt[ս]{դ^դ}$$

Ըստ նախընթաց կանոնի պիտի ունենամք

$$\sqrt[մնրս]{ա^{անրս}},\quad \sqrt[մնրս]{բ^{բմրս}},\quad \sqrt[մնրս]{գ^{գմնս}},\quad \sqrt[մնրս]{դ^{դմնր}}:$$

Այս կանոնը խիստ շատ նմանութիւն ունի կոտորակաց միեւնոյն յայտարարի վերածման կանոնի հետ։

76. ՅԱՒԵԼՈՒՄ ԵՒ ԲԱՐՁՈՒՄ. — Երկու արմատական քանակութեանց յաւելումը կամ բարձումը կատարելու համար, զայնս + կամ — նշանով կը միացնեմք։

Եթէ արմատականք պարզուած են և միայն որոշիչով կամ արմատական նշանին տակ գտնուած քանակութեամբ կը տարբերին իրենց գումարը կամ տարբերութիւնը պարզելու ենթակայ չէ, ինչպէս հետեւեալ օրինակաց մէջ կը տեսնուի

$$3ա\sqrt{5} + 2բ\sqrt[4]{գ}$$

$$2\sqrt[3]{ա} - 5\sqrt[3]{բ}$$

ընդհակառակն արմատական քանակութիւնք երբ նոյն են, կարելի է մէկ հատ վերածել զայնս։

Ունենամք հետեւեալ ասացուածքը՝

$$3ա\sqrt{2բ}+4ա\sqrt{2բ}-5գ\sqrt{2բ}.$$

որոյ եզերք միեւնոյն արմատականն ունին, կրնամք գրել հետեւեալ ձեւով

$$(7ա-5գ)\sqrt{2բ}\,։$$

37. ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒԹԻՒՆ. — *Միեւնոյն որոշիչը ունեցող արմատականաց արտադրեալը գտնելու համար, արմատական նշանի տակ գտնուած քանակութիւնները կը բազմապատկեմք եւ այս արտադրեալին կ'ուտամք իրենց հասարակ նշանը.*

Այսպէս,

$$\sqrt[ն]{ա}\times\sqrt[ն]{բ}\times\sqrt[ն]{գ}\times\sqrt[ն]{դ}=\sqrt[ն]{աբգդ}.$$

Զայս հաստատելու համար երկու անդամները նրդ կարողութեան հանելով հաւասար արդիւնքներ կ'ստանամք, որովհետեւ երկրորդ անդամին նրդ կարողութիւնը աբգդ է, իսկ առաջին անդամին այսինքն

$$(\sqrt[ն]{ա}\times\sqrt[ն]{բ}\times\sqrt[ն]{գ}\times\sqrt[ն]{դ})^ն=(\sqrt[ն]{ա})^ն(\sqrt[ն]{բ})^ն(\sqrt[ն]{գ})^ն(\sqrt[ն]{դ})^ն=աբգդ.$$

Եթէ արմատականք միեւնոյն որոշիչը չունենային, միեւնոյնի կը վերածէինք վերը տրուած կանոնի միջոցաւ.

Այսպէս,

$$\sqrt[պ]{ա^մ}\times\sqrt[ք]{ա^ն}\times\sqrt[ր]{ա^ս}=\sqrt[պքր]{ա^{մքր}}\times\sqrt[պքր]{ա^{նպր}}\times\sqrt[պքր]{ա^{սպք}}=\sqrt[պքր]{ա^{մքր+նպր+սպք}}$$

Եթէ արմատականք թուական եւ գրական համարատրիչներ ունենան, իրենց արտադրեալը կը գտնենք.

Այսպէս,

$$5գ\sqrt[պ]{ա^մ}\times4դ\sqrt[ք]{ա^ն}=20գդ\sqrt[պք]{ա^{մք+նպ}}$$

38. ԲԱԺԱՆՈՒՄ. — *Միեւնոյն որոշիչը ունեցող արմատականաց բաժանումը կատարելու համար արմատական նշանաց տակ գտնուած քանակութիւնները իրարմով կը բաժնեմք եւ քանորդին կուտանք իրենց հասարակ որոշիչը. Այսպէս,*

$$\frac{\sqrt[ն]{ա}}{\sqrt[ն]{բ}}=\sqrt[ն]{\frac{ա}{բ}}$$

Զայս հաստատելու համար երկու անդամները նրդ կարողութեան կը հանեմք և կ'ստանամք $\frac{ա}{բ}$ հաւասար արդիւնքներ։

Եթէ արմատականք տարբեր որոշիչով են, մի և նոյն որոշիչի վերածելէ զկնի նոյն գործողութիւնը կը կատարեմք։

$$\frac{\sqrt[պ]{ա^ն}}{\sqrt[ք]{բ^մ}}=\frac{\sqrt[պք]{ա^{նք}}}{\sqrt[պք]{բ^{մպ}}}=\sqrt[պք]{\frac{ա^{նք}}{բ^{մպ}}}$$

Եթէ արմատականք համարատրիչներով են ինչպէս են հետեւեալք։

$$\frac{5գ\sqrt[պ]{ա^ն}}{4դ\sqrt[ք]{բ^մ}}=\frac{5գ}{4դ}\sqrt[պք]{\frac{ա^{նք}}{բ^{մպ}}}$$

39. ԱՐՄԱՏԱԿԱՆԻ ՄԸ ԿԱՐՈՂՈՒԹԻՒՆՔ. — *Արմատական մը կարողութեան մը հանելու համար, արմատական նշանին տակ գտնուած քանակութիւնը նոյն կարողութեան կը հանեմք. Այսպէս,*

$$(\sqrt[ն]{ա^մ})^պ=\sqrt[ն]{ա^{մպ}}\,;$$

Զայս հաստատելու համար նկատողութեան առնելու է, թէ երկու անդամները նրդ կարողութեան հանելով հաւասար արդիւնքներ կ'ստանամք. ինչպէս,

$$\left\{(\sqrt[ն]{ա^մ})^պ\right\}^ն=(\sqrt[ն]{ա^մ})^{պն}=\left\{(\sqrt[ն]{ա^մ})^ն\right\}^պ=(ա^մ)^պ=ա^{մպ}\,;$$

եթէ արմատականը համարտադրիչ ունենար միեւնոյն կարողութեան հանել պէտք էր. Այսպէս,

$$(Հ\sqrt[մ]{ա})^{ր}=Հ^{ր}\sqrt[մ]{ա^{ր}}.$$

80. ԱՐՄԱՏԱԿԱՆԻ ՄԸ ԱՐՄԱՏԸ. — *Արմատականի մը արմատը գտնելու համար արմատականին որոշիչը արմատին որոշիչով կը բազմապատկեմք. Այսպէս,*

$$\sqrt[ր]{\sqrt[մ]{ա}}=\sqrt[մր]{ա}.$$

Զայս հաստատելու համար երկու անդամները մրդ. կարողութեան կը հանեմք և կ'ստանամք հաւասար արգիւնքներ ինչպէս կը տեսնուի,

$$\left(\sqrt[ր]{\sqrt[մ]{ա}}\right)^{մր}=\left\{\left(\sqrt[ր]{\sqrt[մ]{ա}}\right)^{ր}\right\}^{մ}=(\sqrt[մ]{ա})^{մ}=ա:$$

81. ԿՈՏՈՐԱԿԱՒՈՐ ՑՈՒՑԻՉՔ. — $ա^{մր}$ քանակութեան րդ. արմատը գտնելու համար ինչպէս (70) տեսանք, որոյ ցուցիչը որոշողին մի բազմապատիկն է բաւական էր ցուցիչը որոշիչով բաժնել. այսպէս $\sqrt[ր]{ա^{մր}}=ա^{մ}$. բայց երբ բաժանումը ճիշդ չկատարուի, այս կանոնը անգործադրելի է և $ա^{մ}$ին րդ. արմատը կը գրուի $\sqrt[ր]{ա^{մ}}$:

Երբ ուզէինք միշտ միեւնոյն կանոնը գործածել, այն ատեն $\sqrt[ր]{ա^{մ}}$ պիտի նշանակէինք $ա^{\frac{մ}{ր}}$ ձեւով: Ուրեմն $ա^{\frac{մ}{ր}}$ ձեւոյն $\frac{մ}{ր}$ ցուցիչը կը ներկայացնէ արմատական մի, որոյ ցուցիչը մ համարիչն է և որոշիչը ր յայտարարը. այս եղանակաւ նախընթաց գործողութիւնք աւելի պարզ կերպով պիտի կատարուին:

Այս սահմանի առաւելութիւնը ցոյց տալէ յառաջ

դիտելու եմք, որ հակասութեան մէջ չպիտի անկանիմք. և $ա^{\frac{մ}{ր}}$ ասացուածքը միեւնոյն արժէքը կը պահէ եթէ $\frac{մ}{ր}$ ցուցիչը $\frac{մ'}{ր'}$ի հաւասար կոտորակով ներկայացնեմք. այնպէս որ եթէ $\frac{մ}{ր}=\frac{մ'}{ր'}$ի, պիտի ունենամք նաեւ $ա^{\frac{մ}{ր}}=ա^{\frac{մ'}{ր'}}$:

Այս յետին հաւասարութիւնը բացորոշ է քանզի երկու արմատականք միեւնոյն որոշիչի վերածելով կ'ըստանամք,

$$\sqrt[րր']{ա^{մր'}} \text{ և } \sqrt[րր']{ա^{մ'ր}}.$$

Ինչպէս կը տեսնուի, այս երկու արմատականք միեւնոյն ցուցիչներն ունին որովհետև $\frac{մ}{ր}=\frac{մ'}{ր'}$, ենթադրեցինք այսինքն $մր'=մ'ր$:

82. ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒԹԻՒՆ ԵՐԿՈՒ ԿԱՐՈՂՈՒԹԵԱՆՑ ՄԻԵՒՆՈՅՆ ՔԱՆԱԿՈՒԹԵԱՆ. — Արդէն (28)էն գիտեմք ամբողջ և դրական ցուցիչներու համար թէ,

$$ա^{մ}\times ա^{ն}=ա^{մ+ն}:$$

Այս տարազը ստոյգ է եւս եթէ ցուցիչներէն մին մ կամ ն կոտորակաւոր կամ երկուքը մէկէն կոտորակաւոր ըլլան: Դիցուք նախ մ կոտորակաւոր և հաւասար $\frac{ր}{ժ}$ի, ն ամբողջ ըլլալով ունիմք ըստ (72)ի,

$$ա^{մ}\times ա^{ն}=ա^{\frac{ր}{ժ}}\times ա^{ն}=\sqrt[ժ]{ա^{ր}}\times ա^{ն}=\sqrt[ժ]{ա^{ր}\times ա^{նժ}}=\sqrt[ժ]{ա^{ր+նժ}}$$

կամ $ա^{\frac{ր+նժ}{ժ}}$ և կամ $ա^{\frac{ր}{ժ}+ն}$.

Եթէ ն եւս կոտորակ ըլլար և հաւասար $\frac{ե}{լ}$ի նմանապէս պիտի ստանայինք,

$$ա^{մ}\times ա^{ն}=ա^{\frac{ր}{ժ}}\times ա^{\frac{ե}{լ}}=\sqrt[ժ]{ա^{ր}}\times\sqrt[լ]{ա^{ե}}=\sqrt[ժլ]{ա^{րլ}}\times\sqrt[ժլ]{ա^{եժ}}=\sqrt[ժլ]{ա^{րլ}\times ա^{եժ}}$$

$$=\sqrt[ժլ]{ա^{րլ+եժ}}.$$

Այս արմատը կը գրուի նաեւ

$$ա^{\frac{բզ+եդ}{դզ}} \text{ կամ } ա^{\frac{բ}{դ}+\frac{ե}{զ}}.$$

Ուրեմն $ա^{\frac{բ}{դ}} \times ա^{\frac{ե}{զ}} = ա^{\frac{բ}{դ}+\frac{ե}{զ}}$ ։

83. ՄԻԵՒՆՈՅՆ ՔԱՆԱԿՈՒԹԵԱՆ ԵՐԿՈՒ ԿԱՐՈՂՈՒԹԵԱՆՑ ԲԱԺԱՆՈՒՄ. — Երբ մ և ն ամբողջ և դրական թիւեր էին (**41**)ին մէջ տեսանք

$$ա^{մ} : ա^{ն} = ա^{մ-ն}.$$

Այս տարազը ստոյգ է նաեւ երբ մ և ն մին կամ միւսը և կամ երկուքը մէկէն կոտորակաւոր ըլլան։

Դիցուք $մ = \frac{բ}{դ}$ և ն ամբողջ։

$$ա^{մ} : ա^{ն} = ա^{\frac{բ}{դ}} : ա^{ն} = \sqrt[դ]{ա^{բ}} : ա^{ն} = \sqrt[դ]{ա^{բ}} : \sqrt[դ]{ա^{նդ}} = \sqrt[դ]{ա^{բ-նդ}},$$

կամ հաւասար $ա^{\frac{բ-նդ}{դ}}$ ի և կամ $ա^{\frac{բ}{դ}-ն}$ ի.

ուրեմն $ա^{\frac{բ}{դ}} : ա^{ն} = ա^{\frac{բ}{դ}-ն}$ ի։

Դիցուք ն եւս կոտորակաւոր և հաւասար $\frac{ե}{զ}$ ի

$$ա^{մ} : ա^{ն} = ա^{\frac{բ}{դ}} : ա^{\frac{ե}{զ}} ։$$

Վերը կատարուած գործողութիւններուն պէս եթէ շարունակեմք պիտի ստանամք

$$ա^{\frac{բզ-եդ}{դզ}} \text{ կամ } ա^{\frac{բ}{դ}-\frac{ե}{զ}}$$

ուստի կը հետեւցնեմք

$$ա^{\frac{բ}{դ}} : ա^{\frac{ե}{զ}} = ա^{\frac{բ}{դ}-\frac{ե}{զ}} ։$$

84. ԿԱՐՈՂՈՒԹԵԱՆ ՄԸ ԱՅԼԵՒԱՅԼ ԿԱՐՈՂՈՒԹԵԱՆՑ ԱՄԲԱՐՁՈՒՄԸ. — Երբ մ և ն ցուցիչք դրական և ամբողջ թիւեր են, ունիմք $(ա^{մ})^{ն} = ա^{մն}$ ։

Այս տարազը ստոյգ է նաեւ երբ մ և ն կոտորակաւոր են։

Դիցուք $մ = \frac{բ}{դ}$ և $ն = \frac{ե}{զ}$. արդ ունիմք

$$(ա^{մ})^{ն} = (ա^{\frac{բ}{դ}})^{\frac{ե}{զ}} = \sqrt[զ]{(\sqrt[դ]{ա^{բ}})^{ե}} = \sqrt[դզ]{ա^{բե}} = ա^{\frac{բե}{դզ}} = ա^{մն} ։$$

85. ԵՐԿՈՒ ԿԱՐՈՂՈՒԹԵԱՆՑ ԱՐՄԱՏՆԵՐԸ ԳՏՆԵԼ. — Երբ մ և ն ամբողջ և դրական էին (**80**)էն գիտէինք

$$\sqrt[մ]{ա^{ն}} = ա^{\frac{ն}{մ}} ։$$

Այս տարազը ստոյգ է եթէ մ կամ ն և կամ երկուքը մէկէն կոտորակաւոր թիւեր են. դիցուք երկուքը մ և ն կոտորակաւոր $մ = \frac{բ}{դ}$ և $ն = \frac{ե}{զ}$

Հետեւաբար

$$\sqrt[մ]{ա^{ն}} = \sqrt[\frac{բ}{դ}]{ա^{\frac{ե}{զ}}} ։$$

ք քանակութիւն մ'է որոյ $\frac{բ}{դ}$ կարողութիւնն է $ա^{\frac{ե}{զ}}$.

ուրեմն ունիմք

$$ք^{\frac{բ}{դ}} = ա^{\frac{ե}{զ}}. \text{ կամ } \sqrt[դ]{ք^{բ}} = \sqrt[զ]{ա^{ե}} ։$$

Երկու անդամները դզ կարողութեան հանելով ապա արդեանց բզ արմատը գտնելով պիտի ստանամք յաջորդաբար

$$ք^{բ} = \sqrt[զ]{ա^{եդ}}, \quad ք = \sqrt[բզ]{ա^{եդ}} = ա^{\frac{եդ}{բզ}} = ա^{\frac{ե}{զ}:\frac{բ}{դ}},$$

ուրեմն $x = \sqrt[մ]{ա^{ն}} = ա^{\frac{ն:մ}{մ:մ}} = ա^{\frac{ն}{մ}}$ ։

Այս կատարուած գործողութեանց մէջ մ և ն գրական թիւեր էին․ եթէ բացասական և կոտորակաւոր թիւեր ըլլային այն ատեն հետեւեալ ձեւով պիտի ներկայացնէինք ցուցիչաւոր քանակութիւններն․ ինչպէս

$ա^{-\frac{բ}{դ}}$ ասացուածքը $\frac{1}{ա^{\frac{բ}{դ}}}$ ով, որ նոյն է $\frac{1}{\sqrt[դ]{ա^{բ}}}$ ասացուածքին հետ ։

Նմանապէս $ա^{-մ} = \frac{1}{ա^{մ}}$ ։

86. ԿՈՏՈՐԱԿԻ ՄԸ ՑԱՑՏԱՐԱՐԸ ԱՐՄԱՏԱԻՈՐ ԸՆԵԼ․ — Երբ կոտորակի մը յայտարարը մի կամ այլեւայլ արմատականներ ունի, մերձաւոր թուաւոր արժէքը գտնելու տեսակէտով օգտակար է իւր արմատականներէն զայն դուրս հանել․

Ունենամք հետեւեալ օրինակները

1° $\frac{մ}{\sqrt{ա}}$ կոտորակը որոյ երկու եզրերը $\sqrt{ա}$ ով բազմապատկելով կ'ունենամք

$$\frac{մ}{\sqrt{ա}} = \frac{մ\sqrt{ա}}{ա}.$$

2° $\frac{մ}{\sqrt{ա}+\sqrt{բ}}$ որոյ երկու եզրերը $\sqrt{ա}-\sqrt{բ}$ ով բազմապատկելով կ'ստանամք

$$\frac{մ}{\sqrt{ա}+\sqrt{բ}} = \frac{մ(\sqrt{ա}-\sqrt{բ})}{(\sqrt{ա})^2-(\sqrt{բ})^2} = \frac{մ(\sqrt{ա}-\sqrt{բ})}{ա-բ}.$$

3° $\frac{մ}{\sqrt{ա}-\sqrt{բ}} = \frac{մ(\sqrt{ա}+\sqrt{բ})}{ա-բ}$ ի ։

4° $\frac{մ}{ա\pm\sqrt{բ}} = \frac{մ(ա\mp\sqrt{բ}}{ա^2-բ}$ ի ։

5° $\frac{մ}{\sqrt{ա}-\sqrt{բ}+\sqrt{գ}}$ կոտորակը․ որոյ երկու եզրերը $\sqrt{ա}-\sqrt{բ}-\sqrt{գ}$ ով կը բազմապատկեմք և կ'ունենամք

$$\frac{մ}{\sqrt{ա}-\sqrt{բ}+\sqrt{գ}} = \frac{մ(\sqrt{ա}-\sqrt{բ}-\sqrt{գ})}{(\sqrt{ա}-\sqrt{բ})^2-գ} = \frac{մ(\sqrt{ա}-\sqrt{բ}-\sqrt{գ})}{ա+բ-գ-2\sqrt{աբ}}$$

յայտարարը միայն մի արմատական ունենալով 4րդ․ պարագային մէջ կը գտնուինք ։

6° $\frac{մ}{\sqrt{ա}-\sqrt{բ}+գ-\sqrt{դ}}$ կոտորակը, որոյ յայտարարը երկու եզրերէ բաղկացած է, մին $(\sqrt{ա}-\sqrt{բ})$ և միւսը $(գ-\sqrt{դ})$, առաջարկեալ կոտորակին երկու եզրերը սոցա տարբերութեամբ բազմապատկելով, կ'ունենամք

$$\frac{մ}{\sqrt{ա}-\sqrt{բ}+գ-\sqrt{դ}} = \frac{մ(\sqrt{ա}-\sqrt{բ}-գ+\sqrt{դ})}{ա+բ-2\sqrt{աբ}-գ^2-դ+2գ\sqrt{դ}} =$$

$\frac{մ(\sqrt{ա}-\sqrt{բ}+\sqrt{դ}-գ}{(ա+բ-գ^2-դ)-2\sqrt{աբ}+2գ\sqrt{դ}}$․ կոտորակին յայտարարը միայն երեք եզր ունենալով 5° պարագային մէջ կը գտնուինք ։

ՎԱՐԺՈՒԹԻՒՆՔ

Հետեւեալ գործողութիւնները կատարել․

1․ $7\sqrt{2}-4\sqrt{2}+\frac{3}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ Պատ. $\frac{13}{4}\sqrt{2}$

2․ $\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{6}+\sqrt{96}$ Պատ. $8\sqrt{6}$

3. $6\sqrt{-4}-\sqrt{-25}+4\sqrt{-9}$ Պատ. $19\sqrt{-1}$

4. $2\sqrt{-48}+3\sqrt{-12}+5\sqrt{-18}-7\sqrt{-32}$

Պատ. $(14\sqrt{3}-13\sqrt{2})\sqrt{-1}$

5. $\sqrt{27ա^5բ^3}+\sqrt{75ա^3բ^3}$ Պատ. $(3ա^2բ+5աբ)\sqrt{3աբ}$

Հետեւեալ կոտորակաց յայտարարները արմատական նշանէ դուրս հանել.

6. $\sqrt{\frac{ա^2ք-2աք^2+ք^3}{ա^2+2աք+ք^2}}$ կը գտնեմք Պատ. $\frac{ա-ք}{ա+ք}\sqrt{ք}$

7. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ » Պատ. $5+2\sqrt{6}$

8. $\frac{6-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$ » Պատ. $\frac{3}{4}\sqrt{5}-\frac{9}{4}$

9. $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-\sqrt{18}}$ » Պատ. $9+\frac{5}{2}\sqrt{10}$

10. $\frac{\sqrt{1-ք}+\frac{1}{\sqrt{1+ք}}}{1+\frac{1}{\sqrt{1-ք^2}}}$ » Պատ. $\sqrt{1-ք}$

11. $\frac{ս}{\sqrt[3]{ա}+\sqrt[3]{բ}}$ գիտեմք արդէն $(ա'+բ')(ա'^2-ա'բ'+բ'^2)=ա'^3+բ'^3$

Հետեւաբար կ'ստանամք $\frac{ս(\sqrt[3]{ա^2}-\sqrt[3]{աբ}+\sqrt[3]{բ^2})}{ա+բ}$

12. $\frac{ս}{\sqrt[3]{ա}-\sqrt[3]{բ}}$ Պատ. $\frac{ս(\sqrt[3]{ա^2}+\sqrt[3]{աբ}+\sqrt[3]{բ^2})}{ա-բ}$

13. Պարզել $\frac{ք+\sqrt{ք^2-1}}{ք-\sqrt{ք^2-1}}-\frac{ք-\sqrt{ք^2-1}}{ք+\sqrt{ք^2-1}}$ ատացուածքը

Պատ. $4ք\sqrt{ք^2-7}$

ԳԻՐՔ Բ.

ԱՌԱՋԻՆ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆՑ ԼՈՒԾՈՒՄ

ԴԱՍ Է.

ՍԱՀՄԱՆՔ

30. ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԻՒՆ. — *Երկու քանակութիւնք = նշանով զատուած կը կազմեն հաւասարութիւն մի։*

31. ՆՈՅՆՈՒԹԻՒՆ. — *Նոյնութիւն կ'ըսուի այն հաւասարութեան ձեւոյն որ կը պատահի երկու թուական քանակութեանց մէջ, կամ երկու տարազներու մէջ, որոյ տառից ինչ արժէք որ տամք հաւասարութիւնը միշտ կը պահուի։ Զոր օրինակ*

$$2=2. \quad 5=3+2. \quad \text{և} \quad 5ա+6ք=5ա+6ք.$$

բացայայտ հաւասարութիւնք նոյնութիւններ են։

Իսկ $4ք-11=14-ք$ այս հաւասարութիւն մ'է, երբ ք իւր յատուկ արժէքով նշանակեմք. ք ին այս արժէքը հաւասարութեան լուծումն կ'ըսուի։

Հաւասարութիւն մի երկու անդամ ունի. որ հաւասարութիւնը ցուցնող երկու քանակութիւնք են. ինչպէս

$$Ա = Բ :$$

Որոյ առաջին անդամ Ա և երկրորդ անդամ Բ միեզրեր կամ բազմեզրեր են, և կարեն պարունակել մի կամ այլեւայլ թուով անծանօթներ։

Հաւասարութիւնք կը նշանակուին իւրեանց անծանօթներու թուով և նոցա աստիճանով։ Զոր օրինակ

$$ք+7=3ք-13 :$$

Առաջին աստիճանի մի ք անծանօթով հաւասարութիւն մ՚է

$$ք^{2}-4=4ք+1$$

Երկրորդ աստիճանի մի ք անծանօթով հաւասարութիւն է

$$4քյ-3ք-13$$

Երկրորդ աստիճանի ք և յ երկու անծանօթով հաւասարութիւն մ՚է։

89. ՀԱՄԱՐԺԷՔ. — Միեւնոյն անծանօթ և միեւնոյն լուծում ունեցող հաւասարութիւնք համարժէք կը կոչուին. ուստի կը հետեւի թէ հաւասարութիւն մի՝ այլ հաւասարութեամբ կրնամք ներկայացնել, երբ երկրորդ հաւասարութիւնը առաջինէն աւելի պարզ է։

90. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Ա. — *Հաւասարութեան մը երկու անդամոց վերայ միեւնոյն քանակութիւնը կրնամք յաւելուլ առանց անծանօթից արժէքը փոխելոյ, կամ՝ այլ ասացուածքով այս յաւելմամբ առաջին հաւասարութեան համարժէք հաւասարութիւն մի կը կազմենք:*

Դնեմք այս հաւասարութեան երկու անդամք Ա և Բ

$$Ա=Բ : \quad [1]$$

Երկու անդամոց վերայ մ քանակութիւնը յաւելցնելով կ՚ունենամք

$$Ա+մ=Բ+մ : \quad [2]$$

[1] հաւասարութեան ամէն լուծում դրութեամբ գիտենք որ Ա ի և Բ ի թուաւոր հաւասար արժէք կուտայ, արդ այս թուաւոր արժէից վերայ մ ի համապատասխանող թուաւոր արժէքը յաւելցնելով նորէն հաւասար թիւեր պիտի ստանամք, այս թիւերը [2] հաւասարութեան երկու անդամոց թուաւոր արժէքներն են։ փոխադարձաբար [2] հաւասարութեան ամէն լուծում (Ա+մ) ի և (Բ+մ) ի թուաւոր հաւասար արժէք կուտայ, եթէ այս հաւասար արժէքներէ մ ի համապատասխանող թուաւոր արժէքը բառնամք, մնացորդք հաւասար կ՚ըլլան։ Արդ այս մնացորդք Ա ի և Բ ի թուաւոր արժէքներն են։ Ուրեմն [2] հաւասարութեան

ամէն լուծում՝ [1] հաւասարութիւնը կ՚ստուգէ. երկու հաւասարութիւնք ուրեմն համարժէք են։

91. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ. ՏԵՂԱՓՈԽՈՒՄ ԵԶԵՐԱՑ. — Հաւասարութեան մը մէկ անդամին որեւիցէ մէկ եզրը հաւասարութեան միւս անդամին մէջ կրնամք անցընել, միայն այս եզեր նշանը փոխելով։

Զորօրինակ

$$6ք-7=10ք-39 .$$

39 թիւը, երկու անդամոց վերայ յաւելցնելով կ՚ստանամք

$$6ք-7+39=10ք .$$

39 թիւը ինչպէս կը տեսնուի, մէկ անդամէն միւս անդամը անցած է հակառակ նշանով։

92. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ Բ. Հաւասարութեան մը բոլոր եզերաց նշանները մէկէն կրնամք փոխել, որովհետեւ հաւասարութեան առաջին անդամին բոլոր եզրերը երկրորդ անդամին մէջ կրնամք անցնել հակառակ նշանով. նոյնպէս երկրորդ անդամին եզրերը առաջին անդամին մէջ անցնել։

Զորօրինակ. $25-5ք=17-ք$

Երկու անդամները տեղափոխելով կ՚ստանամք

$$ք-17=5ք-25$$

կամ բոլոր եզերց նշանները փոխելով

$$5ք-25=ք-17$$

որ առաջնոյն հետ նոյն է։

93. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Բ. — *Հաւասարութեան մը երկու անդամները միեւնոյն քանակութեամբ կրնամք բազմապատկել կամ բաժնել առանց հաւասարութիւնը փոխելու.*

Ունենամք $Ա=Բ \quad [1] .$

երկու անդամները մով բազմապատկելով կ՚ունենամք

$$Ամ=Բմ \quad [2] :$$

[1] հաւասարութեան ամէն լուծում Ա ի և Բ ի թուաւոր հաւասար արժէքներ կուտայ. արդ եթէ այս արժէքները ք ի համապատասխանող թուաւոր արժէքով մի բազմապատկեմք որ ոչինչ չէ, արտադրեալք հաւասար կ'ըլլան, այս արտադրեալք [2] հաւասարութեան երկու անդամոց համապատասխանող արժէքներն են. ուրեմն [1] հաւասարութեան ամէն լուծում [2] հաւասարութեան լուծում ևս է։

Փոխադարձաբար [2] հաւասարութեան ամէն լուծում Աքի և Բքի թուաւոր հաւասար արժէքներ կուտայ. ուրեմն եթէ այս երկու թիւերը ք ի համապատասխանող արժէքով բաժնեմք որ ոչինչ չէ, քանորդք հաւասար կ'ըլլան. այս քանորդք Ա ի և Բ ի թուաւոր արժէքներն են. ուրեմն [2] հաւասարութեան ամէն լուծում [1] հաւասարութեան լուծումն է։

Երկու հաւասարութիւնք [1] և [2] համարժէք են. ինչպէս հաւասարութեան մը երկու անդամները որևիցէ թուով մը կրնամք բազմապատկել, նոյնպէս որևիցէ թուով կրնամք բաժնել, քանզի ք ով բաժնել ըսելը $\frac{1}{\text{ք}}$ ով բազմապատկել ըսել է, բաւական է որ ք զրօ չըլլայ։

94. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ. — Նախընթաց տեսութեան մէջ ինչպէս կը տեսնուի, ք զրօյէ տարբեր թիւ մ'է. այս պայմանաւ [1] և [2] հաւասարութիւնք համարժէք էին. եթէ [2] հաւասարութեան ամէն եզրերը առաջին անդամին մէջ անցընեմք,

$$(\text{Ա} - \text{Բ})\,\text{ք} = 0$$

ձեւը կ'ստանամք։

Ինչպէս կը տեսնուի [1] հաւասարութեան ամէն լուծում Աը Բ ի հաւասարցնելով՝ [2] հաւասարութիւնը կ'ստուգէ. բայց [2] հաւասարութեան ամէն լուծում [1] հաւասարութիւնը չստուգեր։ Եթէ ք զրօ ըլլայ՝ [2] հաւասարութիւնը կ'ստուգուի առանց Աը Բ ի հաւասար ըլլալու։

Օրինակ. ունենամք

$$5\text{ք} - 10 = \frac{4\text{ք}}{7} + 21 \qquad [1]$$

հաւասարութիւնը, որոյ երկու անդամները ք—1 ով բազմապատկելով կ'ունենամք

$$(5\text{ք} - 10)(\text{ք} - 1) = \left(\frac{4\text{ք}}{7} + 21\right)(\text{ք} - 1)\,։$$

ք=7 լուծումը որ (1) հաւասարութիւնը կ'ստուգէ, (2) հաւասարութիւնը ևս կ'ստուգէ. իսկ ք=1 արժէքը (2) հաւասարութեան (ք—1) բազմապատկիչը ոչնչացնելով թէև (2) հաւասարութիւնը կ'ստուգէ, բայց (1)ը չ'ստուգեր. ուստի կը հետևցնեմք

95. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ Ա. — Հաւասարութեան մը երկու անդամները երբ ք անծանօթը պարունակող քանակութեամբ մի բազմապատկեմք, ուրիշ հաւասարութիւն մի կ'ստանամք, որոյ լուծումը առաջնոյն լուծմէն տարբեր է։

Ունենամք

$4\text{ք}(\text{ք} - 3) = (2\text{ք} + 10)(\text{ք} - 3)$ [1] հաւասարութիւնը և որոյ երկու անդամները (ք—3) երկեզրով բաժնելով կ'ունենամք

$$4\text{ք} = 2\text{ք} + 10 \quad [2]$$

հաւասարութիւնը. եթէ ք=3 ենթադրեմք, (1) հաւասարութիւնը կ'ըստուգուի. այսինքն 3 թիւը (1) հաւասարութեան մէկ լուծումն է. իսկ այս արժէքը (2) հաւասարութիւնը չստուգեր։ Ուստի կը հետևցնեմք թէ հաւասարութեան մը երկու անդամները անծանօթ պարունակող հանրահաշուական քանակութեամբ մը բաժնելով, հաւասարութեան լուծումներէն մին կամ առաւել քան զմին ջնջած կ'ըլլամք, այս ջնջուած լուծումները ստանալու համար բաժանարարը զրօյի կը հաւասարցնեմք. հետևաբար երբ ստիպուած եմք հաւասարութեան մը երկու անդամները բաժնել այնպէս հանրահաշուական քանակութեամբ մը, նախ ստացուած հաւասարութիւնը կը լուծեմք և ապա այն օժանդակ հաւասարութիւնը, զոր բաժանարարը զրօյի հաւասարցնելով կ'ընդունիմք։

96. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ Բ. ԿՈՏՈՐԱԿԱՑ ՋՆՋՈՒՄ. — Կոտորակաւոր հաւասարութեան մը բոլոր եզրերը միևնոյն յայտարարի կրնամք վերածել և ապա հաւասարութիւնը ամենապարզ ձևոյն վերածելու համար յայտա-

բարները ջնջել։ Այս կերպով երկրորդ հաւասարութիւն մի կ'ստանամք համարժէք առաջնոյն. այս կանոնը Բ. Տեսութեան մի հետեւութիւնն է։

Զորօրինակ. առնենք

$$\frac{ք-2}{3}+\frac{11+ք}{4}=5 \quad [1]$$

հաւասարութիւնը որ համարժէք է

$$4(ք-2)+3(11+ք)=60 \quad [2]$$

հաւասարութեան, զոր կ'ստանամք (1) հաւասարութեան բոլոր եզրերաց 12 յայտարարը տալով և ապա այս յայտարարը վերցնելով.

Նմանապէս առնենք

$$\frac{2}{ք^2-1}-\frac{1}{ք(ք-1)}=\frac{ք-2}{ք(ք+1)} \quad [1]$$

հաւասարութիւնը, որոյ երկու անդամները $ք(ք-1)$ով կը բազմապատկեմք և կ'ստանամք

$$ք-1=(ք-2)(ք-1) \quad [2],$$

որոյ լուծմունք են 3 և 1 թիւերը. ինչպէս կրնամք ստուգել այս թուոց առաջինը այսինքն 3 (1) հաւասարութեան լուծումն է. իսկ երկրորդը 1. երբ ք գիրը 1ով ներկայացնեմք $ք(ք^2-1)$ բազմապատկիչը կ'ոչնչացնէ։

97. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Գ. — *Հաւասարութեան մը երկու անդամները երբ կարողութեան մը հանենք, հաւասարութեան լուծումը ընդհանրապէս կը փոխուի։*

$$\text{Դնենք} \quad Ա=Բ \quad [1]$$

հաւասարութիւնը, որոյ երկու անդամները եթէ քառակուսեմք կ'ունենամք

$$Ա^2=Բ^2 \quad [2].$$

կը տեսնեմք որ [1] հաւասարութեան ամէն լուծում՝ [2] հաւասարութեան համար եւս է. բայց [2] հաւասարութիւնը կը գրուի նաեւ

$$Ա^2-Բ^2=0$$

ձեւով որ $Ա-Բ=0$, $Ա+Բ=0$. երկու հաւասարութեանց լուծումները մէկէն կը պարունակէ։

Նոյնպէս $ա^մ=բ^մ$ [1] հաւասարութիւնը կը գրուի նաեւ $ա^մ-բ^մ=0$ կամ

$$(ա-բ)(ա^{մ-1}+բա^{մ-2}+բ^2ա^{մ-3}+\dots+բ^{մ-1})=0$$

ձեւով. այս հաւասարութիւնը [1] հաւասարութեան լուծումը պարունակելէ զատ, որ առաջին $(ա-բ)$ արտադրիչը կ'ոչնչացնէ, կը պարունակէ նաեւ հետեւեալ հաւասարութեան լուծումը

$$ա^{մ-1}+բա^{մ-2}+բ^2ա^{մ-3}+\dots+բ^{մ-1}=0$$

Այլ օրինակ. առնեմք հետեւեալ հաւասարութիւնը

$$\sqrt{4-ք}=ք-4 \quad [1]$$

երկու անդամները քառակուսելով կ'ստանամք

$$4-ք=ք^2-8ք+16 \quad [2]$$

այս (2) հաւասարութեան լուծմունք են 3 և 4 թիւերը. արդ կը տեսնեմք որ 4 թիւը (1) հաւասարութիւնը կ'ստուգէ, բայց 3 թիւը չստուգէ. ուստի պէտք չէ ընդունիլ 3 իբրեւ քի արժէք. սորա պատճառը այն է որ (2) հաւասարութիւնը միայն (1) հաւասարութեան քառակուսին չէ, այլ $-\sqrt{4-ք}=ք-4$ հաւասարութեան քառակուսին եւս է. որոյ լուծումն է $ք=3$.

98. ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԻՒՆ ՄԸ ԼՈՒԾԵԼՈՒ ԿԱՆՈՆ. — Նախընթաց դասին մէջ տրուած ծանօթութիւնք բաւական են առաջին աստիճանի մէկ անծանօթով հաւասարութիւն մի լուծելու համար.

Ունենամք հետեւեալ հաւասարութիւնը լուծել

$$5ք-\frac{ք}{3}+\frac{5}{6}=4ք+\frac{17}{6} \quad [1].$$

Նախ ամէն եզրերը միեւնոյն յայտարարի կը վերածեմք և այս յայտարարները կը ջնջեմք, քանզի բազմապատկիչը թուաւոր է. ուստի ունիմք

$$30ք-2ք+5=24ք+17 \quad [2]$$

որ (1) հաւասարութեան համարժէք է. և ապա բոլոր անծանօթով եզրերը

առաջին անդամին մէջ կը ժողովեմք և ծանուցեալ եզրերը երկրորդին մէջ. կ'ստանամք

$$30ք-2ք-24ք=17-5 \quad [3]$$

կամ

$$4ք=12 \quad [4]$$

զոր կ'ունենամք (3) հաւասարութեան երկու անդամները պարզելով. Այս (4) հաւասարութիւնը (2) ին համարժէք է. վերջապէս սորա երկու անդամները 4 ով բաժնելով կ'ստանամք

$$ք=3$$

համարժէք հաւասարութիւն մի, որ առաջարկեալ հաւասարութեան լուծումն է. եթէ ք 3 ով ներկայացնեմք (1) հաւասարութեան մէջ, կրնամք ստուգել (1) հաւասարութիւնը. ուրեմն (1) հաւասարութիւնը միայն մի լուծում ունի:

ՍՏՈՒԳՈՒԹԻՒՆ. $5\times3-\frac{3}{3}+\frac{5}{6}=4\times3+\frac{17}{6}$. Ինչպէս կը տեսնուի՝ իւրաքանչիւր անդամ $14\frac{5}{6}$ի հաւասար է. ուստի 3 թիւը ք անծանօթին արժէքն է: Այս օրինակէն կը հետեւի

99. ԿԱՆՈՆ. — Առաջին աստիճանի մէկ անծանօթով հաւասարութիւն մի լուծելու համար, պէտք է.

1°. Եթէ եզրերը յայտարարներ ունին, զայնս միեւնոյն յայտարարի վերածելէ զկնի յայտարարները ջնջել. 2°. Բոլոր անծանօթով եզրերը առաջին անդամին մէջ անցնել եւ ծանուցեալ եզրերը երկրորդին մէջ. նման եզերաց պարզութիւնները կատարելէ յետոյ հաւասարութեան երկու անդամները անծանօթ քանակութեան համարտադրիչով բաժնել. այս բաժանման քանորդը առաջարկեալ հաւասարութեան լուծումն է:

100. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ Ա. — Այս կանոնը այն հաւասարութեանց եւս կը պատկանի, որոց համարտադրիչք տառերով են:

Այլ օրինակ.

$$3գք+\frac{բք}{ա}=\frac{(2ա+բ)բ^2ք}{ա(ա+բ)^2}+\frac{3աբգ}{ա+բ}+\frac{ա^2բ^2}{(ա+բ)^3} \quad [1]$$

Այս հաւասարութեան բոլոր եզրերը նախ $ա(ա+բ)^3$ յայտարարի կը վերածեմք, և ապա այս յայտարարը կը ջնջեմք որով կ'ունենամք

$$3ագ(ա+բ)^3ք+բ(ա+բ)^3ք=(ա+բ)(2ա+բ)բ^2ք+3ա^2բգ(ա+բ)^2+ա^3բ^2$$

Անծանօթ պարունակող եզրերը՝ այսինքն $(ա+բ)(2ա+բ)բ^2ք$ առաջին անդամին մէջ կ'անցընեմք, և $(ա+բ)ք$ հասարակ արտադրիչ դնելով կ'ունենամք.

$$[3ագ(ա+բ)^2+բ(ա+բ)^2-բ^2(2ա+բ)](ա+բ)ք=3ա^2բգ(ա+բ)^2+ա^3բ^2$$

Հետեւաբար

$$ք=\frac{3ա^2բգ(ա+բ)^2+ա^3բ^2}{(ա+բ)[3ագ(ա+բ)^2+բ(ա+բ)^2-բ^2(2ա+բ)]}.$$

Այս կոտորակը պարզելու համար, աբ հասարակ արտադրիչ կընեմք համարիչին մէջ և յայտարարին մէջ գտնուած $բ(ա+բ)^2-բ^2(2ա+բ)$ քանակութիւնը իրեն հաւասար $ա^2բ$ ով կը ներկայացնեմք և կ'ստանամք

$$ք=\frac{աբ[3ագ(ա+բ)^2+ա^2բ]}{(ա+բ)[3ագ(ա+բ)^2+ա^2բ]}$$ կամ որ նոյն է $ք=\frac{աբ}{ա+բ}$.

Եթէ ուզեմք այս լուծումը ստուգել, առաջարկեալ հաւասարութեան մէջ ք՝ իւր այս արժէքով կը ներկայացնեմք և կ'ունենամք

$$\frac{3աբգ}{ա+բ}+\frac{բ^2}{ա+բ}=\frac{բ^3(2ա+բ)}{(ա+բ)^3}+\frac{3աբգ}{ա+բ}+\frac{ա^2բ^2}{(ա+բ)^3} \quad [1]$$

կամ

$$\frac{բ^3(2ա+բ)}{(ա+բ)^3}+\frac{ա^2բ^2}{(ա+բ)^3}=\frac{բ^2(2աբ+բ^2+ա^2)}{(ա+բ)^3}=\frac{բ^2(ա+բ)^2}{(ա+բ)^3}=\frac{բ^2}{ա+բ}.$$

ուրեմն (1) հաւասարութեան երկրորդ անդամը առաջնոյն հետ նոյն է. և ք ին $\frac{աբ}{ա+բ}$ արժէքը առաջարկեալ հաւասարութեան լուծումն է:

101. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ Բ. — Հաւասարութեան մը անծանօթով եզրերը մէկ անդամէն միւս անդամը անցուցած

ժամանակնիս, դիտելու է որ այս տեղափոխումով բարձումը հնարաւոր ըլլայ. եթէ հաւասարութեան եղերաց համարտադրիչք թուանշաններ են, նշաններէն բացայայտ կը տեսնուի թէ անծանօթները ո՛ր կողմ անցընելու է։ Բայց հաւասարութեան եղերաց համարտադրիչք երբ տառերով են, անկարելի է որոշելը. քանզի տառից մեծութեան մէջ համեմատութիւն չկայ։

Ունենամք հետեւեալ հաւասարութիւնը

$$ա^2+բք=ագ+դք.$$

որոյ մէջ անծանօթ քանակութեան բ համարտադրիչը դ համարտադրիչէն թէ մեծ և թէ փոքր կրնայ ըլլալ. այս հաւասարութիւնը լուծելու համար երկու ենթադրութիւն ընել պէտք է $բ>դ$ էն և $բ<դ$ էն. եթէ դնեմք $բ>դ$ էն, պէտք է $դք$ եզրը առաջին անդամին մէջ անցընել, որովհետև $(բ-դ)$ տարբերութիւնը դրական է և հետեւաբար կ'ունենամք

$$ք=\frac{(գ-ա)ա}{բ-դ}$$

Եթէ դնեմք $բ<դ$ էն, պէտք է $բք$ եզրը առաջին անդամէն երկրորդ անդամին մէջ անցնել և այս եղանակաւ կ'ստանամք

$$ք=\frac{(ա-գ)ա}{դ-բ} \text{ սեպելով } ա>գ \text{ էն ։}$$

Առաջին աստիճանի վերածուող հաւասարութիւնք

102. Երբեմն այնպիսի հաւասարութիւնք կը գըտնուին, թէեւ առաջին աստիճանի չեն, բայց այլեւայլ միջոցով առաջին աստիճանի կրնան վերածիլ։

Զորօրինակ. $\sqrt{5+ք}=5-\sqrt{ք}$ [1]

հաւասարութիւնը, որոյ երկու անդամները քառակուսելով կ'ունենամք

$$5+ք=25-10\sqrt{ք}+ք \quad [2]$$

հաւասարութիւնը. սորա անծանօթ եզրերը առաջին

անդամին մէջ և ծանօթ եզրերը երկրորդին մէջ անցնելով կ'ունենամք

$$10\sqrt{ք}=20 \quad [3]$$

զոր նորէն քառակուսելով կ'ստանամք

$$ք=4 \quad [4]$$

հաւասարութիւնը։

[1] հաւասարութեան ամէն լուծում [2], [3] և [4] հաւասարութիւնները կ'ստուգէ. [4] հաւասարութեան լուծումն է $ք=4$. [1] հաւասարութեան լուծում եւս է. ուստի [1] հաւասարութեան լուծումը ստուգելու համար, ք՝ 4ով կը ներկայացնեմք իր երկու անդամներուն մէջ և կունենամք

$$\sqrt{5+4}=5-\sqrt{4}$$

կամ որ նոյն է $3=3$. որ լուծման ստուգութիւնը կը ցուցնէ։

Այլ օրինակ. $\frac{ա}{1+2ք}+\frac{ա}{1-2ք}=2բ$. [1] հաւասարութիւնը որոյ երկու անդամները $(1+2ք)(1-2ք)$ արտադրեալով կամ որ նոյն է $(1-4ք^2)$ով կը բազմապատկեմք և կ'ստանամք

$$ա(1-2ք)+ա(1+2ք)=2բ(1-4ք^2) \quad [2]$$

հաւասարութիւնը, որոյ մէջ կատարելի բազմապատկութիւնները ընելով նման եզրերը կը պարզեմք և կ'ունենամք

$$2ա=2բ-8բք^2 \quad [3]$$

հաւասարութիւնը։

Եթէ $ք^2$ իբրեւ անծանօթ քանակութիւն առնեմք, այս հաւասարութիւնը առաջին աստիճանի եղած կ'ըլլայ ուստի կ'ստանամք

$$ք^2=\frac{բ-ա}{4բ}. \quad ք=\sqrt{\frac{բ-ա}{4բ}} \quad [4]$$

Ինչպէս $ք^2$ անծանօթ քանակութիւնը սեպելով, հաւասարութիւնը առաջին աստիճանի վերածեցաւ, նոյնպէս եթէ պատահի $\sqrt{ք}$ անծանօթ քանակութիւնը արմատական նշանի տակ, վերը ըրածնուս պէս պէտք է զայն անծանօթի տեղ առնել։

ՎԱՐԺՈՒԹԻՒՆՔ

1. Լուծել $18ք - 61 = 13ք - 31$ հաւասարութիւնը.

Պատ. $ք = 6$

2. Լուծել $2ք - \frac{3}{4} + \frac{ք}{2} = \frac{2}{3} + \frac{3ք}{8}$ հաւասարութիւնը.

Պատ. $ք = \frac{2}{3}$

3. Լուծել $5ք - \frac{ք}{2} - 282 = \frac{ք}{3} + \frac{ք}{4}$ հաւասարութիւնը.

Պատ. $ք = 72$

4. Լուծել $48ք^2 + 28ք - 48 - (36ք^2 + 36ք - 16) = 12ք^2 - 13ք + 3$.

Պատ. $ք = 7$

5. Լուծել $\frac{5}{2}ք - \frac{4}{3}ք - 13 = \frac{5}{8} + \frac{ք}{32}$ հաւասարութիւնը.

Պատ. $ք = 12$

6. Լուծել $4 - \frac{ք + 3}{6} = 2 + \frac{9 - 2ք}{3}$ հաւասարութիւնը.

Պատ. $ք = 3$

7. Լուծել $7ք^3 - 20 = 3ք^3 + 236$ հաւասարութիւնը.

Պատ. $ք = 4$

8. Լուծել $\frac{ա + 3ք}{4ա} - \frac{7ա - 5ք}{9բ} + 3 - \frac{9ք}{4} = \frac{ք}{աբ} + \frac{5ք}{6բ}$

Պատ. $ք = \frac{(39բ - 14ա)ա}{27աբ - 9բ + 12}$

9. Լուծել $\frac{աք - բ^2}{\sqrt{աք} + բ} - \frac{\sqrt{աք} - բ}{գ} = գ$ հաւասարութիւնը.

Առաջին կոտորակին համարիչը իւր յայտարարով բաժանական ըլլալով կը գտնեմք

Պատ. $ք = \frac{1}{ա}\left(բ + \frac{գ^2}{գ-1}\right)$

10. Լուծել $\frac{3 + 2ք}{1 + 2ք} - \frac{5 + 2ք}{7 + 2ք} = 1 - \frac{4ք^2 - 2}{7 + 16ք + 4ք^2}$ հաւասարութիւնը.

Պատ. $ք = \frac{7}{8}$

11. Լուծել $\frac{ք - 1}{ք + ա - բ} = \frac{1 - ք}{ք - ա + բ} + 2$ հաւասարութիւնը.

Պատ. $ք = (ա - բ)^2$

12. Լուծել $\frac{ա + բ - գ}{ք - 1} = \frac{ա - բ + գ}{ք + 1}$ հաւասարութիւնը.

Պատ. $ք = \frac{ա}{գ - բ}$

13. Լուծել $\frac{ք + մ}{ն} - \frac{ք - ն}{մ} = 2$ հաւասարութիւնը.

Պատ. $ք = ն - մ$

14. Լուծել $\frac{5}{7}ք - \frac{1}{3}ք - \frac{4}{5}ք + 2ք = 1 - \frac{3}{4}$ հաւասարութիւնը.

Պատ. $ք = \frac{105}{244}$

15. Լուծել $\frac{5ք}{6} - \frac{3ք}{4} - 6 = \frac{13}{3} - 3ք + \frac{ք}{2}$ հաւասարութիւնը.

Պատ. $ք = 4$

16. Լուծել $\frac{բ - ա}{ք + ա} + \frac{ա}{ք + բ} = \frac{բ}{ք - 1}$ հաւասարութիւնը.

Պատ. $ք = \frac{ա^2 + բ^2 + աբ^2 - աբ}{ա^2 - (2ա + 1)բ}$

17. Լուծել $\frac{ա(ա + բ - ք)}{բ - գ} = \frac{բք + գ(ա - բ)}{բ + գ}$

Պատ. $ք = ա + գ$

18. Լուծել $\dfrac{\dfrac{x+1}{1-1}-\dfrac{x-1}{x+1}}{1+\dfrac{x+1}{x-1}}=\dfrac{1}{2}$ հաւասարութիւնը.

Պատ. $x=3$

19. Լուծել $\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{4x+5}{4x+4}+\dfrac{3x+3}{3x+1}$.

Պատ. $x=5$

20. Լուծել $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$.

Պատ. $x=\dfrac{5}{4}$. և $x=0$

21. Լուծել $\sqrt{a+x}-\sqrt{\dfrac{a^2}{a+x}}=\sqrt{2a+x}$ հաւասարութիւնը.

Պատ. $x=-\dfrac{2a}{3}$

22. Լուծել $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}$ հաւասարութիւնը,

Պատ. $x=\dfrac{2a\sqrt{b}}{b+1}$

23. Լուծել $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

Պատ. $x=\dfrac{25}{16}$ և $x=0$

ԴԱՍ Ը.

ԱՌԱՋԻՆ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ԵՐԿՈՒ ԱՆԾԱՆՕԹՈՎ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆՑ ԼՈՒԾՈՒՄ

103. — Դիցուք թէ ունիմք x և y անծանօթօք հաւասարութիւն մի, նախ բոլոր եզրերը միեւնոյն յայտարարի կը վերածեմք եթէ հարկ է և այս յայտարարը կը ջնջեմք. յետոյ բոլոր անծանօթ պարունակող եզրերը առաջին անդամին մէջ կը ժողովեմք և ծանուցեալ եզրերը երկրորդ անդամին մէջ։

Զորօրինակ ունենամք հետեւեալ հաւասարութիւնը.

$$2x+5y=9 \quad [1]$$

Եթէ xին և yին արժէքները գտնել ուզեմք, պիտի տեսնեմք որ այս հաւասարութիւնը անհամար լուծում ունի. այսինքն x և y անծանօթք ամեն արժէք կրնան առնել։ Եթէ xին արժէքը 2 սեպեմք, yին կ'ըլլայ 1. եթէ x հաւասար 3ի սեպեմք, yին արժէքը կ'ըլլայ $\frac{3}{5}$ եւն։

Ուստի կը հետեւի թէ yին արժէքը xի տրուած արժէքէն կախում ունի. ուրեմն առաջարկեալ [1] հաւասարութիւնը չբաւեր xին և yին արժէքները սահմանելու, ուստի պէտք է երկրորդ հաւասարութիւն մի այլ առնել որ առաջին հաւասարութեան մի հետեւութիւնը չըլլայ։

Առնեմք հետեւեալ հաւասարութիւնները.

$$2x+5y=19 \quad [1]$$

$$\frac{x-2}{x-3}=\frac{5}{4} \quad [2]$$

[2] հաւասարութեան լուծումն է $x=7$. yին ար-

մէ.քը ստանալու համար + իւր արժէքով [1] հաւասարութեան մէջ կը ներկայացնեմք և կ'ունենամք

2 × 7 + 5‡ = 19

կամ 5‡ = 19 − 14 = 5

‡ = 1

Այս օրինակէն կը տեսնուի թէ ինչպէս պէտք է լուծել երկու անծանօթով երկու հաւասարութիւնները. քիչ մը վերը ինչպէս գիտել տուինք [1] հաւասարութեան համարժէք [2] մը ևս ունենալ պէտք է որոյ միջոցաւ [1] հաւասարութեան մի անծանօթը ջնջել: Այս ջնջման վրայ քիչ մը վերջը ընդհանուր տեսութիւն մի պիտի ընեմք:

Երկու հաւասարութիւններ անդամ առ անդամ գումարած կամ բարձած կ'ըլլամք երբ առաջարկեալ երկու հաւասարութեանց առաջին անդամոց գումարը կամ տարբերութիւնը երկրորդաց գումարին կամ տարբերութեան հաւասարցնեմք:

104. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ. — *Երկու անծանօթով երկու հաւասարութեանց մին ուրիշ հաւասարութեամբ մի կրնամք ներկայացնել զոր կ'ստանամք առաջարկեալ հաւասարութիւնը անդամ առ անդամ յաւելցնելով կամ քաղելով:*

Զորօրինակ, ունենամք հետևեալ

Ա = Բ

և Ա′ = Բ′

երկու հաւասարութեանց դրութիւնը՝ որ + և ‡ անծանօթները կը պարունակէ

Ա + Ա′ = Բ + Բ′

դրութեան համարժէք է. այսինքն՝ առաջին դրութեան լուծմունք

+ = 2 և ‡ = $\frac{4}{3}$

են. այս թիւերը հաւասարութեանց երկրորդ դրութիւնը ևս կը լուծեն, որովհետև Ա և Բ երկու բազմեզերք հաւասար թուոյ կը վերածին երբ իւրեանց +՝ 2ով և ‡՝ $\frac{4}{3}$ով ներկայացնեմք, նոյնպէս Ա′ և Բ′ բազմեզերք. հետևաբար Ա ի և Ա′ին թուաւոր արժէքները Բ ի և Բ′ի թուաւոր արժէից վրայ յաւելմամբ հաւասար գումարներ կ'ստանամք. ուրեմն + = 2, ‡ = $\frac{4}{3}$ լուծմունք ևս են,

Ա + Ա′ = Բ + Բ′

հաւասարութեան:

Փոխադարձաբար, եթէ + = 2 և ‡ = $\frac{4}{3}$ թիւերը հաւասարութեանց երկրորդ դրութեան լուծմունքն են, առաջին դրութեան լուծմունքն ևս են:

Հաւասարութեանց երկու դրութեան մէջ Ա = Բ հաւասարութիւնը կը գտնուի արդէն որոյ լուծմունք են յիշեալ թիւերը. կը մնայ հաստատել թէ Ա = Բ հաւասարութեան լուծմունք նոյն թիւերն են:

Ինչպէս բացայայտ կը տեսնուի թէ + = 2 և ‡ = $\frac{4}{3}$ թիւերը հետևեալ հաւասարութիւնները ենթադրութեամբ հաւասար թուոյ կը վերածեն

Ա = Բ

Ա + Ա′ = Բ + Բ′.

Եթէ Ա+Ա′ի արժէքէն Ա ի արժէքը բառնամք, նոյնպէս Բ+Բ′ի արժէքին Բ ինը, մնացորդք հաւասար պիտի ըլլան. արդ այս մնացորդք Ա′ի և Բ′ի առած արժէքներն են. երբ այս բազմեզերաց մէջ +՝ 2ով և ‡՝

$\frac{4}{3}$ով ներկայացուի, ուրեմն այս թիւերը $\text{Ա}'=\text{Բ}'$ հաւասարութեան լուծմունք եւս են ։

Այսպէս պիտի հաստատեմք որ հետեւեալ երկու անծանօթով երկու հաւասարութեանց

$$\text{Ա} = \text{Բ}$$
$$\text{Ա}' = \text{Բ}'$$

դրութիւնը համարժէք է

$$\text{Ա} = \text{Բ}$$
$$\text{Ա} - \text{Ա}' = \text{Բ} - \text{Բ}'$$

դրութեան ։

105. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ. — Երկու անծանօթօք երկու հաւասարութեանց ամեն դրութեան մէջ, հաւասարութեանց իւրաքանչիւր անդամը որեւիցէ թուով եթէ բազմապատկեմք, և կամ այսպէս ստացուած հաւասարութիւնները անդամ առ անդամ իրարու վրայ յաւելումք կամ իրարմէ բառնամք, նոր հաւասարութիւններ կ'ունենամք առաջնոյն համարժէք ։

Ունենամք $\text{Ա} = \text{Բ}$ [1]

և $\text{Ա}' = \text{Բ}'$ [2]

Առաջին աստիճանի երկու անծանօթօք երկու հաւասարութիւններ [1]ին երկու անդամները մ ով և [2]ին երկու անդամները ն ով բազմապատկելով կ'ունենամք

$$\text{Ա}\text{մ} = \text{Բ}\text{մ}$$
$$\text{Ա}'\text{ն} = \text{Բ}'\text{ն} \text{ ։}$$

Այս հաւասարութիւնք առաջարկեալ դրութեան համարժէք դրութիւն մի կը կազմեն. ուստի,

$$\text{Ա}'\text{ն} = \text{Բ}'\text{ն}$$

հաւասարութիւնը կրնամք ներկայացնել

$$\text{Ա}\text{մ} + \text{Ա}'\text{ն} = \text{Բ}\text{մ} + \text{Բ}'\text{ն}$$

հաւասարութեամբ, [1] և [2] հաւասարութեանց դրութեան համարժէք է ։

Տարագրութիւն փոխանակութեամբ

106. Փոխանակութեամբ տարագրութեան նպատակն է լուծել հաւասարութեանց մին անծանօթներէն միոյն նկատմամբ, և փոխանակել այս անծանօթ քանակութեան արժէքը միւս հաւասարութեան մէջ, որ միայն մի անծանօթով է ։

Այս կանոնը (**103**)ին մի հետեւութիւնն է, զոր հետեւեալ հաւասարութիւնները լուծելով պիտի բացատրեմք ։

Ունենամք $\dagger$ և $\ddagger$ անծանօթօք երկու

$$3\dagger + 4\ddagger = 48 \quad [1]$$
$$2\dagger - \ddagger = 10 \quad [2]$$

հաւասարութիւնները, զոր կուզեմք լուծել ։

Նախ [1] հաւասարութեան մէջ $\dagger$ին արժէքը կը գտնեմք և ապա $\dagger = \frac{48-4\ddagger}{3}$ արժէքով [2] հաւասարութեան մէջ կը դնեմք և կունենամք

$$\dagger = \frac{48-4\ddagger}{3} \quad [3]$$

$$2\left(\frac{48-4\ddagger}{3}\right) - \ddagger = 10 \quad [4] \text{ ։}$$

Այս նոր հաւասարութեանց դրութիւնը առաջարկեալ դրութեան, այսինքն [1]ի և [2]ի համարժէք է ։

Արդարեւ [3] և [4] հաւասարութիւնները անդամ առ անդամ յաւելցնելով կ'ունենամք

$$\text{ք}+2\,\frac{48-4\text{ֆ}}{3}-\text{ֆ}=10+\frac{48-4\text{ֆ}}{3}$$

կամ $$3\text{ք}-\text{ֆ}=10+\text{ք}$$

և կամ $$2\text{ք}-\text{ֆ}=10\,,$$

որ նոյն է [2] հաւասարութեան հետ. հետեւաբար [3] և [4] հաւասարութեանց գրութիւնը [1] և [2] հաւասարութեանց գրութեան համարժէք է :

Ուրեմն [4] հաւասարութեան լուծումը՝ առաջարկեալ հաւասարութեանց լուծումն եւս է. Արդ

$$2\left(\frac{48-4\text{ֆ}}{3}\right)-\text{ֆ}=10$$

հաւասարութեան լուծումն է $\text{ֆ}=6$. անծանօթ ք քանակութեան արժէքը գտնելու համար ֆ՝ իր արժէքով կը ներկայացնեմք $\text{ք}=\frac{48-4\text{ֆ}}{3}$ հաւասարութեան մէջ :

Այսպէս.

$$\text{ք}=\frac{48-24}{3}=8\,:$$

Այս օրինակէն կը հետեւի

107. ԿԱՆՈՆ — *Առաջին աստիճանի ք եւ ֆ երկու անծանօթով երկու հաւասարութիւնները լուծելու համար, նախ հաւասարութեանց միոյն մէջէն անծանօթից միոյն արժէքը կ՚առնեմք եւ երկրորդ հաւասարութեան մէջ նոյն անծանօթին կը փոխանակեմք. Այսպէս մի անծանօթով միայն մի հաւասարութիւն մի կ՚ստանամք զոր գիտեմք լուծել : Եւ ապա այս անծանօթին արժէքը առանձին զննի միւս անծանօթ քանակութիւնը պարունակող հաւասարութեան մէջ կը դնեմք, երկրորդ անծանօթին արժէքը գտնելու համար :*

108. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ — *Առաջին աստիճանի երկու անծանօթով երկու հաւասարութիւնք միայն մի լուծում՝ ունին :*

Ունենամք լուծել հետեւեալ երկու հաւասարութեանց գրութիւնը

$$\text{ա}\text{ք}-\text{բ}\text{ֆ}=\text{ա}^2+\text{բ}^2 \quad [1]$$
$$\text{բ}\text{ք}+\text{ա}\text{ֆ}=\text{ա}^2+\text{բ}^2 \quad [2]\,:$$

Առաջին հաւասարութենէ ք ին արժէքը կը քաղեմք

$$\text{ք}=\frac{\text{ա}^2+\text{բ}^2+\text{բ}\text{ֆ}}{\text{ա}}\,,$$

երկրորդ հաւասարութեան ք անծանօթը այս արժէքով կը փոխանակեմք. Այս կերպով կ՚ստանամք

$$\frac{\text{բ}\,(\text{ա}^2+\text{բ}^2)+\text{բ}^2\text{ֆ}}{\text{ա}}+\text{ա}\text{ֆ}=\text{ա}^2+\text{բ}^2\,:$$

Այս նոր հաւասարութեան իւրաքանչիւր եզրը միեւնոյն յայտարարի վերածելէ յետոյ, ծանուցեալ եզրերը երկրորդ անդամին մէջ կը ժողովեմք և կ՚ունենամք

$$(\text{բ}^2+\text{ա}^2)\text{ֆ}=\text{ա}(\text{ա}^2+\text{բ}^2)-\text{բ}(\text{ա}^2+\text{բ}^2)\,.$$

Հետեւաբար

$$\text{ֆ}=\text{ա}-\text{բ}\,:$$

ֆ ին այս արժէքը $\text{ք}=\frac{\text{ա}^2+\text{բ}^2+\text{բ}\text{ֆ}}{\text{ա}}$ հաւասարութեան մէջ դնելով կը գտնեմք

$$\text{ք}=\frac{\text{ա}^2+\text{բ}^2+\text{ա}\text{բ}-\text{բ}^2}{\text{ա}}$$

կամ $$\text{ք}=\text{ա}+\text{բ}\,:$$

Առաջարկեալ հաւասարութեանց լուծումը ստուգելու համար բաւական է ք և ֆ իրենց արժէքով ներկայացնել սոյն հաւասարութեանց մէջ :

Տարագրութիւն բաղդատմամբ

109.— Բաղդատմամբ տարագրութիւնն երկու հաւասարութեանց մի և նոյն անծանօթին արժէքը գտնելու մէջ կը կայանայ :

Ունենամք երկու հաւասարութեանց

$$4\dagger - \ddagger = -5 \quad [1]$$
$$5\ddagger + 8\dagger = 32 \quad [2]$$

դրութիւնը, եթէ իւրաքանչիւր հաւասարութեան † անծանօթին արժէքը գտնել ուզեմք պիտի ունենամք,

$$\dagger = \frac{-5 + \ddagger}{4} \quad [3] \text{ և } \dagger = \frac{32 - 5\ddagger}{8},$$

երկու հաւասարութեանց մէջ † ին արժէքը նոյնը ըլլալով ունիմք

$$\frac{-5 + \ddagger}{4} = \frac{32 - 5\ddagger}{8},$$

‡ անծանօթով հաւասարութիւն մի զոր լուծելով կը գտնեմք $\ddagger = 6$:

‡ ին այս արժէքը [3] և [4] հաւասարութեանց միոյն մէջ դնելով կը գտնեմք

$$\dagger = \frac{1}{4}:$$

Առաջարկեալ հաւասարութեանց լուծմունք են ուրեմն

$$\ddagger = 6 \text{ և } \dagger = \frac{1}{4}:$$

Մի եւ նոյն համարտադրիչի վերածմամբ տարագրութիւն

110.— Ունենամք հետեւեալ հաւասարութեանց դրութիւնը

$$9\dagger - 5\ddagger = 43 \quad [1]$$
$$4\dagger + 3\ddagger = 40 \quad [2]$$

Այս դրութեան մէջ ‡ ին համարտադրիչները հաւասարցնելով, ‡ը կը տարագրեմք. ասոր համար [2] հաւասարութեան ‡ անծանօթին 3 համարտադրիչով

կը բազմապատկեմք [1] հաւասարութիւնը, և [1] հաւասարութեան ‡ անծանօթին 5 համարտադրիչով [2]ը: Այսպէս կ'ստանամք

$$27\dagger - 15\ddagger = 129 \quad [3]$$
$$20\dagger + 15\ddagger = 200 \quad [4]$$

հաւասարութեանց դրութիւնը, որոյ մէջ ինչպէս կը տեսնուին, ‡ ին համարտադրիչք հաւասար և հակառակ նշանով են. ուրեմն [3] և [4] հաւասարութիւնները անդամ առ անդամ գումարելով անծանօթ ‡ը պարունակող եզերք կը ջնջուին և կ'ստանամք

$$27\dagger + 20\dagger = 129 + 200 \quad [5]$$

հաւասարութիւնը, որ համարժէք է [1] և [2] հաւասարութեանց և միայն մի անծանօթով:

Այս [5] հաւասարութեան մէջէն † ին արժէքը քաղելով [1] հաւասարութեան մէջ կը դնեմք և կ'ստանամք

$$\dagger = 7. \text{ և } \ddagger = 4$$

լուծմունք:

Եթէ ուզեմք առաջարկեալ հաւասարութեանց լուծմունքը ստուգել †՝ 7 ով և ‡ը՝ 4 ով կը ներկայացնեմք [1] և [2] հաւասարութեանց մէջ:

Այլ օրինակ. ունենամք լուծել

$$5\dagger + 4\ddagger = 46 \quad [1],$$
$$7\dagger + 16\ddagger = 106 \quad [2].$$

Եթէ ուզեմք միեւնոյն եղանակաւ ‡ անծանօթը տարագրել, դիտելու եմք որ [2] հաւասարութեան ‡ անծանօթին 16 համարտադրիչը՝ [1] հաւասարութեան նոյն անծանօթին համարտադրիչին բազմապատիկն է. ուստի բաւական է [1] հաւասարութեան երկու անդամները 4 ով բազմապատկել և այս կերպով կ'ունենամք

$$20\dagger + 16\ddagger = 184 \quad [3]$$
$$7\dagger + 16\ddagger = 106 \quad [4]$$

հաւասարութեանց գրութիւնը՝ որ համարժէք է առաջնոյն ։

Այս [3] և [4] հաւասարութեանց ‡ անծանօթին համարտադրիչք հաւասար և նման նշանով ըլլալուն համար [4]ը [3]էն կը քաղեմք · ‡ անծանօթը պարունակող եզերք կը ջնջուին, և առաջարկեալ հաւասարութեանց գրութեան համարժէք

$$5† + 4‡ = 46 \qquad [5]$$

$$20† - 7† = 184 - 106 \qquad [6]$$

գրութիւն մի կ'ունենամք, զոր լուծելով կ'ստանամք

$$† = 6 \text{ և } ‡ = 4$$

Այս օրինակիս վերայ կատարուած գործողութիւնը՝ որ առաջինէն աւելի արագ կատարեցաւ, կ'ըսուի միեւնոյն համարտադրիչի վերածմամբ տարագրութիւն ։ Նախընթաց երկու օրինակաց լուծումներէն կը հետեւցնեմք ։

111. ԿԱՆՈՆ. — *Առաջին աստիճանի երկու անծանօթով երկու հաւասարութեանց մէջէն անծանօթից մին տարագրելու համար, պէտք է բազմապատկել իւրաքանչիւր հաւասարութեան երկու անդամները միւս հաւասարութեան նոյն անծանօթին համարտադրիչով, եւ ապա այս ստացուած նոր հաւասարութիւնները անդամ առ անդամ յաւելուլ կամ հանել ըստ տարագրուող անծանօթին համարտադրիչներուն, որք հակառակ կամ նոյն նշանօք են ։*

ԴԱՍ Ժ.

ԱՌԱՋԻՆ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ԵՐԵՔ ԱՆԾԱՆՕԹՕՔ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆՑ ԼՈՒԾՈՒՄ

112. Առաջին աստիճանի երեք անծանօթօք երեք հաւասարութեանց և կամ որ եւ իցէ թուով հաւասարութեանց լուծումը՝ երկու անծանօթօք երկու հաւասարութեանց վերայ տրուած տեսութեան տակ կ'իյնայ, որոյ ապացուածքն է ։

113. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Ա. — *Այլեւայլ անծանօթօք այլեւայլ հաւասարութեանց իւրաքանչիւր անդամը որ եւ իցէ թուով բազմապատկեմք կամ բաժանեմք, եւ այս ստացուած հաւասարութիւնները անդամ առ անդամ յաւելումք ու քաղեմք, նոր հաւասարութիւններ կ'ունենամք, որոց մին միւսով կրնամք ներկայացնել ։*

Զօրօրինակ . ունենամք չորս անծանօթօք չորս հաւասարութեանց գրութիւնը

$$Ա = Բ,$$
$$Ա' = Բ',$$
$$Ա'' = Բ'',$$
$$Ա''' = Բ''',$$

որ համարժէք է հետեւեալ

$$Ամ + Ա'ն = Բմ + Բ'ն,$$
$$Ա' = Բ',$$
$$Ա'' = Բ'',$$
$$Ա''' = Բ''',$$

գրութեան, որոյ մէջ մ և ն բազմապատկիչք որ եւ իցէ թիւեր են ։

Այս տեսութիւնը ապացուցանելը աւելորդ կը համարիմք, քանզի երկու անծանօթօք երկու հաւասարութեանց վերայ տրուած տեսութեան պէս է (**104**) . անցնինք ուրեմն երեք անծանօթօք երեք հաւասարութեանց լուծման ։

Առաջարկեալ հաւասարութիւնք ինչ որ լինին, իւրաքանչիւրին եզրերը միեւնոյն յայտարարի վերածելէ զկնի, այս յայտարարները կը ջնջեմք և անծանօթ քանակութիւնները առաջին անդամին մէջ անցընելով ծանուցեալները երկրորդին մէջ կ'անցընեմք. և այսպէս անծանօթից արժէքները կը սահմանեմք։

Զորօրինակ. լուծելու է հետեւեալ հաւասարութիւնները.

$$5x + 2y - 4z = 3 \quad [1],$$
$$4x + 3y + 2z = 34 \quad [2],$$
$$6x - 4y + 3z = 17 \quad [3],$$

Նախ xին արժէքը [1]էն կ'առնեմք, [2] և [3] հաւասարութեանց մէջ կը դնեմք այսպէս.

$$x = \frac{3 - 2y + 4z}{5} \quad [4]$$

$$4\left(\frac{3 - 2y + 4z}{5}\right) + 3y + 2z = 34 \quad [5],$$

$$6\left(\frac{3 - 2y + 4z}{5}\right) - 4y + 3z = 17 \quad [6],$$

հաւասարութեանց դրութիւնը, որ առաջարկեալ դրութեան համարժէք է։ Արդ [1] հաւասարութեան երկու անդամները, [5] հաւասարութեան $4\left(\frac{3-2y+4z}{5}\right)$ եզեր 4 համարտադրիչով կը բազմապատկեմք. և այս ստացուած հաւասարութիւնը [5]ին վրայ կը յաւելումք անդամ առանդամ՝ և կը գտնեմք

$$4x+3y-2z=34$$

հաւասարութիւնը որ առաջին դրութեան [2] հաւասարութեան հետ նոյն է։

Սորա նման երկրորդ դրութեան առաջին և երրորդ

հաւասարութեանց վրայ գործողութիւնները կատարելով, [3] հաւասարութիւնը յառաջ կուգայ, որ է

$$6x - 4y + 3z = 17,$$

ուրեմն հաւասարութեանց երկրորդ դրութիւնը առաջին դրութեան համարժէք է։

Երկրորդ դրութեան վերջի երկու հաւասարութիւնները պարզելէ զկնի, կը մնայ մեզ լուծել հետեւեալ երեք

$$x = \frac{3 - 2y + 4z}{5}$$

$$7y + 26z = 158$$
$$-32y + 39z = 67$$

հաւասարութիւնները, որք առաջարկեալ հաւասարութիւններէն աւելի պարզ են, սոյա անծանօթից մին՝ այսինքն yը երկու հաւասարութեանց մէջէն կը տարագրեմք և կ'ունենամք

$$x = \frac{3 - 2y + 4z}{5}$$

$$y = \frac{158 - 26z}{7}$$

$$-32\left(\frac{158 - 26z}{7}\right) + 39z = 67 ։$$

Այս հաւասարութեանց իւրաքանչիւրը առաջարկեալ հաւասարութեանց անծանօթներէն մի պակաս ունենալով, նախ zին արժէքը կը փնտռեմք և կը գտնեմք

$$z = 5.$$

zին այս արժէքը երկրորդ հաւասարութեան մէջ փոխադրելով կ'ստանամք

$$y = 4.$$

‡ին և §ին արժէքները գտնելէ յետոյ, +ինը ստանա-լու համար ‡ը 4ով և §՝ 5ով կը ներկայացնեմք առա-ջին դրութեան հաւասարութեանց միոյն մէջ։ Այսպէս կ'ստանամք

+ = 3 ։

Վերջապէս եթէ այս հաւասարութեանց լուծումը ստուգել ուզեմք, +, ‡, և § անծանօթ քանակու-թիւնները 3, 4 և 5 թիւերով առաջարկեալ հաւասա-րութեանց մէջ կը դնեմք, երբ նոյնութիւններ ստա-նամք, հաւասարութեանց լուծմունք ստոյգ են։ Ինչ-պէս հետևեալ գործողութիւնք կը ցուցնեն․

15 + 8 — 20 = 3
12 + 12 + 10 = 34
18 — 16 + 15 = 17

ուրեմն հաւասարութեանց լուծմունք ճիշդ են։

Այս օրինակէն կը հետևցնեմք

114. ԿԱՆՈՆ.— *Երեք անծանօթով երեք հաւասարութիւններ լուծելու համար, նախ հաւասարութեանց միոյն մէջէն + անծանօ-թին արժէքը կ'առնումք եւ կը փոխադրեմք միւս հաւասարութեանց մէջ։*

Յետոյ այս նոր ստացուած հաւասարութեանց մէջէն ‡ին ար-ժէքը կ'առնումք երրորդ հաւասարութեան մէջ կը դնեմք եւ §ին նկատմամբ այս հաւասարութիւնը կը լուծեմք. §ին արժէքը գտնե-լէ զկնի ‡ին արժէքը կը գտնեմք եւ սոցա միջոցաւ + անծանօ-թը պարունակող հաւասարութիւնը կը լուծենք։

115. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ.— Առաջին աստիճանի երեք ան-ծանօթով երեք հաւասարութիւնք՝ միայն մի և սահ-մանեալ լուծում մի ունին։

Առաջին աստիճանի որ և է Ն թուով և Ն անծանօթով հաւասարութեանց լուծում

116. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԿԱՆՈՆ․ — *Որ և է ɂ թուով անծանօ-թօք ɂ թուով հաւասարութիւնները լուծելու համար պէտք է, հաւասարութեանց մի անծանօթին արժէքը առնել եւ այս արժէքը միւս ամեն հաւասարութեանց մէջ փոխադրել* (**106**). *այս կեր-պով ɂ — 1 անծանօթով ɂ — 1 հաւասարութիւններ կ'ունենամք, որոց դրութիւնը առաջին հաւասարութեանց դրութեան համարժէք է։ Յետոյ հաւասարութեանց մէջէն միոյն ալ անծանօթին արժէքը առնելով կը փոխադրեմք բոլոր միւս հաւասարութեանց մէջ, եւ կ'ունենամք ɂ — 2 թուով ɂ — 2 թիւ անծանօթ պարունակող հա-ւասարութիւններ, եւ այսպէս շարունակելով կը հասնիմք մի ան-ծանօթով մի հաւասարութեան։ Այս անծանօթին արժէքը գտնելէ յետոյ կը դնենք զայն վերջընթեր 2 անծանօթով հաւասարութեան մէջ, եւ երկրորդ անծանօթին ալ արժէքը կը գտնենք, եւ յետոյ այս երկու արժէքները կը դնեմք 3 անծանօթով հաւասարութեան մէջ եւ երրորդ անծանօթին արժէքն ալ կ'ստանամք, եւ այսպէս կը շարունակեմք մինչեւ որ ɂ թիւ անծանօթից ամենուն արժէքը ունենամք։*

(Կրնամք նաեւ միեւնոյն համարատարրիչի վերածմամբ հաւա-սարութեանց միոյն եւ միւսոյն մէջէն մի անծանօթը տարագրել):

Զոր օրինակ․ ունենամք հետևեալ հաւասարու-թեանց դրութիւնը

+ + 2‡ + 3§ + 4ʒ = 30
2+ — 3‡ + 5§ — 2ʒ = 3
3+ + 4‡ — 2§ — ʒ = 1
4+ — ‡ + 6§ — 3ʒ = 8
(1) ։

Հաւասարութեանց առաջինը +ի նկատմամբ կը լու-ծեմք և կ'ունենամք

+ = 30 — 2‡ — 3§ — 4ʒ ։

Այս արժէքը միւս երեք հաւասարութեանց մէջ կը փոխադրեմք և կ'ունենամք

$$\left.\begin{array}{r} 7\,\text{‡} + \quad \text{§} + 10\,\text{϶} = 57 \\ 2\,\text{‡} + 11\,\text{§} + 13\,\text{϶} = 89 \\ 9\,\text{‡} + 6\,\text{§} + 19\,\text{϶} = 112 \end{array}\right\} \quad [2]$$

դրութիւնը համարժէք առաջնոյն ։

Նոյնպէս այս նոր դրութեան առաջին հաւասարութիւնը § ի նկատմամբ կը լուծեմք և կ'ունենամք

$$\text{§} = 57 - 7\text{‡} - 10\text{϶}$$

արժէքը, զոր միւս երկու հաւասարութեանց մէջ փոխադրելով կ'ունենամք

$$\left.\begin{array}{r} 75\text{‡} + 97\text{϶} = 538 \\ 33\text{‡} + 41\text{϶} = 230 \end{array}\right\} [3]$$

դրութիւնը որոյ ‡ անծանօթին արժէքը ϶ ին միջոցաւ է

$$\text{‡} = \frac{230 - 41\text{϶}}{33},$$

այս արժէքը, $75\text{‡} + 97\text{϶} = 538$ հաւասարութեան մէջ փոխադրելով կ'առնումք

$$126\text{‡} = 504 \quad [4]$$

դրութիւնը, այսպէս առաջարկեալ [1] դրութեան համարժէք դրութիւնը կը կազմեմք հետևեալ հաւասարութիւններով

$$\text{†} = 30 - 2\text{‡} - 3\text{§}4\text{϶}$$
$$\text{§} = 57 - 7\text{‡} - 10\text{§}$$
$$\text{‡} = \frac{230 - 41\text{϶}}{33}$$
$$126\text{϶} = 504$$

Այս հաւասարութեանց վերջինէն կ'առնումք $\text{϶} = 4$, այս արժէքը վերջընթեր հաւասարութեան մէջ փոխադրելով կ'ունենամք $\text{‡} = 2$, այս երկու արժէքները երրոր-

դին մէջ փոխադրելով կ'ունենամք $\text{§} = 3$, և վերջապէս այս երեք արժէքները առաջին հաւասարութեան մէջ դնելով կ'ունենամք $\text{†} = 1$, որ առաջարկեալ հաւասարութեանց լուծումն է ։

$$\text{†} = 1,\ \text{‡} = 2,$$
$$\text{§} = 3,\ \text{϶} = 4 \text{ ։}$$

113. ՄԱՍՆԱՒՈՐ ՀՆԱՐՔ. — Շատ անգամ հաւասարութեանց անծանօթներն իրարու նկատմամբ այնպիսի առնչութիւն մի ունին որ, նոյն հաւասարութիւնները լուծելու համար մասնաւոր հնար մը գործածել պէտք կըլլայ, այսինքն հաւասարութիւնները այնպիսի եղանակաւ մի լուծել որ աւելի արագ և ընդհանուր կանոնէն տարբեր լինի, ասոր համար կանոն մի չունիմք, բայց երեք օրինակաց միջոցաւ այս պիտի ցուցնեմք.

Օրինակ Ա. Ունենամք

$$\text{†} + \text{‡} + \text{§} = \text{τ} \quad (1)$$
$$\text{϶} + \text{†} + \text{‡} = \text{ŧ} \quad (2)$$
$$\text{§} + \text{϶} + \text{†} = \text{ƀ} \quad (3)$$
$$\text{‡} + \text{§} + \text{϶} = \text{ˉ} \quad (4)$$

հաւասարութեանց դրութիւնը, եթէ այս հաւասարութիւնները անդամ առ անդամ գումարեմք, կը գտնեմք

$$3(\text{†} + \text{‡} + \text{§} + \text{϶}) = \text{ˉ} + \text{ƀ} + \text{ŧ} + \text{τ}$$

հաւասարութիւնը, որոյ մէջ իւրաքանչիւր անծանօթ երեք անգամ գըտնուած է, հետևաբար

$$\text{†} + \text{‡} + \text{§} + \text{϶} = \frac{\text{ˉ} + \text{ƀ} + \text{ŧ} + \text{τ}}{3} \quad (5)$$

առաջարկեալ հաւասարութեանց իւրաքանչիւրը (5) էն քաղելով կ'ըստանամք

$$\text{϶} = \frac{\text{ˉ} + \text{ƀ} + \text{ŧ} + \text{τ}}{3} - \text{τ},$$
$$\text{§} = \frac{\text{ˉ} + \text{ƀ} + \text{ŧ} + \text{τ}}{3} - \text{ŧ},$$

$$ր = \frac{ա+բ+գ+դ}{3} - բ,$$

$$ք = \frac{ա+բ+գ+դ}{2} - ա ։$$

Օրինակ Բ. Եռանկեան մի երեք կողերը հաշուել, գիտնալով եռանկեան իւրաքանչիւր գագաթի հակադիր կողին մէջ տեղին միացնող կիսող գծի երկայնութիւնը ։

Դիցուք թէ եռանկեան երեք կողից երկայնութիւնք ա. բ. գ. են և նոյա համապատասխանող կիսող գծերուն երկայնութիւնք ա′. բ′. գ′. ։ Երկրաչափական մի տեսութենէ գիտեմք արդէն

$$բ^2 + գ^2 = 2ա'^2 + \frac{ա^2}{2} \quad (1)$$

$$գ^2 + ա^2 = 2բ'^2 + \frac{բ^2}{2} \quad (2)$$

$$ա^2 + բ^2 = 2գ'^2 + \frac{գ^2}{2} \quad (3)$$

Երեք հաւասարութիւնները անդամ առ անդամ գումարելով կ'առնամք

$$2(ա^2+բ^2+գ^2) = 2(ա'^2+բ'^2+գ'^2) + \frac{ա^2+բ^2+գ^2}{2} .$$

ուստի դիւրութեամբ կը քաղեմք

$$ա^2+բ^2+գ^2 = \frac{4}{3}(ա'^2+բ'^2+գ'^2) \quad [4] .$$

երեք կողից քառակուսիներուն գումարը գիտնալով, եթէ (4) էն (1)ը բառնամք, $բ^2+գ^2$ կը ջնջուին և կ'ունենամք

$$ա^2 = \frac{4}{3}(ա'^2+բ'^2+գ'^2) - 2ա'^2 - \frac{ա^2}{2} .$$

ուստի կը հետևի

$$ա^2 = \frac{4}{9}(2բ'^2+2գ'^2-ա'^2) ։$$

Նոյնպէս (2) և (3) հաւասարութիւնները (4)էն բառնալով կ'առնամք $բ'^2+գ'^2$. բայց աւելի պարզ կ'ըլլայ դիտելով որ, եթէ $բ^2$ը $գ^2$ի, $գ^2$ը $ա^2$ի և $ա'^2$ը $բ'^2$ի փոխեմք (1) հաւասարութենէ (2)ը կ'անցնիմք. ուրեմն $բ^2$ի արժէքը առնալու համար $ա^2$ պարունակող տարազին մէջ գրերուն այս փոխադրութեան ձևը գործածելու է. Այսպէս

$$բ^2 = \frac{4}{9}(2ա'^2+2գ'^2-բ'^2) ,$$

Նաև

$$գ^2 = \frac{4}{9}(2ա'^2+2բ^2-գ'^2) ։$$

$ա^2$, $բ^2$ և $գ^2$ քառակուսիք ծանուցեալ ըլլալով՝ ա, բ և գ կողերն ևս սահմանուած են ։

Օրինակ Գ.

$$\frac{1}{ք} + \frac{1}{ր} = գ \quad [1]$$

$$\frac{1}{ր} + \frac{1}{ց} = բ \quad [2]$$

$$\frac{1}{ց} + \frac{1}{ք} = ա \quad [3] ։$$

Այս երեք հաւասարութիւնները անդամ առ անդամ՝ գումարելով կ'ունենամք

$$2\left(\frac{1}{ք}+\frac{1}{ր}+\frac{1}{ց}\right) = ա+բ+գ$$

$$\frac{1}{ք}+\frac{1}{ր}+\frac{1}{ց} = \frac{ա+բ+գ}{2} \quad [4] ։$$

(1), (2) և (3) հաւասարութիւնները մի առ մի (4)էն կը բառնամք և կ'առնամք հետևեալները

$$\frac{1}{ց} = \frac{ա+բ-գ}{2} ,$$

$$\frac{1}{ր} = \frac{ա+գ-բ}{2} ,$$

$$\frac{1}{ք} = \frac{բ+գ-ա}{2} ,$$

յորոց կը հետևցնեմք

$$ց = \frac{2}{ա+բ-գ} ,$$

$$ր = \frac{2}{ա+գ-բ} ,$$

$$ք = \frac{2}{բ+գ-ա} ,$$

լուծումները որք առաջարկեալ հաւասարութիւնները կ'ստուգեն ։

118. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ — *Ինչպէս նախընթաց օրինակներէն կը տեսնուի թէ հաւասարութեանց դրութեան մի անծանօթից արժէքները սահմանելու համար անհրաժեշտ պայմաններէն մին էր անծանօթից թուով հաւասարութիւններ ունենալ. հակառակ պարագայի մէջ, ուր հաւասարութեանց թիւը անծանօթից թուէն պակաս կը գտնուի, անկարելի է անծանօթից արժէքները սահմանել. վասնզի, ըստ* (**116**) *ի, երկու անծանօթով հաւասարութիւն մի պիտի ստանամք, որ անծանօթայ արժէքը սահմանելու համար չբաւեր: Նոյնպէս հետեւեալ դիպաց մէջ զատ զատ նկատողութեան պիտի առնումք հաւասարութեան մի լուծուելոյ պայմաններն:*

դէպ անհնարութեան եւ անսահմանութեան

119. ԴԷՊ ԱՆՀՆԱՐՈՒԹԵԱՆ — *Երբեմն այնպէս կը պատահի որ անծանօթից թուով հաւասարութեանց լուծումը հակասական կ'ըլլայ. զոր օրինակ առնեմք հետեւեալ դրութիւնը*

$$4\dagger - 2\ddagger = 22 \quad [1],$$
$$10\dagger - 5\ddagger = 56 \quad [2].$$

$\ddagger$ը տարադրելու համար [1] *հաւասարութիւնը 5ով և* [2]*ը 2ով կը բազմապատկեմք, և կ'ունենամք այսպէս*

$$20\dagger - 10\ddagger = 110 \quad [3]$$
$$20\dagger - 10\ddagger = 112 \quad [4]$$

հաւասարութիւնները, որք անհամաձայն են, զի մին միւսէն բառնալով կ'ստանամք

$$0 = 2 :$$

Ուրեմն առաջարկեալ դրութիւնը լուծելը անհնար է, որովհետեւ անծանօթից միայն տարադրութեամբ

կը տեսնեմք որ երկու անհաւասար թուոց մէջ հաւասարութիւն մի կայ:

120. ԴԷՊ ԱՆՍԱՀՄԱՆՈՒԹԵԱՆ. — *Երբեմն հաւասարութեանց լուծման մէջ այնպիսի հաւասարութեանց կը հանդիպիմք, որոց անծանօթից արժէքները ինչ որ լինին հաւասարութիւնք անփոփոխ կը մնան:*

Զորօրինակ ունենամք

$$4\dagger + 6\ddagger = 38$$
$$10\dagger + 15\ddagger = 95$$

հաւասարութիւնները, որոց մէջէն եթէ $\ddagger$ը տարադրել ուզեմք, առաջին հաւասարութիւնը 5ով, և երկրորդը 2ով կը բազմապատկեմք և կ'ունենամք,

$$20\dagger + 30\ddagger = 190$$
$$20\dagger + 30\ddagger = 190$$

առաջարկեալ երկու հաւասարութիւնք նոյնութեանց վերածեցան. ըսել է երկու անծանօթով մի հաւասարութիւն ունիմք, որոյ լուծումը անսահման է: Այս պարագայիս մէջ լուծման անսահմանութիւնը կը տեսնուի, զի անծանօթից միայն տարադրութեամբ միւսը եւս տարադրած կ'ըլլամք և կ'ստանամք

$$0 = 0$$

նոյնութիւնները:

ՎԱՐԺՈՒԹԻՒՆՔ

Լուծել հետեւեալ հաւասարութեանց դրութիւններն.

1. $3\ddagger - 7\dagger = 4$, $2\ddagger + 5\dagger = 22$ — Պատ. $\dagger = 2$, $\ddagger = 6$:
2. $4\dagger + 3\ddagger = 24$, $5\dagger - 2\ddagger = 7$ — Պատ. $\dagger = 3$, $\ddagger = 4$:
3. $60\dagger - 17\ddagger = 146$, $48\dagger + 13\ddagger = 170$ — Պատ. $\dagger = 3$, $\ddagger = 2$:

4. $\begin{cases} աx+բy=2աբ \\ բx+աy=ա^2+բ^2 \end{cases}$ Պատ. $x=բ \cdot y=ա$ ։

5. $\begin{cases} x+y=30 \\ 19x-11y=486 \end{cases}$ Պատ. $x=27{,}2 \cdot y=2{,}8$ ։

6. $\begin{cases} x+աy=բ \\ աx-բy=գ \end{cases}$ Պատ. $x=\dfrac{բ^2+ագ}{ա^2+բ} \cdot \quad y=\dfrac{աբ-գ}{ա^2+բ}$ ։

7. $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{7}=21 \\ \dfrac{3x}{4}+\dfrac{2y}{5}=32 \end{cases}$ Պատ. $x=24 \cdot y=35$ ։

8. $\begin{cases} \dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{5}y=30 \\ \dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{15}y=13 \end{cases}$ Պատ. $x=72 \cdot y=60$ ։

9. $\begin{cases} 4x-3y+2z=9 \\ 2x+5y-3z=4 \\ 5x+6y-2z=18 \end{cases}$ Պատ. $x=2$, $y=3$, $z=5$ ։

10. $\begin{cases} 10x-30y+20z=0 \\ 8x+12y-16z=80 \\ 27x-18y+45z=234 \end{cases}$ Պատ. $x=8$, $y=4$, $z=2$ ։

11. $\begin{cases} աy+բx=գ \\ գx+աz=բ \\ բz+գy=ա \end{cases}$ Պտ. $x=\dfrac{բ^2+գ^2-ա^2}{2բգ} \cdot \quad y=\dfrac{ա^2+գ^2-բ^2}{2ագ}$

$z=\dfrac{ա^2+բ^2-գ^2}{2աբ}$ ։

12. $\begin{cases} 5x-6y+4z=15 \\ 7x+3y-4z=9 \\ 2x+y+6z=46 \end{cases}$ Պատ. $x=3$, $y=4$, $z=6$ ։

13. $\begin{cases} 2x-5y+3z=1 \\ 7x+3y-2z=7 \\ 5x+2y+z=12 \end{cases}$ Պատ. $x=1$, $y=2$, $z=3$ ։

14. $\begin{cases} \dfrac{մ}{x}+\dfrac{ն}{y}=ա, \\ \dfrac{ն}{x}+\dfrac{մ}{y}=բ. \end{cases}$

Իբրեւ օժանդակ անծանօթ կ'առնենք $\dfrac{1}{x}$ եւ $\dfrac{1}{y}$ը եւ կը գտնենք

Պատ. $x=\dfrac{մ^2-ն^2}{ամ-բն} \cdot y=\dfrac{մ^2-ն^2}{բմ-ան}$ ։

15. $\begin{cases} x+y+z+u=ե \\ v+x+y+z=դ \\ u+v+x+y=գ \\ z+u+v+x=բ \\ y+z+u+v=ա \end{cases}$

այս հաւասարութեանց երկրորդ անդամոց գումարը Գ սեպելով կ'ստանանք

$$x=\frac{Գ}{4}-ա \cdot \quad y=\frac{Գ}{4}-բ \cdot \quad z=\frac{Գ}{4}-գ \cdot \quad u=\frac{Գ}{4}-դ \cdot$$

$$v=\frac{Գ}{4}-ե \text{ ։}$$

16. $\dfrac{x}{3}+75+\dfrac{5x}{12}-35=\dfrac{3x}{4}+49$ (անհնարութիւն)։

17. $\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{5-x}{6}=2+\dfrac{x+1}{3}$ (անսահմանութիւն)։

18. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{7x}{5}+2y-7=40-x+\dfrac{y}{3} \\ \dfrac{29x}{5}-\dfrac{2y}{9}+3=56+\dfrac{x}{5}-\dfrac{37y}{9} \end{array}\right\}$ (անհնարութիւն)։

19. $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}+5$, $\frac{3x}{16}=\frac{y}{8}+\frac{15}{8}$ (անսահմանութիւն)

20. $2x+y-8z=10$, $3x-2y+5y=14$, $8x-3y+2z=35$ (անհնարութիւն)

ԴԱՍ ԺԱ.

ԱՌԱՋԻՆ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԵԱՆՑ ԼՈՒԾՈՒՄ

121. Առաջարկութիւն մը լուծելու համար պէտք է.

1° *Առաջարկութիւնը հաւասարութեան դնել.*

2° *Հաւասարութեան լուծում.*

3° *Լուծման վրայ քննադատութիւն:*

Առաջարկութիւն մը հաւասարութեան դնելն է առաջարկութիւնը սովորական լեզուէ թարգմանել ի հանրահաշուական լեզու. այսինքն՝ առաջարկութեան ծանօթ և անծանօթ քանակութեանց վրայ կատարելի գործողութիւնները նշանակելով, սոյն քանակութեանց մէջ գտնուած հաւասարութեան յարաբերութիւնը ցուցնել, իբրեւ թէ անծանօթ քանակութեանց արժէքները գտնելէ յետոյ ուզէինք առաջարկութիւնը ստուգել:

Առաջարկութեան մը լուծման ժամանակ երեք դժուարութիւնք կը հանդիպին. 1° կան այնպիսի առաջարկութիւնք որք հաւասարութեան ձեւով տրուած են և դիւրութեամբ հաւասարութեան կը դրուին. 2° կան այնպիսի առաջարկութիւնք որք սակաւ ինչ իմաստասիրութեամբ հաւասարութեան կը դրուին. 3° կան նաեւ այնպիսի առաջարկութիւնք, որոց ծանօթները

անծանօթից հետ կապերը խիստ դժուարին, գրեթէ ուղղակի կերպով զայնս հաւասարութեան դնելը անկարելի է, այսինքն առանց օժանդակ անծանօթից գործածութեան. այս երեք կարգի առաջարկութեանց վրայ օրինակներ պիտի տամք:

Երբ առաջարկութիւն մը հաւասարութեան ձեւով կը տրուի, անծանօթ քանակութիւնք այլեւայլ տառերով նշանակելով առաջարկութիւնը հաւասարութեան դնելու է. այնպէս որ որչափ անծանօթք գտնուին նոյն թուով եւս հաւասարութիւնք ըլլալու են:

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Ա. — Գտնել թիւ մը՝ որոյ կէսը իւր $\frac{1}{3}$ին վրայ յաւելցնելով հաւասար ըլլայ մնացորդին $\frac{3}{4}$ին աւել 85ին:

Դիցուք պահանջուած թիւը x. ըստ առաջարկութեան ասացուածին, ունիմք

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{3}{4}\left\{x-\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right)\right\}+85,$$

զոր պարզելով կ'ունենամք

$$\frac{5}{6}x=\frac{3}{4}\times\frac{x}{6}+85$$

հաւասարութիւնը, որոյ յայտարարները ջնջելով կ'ստանամք

$$20x=3x+85\times24.$$

անծանօթները առաջին անդամին մէջ կ'անցընեմք և կ'ունենամք

$$17x=2040.$$

ուստի

$$x=\frac{2040}{17}=120,$$

որ փնտռուած թիւն է:

ՍՏՈՒԳՈՒԹԻՒՆ. — Ինչպէս կը տեսնեմք, 120ին կէսը որ է 60, իւր $\frac{1}{3}$ին այսինքն 40ի վրայ յաւելցնելով կ'ստանամք 100. Մնացորդն է 20 որոյ $\frac{3}{4}$ կ'ընէ 15, այս թիւը 85ին վրայ գումարելով կ'ստանամք 100:

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Բ. — Գտնել թիւ մը որ չորս թուանշաններէ կազմեալ ըլլայ. գիտնալով որ միաւորը տասնաւորին եռապատիկն է. հարիւրաւորին և տասնաւորին տարբերութիւնը հաւասար է հազարաւորին. չորս թուանշանաց գումարն է 15. Եթէ 8082 թիւը իւր վրայ յաւելումք, գումարը փնտռուած թուոյն շրջեալը կ'ըլլայ:

Հետեւեալ տառերով նշանակեմք անծանօթ թուոյ իւրաքանչիւր թուա-

նշանները ինչպէս դ-ով միաւորը, գ-ով տասնաւորը, բ-ով հարիւրաւորը և ա-ով հազարաւորը հետեւաբար.

$$1000ա + 100բ + 10գ + դ$$

բազմեզրը փնտռուած թիւը կը ցուցնէ և

$$1000դ + 100գ + 10բ + ա$$

բազմեզրը նոյն թուոյն շրջեալը:

Առաջարկութեան ասացուածէն կ'ստանամք հետեւեալ

$$դ = 3գ \quad [1]$$
$$գ - բ = ա \quad [2]$$
$$դ + գ + բ + ա = 15 \quad [3]$$

և $1000ա + 100բ + 10գ + դ + 8082 = 1000դ + 100գ + 10բ + ա \quad [4]$

հաւասարութիւնները:

(4)ը պարզելու համար անծանօթ եզրերը նախ առաջին անդամին մէջ կը ժողովեմք, և ապա նոր ստացուած հաւասարութեան երկու անդամները 9ով կը բաժնեմք և կ'ստանամք

$$111ա + 10բ - 10գ - 111դ = -898 :$$

Այս չորս անծանօթք չորս հաւասարութեանց լուծումէն դիւրութեամբ կ'ստանամք

$$ա = 1 \cdot բ = 2 \cdot գ = 3 \cdot և\ դ = 9,$$

ուստի փնտռուած թիւն է 1239:

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Գ. — Գտնել երկու թիւ որոց տարբերութիւնը գումարը և արտադրեալը իրարու հետ այնպէս համեմատին, ինչպէս գ, բ, ա թիւերը:

Դիցուք երեք հաւասար կշռոց արժէքը ք. երկու թուոց տարբերութիւնը գք, գումարը բք և արտադրեալը աք. գումարէն և տարբերութենէն կը հետեւցնեմք թէ այս թիւերն են

$$\frac{բք + գք}{2} \quad և \quad \frac{գք - բք}{2} :$$

Իւրեանց արտադրեալն է

$$\frac{բ^2ք^2 - գ^2ք^2}{4} .$$

յորմէ կը քաղեմք

$$\frac{բ^2ք^2 - գ^2ք^2}{4} = աք .$$

հետեւաբար

$$ք = \frac{4ա}{բ^2 - գ^2} .$$

ուրեմն երկու թուոց գումարն է $\frac{4աբ}{բ^2 - գ^2}$, և տարբերութիւնը $\frac{4ագ}{բ^2 - գ^2}$:

Այս երկու թուոց մինն է

$$\frac{2ա(բ + գ)}{բ^2 - գ^2} = \frac{2ա}{բ - գ},$$

և միւսը

$$\frac{2ա(բ - գ)}{բ^2 - գ^2} = \frac{2ա}{բ + գ} :$$

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Դ. — Չորս հոգի ընկերութիւն մի կազմեցին. տարի մը շարունակելէ զկնի, իւրեանց շահը հետեւեալ եղանակաւ մէջերնին բաժնեցին. Ա.ը առաւ 8100 Ֆր. աւելի մնացորդին ¼ը. Բ.ը 16200 Ֆր. աւելի մնացորդին ¼ը. Գ.ը 24300 Ֆր. և աւելի մնացորդին ¼ը. Իւրեանց շահը այսպէս բաժնելէ զկնի տեսան որ իւրաքանչիւրին բաժինք իրարու հաւասար էր. Ի՞նչ էր իւրաքանչիւրին շահը:

Դիցուք ք ամբողջ շահը, և չորս ընկերաց բաժինք եւս $բ_1$, $բ_2$, $բ_3$ և $բ_4$. ըստ առաջարկութեան ասացուածին հետեւեալ հաւասարութիւնները կ'ունենամք.

$$բ_1 = 8100 + \frac{ք - 8100}{4} \quad [1],$$

$$բ_2 = 16200 + \frac{ք - բ_1 - 16200}{4} \quad [2],$$

$$բ_3 = 24300 + \frac{ք - բ_1 - բ_2 - 24300}{4} \quad [3],$$

$$բ_4 = 32400 + \frac{ք - բ_1 - բ_2 - բ_3 - 32400}{4} \quad [4],$$

$$ք = բ_1 + բ_2 + բ_3 + բ_4 \quad [5],$$

Այս հաւասարութիւնները լուծելու համար ք-ին արժէքը (4)ին մէջ կը փոխադրեմք և կ'ստանամք

$$բ_4 = 32400$$

որ չորրորդին բաժինն է, քանզի իւրաքանչիւր բաժանորդ իրեն ինկած բաժինը առնելէ զկնի պէտք է որ չորրորդը 32400 ֆք. առնելով ստակ մի չը մնայ ։

Երբ ք՝ $\text{ֆ}_1 + \text{ֆ}_2 + \text{ֆ}_3 + 32400$ արժէքով (3) հաւասարութեան մէջ փոխադրեմք կ'ստանամք

$$\text{ֆ}_3 = 35100 .$$

և ապա ք՝ $\text{ֆ}_1 + \text{ֆ}_2 + 35100 + 32400$ արժէքով (2) հաւասարութեան մէջ փոխադրելով կը գտնեմք

$$\text{ֆ}_2 = 38700 .$$

վերջապէս ք՝ $\text{ֆ}_1 + 38700 + 35100 + 32400$ կամ $\text{ֆ}_1 + 106200$ով ներկայացնելով (1) հաւասարութեան մէջ կ'ստանամք

$$\text{ֆ}_1 = 43500 .$$

հետեւաբար $\text{ք} = 149700$ ։

122. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ Ա. — Երբ առաջարկութիւն մը հաւասարութեան դրուած ժամանակ դժուարութեան հանդիպիմք, ինչպէս նախընթաց օրինակաց վերայ տեսնուեցաւ, հետեւեալ եղանակաւ դժուարութիւնք կ'ամբառնան ։

Իւրաքանչիւր անծանօթ քանակութեան տեղ թիւեր կառնեմք և կը փորձեմք թէ անծանօթից արժէքները առաջարկութեան հարցման կը պատասխանե՞ն թէ ոչ. երբ այս գործողութիւնք լմնան, փնտռուած անծանօթ քանակութիւնները այլեւայլ տառերով կը նշանակեմք և թուոց վերայ կատարուած նոյն գործողութիւնները կը կատարեմք այս տառերուն վերայ ։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Ե. — Նկարիչ մը արուեստանոց մը կը վարձէ և միամեայ համար արուեստանոցի իբրեւ վարձք խօսք կուտայ 1500 ֆ.ք. և մէկ նկար տալ. վեց ամիս վերջը արուեստանոցը կը թողու և վեց ամսոյ վարձուց

փոխարէն խօստացած նկարը և 600 ֆ.ք. կուտայ. ի՞նչ է նկարին գինը ։

Դիցուք նկարին գինը 200 ֆ.ք. ուստի արուեստանոցին տարեկան վարձքը պիտի ըլլայ 1500 ֆ.ք. աւելի 200 ֆ.ք. այսինքն 1700 ֆ.ք. նկարիչը կը պարտի վեցամսոյ համար վճարել $\frac{1700}{2} = 850$ ֆ.ք. բայց առաջարկութեան ասացուածին նայելով նկարիչը տուած է 600 ֆ.ք. աւելի 200 ֆ.ք. այսինքն 800 ֆ.ք. ուստի ենթադրեալ 200 թիւը իբրեւ նկարին գինը սխալ է. եթէ նկարին անծանօթ գինը ք-ով նշանակեմք և վերը կատարուած գործողութիւնները այս տառին վերայ եւս կատարեմք. երկու տարբեր գումարներ կ'ստանամք արուեստանոցին վեցամսոյ վարձուց համար. այս երկու գումարները հաւասարութեան նշանով զատելով առաջարկութիւնը հաւասարութեան դրած կըլլամք.

Արուեստանոցին տարեկան վարձքը $1500 + \text{ք}$ ֆք. ըլլալով, վեց ամսոյ վարձը պիտի ըլլայ $\frac{1500+\text{ք}}{2}$. ըստ առաջարկութեան ասացուածին նկարիչը արուեստանոցին տիրոջ վճարեց $600 + \text{ք}$. ուրեմն ունիմք

$$\frac{1500 + \text{ք}}{2} = 600 + \text{ք}$$

այս հաւասարութիւնը լուծելով անծանօթ ք-ին արժէքը կ'ստանամք 300 ֆք. որ առաջարկութիւնը կը լուծէ. փորձը դիւրին է. Եթէ ուզեմք այս առաջարկութեան հանրական ձեւ մի տալ, և հասկնալ թէ 1500 և 600 թիւերը ի՞նչ սահմաններու մէջ կրնան փոփոխիլ, որպէս զի առաջարկութիւնը միշտ հնարաւոր ըլլայ, այս թիւերը տառերով կը ներկայացնեմք. 1500ը ա-ով 600ը բ-ով առաջարկութեան հանրահաշուական մեկնութիւնը կ'ըլլայ

$$\frac{\text{ա} + \text{ք}}{2} = \text{բ} + \text{ք} .$$

յորմէ կը հետեւի $\text{ք} = \text{ա} - 2\text{բ}$.

այս տարազէն ինչպէս կը տեսնուի թէ, ա թիւը բ-ին կրկի՛նը ըլլալով ք-ին արժէքը կ'ոչնչանայ, այսինքն նկարիչը իւր նկարը չտար, կամ եթէ տայ՝ գինը արուեստանոցին վարձուց տեղ չհաշուէր ։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Զ. — Հայր մը ժառանգութիւնը իւր որդւոց մէջ բաժնեց հետեւեալ կերպով. առաջնոյն տուաւ ա գումար և մնացածին ն-րդ. մասը. երկրորդին տուաւ 2ա և մնացածին ն-րդ. մասը. երրորդին տուաւ 3ա և մնացածին ն-րդ. մասը. և այսպէս շարունակեց մինչեւ որ իւր ամբողջ ունեցածը բաժնեց և տեսաւ որ տղայոց բաժինք իրարու հաւասար էին. որչա՞փ էր ժառանգութիւնը, տղայոց թիւը և իւրաքանչիւրին բաժինը :

Դիցուք հօր ժառանգութիւնը ք. առաջին տղուն բաժինն է

$$ա + \frac{ք - ա}{ն} \quad կամ \quad \frac{ք + (ն-1)ա}{ն} :$$

Միւս տղայոց կը մնայ

$$ք - \frac{ք + (ն-1)ա}{ն} \quad կամ \quad \frac{(ն-1)(ք-ա)}{ն} ;$$

Երկրորդ տղան ևս կ'առնէ 2ա և կը մնայ

$$\frac{(ն-1)(ք-ա)}{ն} - 2ա, \quad կամ \quad \frac{(ն-1)ք - (3ն-1)ա}{ն}$$

Ուրեմն երկրորդ տղուն բաժինն է

$$2ա + \frac{(ն-1)ք-(3ն-1)ա}{ն^2}, \quad կամ \quad \frac{(ն-1)ք+(2ն^2-3ն+1)ա}{ն^2} ;$$

Ըստ առաջարկութեան ասացուածին երկու տղայոց բաժինք իրարու հաւասար ըլլալով, ունիմք

$$\frac{ք+(ն-1)ա}{ն} = \frac{(ն-1)ք+(2ն^2-3ն+1)ա}{ն^2}$$

այս հաւասարութիւնը լուծելով կը գտնեմք

$$ք = (ն-1)^2 ա :$$

Ժառանգութիւնը տուող տարազը գտնելու համար, ինչպէս երկու տղայոց բաժինները գործածեցինք, նոյնպէս նաեւ պէտք է այս բաժիններուն արժէքը գտնել. արդ տղայոց թիւը նախ փնտռելէ յառաջ ժառանգութիւնը տղայոց բաժինով կը բաժնեմք, բաժանման քանորդը տղայոց թիւը կը ցուցնէ :

Առաջին տղուն բաժինն էր

$$\frac{ք+(ն-1)ա}{ն} \quad կամ \quad \frac{(ն-1)^2ա+(ն-1)ա}{ն} \quad և \; կամ \; (ն-1)ա.$$

Երկրորդ տղուն բաժինն է

$$\frac{(ն-1)ք+(2ն^2-3ն+1)ա}{ն^2} = \frac{(ն-1)^3ա+(2ն^2-3ն+1)ա}{ն^2} =$$

$$\frac{(ն^3-ն^2)ա}{ն^2} = (ն-1)ա :$$

Երրորդ տղուն բաժինն է

$$3ա + \frac{ք-2(ն-1)ա-3ա}{ն} = \frac{ք+(ն-1)ա}{ն} =$$

$$\frac{(ն-1)^2ա+(ն-1)ա}{ն} = (ն-1)ա :$$

Նմանապէս պիտի տեսնեմք որ ամեն բաժինք հաւասար են $(ն-1)ա$-ի, ուստի հօր ժառանգութիւնը տղուն միոյն բաժինով բաժնելով տղայոց թիւը կ'ստանամք որ է $(ն-1)$:

123. ՕԺԱՆԴԱԿ ԱՆԾԱՆՕԹԻՑ ԳՈՐԾԱԾՈՒԹԻՒՆ. — Երբ առաջարկութեանց ծանուցեալ քանակութիւնք անծանօթից հետ հեռու առնչութիւն ունին, օժանդակ անծանօթից գործածութեամբ առաջարկութիւնք դիւրաւ հաւասարութեան կը դրուին, և հաւասարութեան լուծման գործողութեան մէջ օժանդակ անծանօթք կը տարագրուին. ահա ինչպէս հետեւեալ օրինակին մէջ կը տեսնուի :

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Է. — բ ձի ժ շաբաթը ա արտավար խոտը աւելի նոյն ժամանակին մէջ աճածը կ'ուտեն. բ' ձի ժ' շաբաթը մի ուրիշ մարգագետնի ա' արտավար խոտը աւելի նոյն ժամանակին միօրինակ աճածը կ'ուտեն. Ո՞րչափ ձի պէտք է որպէս զի ժ'' շաբաթը ուրիշ երրորդ մարգագետնի ա'' արտավար խոտը աւելի նոյն ժամանակի մէջ աճածը ուտեն :

Դիցուք երեք մարգագետնոց խոտին բարձրութիւնը նոյն է զոր քով կը ներկայացնեմք, նոյնպէս նաեւ երեք մարգագետնոց խոտին մէկ շաբաթուան աճումը միեւնոյնը կը սեպեմք, զոր եով կը նշանակեմք. ք և ե օժանդակ անծանօթք են. երրորդ մարգագետնի խոտը ուտող ձիերուն թիւը ևս թող ցուցնէ ք. Արդ առաջին մարգագետնի խոտին բարձրութիւնը ամեն մի շաբաթ ե քանակութեամբ աճելով, ժ շաբաթը պիտի ըլլայ ժե. և խոտին բոլոր բարձրութիւնը ք+ժե. հետեւաբար խոտին բոլոր ծաւալն

է $ա(խ+գֆ)$. Ի ձին այս քանակութեամբ խոտը $գ$ շաբաթը կ'ուտեն. ուստի մի ձի մի շաբաթը $բգ$ անգամ պակաս. կամ

$$\frac{ա(խ + գֆ)}{բգ}$$

յորմէ կը հետեւցնեմք, մի ձիոյն մի շաբաթը երկրորդ և երրորդ մարգագետնոց մէջ կերած խոտին քանակութիւնները

$$\frac{ա'(խ + գ'ֆ)}{բ'գ'}, \quad \frac{ա''(խ + գ''ֆ)}{գ''ք}.$$

այս քանակութիւնք հաւասար պէտք են ըլլալ. ուստի ունիմք

$$\frac{ա(խ + գֆ)}{բգ} = \frac{ա'(խ + գ'ֆ)}{բ'գ'} = \frac{ա''(խ + գ''ֆ)}{գ''ք}.$$

Նախ առաջինէն $ֆ$ ին միջոցաւ $խ$ ին արժէքը կը գտնեմք

$$խ = \frac{(աբ' - ա'բ)գգ'ֆ}{ա'բգ - աբ'գ'}.$$

այս արժէքը

$$\frac{ա(խ + գֆ)}{բգ} = \frac{ա''(խ + գ''ֆ)}{գ''ք}.$$

երկրորդին մէջ փոխադրելով կ'առնումք

$$ք = \frac{ա''\left\{աբ'գ'(գ'' - գ) + ա'բգ(գ' - գ'')\right\}}{աա'գ''(գ' - գ)}:$$

Այս առաջարկութեան վերայ թուաւոր վարժութիւն մի ընեմք.

$ա = 3\frac{1}{3}$ արտավար $\quad գ = 4$ շաբաթ $\quad բ = 12$ ձի
$ա' = 10$ » $\quad գ' = 9$ » $\quad բ' = 21$ »
$ա'' = 24$ » $\quad գ'' = 18$ » $\quad ք = 36$ »

124. ՔՆՆԱԴԱՏՈՒԹԻՒՆ. — Երբ հաւասարութեան դրուած հաւասարութիւն մի լուծեմք, կը տեսնուի երբեմն թէ այս լուծումը առաջարկութեան հարցման չհամապատասխաներ. այնպէս կը պատահի որ առաջարկութեան հարցման անծանօթից տուած թէութիւնները առաջարկութիւնը անհնարին կ'ընեն և ոչ թէ հաւասարութիւնը: Այս անհնարութեան պատճառը ուսանելը լուծումը քննադատել ըսել է: Երբ ծանուցեալ թիւերը տառերով նշանակեալ են և հետեւաբար անծանօթից արժէքները տարազով մի, կրնայ ըլլալ որ ծանուցեալ քանակութեանց արժէքները սահմանափակ ըլլան, և այն սահմանէ դուրս առաջարկութիւնը անհնարին ըլլայ. այս սահմանները որոշելը և ուստի դուրս առաջարկութեան անհնարութիւնը հետեւցնելը լուծումը քննադատել ըսել է: Հետեւեալ օրինակք բաւական են հասկցնելու թէ ի՛նչ է քննադատութիւնը:

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Ը. — Ընկերութեան մի մէջ այր և կին ընդամենը 10 հոգի կային, որք հանգանակութիւն մի ըրին մէջերնին, այնպէս որ արք 6ական ֆք, և կանայք 4ական ֆք տան. ամբողջ հաւաքուած ստակին գումարն է 45 ֆք, ո՞րչափ այր և կին կային:

Դիցուք $ք$ արանց թիւը և $խ$ կանանց թիւը ցուցնեն. նախ ունիմք

$$ք + խ = 10 \quad [1]$$

իւրաքանչիւր այր 6 ֆք. առնելով, $ք$ այր առին $6ք$ ֆք. նմանապէս իւրաքանչիւր կին 4 ֆք. առնելով, $խ$ կին առին $4խ$ ֆք. յորմէ կը հետեւցնեմք

$$6ք + 4խ = 45:$$

Այս երկու հաւասարութիւնները լուծելով կը գտնեմք

$$ք = 2\tfrac{1}{2}, \quad խ = 7\tfrac{1}{2}:$$

ՔՆՆԱԴԱՏՈՒԹԻՒՆ. Հաւասարութեանց լուծումը կատարեալ է, և առաջարկութեան առացուածին ճիշդ թարգմանութիւնք միայն (1) և (2) հաւասարութիւնք են. ուրեմն առաջարկութիւնը ուրիշ լուծում չունի. բայց հարցումը կը պահանջէ որ լուծումը ամբողջ թիւերէ բաղկացեալ ըլլայ, լուծումը կոտորակաւոր ըլլալով առաջարկութիւնը անհնարին է:

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Թ. — Գտնելու է երկու թուանշաններէ բաղկացեալ թիւ մի, որոյ միաւորաց թուանշանին եռապատիկը տասնաւորաց թուանշանին 5 անգամէն եթէ բառնամք, մնացորդը 2 ըլլայ. այս թիւէն իւր շրջուած թիւը եթէ բառնամք մնացորդը ըլլայ 54:

Դիցուք միաւորաց թուանշանը $ք$, և տասնաւորացը $խ$ հետեւաբար ունիմք

$$5խ - 3ք = 2 \quad [1]$$
$$10ք + խ - 10խ - ք = 54 \quad [2].$$

գրութիւնը, զոր լուծելով կը գտնեմք

$$ք = 16 \quad և \quad ղ = 10$$

ՔՆՆԱԴԱՏՈՒԹԻՒՆ. Այս հաւասարութեանց լուծմունք ամբողջ և դրական թիւեր են և հաւասարութեանց գրութիւնը կ'ստուգեն, բայց հարցումը կը պահանջէ որ երկու փնտռուած թիւերը 10էն փոքր ըլլան, արդ գտնուած թուոց մին 10 և միւսը 10էն մեծ ըլլալով առաջարկութիւնը անհնարին է.

Այս երկու օրինակներէն ինչպէս կը տեսնուի, իւրեանց լուծմունք առաջարկութեանց ընծայած թէութիւնները չեն լրացներ. բայց առաջարկութեանց քննադատութիւնը միայն այս տեսակէտաց տակ ըմբռնելու չէ, այլ ուրիշ շատ կարեւոր պարագայից մէջ ևս կը պատահին սոյն քննադատութիւնք, կ'ուզեմք խօսիլ բացասական լուծմանց և իւրեանց մեկնութեան վերայ:

ԴԱՍ ԺԲ.

ՄԻ ԱՆԾԱՆՕԹՈՎ ԱՌԱՋԻՆ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԵԱՆՑ ԲԱՑԱՍԱԿԱՆ ԼՈՒԾՄՈՒՆՔ

125. ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆՑ ԲԱՑԱՍԱԿԱՆ ԼՈՒԾՄՈՒՆՔ. — Մի կամ աւելի քան զմի հաւասարութեանց լուծմունք երբեմն բացասական կ'ըլլան, այս բացասական թիւերը անծանօթից տեղ առնելով կը տեսնեմք որ իւրաքանչիւր հաւասարութեանց անդամք իրարու հաւասար են. երբ անծանօթ քանակութիւնք մեծութիւններ կը ցուցնեն, բացասական թիւերը անհեդեդեն. զի առքա ոչ մի մեծութիւն կը ցուցնեն. այս լուծումները անհնարին և հետեւաբար անընդունելի սեպելու եմք, բայց ոչ միշտ. զի քիչ մը վերջ այնպիսի առաջարկութեանց պիտի հանդիպիմք, որոց բացասա-

կան լուծմանց մեկնութիւններ պիտի տամք և հոն պիտի հասկցուի թէ առաջարկութեանց լուծմանց վերայ քննադատութիւնը որչափ կարեւոր և օգտակար է: Նախ ունենամք մի անծանօթով հաւասարութիւն մի.

$$աք + բ = ա'ք + բ' \quad [1]$$

զոր լուծելով գնեմք թէ գտանք $-ա''$ ուստի ունիմք

$$ա(-ա'') + բ = ա'(-ա'') + բ'$$

հաւասարութիւնը այսինքն

$$բ - աա'' = բ' - ա'ա'',$$

հետեւաբար

$$բ - աք = բ' - ա'ք \quad [2].$$

որոյ լուծումն է

$$ք = + ա'':$$

Եթէ [1] և [2] հաւասարութիւնները իրարու հետ բաղդատեմք կը տեսնեմք որ այս հաւասարութիւնք իրարմէ կը տարբերին միայն անծանօթ պարունակող եզրերով:

126. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ. — Շատ անգամ այնպէս կը պատահի որ, այս տեսակ հաւասարութեան մի լուծումը առաջարկութեան հարցումէն տարբեր հարցման մի կը համապատասխանէ, և երբեմն անծանօթ քանակութեան բացասական արժէքը դրականի փոխելով առաջարկութեան լուծումը կը փոխուի և կամ կը հանրանայ: Ահա ինչպէս պիտի տեսնեմք հետեւեալ օրինակաց մէջ:

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Ժ. — Երկու սուրհանդակք Մ և Ն ուղիղ գծի մը վերայ միեւնոյն ուղղութեամբ կը շարժին, մին Բ կէտէն ճամբայ կ'ելնէ և միւսը Փ կէտէն. (Բ ձախ կողմ և Փ աջ կողմ) սոցա իրարմէ հեռաւորութիւնը հ մեդր է.

Բ — Փ

Մ ի արագութիւնը մի ժամուան մէջ ա մեդր է և Ն ինը ա' է. ո՞րչափ ժամանակէն իրարու պիտի հանդիպին:

Դիցուք x փնտռուած ժամանակը, առաջին սուրհանդակը մի ժամու մէջ $ա$ մետրը յառաջանալով, x ժամու մէջ քալած ճամբան է $ա x$. երկրորդ սուրհանդակը միևնոյն ժամանակին մէջ $ա' x$ մետր յառաջ կ'երթայ. առաջին սուրհանդակը երկրորդին ետևէն հասնելու համար երկրորդէն $հ$ մետր աւելի երթալու է. ուստի հետևեալ հաւասարութիւնը ունենալու ենք.

$$ա x - ա' x = հ$$

յորմէ կը հետևի

$$x = \frac{հ}{ա - ա'} :$$

ՔՆՆԱԴԱՏՈՒԹԻՒՆ. — Եթէ $ա$ը, $ա'$ ինէն մեծ է, xին արժէքը դրական է և փնտռուած լուծումն է. բայց երբ $ա$՝ $ա'$էն փոքր է այս լուծումը բացասական է, զոր մեկնելու համար դիտելու ենք թէ xին այս բացասական արժէքը դրական առնելով հետևեալ հաւասարութիւնը կ'ունենանք լուծել

$$ա' x - ա x = հ :$$

Այս հաւասարութիւնը կը ցուցնէ թէ Ն սուրհանդակը Մ սուրհանդակէն $հ$ մետրը աւելի քալած է և այս թէութիւնը հետևեալ առաջարկութեան կը համապատասխանէ։

Երկու սուրհանդակք ժամանակէ մի ի վեր կը ճանապարհորդեն $ա$ և $ա'$ արագութեամբ. իւրեանց հեռաւորութիւնն է $հ$ մետրը. ո՞րչափ ժամանակէն ի վեր իրարու հասան։

Այս թէութեամբ երկու սուրհանդակք Բ ին աջ կողմը կը հանդիպին. xին բացասական արժէքը արդէն անցած ժամանակը կը ցուցնէ։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ ԺԱ. — Երկու հօգւոյ տարիքներն են $ա$ և $բ$. ո՞րչափ ժամանակէն առաջնոյն տարիքը երկրորդինին կրկինը կ'ըլլայ։

Դիցուք փնտռուած ժամանակը x, առաջարկութեան հաւասարութիւնը պիտի ըլլայ

$$ա + x = 2(բ + x) \quad [1].$$

ուստի կը հետևի

$$x = ա - 2բ :$$

ՔՆՆԱԴԱՏՈՒԹԻՒՆ. — Եթէ $ա$ մեծ է $2բ$ էն, xին արժէքը դրական է, և առաջարկութեան լուծումն է. բայց երբ $ա$ փոքր է $2բ$ էն, այս լուծումը բացասական է, և դրականի դարձնելով հետևեալ հաւասարութեան

$$ա - x = 2(բ - x)$$

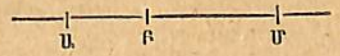
լուծումը կ'առնենք. որոյ մեկնութիւնն է

Առաջնոյն տարիքը երկրորդինին կրկինը ըլլալէ ի վեր ո՞րչափ ժամանակ կայ։ Այս հարցումը ընելով xին բացասական արժէքը կը ցուցնէ արդէն անցած ժամանակը։

Նկատելու ենք թէ երբ $ա < բ$ էն, առաջարկութիւնը ոչ մի լուծում ունի, հետևաբար $x = 2բ - ա$ տարաշը xին արժէք մը կուտայ առաւել մեծ քան $բ$, որ անընդունելի է։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ ԺԲ. — Երկու կէտերէ անցնող ուղիղ գծի մը երկայնութեան վերայ կէտ մի գտնելու է, որոյ երկու կէտերէն ունեցած հեռաւորութեանց կշիռը հաւասար ըլլայ առաջարկեալ կշռոյ մի։

Դիցուք երկու կէտերը Ա և Բ, իւրեանց հեռաւորութիւնը $հ$ և առաջարկեալ կշիռը $ր$. և փնտռուած



կէտը Մ. արդէն ունիմք

$$\frac{ՄԱ}{ՄԲ} = ր :$$

Երբ Մ ին Ա էն ունեցած հեռաւորութիւնը xով նշանակեմք կ'ունենամք

$$\frac{x}{x - հ} = ր.$$

հաւասարութիւնը, յորմէ կը հետևցնեմք

$$x = \frac{րհ}{ր - 1} :$$

xին արժէքը բացասական է եթէ $ր < 1$ է։

Հետևաբար առաջարկութեան հարցման համապատասխանող կէտ մի Բ ին աջ կողմը չկայ, երբ xին այս արժէքին նշանը փոխեմք կ'առնեմք

$$\frac{-x}{-x - հ} = ր. \quad կամ \quad \frac{x}{x + հ} = ր :$$

Արդ այս հաւասարութիւնը հետևեալ հանրահաշուական առաջարկութեան պարզ թարգմանութիւնն է։

Գտնելու է Ա ին ձախ կողմը Մ' կէտ մի որոյ Ա և Բ կէտերէն ունեցած հեռաւորութեանց կշիռը ըլլայ $ր$։

Եթէ Մ'ին Ա էն ունեցած հեռաւորութիւնը xով նշանակեմք կ'ըստանամք

$$\frac{1}{x + հ} = ր$$

հաւասարութիւնը զոր լուծելով կը գտնեմք

$$x = \frac{րհ}{x - ր} :$$

Այս լուծումը առաջարկութեան հարցման կը համապատասխանէ։

Առաջարկութեանց աստցուածոց մէջ բացասական քանակութեանց մուտք

127. *Հարցման մի մէջ բացասական քանակութիւններ ներածելով երբեմն առաջարկութիւնք աւելի կը հանրանայ, և այսպէս կ'առաջնորդուինք հարցումը այլևայլ տեսակէտաց տակ քննութեան առնելու և ըստ այնմ ըմբռնելու ։ Ահա հետևեալ պարզ օրինակօք պիտի բացատրեմք ։*

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ ԺԳ. — Ուղիղ գծի մը վրայ հաստատեալ երկու կէտերէն նոյն գծին վրայ ուրիշ երրորդ կէտի մը հեռաւորութիւնը գիտնալով, գտնելու է այս կէտէն միւս երկու կէտերուն մէջտեղի հեռաւորութիւնը ։

1⁰. Դիցուք ՔՔ′ ուղիղ գիծը որոյ վրայ հաստատեալ են երեք կէտերն, Ա և Բ և ԱԲ հեռաւորութեան մէջտեղը Մ. Ք_1, Ք_2 ևս թող ցուցնեն 0 կէտին Աէն և Բէն ունեցած հեռաւորութիւնը. տ ևս Մ0 հեռաւորութիւնը.

ուստի ունենալու եմք

$$2\,\text{Մ}0 = 0\text{Ա} + \text{ԱՄ} + 0\text{Բ} - \text{ՄԲ}$$

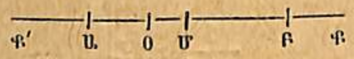
ԱՄ հաւասար ըլլալով ԲՄ ի, ունիմք

$$2\,\text{Մ}0 = 0\text{Ա} + 0\text{Բ}.$$

հետևաբար

$$\text{տ} = \frac{\text{Ք}_1 + \text{Ք}_2}{2} \qquad [1] ։$$

2⁰. Դիցուք Ա և Բ կէտերը 0 կէտին մի և միւս կողմը ինչպէս հետևեալ ձևոյն մէջ կը տեսնուին



պիտի ունենամք

$$2\,0\text{Մ} = \text{ԱՄ} - \text{Ա}0 + 0\text{Բ} - \text{ՄԲ},$$

կամ

$$2\,0\text{Մ} = 0\text{Բ} - 0\text{Ա}$$

որովհետև ԱՄ հաւասար է ՄԲ ի.

ուստի ունիմք

$$\text{տ} = \frac{\text{Ք}_2 - \text{Ք}_1}{2} \qquad [2] ։$$

5⁰. Դիցուք թէ Մ և Ա կէտերը 0 ին ձախ կողմը գրուած են, ըստ այնմ պիտի ստանամք

$$\text{տ} = \frac{\text{Ք}_1 - \text{Ք}_2}{2}$$

Այսպէս երեք պարագայից համապատասխանող երեք տարաձևեր ստացանք. ուրեմն հեռաւորութիւն ցուցնող տարազը այլևայլ փոփոխութեանց ենթակայ եղաւ այնպէս որ կրցանք Ք_1 ին և Ք_2 ին լոկ նշանները փոխելով Մ կէտին այլևայլ դիրքերը որոշել կամ որ նոյն է փնտռուած հեռաւորութեան ուղղութեան ընթացքը հասկնալ. զի երկրաչափական հեռաւորութիւնը որոշեալ ուղղութեամբ մի նկատած ատեննիս երբ + նշանով առնեմք հակառակ ուղղութեամբ հեռաւորութիւնը — նշանով առնելու է. այս օրինակիս մէջ հեռաւորութիւնք դրական նկատեցինք Ք′Ք ի ուղղութեամբ. բացասական ՔՔ′ի ուղղութեամբ ։

Այլ օրինակ. Առնեմք ժ. առաջարկութիւնը. Երկու սուրհանդակք Մ և Մ′, ԱԱ′ ուղիղ գծին վրայ կը շարժին միևնոյն ուղղութեամբ. Մը Ա կէտէն ճամբայ կ'ելնէ ա արագութեամբ. միևնոյն ժամանակ Մ′ը Ա′ կէտէն ճամբայ կ'ելնէ ա′ արագութեամբ. ո՞րչափ ժամանակէն իրարու պիտի հանդիպին ։

Անծանօթ ժամանակը տ ով նշանակելով, և ԱԱ′ հեռաւորութիւնը հ ով գտած էինք

$$\text{ատ} - \text{ա}'\text{տ} = \text{հ}.$$

այս հաւասարութիւնը առաջարկութեան աստցուածին կը համապատասխանէր, բայց երբ ա′ը ա էն մեծ համարէինք, տ արդէն անցած ժամանակը կը ցուցնէր ։

Առաջարկութիւնը աւելի հանրացնելու համար, դիցուք թէ երկու սուրհանդակք ԱԱ′ միևնոյն ուղղութեամբ չեն շարժիր, երեք որոշ պարագայք կան զորս նկատողութեան պիտի առնեմք.

1⁰. Մ սուրհանդակը դէպ ի յաջ և Մ′ը դէպ ի ձախ ընթանալով Ա և Ա′ կէտերուն մէջ իրարու կը հանդիպին, մին քալած ճամբան է ատ և միւսինը ա′տ. հետևաբար առաջարկութեան հաւասարութիւնն է

$$\text{ատ} + \text{ա}'\text{տ} = \text{հ} \qquad [1] ։$$

2⁰. Մ սուրհանդակը ընթանալով դէպ ի ձախ և Մ′ը դէպ ի յաջ, սուրհանդակք երբեք իրարու չպիտի հանդիպին. բայց Ա և Ա′ կէտերուն մէջ իրարու հանդիպելէ ի վեր անցած ժամանակը տ ով ներկայացնելով, արդէն քալած ճամբանին է ատ և ատ′, հետևաբար ունիմք

$$\text{ատ} + \text{ա}'\text{տ} = \text{հ} \qquad [2] ։$$

5°. Եթէ երկու սուրհանդակք ի միասին դէպ ի ձախ ընթանան հանդիպումը Աին ձախ կողմը պիտի ըլլայ . այս պարագային մէջ առաջարկութեան հաւասարութիւնն է

$$ա'տ — ատ = դ \quad [3] :$$

Յիշեալ չորս պարագաները հետեւեալ կերպով կ'ամփոփեմք .
Երբ Մ և Մ' դէպ ի յաջ ընթանան , ունիմք

$$ատ — ա'տ = դ :$$

Երբ Մ դէպ ի յաջ և Մ' դէպ ի ձախ ընթանան , ունիմք

$$ատ + ա'տ = դ :$$

Երբ Մ դէպ ի ձախ և Մ' դէպ ի յաջ ընթանան , տ արդէն անցած ժամանակը ցուցնելով ունիմք

$$ատ + ա'տ = դ :$$

Երբ Մ և Մ' դէպ ի ձախ ընթանան քան այնմ ունիմք

$$ա'տ — ատ = դ :$$

Արդ այս չորս հաւասարութիւնք միայն մի հաւասարութեամբ կրնան ներկայանալ եթէ (— ա) , (— ա') բացասական թիւերով նշանակեմք դէպ ի ձախ ուղղուող արագութիւնները . այս հնարով պէտք է ներկայացնել յիշեալ հաւասարութեանց երկրորդին մէջ ա'ը — ա'ով , երրորդ հաւասարութեան մէջ ա ը — ա ով , չորրորդին մէջ ա ը — ա ով , ա'ը — ա'ով . նաեւ նկատելու է որ երրորդ հաւասարութեան մէջ , ուր տ անցած ժամանակը կը ցուցնէ , պէտք է (— տ) ով նշանակել զայն ։ Այս փոխանակութեամբ հաւասարութիւնք կ'առնեն

$$ատ — ա'տ = դ$$

ձեւը , այնպէս որ

$$տ = \frac{դ}{ա — ա'}$$

տարազը ամեն պարագաներուն կը համապատասխանէ ։

ՎԱՐԺՈՒԹԻՒՆՔ

1. 40 թիւը այնպիսի երկու մասի բաժնել , որոց մին եթէ 4 ով բաժնեմք և միւսը 3 ով , քանորդաց գումարը ըլլայ 12 ։

Պատ. Ա = 16 . Բ = 24 .

2. Պանդոկի մը մէջ այր , կին և տղայ ընդամենը 360 հոգի կային . արք կանանց եռապատիկն էին , կանայք եւս տղայոց կրկնապատիկն . քանի՞ տղայ , կին և այր կային ։

Պատ. Տղ. 40 . Կան. 80 . Արք 240 ։

3. Գտնելու է թիւ մը զոր եթէ անգամ մի մ ով և անգամ մի ն ով բաժնեմք , քանորդաց գումարը ա ըլլայ ։

Պատ. $\frac{ամն}{ն + մ}$ ։

4. Այր մի մեռնելու ատեն կտակ ըրաւ 1000 Ֆր. իւր հինգ որդւոց այնպէս որ մեծը իւրմէ պզտիկէն 20 Ֆր. աւելի առնէ . իւրաքանչիւրը ո՞րչափ ստացաւ ։

Պատ. 160 Ֆր. ամենէն պզտիկը ։

5. 90 հոգիէ բաղկացեալ ընկերութեան մի մէջ կիներէ 4 աւելի արք կային , այրերէ 10 աւելի տղայք . քանի՞ այր , կին և տղայ կային ։

Պատ. 24 կին , 28 այր և 38 տղայ ։

6. Բաժնելու է 264 թիւը երկու մասի , որք այնպէս իրարու հետ համեմատին ինչպէս 5ը 7 ին հետ ։

Պատ. 110 և 154 ։

7. Վաճառական մի 50 սանթիմնոց գինւոյ մէջ ջուր կը խառնէ , այնպէս որ 75 լիտր խառնուրդը 33 Ֆր. 75 սանթիմ կ'արժէ . գտնելու է մէկ լիտր խառնուրդին ո՞րչափ ջուր պարունակելը ։

Պատ. $\frac{1}{10}$ ։

8. 36 լիտր գինի գնեցինք 50 սանթիմնոց . քանի՞ լիտր ջուր խառնելու է , որպէս զի խառնուրդին գինը 45 սանթիմ ըլլայ ։

Պատ. 4 ։

9. Ի՞նչ թիւ գումարելու է $\frac{11}{17}$ կոտորակին երկու եզերաց վերայ , որպէս զի հաւասար ըլլայ $\frac{5}{4}$ կոտորակին ։

Պատ. 7 ։

10. Երկաթուղւոյ կառաշարք մը ա' արագութեամբ ժամանակ մի ընթանալէ ետեւ ուրիշ կառաշարք մի եւս ընթանալ կ'սկսի ա արագութեամբ . այս յապաղումը այնպէս հաշուըուած է որ երկուքը ի միասին միեւնոյն ժամանակ որոշեալ տեղին հասնին . բայց առաջին կառաշարքը իւր ճամ-

բուն $\frac{2}{3}$ մասը ընթանալէն զկնի իւր արագութեան կէսը յամրացուց. այնպէս որ ճամբորդութիւնը լմննալէ հ փարսախ յառաջ երկուքը իրարու հանդիպեցան: Ի՞նչ է ճամբուն ամբողջ երկայնութիւնը:

Ճամբուն երկայնութիւնը x սեպելով, և ճամբորդութեան տեւողութիւնը $\frac{x}{ա}$ և $\frac{x}{ա'}$ ըլլալով, յապաղումն է $\frac{x}{ա} - \frac{x}{ա'}$:

Երկրորդ կառաշարքը որպէս զի հանդիպման կէտը հասնի պէտք է $\frac{x - հ}{ա'}$ ժամանակ. ուրեմն

$$\frac{x}{ա} - \frac{x}{ա'} + \frac{x - հ}{ա'} = \frac{x}{ա} - \frac{հ}{ա}$$

հաւասարութիւնը կը ցուցնէ թէ ո՞րչափ ժամանակէն ետեւ կառաշարք իրարու պիտի հանդիպին. ունիմք նաեւ միեւնոյն ժամանակը ցուցնող

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{ա} + \frac{\frac{x}{3} - հ}{\frac{ա}{2}}$$

տարազը, հետեւաբար կ'ստանամք

$$\frac{x}{ա} - \frac{հ}{ա'} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{ա} + \frac{\frac{x}{3} - հ}{\frac{ա}{2}}$$

հաւասարութիւնը զոր լուծելով կը գտնեմք

$$x = 3ա\left(2 - \frac{ա}{ա'}\right):$$

11. Երկու թիւ գտնելու է, որք իրարու հետ այնպէս համեմատին ինչպէս բ՝ գին հետ. և որոց արտադրեալը իւրեանց գումարին ս անգամը ըլլայ:

Անծանօթ թիւերէն մին x սեպելով, որով միւսը կ'ըլլայ $\frac{գx}{բ}$, կ'ունենամք

$$x \times \frac{գx}{բ} = ս\left(x + \frac{գx}{բ}\right)$$ հաւասարութիւնը.

Պատ. $x = \frac{ս(բ + գ)}{գ}$:

12. Եռանկեան մի մէջ ուղղանկիւն մի ներփակել որ նման ըլլայ առաջարկեալ ուղղանկեան մի:

Առաջարկեալ ուղղանկեան կողերը Մ և Ն սեպելով, և կազմելի ուղղանկեան կողերը x և y, իսկ եռանկեան բարձրութիւնը բ և խարիսխը ե, կ'ստանամք

$$x = \frac{Մբե}{Մբ + Նե} \quad և \quad y = \frac{Նբե}{Մբ + Նե}:$$

13. Եռանկեան մը գագաթները իբրեւ կեդրոն առնելով երեք շրջանակներ գծելու է, այնպէս որ փոխադարձաբար զիրար շօշափեն:

Եռանկեան կողերուն երկայնութիւնները ա, բ, գ սեպելով, և շրջանակաց շառաւիղները x, y և z. կ'ստանամք

$$y + z = ա$$
$$z + x = բ$$
$$x + y = գ$$

ուստի $x = \frac{բ + գ - ա}{2}$. $y = \frac{գ + ա - բ}{2}$. $z = \frac{ա + բ - գ}{2}$:

14. Երեք հոգի խաղալու նստան այն պայմանաւ որ, կորսնցնողը միւս երկու խաղացողներուն ունեցածին կրկինը հատուցանէ. անձնիւր ոք մի բաժին կորսնցնելէ զկնի 120 ական ֆրանքով խաղէն քաշուեցան. իւրաքանչիւրը ո՞րչափ ունէր խաղուն սկիզբը:

Իւրաքանչիւրին սկզբնական ունեցածը x, y և z ով ներկայացնելով, առաջին խաղէն վերջ ունեցան

$$x - y - z, \quad 2y, \quad 2z,$$

երկրորդ խաղէն վերջ

$$2x - 2y - 2z, \quad 3y - z - x, \quad 4z.$$

երրորդ խաղէն վերջ

$$4x - 4y - 4z, \quad 6y - 2z - 2x, \quad 7z - y - x.$$

Այս վերջի եռեզերց իւրաքանչիւրը 120ի հաւասարցնելով առաջարկութիւնը հաւասարութեան դրած կ'ըլլամք և հետեւաբար կ'ստանամք

$$x = 195. \quad y = 105. \quad z = 60:$$

15. Համեմատութիւն մի կազմելու է, որոյ չորս եզրերը հաւասարապէս ա, բ, գ, դ, չորս թիւերէն մեծ ըլլան:

Սոցա իւրաքանչիւրին վերայ գումարելի թիւը ք սեպելով կ'ստանանք

$$ք = \frac{բե - ադ}{ա + դ - բ - ե}:$$

16. Ա գործ մի կատարելու համար կը գործածէ Բ ը Գ ի հետ միանալով գործածած ժամանակին մ անգամը. Բ կը գործածէ Ա ի և Գ ի ն անգամը, իսկ Գ՝ Ա ի և Բ ի ք անգամը. Գտնելու է մ ի, ն ի և ք ի մէջ առնչութիւն մի:

Պատ. $\frac{1}{մ + 1} + \frac{1}{ն + 1} + \frac{1}{ք + 1} = 1$:

Անհաւասարութիւնք

128. ՍԱՀՄԱՆ. — *Ա թիւը Բ էն մեծ է կ'ըսուի, երբ* $(ա - բ)$ *դրական է:*

129. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ. — 1° *Որեւիցէ դրական թիւ բացասական թուէ մի աւելի մեծ է. այսպէս,*

$$3 > -8 \quad [1],$$

զի $3 - (-8)$ *տարբերութիւն է* $3 + 8$ *կամ* 11 *որ դրական թիւ մ'է:*

2° *Բացասական թուոյ մի բացարձակ արժէքը որչափ մեծ ըլլայ, նոյն թիւը այնչափ եւս փոքր կ'ըլլայ. զորօրինակ*

$$-11 > -25 \quad [2]$$

որովհետեւ $-11 - (-25)$ *ըսել է* $+25 - 11$. *այս տարբերութիւնը դրական է:*

3° *Զրօն ամէն բացասական թուէ մեծ է, այսպէս.*

$$0 > -5 \quad [3]$$

զի $0 - (-5)$ *տարբերութիւնը* $0 + 5$ *ի հաւասար է որ դրական թիւ մ'է. յորմէ կը հետեւի թէ զրոյէն սկսեալ դէպ ի յաջ և դէպ ի ձախ եթէ*

$$-\infty \ldots -5. -4. -3. -2. -1. 0. 1. 2. 3. 4. 5 \ldots \infty$$

բնական թիւերը գրեմք, կը տեսնեմք որ այս թիւերէն իւրաքանչիւրը ձախ կողմը գտնուած բոլոր թիւերէն մեծ և աջ կողմը գտնուածներէն փոքր է:

Ընդհանրապէս թուոյ մի դրական կամ բացասական ըլլալը

$$ա > 0 \quad և \quad բ < 0$$

ձեւերով կ'որոշուի, այսպէս ա թիւը դրական և բ թիւը բացասական նկատելու եմք:

Մի անծանօթով անհաւասարութիւնք

130. ՍԿԶԲՈՒՆՔ Ա. — *Անհաւասարութեան մի երկու անդամոց վերայ միեւնոյն թիւը կրնամք յաւելուլ կամ անկէ բառնալ առանց անհաւասարութեան թեութիւնները փոխելու:*

Զորօրինակ ունիմք $ա > բ$ *անհաւասարութիւնը որ համարժէք է* $ա - բ > 0$ *ի. արդ ինչ արժէք որ ունենայ մ, միշտ ունիմք*

$$ա - բ = ա + մ - բ - մ = (ա + մ) - (բ + մ):$$

Ուրեմն

$$(ա + մ) - (բ + մ) > 0,$$

կամ ըստ սահմանի

$$ա + մ > բ + մ) \quad [4]:$$

յորմէ կը հետեւի

Անհաւասարութեան մի մէկ անդամէն միւս անդամը որեւիցէ եզր մի անցնելու համար նորա նշանը փոխելու է. ինչպէս հաւասարութեանց մէջ տեսնուեցաւ:

131. ՍԿԶԲՈՒՆՔ Բ. — *Անհաւասարութեան մի երկու անդամները դրական թուով մի կրնամք բազմապատկել կամ բաժանել առանց անհաւասարութիւնը փոխելու:*

Արդարեւ $ա > բ$ անհաւասարութիւնը համարժէք է $ա - բ > 0$ անհաւասարութեան. արդ $ա - բ$ տարբերութիւնը դրական ըլլալով, եթէ դրական արտադրիչով մի բազմապատկեմք արտադրեալը եւս դրական կ՚ըլլայ. ուրեմն ունենալու եմք

$$(ա - բ)\,մ > 0 \quad \text{կամ} \quad ամ - բմ > 0$$

կամ ըստ սահմանի

$$ամ > բմ \quad [5]:$$

Անհաւասարութեան մի երկու անդամոց մով բաժանման սկզբան գալով, մով բաժնել ըսելը $\frac{1}{մ}$ ով բազմապատկել ըսել է:

132. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ. — Անհաւասարութեան մի երկու անդամները բացասական թուով մի բազմապատկելով անհաւասարութեան ընթացքը կը փոխուի:

Ունենամք $ա > բ$ կամ $ա - բ > 0$ անհաւասարութիւնը. $ա - բ$ դրական տարբերութիւնը բացասական $մ$ թուով բազմապատկեմք արտադրեալը բացասական կ՚ըլլայ. այսպէս

$$(ա - բ)\,մ < 0 \quad \text{կամ} \quad ամ - բմ < 0$$

կամ որ նոյնն է

$$ամ < բմ \quad [6]:$$

133. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ. — Այս սկզբունքը անհաւասարութեան մի յայտարարները ջնջելու կը նպաստէ, բաւական է որ յայտարարներուն նշանները ծանօթ են մեզ:

134. ՍԿԶԲՈՒՆՔ Գ. — *Անհաւասարութեան մի երկու անդամները մրդ. կարողութեան կրնամք հանել, առանց անհաւասարութեան ընթացքը փոխելու:*

Արդարեւ թիւ մը որչափ մեծ ըլլայ, նորա մրդ կարողութիւնը նոյնչափ մեծ կ՚ըլլայ: Այսպէս,

$$7 > 2. \quad \text{ունիմք նաեւ} \quad 7^5 > 2^5:$$

Անհաւասարութեան մը անդամները երբ բացասական են այլեւայլ պարագաներ կան նկատողութեան առնելու:

1° Անհաւասարութեան մի երկու անդամոց նշանները թէ դրական ըլլան և թէ բացասական, այս անդամները մրդ կարողութեան կրնամք հանել երբ մ անզոյգ թիւ մ՚է, զի գործողութիւնները կատարելէ զկնի երկու թիւերը իւրեանց նշանները կը պահեն. հետեւաբար իւրեանց անհաւասարութեան ընթացքը.

Զորօրինակ ունենամք

$$7 > -17$$

անհաւասարութիւնը, որոյ երկու անդամները 5րդ կարողութեան հանելով կ՚ստանամք

$$7^5 > (-17)^5 \quad [7]:$$

Նմանապէս եթէ ունենամք

$$-7 > -17,$$

ունիմք նաեւ $(-7)^5 > (-17)^5$:

2° Անհաւասարութեան մը երկու անդամները զոյգ կարողութեան կրնամք հանել երբ իւր երկու անդամները դրական են, հակառակ պարագայի մէջ, այսինքն երբ երկու անդամները բացասական են զոյգ կարողութեան հանելով անհաւասարութեան ընթացքը կը փոխուի:

Զորօրինակ

$$-7 > -17$$

անհաւասարութենէ յաջորդաբար կը հետեւի

$$17 > 7. \quad 17^6 > 7^6. \quad (-17)^6 > (-7^6).$$

ուստի

$$(-7)^6 < (-17)^6 \quad [8]:$$

Եթէ անհաւասարութեան երկու անդամները հակառակ նշանօք են, չկարեմք հաստատել թէ անհաւասարութիւնը իւր ընթացքը կը փոխէ թէ ոչ. և կամ հաւասարութեան մը կը դառնայ, միայն կ'ըսենք

$$\left.\begin{array}{l} 7 > -5 \text{ և } 7^4 > (-5)^4 \\ 7 > -17 \text{ և } 7^4 < (-17)^4 \\ 17 > -17 \text{ և } 17^4 = (-17)^4 \end{array}\right\} [9]:$$

135. ՍԿԶԲՈՒՆՔ Դ. — *Անհաւասարութեան մը անդամոց նշանները ինչ որ այլ ըլլան երբ անհաւասարութեան ցուցիչք անզոյգ են, անոր արմատները կրնամք փնտռել, զի արմատները երկու թուոց նշանները ունին.*

Այսպէս,

64 > 27 անհաւասարութենէ կ'առնամք

$$\sqrt[3]{64} > \sqrt[3]{27} \quad \text{կամ} \quad 4 > 3$$

64 > − 27 անհաւասարութենէ կ'առնամք

$$\sqrt[3]{64} > \sqrt[3]{-27} \quad \text{կամ} \quad 4 > -3$$

− 27 > − 64 անհաւասարութենէ կ'առնամք

$$\sqrt[3]{-27} > \sqrt[3]{-64} \quad \text{կամ} \quad -3 > -4 \quad [10]:$$

Երբ անհաւասարութիւն մի զոյգ ցուցիչով է, սորա անդամք միշտ դրական պէտք է ըլլան, որպէս զի արմատ ունենան. այս պարագայիս մէջ իւրաքանչիւր անդամ երկու հաւասար և հակառակ նշանօք արժէքներ ունի. անհաւասարութիւնը ևս իւր ընթացքը կամ կը պահէ և կամ կը կորսնցնէ ըստ արմատոց նշաններուն, որք դրական կամ բացասական կը նկատուին. Այսպէս,

$$36 > 16$$

անհաւասարութենէն կ'առնամք

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{36} > \sqrt{16} \quad \text{կամ} \quad 6 > 4 \\ -\sqrt{36} < -\sqrt{16} \quad \text{»} \quad -6 < -4 \end{array}\right\} [11]:$$

Բայց երբ երկու արմատոց նշանները իրարմէ տարբեր նկատեմք, բացասականն եզերք միշտ փոքր են.

Այսպէս,

$$36 > 16$$

անհաւասարութենէ կ'առնամք

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{36} > -\sqrt{16} \quad \text{կամ} \quad 6 > -4 \\ \sqrt{16} > -\sqrt{36} \quad \text{»} \quad 4 > -6 \end{array}\right\} [12]:$$

136. ՍԿԶԲՈՒՆՔ Ե. — *Միեւնոյն ընթացքով այլեւայլ անհաւասարութիւնները անդամ առ անդամ կրնամք յաւելուլ:*

Այսպէս

$$\text{ա} > \text{բ}, \quad \text{գ} > \text{դ}, \quad \text{ե} > \text{զ}$$

անհաւասարութիւնները, յորմէ կ'առնամք

$$\text{ա} + \text{գ} + \text{ե} > \text{բ} + \text{դ} + \text{զ}.$$

որովհետեւ ա − բ, գ − դ և ե − զ դրական տարբերութեանց գումարը ևս դրական է. ուրեմն

$$\text{ա} + \text{գ} + \text{ե} - (\text{բ} + \text{դ} + \text{զ}) > 0$$

կամ

$$\text{ա} + \text{գ} + \text{ե} > \text{բ} + \text{դ} + \text{զ} \quad [13]:$$

Երբ երկու անհաւասարութիւնք հակառակ ընթացքով ըլլան կանոն մի չունիմք տալու. ինչպէս կը տեսնուի

$$\left.\begin{array}{l} 5 > 2 \\ 9 < 14 \end{array}\right\} \text{ և } \quad 5 + 9 < 2 + 14:$$

$$\left.\begin{array}{l} 5 > 2 \\ 9 < 12 \end{array}\right\} \text{ և } \quad 5 + 9 = 2 + 12:$$

$$\left.\begin{array}{l} 5 > 2 \\ 9 < 11 \end{array}\right\} \text{ և } \quad 5 + 9 > 2 + 11:$$

137. ՍԿԶԲՈՒՆՔ Զ. — *Երկու անհաւասարութիւնները անդամ առ անդամ կրնամք բազմել եթէ մին միւսոյն հակառակ ընթացքով է:*

Ունենամք սա երկու անհաւասարութիւնները

$$ա > բ, \quad գ < դ,$$

զոր կրնամք գրել

$$ա > բ, \quad դ > գ.$$

ըստ (**136**) ի կ'ունենամք

$$ա + դ > բ + գ$$

կամ (**130**)

$$ա - գ > բ - դ \quad [14]:$$

Անհաւասարութիւն մի ուրիշ անհաւասարութենէ չկարեմք բառնալ երբ միեւնոյն ընթացքով են:

138. ՍԿԶԲՈՒՆՔ Է. — *Միեւնոյն ընթացքով երկու անհաւասարութիւններ անդամ առ անդամ կրնամք բազմապատկել, երբ բոլոր եզերք դրական են. այս նոր ստացուած անհաւասարութիւնը իւրաքանչիւր անհաւասարութեան ընթացքով է:*

Արդարեւ ունենամք

$$ա > բ, \quad գ > դ$$

անհաւասարութիւնները, որովհետեւ գ և բ դրական են, առաջինը գ ով և երկրորդը բ ով բազմապատկելով կ'ունենամք

$$ագ > բգ, \quad բգ > բդ.$$

և հետեւաբար

$$ագ > բդ \quad [15]:$$

Եթէ չորս եզերք դրական ըլլային, նոր ստացուած անհաւասարութիւնը առաջարկեալ երկու անհաւասարութեանց հակառակ ընթացքովը պիտի ըլլար. որովհետեւ առաջին անհաւասարութեան երկու անդամները գ ով, և երկրորդինները բ ով բազմապատկելով կ'ստանամք

$$ագ < բգ, \quad բգ < բդ,$$

և հետեւաբար

$$ագ < բդ \quad [16]:$$

Որովհետեւ այս արտադրիչք բացասական թիւեր են, երբ անհաւասարութեան ամեն եզերք դրական կամ բացասական չեն, ընդհանուր կանոն մի չկարեմք տալ. նմանապէս երբ երկու անհաւասարութիւնք հակառակ ընթացքով ըլլան:

139. ՍԿԶԲՈՒՆՔ Ը. — *Երկու հակառակ ընթացքով անհաւասարութիւններ անդամ առ անդամ կրնամք բաժնել որով նոր անհաւասարութիւն մի կ'ստանամք առաջնոյն ընթացքով:*

Ունենամք

$$ա > բ, \quad գ < դ$$

անհաւասարութիւնները, որք համարժէք են

$$ա > բ, \quad դ > գ$$

անհաւասարութեանց, և հետեւաբար ըստ (**138**) ի

$$ադ > բգ,$$

որոյ երկու անդամները գդ ով բաժնելով (**131**) կ'ստանամք,

$$\frac{ա}{գ} > \frac{բ}{դ} \quad [17]:$$

Եթէ չորս եզերք բացասական ըլլային, նոր ստացուած անհաւասարութիւնը երկրորդին ընթացքով պիտի ըլլար. որովհետեւ բազմապատկութեամբ պիտի ունենայինք ըստ (**138**) ի

$$ադ < բգ,$$

և գդ ով բաժնելով որ դրական է, պիտի ստանայինք

$$\frac{ա}{գ} < \frac{բ}{դ}:$$

Ուրիշ պարագաներու համար կանոն մի չունիմք:

Առաջին աստիճանի մի անծանօթով անհաւասարութիւնք

139. ԱՆՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄ · — *Մի անծանօթով անհաւասարութիւն մի ինչպէս հետևեալը*

$$աք + բ > ա'ք + բ'$$

առաջին աստիճանի է կ'ըսուի, զի իր անծանօթին ցուցիչը 1 է, և որոյ մէջ գտնուած ա, բ, ա', բ' թիւեր են. որ.ք թէ դրական և թէ բացասական կրնան ըլլալ։

Առաջարկեալ այս անհաւասարութիւնը լուծելու համար, անծանօթ պարունակող եզրերը մէկ կողմ և ծանուցեալ եզրերը միւս կողմը կրնամք անցնել (**130**) *և ունենալ այսպէս,*

$$(ա - ա')ք > բ' - բ:$$

Երկու պարագաներ կան զոր նկատողութեան առնելու եմք ·

Ա· *Երբ* $(ա - ա')$ *դրական է,* (**131**) *կ'ստանամք*

$$ք > \frac{բ' - բ}{ա - ա'}:$$

Բ· *Երբ* $(ա - ա')$ *բացասական է, ընդհակառակն կ'ունենամք* (**131**)

$$ք < \frac{բ' - բ}{ա - ա'}$$

անհաւասարութիւնները ։

Ինչպէս կը տեսնուի ք-ին արժէքը երկու անհաւասար մեծութեանց մէջ կը գտնուի · եթէ ք-ին ճիշդ արժէքը սահմանեմք, այն ատեն անհաւասարութեան երկու անդամք կը հաւասարին.

Իբրև վարժութիւն ունենամք լուծել հետևեալ առաջարկութիւնը ·

Ուղիղ գծի մը վրայ երկու կէտեր Ա և Բ հաստատեալ են 2գ հեռաւորութեամբ ։ Մ կէտը ևս այնպէս դիրք մը ունի որ ՄԱ + ՄԲ = 2ա է · ա-ը

գ էն մեծ երկայնութիւն մի կը ցուցնէ · գիտնալ պէտք է թէ ի՞նչ սահմաններու մէջ կրնան փոփոխուիլ ԱՄ և ԲՄ երկայնութիւնք ։

Դիցուք ԱՄ > ԲՄ *և* ԱՄ = ք, ԲՄ = չ · *ըստ առաջարկութեան ասացուածին ունիմք*

$$ք + չ = 2ա \quad [1] :$$

Որպէս զի ԱՄԲ եռանկեան կազմութիւնը հնարաւոր ըլլայ, պէտք է որ իւրաքանչիւր կող փոքր ըլլայ միւս երկու կողից գումարէն. այսինքն ունենալու եմք նաև

$$2գ < ք + չ, \quad չ < 2գ + ք, \quad ք < 2գ + չ.$$

Այս անհաւասարութեանց առաջինը բացայայտ է ըստ (1) հաւասարութեան, երկրորդը ևս բացայայտ է, զի չ առաւել փոքր է քան զք. ուրեմն կը մնայ հաստատել երրորդ

$$ք < 2գ + չ \quad [2]$$

անհաւասարութիւնը. եթէ չ-ը՝ $(2ա - ք)$ *արժէքով ներկայացնեմք, կ'ունենամք*

$$ք < 2գ + 2ա - ք,$$

յորմէ կը հետևի

$$ք < ա + գ \quad [3] :$$

Բայց չ-ը հաւասար ըլլալով $(2ա - ք)$*ի, ք պզտիկնալով չ կը մեծնայ. ուրեմն չ առաւել մեծ ըլլալու է քան* $զ[2ա - (ա + գ)]$*, այսինքն* $(ա - գ)$*. Այսպէս*

$$չ > ա - գ.$$

փնտռուած սահմանք սոքա են ։

Առաջին աստիճանի երկու անծանօթով անհաւասարութիւնք

141. *Ունենամք լուծել հետևեալ երկու անհաւասարութիւնները ·*

$$3ք - 2չ > 5 \quad [1],$$

$$5ք + 3չ > 16 \quad [2] :$$

[1] *հաւասարութենէ կը հետևցնեմք*

$$չ < \frac{3ք - 5}{2},$$

[2] *էն*

$$չ > \frac{16 - 5ք}{3} :$$

Այս թէութիւնք որպէս զի լրանան, x-ին արժէքը այնպէս ընտրելու ենք որ ունենանք

$$\frac{3x-5}{2} > \frac{16-5x}{3}$$

անհաւասարութիւնը, յորմէ կ'ստանանք

$$x > \frac{47}{19}:$$

x-ին արժէքը միայն մեծ ըլլալու է $\frac{47}{19}$ կոտորակէն. գալով y-ին, x-ին որեւիցէ արժէից համար y-ին արժէքները գտնուելու են $\frac{3x-5}{2}$ և $\frac{16-5x}{3}$ բացատրութեանց մէջ։

ՎԱՐԺՈՒԹԻՒՆՔ

Հետեւեալ անհաւասարութիւնները ստուգող x-ին արժէքները սահմանելու է.

1. $$3x - 2 > \frac{5}{2}x - \frac{4}{5}.$$

Պատ. $x > \frac{12}{5}$:

2. $$\frac{6}{7} - \frac{5}{4}x < 8 - 2x.$$

Պատ. $x > \frac{200}{21}$:

3. $$43 - 5x < 10 - 8x$$

Պատ. $x < -11$:

4. $$3x - \frac{1}{4} > 20 - \frac{2x}{3}.$$

Պատ. $x > \frac{243}{44}$:

5. $$\frac{2x}{5} - 23 > 2x - 16.$$

Պատ. $x < -\frac{35}{8}$:

6. $$5x - \frac{3}{4} < \frac{8x}{3} - 1.$$

Պատ. $x < -\frac{3}{28}$:

7. Հետեւեալ երկու անհաւասարութիւնները միանգամայն ստուգող արժէքները սահմանել,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{7x}{5} + 1 > x + 9 \\ 1 - 5x < 8x + 73 \end{array}\right\}$$

20էն մեծ որեւիցէ թիւ յիշեալ անհաւասարութիւնները կ'ստուգէ, որովհետեւ առաջին անհաւասարութեան մէջ $x > 20$ է, և երկրորդին մէջ $x > -5\frac{7}{13}$ էն։

8. Գտնելու է x-ին դրական և բացասական ամբողջ արժէքները որ $\frac{4x-5}{7} < x + 5$. և $\frac{5x+8}{4} > 2x - 8$ անհաւասարութիւնները ստուգեն։

Փնտռուած թիւերն են

$-8.\ -7.\ -6.\ -5.\ -4.\ -3.\ -2.\ -1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.$

որովհետեւ յիշեալ անհաւասարութեանց մէջ x-ին երկու արժէքներն $-8\frac{2}{3}$-ին և $5\frac{3}{5}$-ին մէջ են։

9. Ե՞րբ կրնանք ունենալ $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ անհաւասարութիւնը։

Այն ատեն երբ a և b դրական թիւեր են։

10. Հաստատելու է թէ $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4$ միշտ դրական է, ինչ որ լինին x-ին և y-ին դրական արժէքներ։

Յիշեալ բացատրութիւնը $(x^4 - y^4)$ և $(x - y)$ արտադրիչներու վերածելով կրնանք հաստատել։

ԴԱՍ ԺԳ.

ՀԱՆՐԱԿԱՆ ՏԱՐԱԶՈՑ ՎՐԱՅ ՔՆՆԱԴԱՏՈՒԹԻՒՆ

142. ՀԱՆՐԱԿԱՆ ՏԱՐԱԶ. — Առաջին աստիճանի մի անծանօթով հաւասարութիւն մի հետեւեալ ձեւով կրնայ ներկայանալ.

$$աք + բ = ա'ք + բ' \quad [1]$$

որոյ մէջ $ա$, $բ$ և $ա'$, $բ'$ ծանուցեալ թիւեր են. այս հաւասարութիւնը կը լուծեմք այսպէս.

$$(ա - ա')ք = բ' - բ$$

կամ

$$ք = \frac{բ' - բ}{ա - ա'} \quad [2]:$$

Եթէ գնեմք $բ' > բ$, $ա > ա'$, $ք$ին արժէքը դրական է, որովհետեւ $բ' - բ$ համարիչը և $ա - ա'$ յայտարարը դրական թիւեր են: Եթէ գնեմք $բ > բ'$ և $ա' > ա$, այն ատեն ունենալու եմք $ք = \frac{բ - բ'}{ա' - ա}$. $ք$ին այս արժէքը դրական և սահմանեալ է ինչպէս առաջին ենթադրութեան մէջ: Արդ նախընթաց երկու տարազները իրարու հետ բաղդատելով կը տեսնեմք որ $բ - բ'$ և $ա' - ա$ տարբերութիւնք դրական առնուած ատեն $ա - ա'$ և $բ' - բ$ տարբերութիւնք բացասական են. ուստի կը հետեւի թէ

1° Երկու պարագայից մէջ $ք$ին արժէքները դրական են և առաջին տարազը միշտ կարեմք գործածել: 2° Առաջին աստիճանի մի անծանօթով հաւասարութեան մի լուծման մէջ պէտք չէ փնտռել թէ անծանօթով եզրերը ո՞ր անդամին մէջ փոխադրելու եմք որպէս զի բարձումը հնարաւոր ըլլայ, քանզի միշտ նոյն արդիւնքը պիտի ստանամք:

Եթէ գնեմք $բ' > բ$ և $ա < ա'$, առաջին անդամին

մէջ բարձումը կարելի է, իսկ երկրորդին մէջ անկարելի. այս վերջի բարձման մնացորդը բացասական թուով մը ներկայացնելով $ք$ին արժէքը եւս բացասական կ'ըլլայ

$$ք = \frac{բ - բ'}{ա' - ա} = \frac{-Մ}{Ն}:$$

Ուստի կը հետեւցնեմք.

Ամեն առաջին աստիճանի մի անծանօթով հաւասարութիւնք միայն մի լուծում ունին դրական կամ բացասական: Երբ $ա$, $ա'$, $բ$, $բ'$ համարտադրչաց յատուկ արժէքներ տամք, պիտի տեսնեմք անհնարութեան և անսահմանութեան դէպքերը:

Դիցուք նախ $ա' - ա = 0$ և $բ \gtrless բ'$.

այս պարագայիս մէջ $ք = \frac{բ - բ'}{ա' - ա}$ տարազը $ք = \frac{բ - բ'}{0}$ ձեւը պիտի առնէ. հետեւաբար $աք + բ = ա'ք + բ'$ հաւասարութիւնը $աք + բ = աք + բ'$ հաւասարութեան կը փոխուի, որոյ անհեթեթ ըլլալը բացայայտ է, որովհետեւ $բ \gtrless բ'$. ուստի $\frac{բ - բ'}{0}$ ձեւը անհնարութեան նշան է: Եթէ $(ա - ա')$ նոյնպէս $(բ' - բ)$ տարբերութիւնք զրոյի հաւասար են, այս պարագայիս մէջ հանրական տարազը $ք = \frac{0}{0}$ի կը վերածի որ նշանակութիւն մի չունի, որովհետեւ առաջարկեալ [1] հաւասարութիւնը

$$աք + բ = ա'ք + բ',$$

գրելու եմք

$$աք + բ = աք + բ$$

ձեւով. արդ $ք$ին ինչ արժէք որ տամք հաւասարութիւնը չփոխուիր. հետեւաբար

$$ք = \frac{0}{0}$$

անսահմանութեան նշան է . հետեւեալ առաջարկութիւնը բաւական է ցուցնել թէ ո՞րք են անհնարութեան և անսահմանութեան դէպք :

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ . — *Երկու շրջանակներ տրուած են Շ և ւ շառաւիղներով, որոց կեդրոններուն հեռաւորութիւնն է հ . գիտնալու է թէ ի՞նչ հեռաւորութեամբ երկոցուն հասարակ արտաքին շօշափող գիծը կեդրոնները միացնող հասարակ գծին կը հանդիպի :*

Դիցուք առաջարկեալ շրջանակք Ա և Բ, և փոքր շրջանակէն մինչ փնտռուած կէտին երկայնութիւնը ք . եթէ Շ ցուցնէ մեծ շրջանակին շառաւիղը և ւ եւս փոքրինը , երկու նման եռանկիւններ կը կազմեմք , որոց միջոցաւ կ'ստանամք

$$\frac{ք}{հ+ք}=\frac{ւ}{Շ}$$

հաւասարութիւնը , յորմէ կը հետեւցնեմք

$$ք=\frac{հւ}{Շ-ւ} :$$

Եթէ հասարակ շօշափող գիծը ներքին ըլլար , այն ատեն նման եռանկեանց կազմութեամբ պիտի ստանայինք

$$\frac{ք}{հ-ք}=\frac{Շ}{ւ}$$

հաւասարութիւնը, որոյ լուծումն է

$$ք=\frac{հւ}{Շ+ւ} :$$

ՔՆՆԱԴԱՏՈՒԹԻՒՆ . — *Ինչպէս կը տեսնուի, երկու շրջանակները շօշափող հասարակ գծին դրից համեմատ ք-ին արժէքները տարբեր են . առաջարկութեան առաջին ասացուածին լուծումն էր $ք=\frac{հւ}{Շ-ւ}$: Դիցուք $Շ-ւ$ տարբերութիւնը զրոյի հաւասար , այն ատեն պիտի ունենամք*

$$ք=\frac{հւ}{0},$$

որ անհնարութեան նշան է , այսինքն ք արժէք մը չունի . բայց պէտք է դիտել որ $Շ-ւ=0$ ենթադրութեամբ երկու շրջանակները միեւնոյն շառաւիղք են և իւրեանց հասարակ շօշափող գիծը կեդրոնները միացնող գծին զուգահեռական է . ուրեմն այս գծին երբէք չհանդիպիր :

Երբ $ւ<Շ$, և հետզհետէ ւ մեծնայ առանց Շ փոխուելու անանկ որ

ւ հաւասարի Շի , $\frac{հւ}{Շ-ւ}$ կոտորակը նախ փոքր և ապա ւին մեծնալովը ինքն եւս կը մեծնայ . ք անհունութեան կը հասնի . ուստի $\frac{հւ}{0}$ անհունութեան նշան է :

Երկու անծանօթով երկու հաւասարութեանց հանրական լուծման վրայ քննադատութիւն :

143. ՀԱՆՐԱԿԱՆ ՏԱՐԱԶՔ . — *Երկու անծանօթով երկու հաւասարութեանց հանրական դրութիւնն է*

$$\left.\begin{array}{l} աք+բյ=գ \\ ա'ք+բ'յ=գ' \end{array}\right\} \quad [1]$$

որոյ մէջ ա , բ , գ , ա', բ', գ' թէ դրական և թէ բացասական կրնան ըլլալ և ըստ այնմ ք և յ անծանօթից արժէքները կրնամք ստանալ . յիշեալ դրութիւնը լուծելու համար , նախ առաջին հաւասարութիւնը բ'ով կը բազմապատկեմք և երկրորդը բով, և երկրորդը առաջինէն բառնալով կ'ստանամք

$$(աբ'-բա')ք=գբ'-բգ' . \text{ ուստի } ք=\frac{գբ'-բգ'}{աբ'-բա'} :$$

յին արժէքը եւս սահմանելու համար առաջարկեալ դրութեան առաջին հաւասարութիւնը ա'ով կը բազմապատկեմք և երկրորդն աով . առաջին արտադրեալը երկրորդէն բառնալով կ'ստանամք

$$(աբ'-բա')յ=ագ'-գա'$$

$$յ=\frac{ագ'-գա'}{աբ'-բա'} .$$

ուրեմն [1] դրութեան լուծումն է

$$ք=\frac{գբ'-բգ'}{աբ'-բա'} . \quad յ=\frac{ագ'-գա'}{աբ'-բա'} \quad [2] :$$

Այս տարազները հանրական լուծմունք կ'ըսուին, որոց $աբ'-բա'$ յայտարարը պէտք չէ որ զրոյի հաւասար ըլլայ:

Այս տարազները յաճախակի կը գործածուին զորս ստանալը շատ դիւրին է, զի եթէ ունենամք

$$\left.\begin{aligned} աx + բy &= գ \\ ա'x + բ'y &= գ' \end{aligned}\right\} \quad [1]$$

դրութիւնը, որոյ երկու անծանօթից համարտադրիչք են ա, բ, ա' և բ', զայն լուծելու համար հարկ չկայ նախընթաց գործողութեանց դիմել, որովհետեւ xին և yին արժէից մէջ $(աբ' - բա')$ յայտարարը հաւասար է $աբ'$ արտաքին և $բա'$ ներքին համարտադրչաց արտադրեալներուն տարբերութեան. Նոյնպէս իւրաքանչիւր անծանօթի համարիչը կազմելու համար $(աբ' - բա')$ ասացուածին մէջ, այն անծանօթը բազմապատկող իւրաքանչիւր համարտադրիչ իրեն համապատասխանող ծանուցեալ եզրով կը ներկայացնեմք. այնպէս որ xին արժէքին համար ա և ա' համարտադրիչները գ և գ'ով կը ներկայացնեմք, և yին արժէքին համար բ և բ'ը գ և գ'ով, Զորօրինակ ունենամք լուծել

$$\begin{aligned} 3x - 7y &= 9 \\ 5x - 3y &= 41 \end{aligned}$$

հաւասարութիւնները: Արդ դնելով

$ա = 3,\ բ = -7,\ գ = 9,\ ա' = 5,\ բ' = -3,\ գ' = 41$

ունենալու եմք

$$x = \frac{9(-3) - (-7)41}{3(-3) - (-7)5} = \frac{-27 + 287}{-9 + 35} = 10$$

$$y = \frac{3 \times 41 - 9 \times 5}{3(-3) - (-7)5} = \frac{123 - 45}{-9 + 35} = \frac{78}{26} = 3 :$$

144. ՏԱՐԱԶՆԵՐԸ ՔՆՆԱԴԱՏԵԼՈՒ ՄԻՋՈՑ. — *Երբ $աբ' - բա'$ երկեզրը զրօյէ տարբեր է, [2] տարազք xին և yին արժէքները կը սահմանեն և [1] դրութիւնը միայն մի*

լուծում ունի. ուրեմն կը մնայ մեզ $աբ' - բա' = 0$ հաւասարութիւնը քննադատել:

Դիցուք թէ ա, բ, ա' և բ' տառերը զրօյէ տարբեր քանակութիւններ են, հետեւաբար կ'ստանամք

$$\frac{ա}{ա'} = \frac{բ}{բ'}$$

հաւասարութիւնը առաջնոյն համարժէք. ինչպէս որ կը տեսնեմք, երկու անծանօթից համարտադրիչք [1] դրութեան մէջ իրարու համեմատական են:

145. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Ա. — *Երբ $աբ' - բա' = 0$ հաւասարութիւնը ունիմք, [2] հաւասարութեանց xին եւ yին համարիչք կամ միաժամանակ զերօ են, կամ անոնցմէ ոչ մին զերօ է:*

Զայս հաստատելու համար նկատողութեան առնելու եմք $աբ' - բա' = 0$ հաւասարութիւնը յորմէ կը հետեւի

$$բ' = \frac{բա'}{ա}.$$

ուրեմն եթէ xին և yին համարիչները $Ն_x$ և $Ն_y$ով նշանակեմք, և $Ն_x$ին մէջ բ'ը իւր արժէքով ներկայացնեմք, կ'ստանամք

$$Ն_x = գբ' - բգ' = \frac{գբա'}{ա} - բգ' = \frac{գբա' - աբգ'}{ա} = \frac{բ(գա' - ագ')}{ա}$$

արդ $(գա' - ագ')$ը հաւասար ըլլալով yին փոխուած նշանով համարիչին, ուրեմն ունիմք

$$Ն_x = -\frac{բ}{ա} Ն_y :$$

Ոչ ա և ոչ բ զրօյի հաւասար է, ըսել է $Ն_y$ զրօյի հաւասարած ատեն $Ն_x$ եւս զրօյի կը վերածի. եթէ $Ն_y$ զրօյէ տարբեր թէ մի ըլլար $Ն_x$ եւս այնպէս պիտի ըլլար. ուստի կեզրակացնեմք թէ xին և yին արժէքները

կը ներկայանան $\frac{0}{0}$ ձեւով և կամ $\frac{Մ}{0}$ ձեւով:

146. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Բ. — *Երբ* $աբ' - բա' = 0$, [1] *դրութեան երկու հաւասարութիւնք անհաշտելի են կամ մին միւսոյն մէջ կը հանգչի*:

Այս տեսութիւնը հաստատելու համար $բ'$ լիր արժէքով ներկայացնեմք [1] հաւասարութեանց երկրորդին մէջ. այս եղանակաւ կ'ստանամք

$$ա'ք + \frac{բա'}{ա}ղ = գ' \quad կամ \quad աա'ք + բա'ղ = ագ':$$

Բայց [1] հաւասարութեանց առաջինը $ա'$ով բազմապատկելով կ'ունենամք

$$աա'ք + բա'ղ = գա':$$

Այս պարագային մէջ [1] հաւասարութիւնք համարժէք են երկու այլ հաւասարութեանց, որոց առաջին անդամները նոյն են և երկրորդ անդամք են $ագ'$ և $գա'$. ուրեմն եթէ $ագ'$ և $գա'$ հաւասար չըլլան, երկու հաւասարութիւնք անհաշտելի են. բայց եթէ $ագ' = գա'$ այն ատեն նոյնութիւններ են, ինչ որ կ'ուզէինք հաստատել:

147. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ Ա. — Երբ $ագ'$ անհաւասար է $գա'$ի. $Ն_ղ$ չ'ոչնչանար. ըստ (**145**)ի, $Ն_ք$ եւս չ'ոչնչանար, ուրեմն երբ [1] երկու հաւասարութիւնք անհաշտելի են, [2] տարազոց երկուքն եւս $\frac{Մ}{0}$ ձեւով կը ներկայանան. այս ձեւը անհնարութեան նշան է:

148. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ Բ. — Երբ $ագ' = գա'$, $Ն_ք$ ոչինչ է, այսպէս նաեւ $Ն_ղ$ (**145**), ուրեմն [1] հաւասարութիւնք ի մի կը վերածին, [2] տարազք $\frac{0}{0}$ ձեւով կը ներկայանան. ուրեմն այս ձեւը անսահմանութեան նշան է:

Երկու անծանօթով երկու հաւասարութեանց դրութիւնը միայն մի սահմանեալ լուծում ունի, կամ բնաւ լուծում չունի, և կամ' անսահման լուծում ունի. Նախընթաց քննադատութեան մէջ անծանօթից ոչ միոյն համարատաբիչը զրոյի հաւասար էր. արդ քննադատելու եմք այն պարագաները յորում համարատարչաց ոմանք ոչինչ կ'ըլլան երբ $աբ' - բա'$ հաւասար կ'ըլլայ զրոյի:

149. Երբ համարատարչաց մին և $(աբ' - բա')$ երկեզրը ի միասին հաւասար են զրոյի, այնպէս որ միանգամայն ունենամք

$$աբ' - բա' = 0, \quad բ' = 0,$$

յորմէ կը հետեւի $բա' = 0$, կամ $ա' = 0$, կամ $բ = 0$:

1° Ունենամք $ա' = 0$. [2] տարազք կը վերածուին հետեւեալ ձեւոց.

$$ք = \frac{-բգ'}{0}. \quad ղ = \frac{ագ'}{0},$$

Արդ եթէ $գ'$ ոչինչ չէ, երկուքը ի միասին $\frac{Մ}{0}$ ձեւը կ'առնեն, և եթէ $գ' = 0$, երկու տարազք $\frac{0}{0}$ ձեւը կ'առնեն. ուստի հաւասարութիւնք կ'ըլլան այն ատեն

$$աք + բղ = գ, \quad 0 = գ',$$

ուրեմն անհաշտելի են, զի առաջին պարագային մէջ երկրորդ հաւասարութիւնը անհեթեթ է. երկրորդ պարագային մէջ միայն մի հաւասարութիւն կայ, որովհետեւ երկրորդը նոյնութիւն մ'է. ուրեմն $\frac{Մ}{0}$ և $\frac{0}{0}$ ձեւոց մին անհնարութեան և միւսը անսահմանութեան նշան է:

2° Ունենամք $բ = 0$. [1] տարազք կը վերածին հետեւեալ ձեւոց.

$$ք = \frac{0}{0}\cdot \quad յ = \frac{ագ' - գա'}{0} :$$

Արդ եթէ $գա'$ անհաւասար է $ագ'$ի, $յը$ $\frac{Մ}{0}$ ձեւը կ'առնէ, մինչդեռ $ք$ կ'առնէ $\frac{0}{0}$ ձեւը որ (**145**) տեսութեան բացառութիւնն է. ուստի այս պարագայիս մէջ հաւասարութիւնք կը փոխուին հետեւեալ հաւասարութեանց.

$$աք = գ, \quad ա'ք = գ',$$

որք միայն $ք$ անծանօթը ունին եւ յորոց կ'ստանամք

$$ք = \frac{գ}{ա}, \quad ք = \frac{գ'}{ա'},$$

արժէքները :

Բայց $\frac{գ}{ա}$ հաւասար չէ $\frac{գ'}{ա'}$ի, որովհետեւ $գա'$ եւ $ագ'$ իրարու անհաւասար ենթադրեցինք, ուրեմն հաւասարութիւնք անհաշտելի են, եւ անհնարութիւնը $\frac{Մ}{0}$ եւ $\frac{0}{0}$ ձեւոց տակ կը ներկայանայ մեզ :

Բայց եթէ $ագ' = գա'$, երկու տարազք $\frac{0}{0}$ ձեւը կ'առնեն եւ երկու հաւասարութիւնք ի մի կը վերածին այսպէս,

$$ք = \frac{գ}{ա} = \frac{գ'}{ա'} :$$

Այս հաւասարութիւնը $ք$ին արժէքը թէեւ կը սահմանէ, բայց $յ$ին անսահման կը թողու. ուրեմն մասնական անսահմանութիւն մի կայ որ $\frac{0}{0}$ ձեւով կը ներկայանայ :

Այս քննադատութիւնը այնպիսի պարագայի մի մէջ էր, յորում հաւասարութեան միոյն երկու անծանօթից համարտադրիչները միանգամայն ոչինչ էին, եւ թէ այն պարագային մէջ միեւնոյն անծանօթին համարտադրիչները երկու հաւասարութեանց մէջ ոչինչ էին : Նկատողութեան առնենք հետեւեալ պարագայն եւս :

150. Երբ $աբ' - բա' = 0$, միանգամայն հաւասարութեանց միոյն մէջ $ք$ին համարտադրիչը եւ միւսոյն մէջ $յ$ին զրոյի հաւասարին, այսինքն երբ ունենամք

$$աբ' - բա' = 0, \quad ա = 0, \quad բ' = 0,$$

յորմէ կը հետեւի $բա' = 0$. ըսել է անծանօթից համարտադրիչներուն մին ոչինչ է : Դիցուք $բ = 0$. այս դրութեամբ տարազք կ'առնեն

$$ք = \frac{0}{0}, \quad յ = \frac{-գա'}{0}$$

ձեւերը, եւ հաւասարութիւնք կը վերածին $0 = գ$, $ա'ք = գ'$ հաւասարութեանց. ուրեմն եթէ ոչ $գ$ եւ ոչ $ա'$ ոչինչ ըլլան $0 = գ$ հաւասարութիւնը անհեթեթ կ'ըլլայ եւ անհնարութիւնը $\frac{0}{0}$ եւ $\frac{Մ}{0}$ ձեւոց մէջ կը տեսնուի :

Եթէ $գ$ ոչինչ ըլլայ առաջին հաւասարութիւնը $0=0$ ձեւը կ'առնէ եւ երկրորդը $ք$ին արժէքը կը սահմանէ. արդ մասնական անսահմանութիւն մի կայ զոր $\frac{0}{0}$ ձեւը կը ցուցնէ :

Եթէ $ա'$ ոչինչ ըլլայ անհնարութիւն կայ եւ երկու տարազք $\frac{0}{0}$ ձեւոց տակ կը ներկայանան :

151. ԱՂԻՍԱԿ ՔՆՆԱԴԱՏՈՒԹԵԱՆ. — Նախընթաց քննադատութիւնը հետեւեալ աղիւսակին մէջ կրնամք ամփոփել :

Ընդհանուր դէպք

1. $ա բ' - բ ա' \gtrless 0$: $x = \frac{գ բ' - բ գ'}{ա բ' - բ ա'}$, $y = \frac{ա գ' - գ ա'}{ա բ' - բ ա'}$ · որոշեալ լուծում.
2. $ա բ' - բ ա' = 0$:
   - $ա գ' - գ ա' \gtrless 0$, $x = \frac{գ բ' - բ գ'}{0}$ · $y = \frac{ա գ' - գ ա'}{0}$ · անհնարութ.
   - $ա գ' - գ ա' = 0$, $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$ · անորոշութ.

Մասնաւոր դէպք

$ա բ' - բ ա' = 0$, $բ' = 0$:

- $ա' = 0$:
  - $գ' \gtrless 0$, $x = \frac{- բ գ'}{0}$, $y = \frac{ա գ'}{0}$ · անհնարութ.
  - $գ' = 0$, $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$ · անորոշութիւն:
- $բ = 0$:
  - $ա գ' - գ ա' \gtrless 0$, $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{ա գ' - գ ա'}{0}$ · անհնարութ.
  - $ա գ' - գ ա' = 0$, $x = \frac{գ}{ա}$, $y = \frac{0}{0}$ · մասնկն. անորոշութ.
- $ա = 0$, $բ' = 0$:
  - $գ \gtrless 0$, $ա' \gtrless 0$, $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{- գ ա'}{0}$ · անհնարութիւն
  - $գ = 0$, $x = \frac{գ'}{ա'}$, $y = \frac{0}{0}$ · մասնկն. անորոշութ.
  - $ա' = 0$, $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$ · անհնարութիւն:

152. Նախընթաց դէպքերէն դուրս շատ անգամ կը քննադատուի այն դէպքերը յորում երկու ծանուցեալ եզերք $գ$ և $գ'$ միանգամայն ոչինչ են. այն ատեն xին և yին արժէքները հետեւեալ ձեւերը կ'առնեն.

$$x = \frac{0}{ա բ' - բ ա'} \cdot \quad y = \frac{0}{ա բ' - բ ա'} :$$

Արդ եթէ $ա բ' - բ ա'$ տարբերութիւնը զրօյէ տարբեր է, կ'ունենամք այն ատեն $x = 0$, $y = 0$ · բայց երբ $ա բ' - բ ա' = 0$ xին և yին արժէքները $\frac{0}{0}$ ձեւը կ'ունենան:

Այս արդիւնքները մեկնելու համար ունենամք նորէն լուծել

$$ա x + բ y = 0$$
$$ա' x + բ' y = 0$$

հաւասարութիւնները յորոց կ'ստանամք

$$x = - \frac{բ}{ա} y \cdot \quad x = - \frac{բ'}{ա'} y :$$

Ուրեմն եթէ $\frac{բ}{ա}$ երբէք հաւասար չըլլայ $\frac{բ'}{ա'}$ի, այսինքն եթէ $ա բ' - բ ա'$ տարբերութիւնը ոչինչ չէ, այս հաւասարութիւնք միայն $x = 0$, $y = 0$ լուծումներն ունին. բայց երբ $\frac{ա}{բ}$ հաւասարի $\frac{ա'}{բ'}$ի, այսինքն երբ $ա բ' - բ ա' = 0$ երկու հաւասարութիւնք ի մի կը վերածին, հետեւաբար անսահմանութիւն կայ որ կը տեսնուի $\frac{0}{0}$ ձեւոյն տակ:

Այս վերջի պարագային մէջ նկատելու եմք որ անծանօթից կշիռը սահմանեալ է. որովհետեւ ունիմք

$$\frac{x}{y} = - \frac{բ}{ա} = \frac{բ'}{ա'} :$$

Երեք անծանօթով երեք հաւասարութեանց հանրական լուծումը

153. ՀԱՆՐԱԿԱՆ ՏԱՐԱԶՔ. — Առաջին աստիճանի երեք անծանօթով ամեն հաւասարութիւնք հետեւեալ դրութեամբ կրնան ներկայանալ

$$ա x + բ y + գ z = դ$$
$$ա' x + բ' y + գ' z = դ'$$
$$ա'' x + բ'' y + գ'' z = դ''$$

որոց մէջ $ա$, $բ$, $գ$, $դ$. $ա'$, $բ'$, $գ'$, $դ'$. $ա''$, $բ''$, $գ''$, $դ''$ թիւեր են որք թէ դրական և թէ բացասական կրնան ըլլալ.

այս հաւասարութեանց դրութիւնը լուծելով պիտի տեսնեմք թէ ի՛նչ առնչութիւնք կան անծանօթ քանակութեանց և համարտադրչաց մէջ. առաջին հաւասարութենէն կ'ստանամք

$$x = \frac{d - by - cz}{a} \quad [1],$$

x ին այս արժէքը երկրորդ հաւասարութեան մէջ կը փոխադրեմք և նշանակեալ գործողութիւնները կատարելով կ'ստանամք

$$(ab' - ba')y + (ac' - ca')z = ad' - da' \quad [2]$$

Նմանապէս x ին սոյն արժէքը երրորդ հաւասարութեան մէջ փոխադրելով կ'ունենամք

$$(ab'' - ba'')y + (ac'' - ca'')z = ad'' - da'' \quad [3]$$

հաւասարութիւնները որք առաջարկեալ հաւասարութեանց դրութեան համարժէք են :

Եթէ [2] և [3] հաւասարութիւնները իրարու հետ բաղդատեմք պիտի տեսնեմք որ [3]ը [2]էն յառաջ եկած է. քանզի [2]ի a'ը a''ով, b'ը b''ով և c'ը c''ով ներկայացնելով կստանամք [3] հաւասարութիւնը :

Արդ [2] և [3] հաւասարութիւնները լուծելով կը տեսնեմք x ին և y ին արժէքները ցուցնող տարազք միեւնոյն $(ab' - ba')(ac'' - ca'') - (ab'' - ba'')(ac' - ca')$ յայտարարն ունին. ուստի կրնամք ստանալ y ին համարիչը երբ y ին $(ab' - ba')$, $(ab'' - ba'')$ համարտադրիչը երկու հաւասարութեանց $ad' - da'$, $ad'' - da''$ երկրորդ անդամներով ներկայացնեմք որ ըսել է bը dի b'ը d'ի. և b''ը d''ի փոխել. որովհետեւ $(ab' - ba')$, $(ad' - da')$ երկեզերք և հետեւեալ $(ab'' - ba'')$, $(ad'' - da'')$ իրարմէ միայն b և d գրերով կը տարբերին. Նմանապէս z ին համարիչը կ'ստանամք երբ հասարակ յայտարարին մէջ z ին համարտադրիչներէն իւրաքանչիւրը համա-

պատասխանող հաւասարութեան երկրորդ անդամով ներկայացնեմք :

x ին և y ին արժէքները ներկայացնող տարազոց հասարակ յայտարարն է

$$(ab' - ba')(ac'' - ca'') - (ab'' - ba'')(ac' - ca') :$$

Նշանակեալ բազմապատկութիւնները կատարելէ զկնի երկու մասնական $bca'a''$ արտադրեալները կը ջնջեմք որ հակառակ նշանօք են. վերջապէս մնացեալ վեց եզերց մէջ a հասարակ արտադրիչ կը գտնեմք և յայտարարը կ'առնէ հետեւեալ ձեւը :

$$a(ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'') :$$

Եթէ այս բազմեզեր մէջ b, b', b'' համարտադրիչները առաջարկեալ հաւասարութեան d, d', d'' երկրորդ անդամներով ներկայացնեմք, պիտի ունենամք y ին համարիչը

$$a(ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a'') :$$

Հետեւաբար y ին երկու եզերք մի և նոյն a հասարակ արտադրիչը ունին նմանապէս z ին եզերք. ուստի կը հետեւցնեմք թէ պարզութիւնները կատարելէ զկնի երկու անծանօթից հասարակ յայտարարն է

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'' :$$

Այս բազմեզրը կազմելու համար ահա ուրիշ միջոց մի եւս. c քանակութիւնը կը դրեմք ab արտադրեալին աջ կողմը, ձախ կողմը, մինչեւ որ abc արտադրեալը ունենայ հետեւեալ երեք դիրքերը.

$$abc. \quad acb. \quad cab :$$

Նմանապէս ab արտադրեալը baի փոխելով և նորա վերայ ալ նոյն գործողութիւնները կատարելով հետեւեալ եզրերը կ'ստանամք.

$$bac, \quad bca, \quad cba.$$

այս վեց եզրերը մին միւսոյն ետեւէն կը գրեմք իւրեանց կազմութեան կարգով, երկրորդը առջինէն — նշանով զատուած, երրորդը երկրորդէն + նշանով զատուած, չորրորդը երրորդէն — նշանով, և այսպէս շարունակ. վերջապէս իւրաքանչիւր եզեր երկրորդ գրոյն մի շեշտ և երրորդ գրոյն երկու շեշտ կը դնենք. այս կերպով նախընթաց բազմեզրը կ'առանամք :

Եթէ առաջարկեալ երեք հաւասարութեանց մէջ փոխանակ փն տարադրելու, նախ քը տարադրէինք, փ և ք երկու անծանօթով երկու հաւասարութիւններ պիտի ունենայինք, հետեւաբար փ անծանօթը նոյն յայտարարը պիտի ունենար ինչ որ ֆ ունէր, և իւր համարիչը կազմելու համար միեւնոյն միջոցները պիտի գործածէինք ինչպէս որ միւս երկուքին համար գործածեցինք. ուստի կը հետեւի

154. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Ա. — *Առաջին աստիճանի երեք անծանօթով հաւասարութեանց երեք անծանօթից արժէքները կոտորակներ են՝ որք նոյն յայտարարը ունին, եւ այս յայտարարը կազմուած են երկու անծանօթից համարատարրերով :*

155. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Բ. — *Իւրաքանչիւր անծանօթին յայտարարը կ'առացուի երբ հասարակ յայտարարին այս անծանօթ քանակութեան համար, ստորինաց իւրաքանչիւրը, համապատասխանող հաւասարութեան երկրորդ անդամով ներկայացնեմք :*

Այս տեսութեան տակ կ'իյնայ նաեւ առաջին աստիճանի որեւիցէ ն թուով հաւասարութեանց ն անծանօթից լուծումը. և որոյ հասարակ յայտարարը կ'առանամք ինչպէս որ երեք անծանօթով երեք հաւասարութեանց դրութեան լուծման յայտարարը ստացանք:

ՔՆՆԱԴԱՏՈՒԹԻՒՆ. — Երեք անծանօթով երեք հաւասարութեանց

$$\text{ա}\text{փ} + \text{բ}\text{ք} + \text{գ}\text{ֆ} = \text{դ}$$
$$\text{ա}'\text{փ} + \text{բ}'\text{ք} + \text{գ}'\text{ֆ} = \text{դ}'$$
$$\text{ա}''\text{փ} + \text{բ}''\text{ք} + \text{գ}''\text{ֆ} = \text{դ}''$$

դրութիւնը համարժէք է

$$\text{փ} = \frac{\text{դ} - \text{բ}\text{ք} - \text{գ}\text{ֆ}}{\text{ա}} \qquad [1]$$

$$(\text{ա}\text{բ}' - \text{բ}\text{ա}')\,\text{ք} + (\text{ա}\text{գ}' - \text{գ}\text{ա}')\,\text{ֆ} = \text{ա}\text{դ}' - \text{դ}\text{ա}' \qquad [2]$$

$$(\text{ա}\text{բ}'' - \text{բ}\text{ա}'')\,\text{ք} + (\text{ա}\text{գ}'' - \text{գ}\text{ա}'')\,\text{ֆ} = \text{ա}\text{դ}'' - \text{դ}\text{ա}'' \qquad [3]$$

դրութեան :

Երբ փին ա համարատադրիչը միշտ ոչինչ չէ, առաջարկեալ երեք հաւասարութեանց քննադատութիւնը յետին [1], [2] և [3] հաւասարութեանց վերայ կ'ընեմք: Այսպէս. դիցուք

$$\text{ք} = \frac{\text{Ն}}{\text{Ց}} \quad \text{և} \quad \text{ֆ} = \frac{\text{Թ}}{\text{Ց}},$$

որք յիշեալ [2] և [3] հաւասարութիւններէն քաղուած են, որոց Ց հասարակ յայտարարը կրնայ ըլլալ զրօ կամ զրօյէ տարբեր թիւ մը :

1° Դիցուք

$$\text{Ց} > 0 \text{ կամ } \text{Ց} < 0$$

քին և ֆին և հետեւաբար փին արժէքները հունաւոր և սահմանեալ են, և այս պարագայիս մէջ առաջարկեալ երեք հաւասարութիւնք միայն մի լուծում ունին:

2° Դիցուք

$$\text{Ց} = 0, \text{ և } \text{Ն} > \text{ կամ } < 0,$$

այն ատեն առաջարկեալ հաւասարութիւնք փի, քի և ֆի հասարակ արժէից դրութեամբ մի չկարեն ներկայանալ:

3° Դիցուք

$$\text{Ց} = 0 \text{ և } \text{Ն} = 0:$$

[2] և [3] հաւասարութիւնք ի մի կը վերածին և առաջարկեալ երեք հաւասարութեանց դրութիւնը անսահման է. զի այս երեք հաւասարութիւնք երկու հա-

ւասարութեանց և կամ մի հաւասարութեան կը վերածին։

156. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ.— Եթէ առաջին աստիճանի երեք անծանօթով երեք հաւասարութեանց դ, դ', դ'' երկրորդ անդամք ոչինչ ըլլան, այս անծանօթք զրոյի կը հաւասարին. և եթէ խի, յի և զի հանրական տարազոց յայտարարը ոչինչ չըլլայ, երեք հաւասարութեանց դրութիւնը սահմանեալ կըլլայ։

Այս տեսութիւնը խին, յին և զին հանրական արժէից բաղադրութենէն կը հետեւի, զի այս տարազոց իւրաքանչիւր եզրը կը պարունակէ դ, դ', դ'' տառերէն մին և ըստ ենթադրութեան ոչինչ կ'ըլլայ. ուրեմն

$$խ = 0,\ յ = 0,\ զ = 0$$

առաջարկեալ դրութեան միակ լուծումն է, եթէ միշտ

$$աբ'գ'' - ագ'բ'' + գա'բ'' - բա'գ'' + բգ'ա'' - գբ'ա''$$

յայտարարը ոչինչ չէ։

Ընդհակառակն եթէ առաջարկեալ հաւասարութեանց դրութիւնը անսահման է, կոտորակաց հասարակ յայտարարը զրոյի հաւասարելով, այս հետեւութիւնը կ'ստուգուի զի եթէ տարադրութեան հասարակ կանոնով

$$ախ + բյ + գզ = 0$$
$$ա'խ + բ'յ + գ'զ = 0$$
$$ա''խ + բ''յ + գ''զ = 0$$

երեք հաւասարութիւնները լուծեմք, այս հաւասարութեանց համարժէք

$$խ = -\frac{բյ + գզ}{ա}$$

$$յ = -\frac{(ագ' - գա')զ}{աբ' - բա'}$$

և $(աբ'գ'' - ագ'բ'' + գա'բ'' - բա'գ'' + բգ'ա'' - գբ'ա'')զ = 0$

երեք հաւասարութիւնները կ'ստանամք։

Այս հաւարարութեանց յետինը ըստ ենթադրութեան կը վերածուի

$$0 = 0$$

նոյնութեան։

Ուրեմն խ, յ և զ երեք անծանօթով երկու հաւասարութիւն միայն կայ և նոցա լուծումն անսահման է. որ

$$խ = 0,\ յ = 0,\ զ = 0$$

ձեւովք կը ներկայանան։

Այս հաւասարութեանց դրութիւնը խ, յ և զ անծանօթից մէջ կչիռ մ'ըլլալը կը ցուցնէ, արդարեւ երկրորդ հաւասարութենէ ունիմք

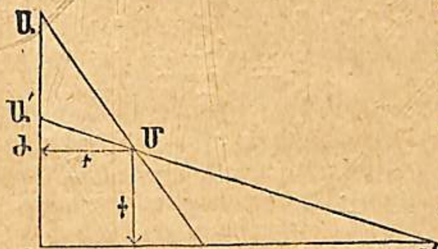
$$\frac{յ}{զ} = -\frac{ագ' - գա'}{աբ' - բա'}$$

և ապա առաջինէն կը հետեւցնեմք

$$\frac{խ}{զ} = -\frac{գբ' - բգ'}{աբ' - բա'}$$

Երկրաչափական առաջարկութեան մի լուծման վերայ քննադատութիւն.

157. Առնենք հետեւեալ երկրաչափական առաջարկութիւնը եւս, որպէս զի նորա մէջ տեսնուի բացասական քանակութեանց գործածութիւնը, նաեւ հանրահաշուական տարազոց քննադատութեամբ առաջարկութիւնը հնարաւո՞ր է թէ անհնար։



ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ. — Երկու ուղղանկեան եռանկիւններ ունիմք, որոց կողերը միեւնոյն ուղիղ գծերուն շարունակութեամբը գրուած են և ա, բ, ա', բ' երկայնութեամբ. հաշուելու է հակուղիղներուն հատման կէտէն եռանկեան երկու կողից մէջ գտնուած հեռաւորութիւնը, և առաջարկութեան լուծումն եւս քննադատելու է։

Դիցուք ՄԹ և ՄԺ երկայնութիւնները խ և յ ցուցընեն. Եռանկեանց նման ըլլալէն կը հետեւցնեմք դիւրութեամբ

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{a}=\dfrac{b-y}{b}\\[2mm]\dfrac{y}{b'}=\dfrac{a'-x}{a'}\end{array}\right\}\ [1]\quad կամ\quad \begin{cases}bx+ay=ab\\ b'x+a'y=a'b'\end{cases}$$

այս երկու հաւասարութիւններէն կ'ստանամք

$$x=\frac{aa'(b'-b)}{ab'-ba'},\quad y=\frac{bb'(a-a')}{ab'-ba'}.$$

ՔՆՆԱԴԱՏՈՒԹԻՒՆ. — Նախ գնեմք թէ յայտարարը դրական է. այս տարազները ստանալէ զկնի քննադատութիւնը շատ դիւրին է, որովհետեւ միայն համարիչները կը մնայ նկատողութեան առնել։ Արդ քննենք այն այլեւայլ պարագաները որ համարիչք կը ներկայացնեն

$$1^\circ\qquad \begin{cases}b'>b\\ a>a'\end{cases}$$

xին և yին արժէքները երկուքը միանգամայն դրական են ։

Այս պարագայիս մէջ առաջարկութիւնը հնարաւոր է, ինչպէս որ առաջարկութիւնը հաւասարութեան դրած ատեննիս ենթադրեցինք. նոյնպէս երկու հակուղիղք երկու եռանկեանց հասարակ ուղիղ անկեան մէջ զիրար կը կտրեն ։

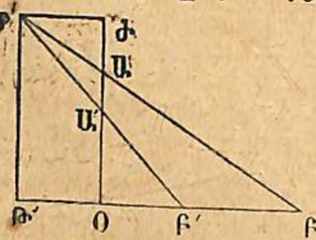
$$2^0.\qquad \begin{cases}b'<b\\ a>a'\end{cases}$$

xին արժէքը բացասական է և yինը դրական ։

Այս լուծումը մեկնելու համար xին նշանը (1) հաւասարութեան մէջ կը փոխեմք և այս կերպով կ'ունենամք

$$\left.\begin{array}{l}-\dfrac{x}{a}=\dfrac{b-y}{b}\\[2mm]\dfrac{y}{b'}=\dfrac{a'+x}{a'}\end{array}\right\}\quad կամ\quad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{x}{a}=\dfrac{y-b}{b}\\[2mm]\dfrac{y}{b'}=\dfrac{a'+x}{a'}\end{array}\right.\quad [2]$$

Այս ձեւոյն տակ ինչպէս կը տեսնուի հաւասարութիւնք հետեւեալ պատկերին կը պատշաճին, որոյ մէջ հակուղիղները Մ' կէտէն զիրար կը կտրեն. զայս ստուգելու համար նկատողութեան առնելու է միեւնոյն եռանկիւնները թէ ինչպէս առաջին պարագայի մէջ հաւասարութեան դրինք։ Բացասական լուծումը ըսել է բացարձակ անհնարութիւն մի չցուցներ, այլ միայն անծանօթից միոյն ուղղութեան փոփոխումը, այս պարագայիս մէջ xի ուղղութեան ընթացքը փոխուելով նշանը եւս փոխուեցաւ ։



$$3^\circ.\qquad \begin{cases}b'>b\\ a<a'\end{cases}$$

xին արժէքը դրական է. իսկ yինը բացասական ։

Հետեւաբար հաւասարութիւնք կ'ըլլան

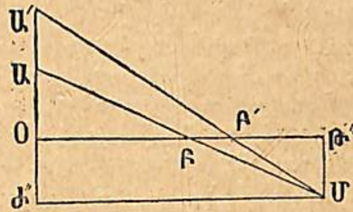
$$\frac{x}{a}=\frac{b+y}{b}\quad և\quad \frac{y}{b'}=\frac{x-a'}{a'}.$$

որք հակուղիղներուն հատման Մ'' կէտին կը պատշաճին.

Զայս ստուգելու համար բաւական է ի նկատի առնուլ նման եռանկիւնները. Մ'' գիրքը կը ցուցնէ որ Մ''Թ'' ուղղահայեացը հակառակ ուղղութեամբ է և իւր նշանը բացասական ։

Այս քննադատութիւնը ամբողջացնելու համար կը մնայ հետեւեալ պարագաները եւս քննութեան առնել.

1⁰. Դիցուք $ab'=ba'$ և $b'\gtrless b$. և $a'\gtrless a$. երկու տարազոց xին և yին արժէքները $\left.\begin{array}{l}x\\y\end{array}\right\}=\frac{Մ}{0}=0$ ձեւով կը ներկայանան որ անհնարութեան նշան են. որովհետեւ $ab'=ba'$ հաւասարութենէ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ հաւասարութիւնը կը հետեւի, հետեւաբար ԱԲ և Ա'Բ' հակուղիղք զուգահեռական են և զիրար երբէք չեն կտրեր.



2⁰. Եթէ $ab'=ba'$ հաւասարութեան մէջ ունենամք $b=b'$, պէտք է ունենալ նաեւ $a=a'$. և երկու տարազոց արդիւնք կ'ըլլան $\frac{0}{0}$ ձեւով որ անսահմանութեան նշան է. որովհետեւ $ab'=ba'$ հաւասարութեան մէջ $b=b'$, $a=a'$ ենթադրութիւնը կը ցուցնէ թէ ԱԲ և Ա'Բ' գիծերն զուգահեռական են և երկու հասարակ կէտեր ունին. այս երկու գիծերը իւրեանց ամբողջ երկայնութեամբ իրարու վրայ պատահին և իրենց հանդիպման կէտը անորոշ է. հետեւաբար այս կէտէն ուղիղ անկեան երկու կողերուն վրայ քաշուած ուղղահայեացը անորոշ դիրք մ'ունի.

Այս պարագաներէն զատ ուրիշ պարագաներ եւս քննութեան կրնային առնել քանի որ a, b, a', b' գրերը թէ դրական և թէ բացասական քանակութիւններ կրնամք նկատել. բայց այսչափով կը բաւականամք.

ՎԱՐԺՈՒԹԻՒՆՔ

1. Ա և Բ սուրհանդակք — երկայնութեամբ ուղիղ գծին վրայ կը գտնուին, եթէ իրարու դէմ երթան ժ ժամանակէն իրարու կը հանդիպին, եթէ մին միւսոյն ետեւէն երթայ ժ' ժամանակէն կը հասնի. գտնելու է իւրաքանչիւրին արագութիւնը ։

$$x = \frac{ad' + ad}{2d'd}$$ Ա.ին արագութիւնը .

Պատ.

$$y = \frac{ad' - ad}{2d'd}$$ Բ.ին արագութիւնը .

2. Ոսկերիչ մի տարբեր յարգով երեք կտոր արծաթ ունի . Ա.ին յարգն է 0,900, Բ.ինը 0,800 և Գ.ինը 0,720 . առաջին երկու կտորներէ բաղադրութիւն մի կազմեց 0,840 յարգով, առաջինէն և երրորդէն 0,780 յարգով. այս երեք կտորներուն ծանրութիւնք են 45 հազարակրամ. իւրաքանչիւր կտորին ծանրութիւնը ո՞րչափ է :

Պատ. Առաջին կտորին ծանրութիւնը 10
Երկրորդ » » 15
Երրորդ » » 20

3. Ոսկերիչ մը արծաթէ և պղինձէ բաղադրուած 3 խառնուրդ ունի, Ա. խառնուրդին մէջ 5 դրամ ոսկի 15 դրամ արծաթ 50 դրամ պղինձ կայ . Բ.ին մէջ 20 դրամ ոսկի , 28 դրամ արծաթ և 48 դրամ պղինձ . Գ.ին մէջ 12 դրամ ոսկի 59 դրամ արծաթ և 24 դրամ պղինձ կայ . կ'ուզէ ասոնցմէ բաղադրութիւն մ'ալ կազմել որոյ մէջ 10 դրամ ոսկի, 23 դրամ արծաթ և 26 դրամ պղինձ ըլլայ . իւրաքանչիւր տեսակէն քանի՞ դրամ առնելու է :

Ոսկին xով, արծաթը yով և պղինձը zով նշանակելով կ'ստանամք

$$x = 10, \quad y = 24 \text{ և } z = 25 :$$

4. Հինգ հոգի խաղու նստան այս պայմանաւ որ կորսնցնողը միւսներուն իւրաքանչիւրին ունեցածին չափ ստակ տայ նոցա . անձնիւր ոք միանգամ խաղը կորսնցուցին և տեսան որ 52ական ղրշ. ունին . խաղի չ'նստած քանիկա՞ն ղրշ. ունէին :

Ա.ին ունեցածը x, Բ.ինը y, Գ.ինը z, Դ.ինը u և Ե.ինը v սեպելով կ'ստանամք

$$x = 81, \quad y = 41, \quad z = 21, \quad u = 1 \text{ և } v = 6 :$$

5. Ծովապետ մը իր հրամայած 3 նաւերուն նաւաստեաց 31824 ֆռ. պիտի տայ եթէ Ա. նաւուն իւրաքանչիւր նաւաստիին 12 ֆռ. տայ . միւս երկու նաւուն նաւաստիներուն 6ական ֆռ. կ'իյնայ եթէ Բ. նաւուն իւրաքանչիւր նաւաստեաց 12 ֆռ. տայ, միւս երկու նաւերուն նաւաստեաց 4ական ֆռ. կ'իյնայ . եթէ երրորդ նաւուն իւրաքանչիւր նաւաստեաց 12 ֆռ. տայ միւս երկու նաւերուն նաւաստեաց 3 ֆռ. կ'իյնայ . իւրաքանչիւր նաւուն մէջ քանի՞ նաւաստի կար :

Պատ. Ա.ին մէջ 780
Բ.ին մէջ 1716
Գ.ին մէջ 2028

6. Գտնելու է երեք թիւ որոց Ա.ին և Բ.ին վերայ եթէ 6 յաւելումք, գումարներուն յարաբերութիւնը $\frac{2}{3}$ ըլլայ . եթէ Ա.է և Գ.ի վերայ 5ական յաւելումք գումարներուն յարաբերութիւնը $\frac{7}{11}$ ըլլայ եթէ Բ.էն և Գ.էն 36 բառնամք մնացորդաց յարաբերութիւնը $\frac{6}{7}$ ըլլայ :

Ա.ը x, Բ.ը y, Գ.ը z սեպելով կ'ստանամք

$$x = 30, \quad y = 48 \text{ և } z = 50 :$$

7. Ուղղանկեան մի մէջ ուղղանկիւն մի ներփակել որ նման ըլլայ առաջարկեալ ուրիշ ուղղանկեան մի :

Առաջարկեալ ուղղանկեան խարիսխը a, բարձրութիւնը b և ներփակելի ուղղանկեան երկու կողից կշիռը $\frac{m}{n}$ սեպելով կ'ստանամք

$$\frac{x}{b - y} = \frac{y}{a - x} = \frac{m}{n}$$ հաւասարութիւնը

որոյ լուծումն է

$$x = \frac{m(ma - nb)}{m^2 - n^2}$$

$$y = \frac{m(mb - na)}{m^2 - n^2}$$

առաջարկութիւնը հնարաւոր ըլլալու համար

$$\frac{mb}{n} > a, \text{ և } \frac{ma}{n} > b :$$

8. Ի՞նչ առնչութիւն ունենալու են Ա, Բ, Ա', Բ' քանակութիւնք, որպէս զի $\frac{Աx + Բ}{Ա'x + Բ'}$, xէն անկախ արժէք մը ունենայ :

Պէտք է ունենալ $\frac{Ա}{Ա'} = \frac{Բ}{Բ'}$:

9. Ի՞նչ առնչութիւն ունենալու են Ա, Բ, Գ և Ա', Բ', Գ' քանակութիւնք, որպէս զի $\frac{Աx + Բy + Գ}{Ա'x + Բ'y + Գ'}$ անկախ արժէք մը ունենայ xէն և yէն :

Պէտք է ունենալ $\frac{Ա}{Ա'} = \frac{Բ}{Բ'} = \frac{Գ}{Գ'}$:

10. Ուղղանկեան մի իւրաքանչիւր Ա և Բ կողերը երկու մասերու բաժնելու է, այնպէս որ եթէ բաժանման 4 կէտերն միացնեմք ներփակեալ ուղղանկիւն մի ստանամք որոյ երկու կողից կշիռը ըլլայ $\frac{1}{m}$:

Դիցուք $խ$ և $ա - խ$ Ա կողին երկու կտորները, $յ$ և $բ - յ$ Բ կողին կտորները նման եռանկեանց միջոցաւ պիտի ունենամք

$$խ = հյ$$

$$բ - յ = հ(ա - խ)$$

որոց լուծումն է

$$խ = \frac{հ(հա - բ)}{հ^2 - 1}$$

$$յ = \frac{հա - բ}{հ^2 - 1}:$$

11. $Ախ^2 + Բխ + Գ$ եռեզեր Ա, Բ, և Գ համարտադրիչները սահմանելու է, այնպէս որ այս եռեզրը զրոյի հաւասարի 1°. $խ = ա$ 2°. $խ = բ$ արժէից համար, և $խ = գ$ արժէքին համար հի հաւասար ըլլայ.

Պատ. $Ա = \dfrac{հ}{(գ - ա)(գ - բ)}$. $Բ = \dfrac{-հ(ա + բ)}{(գ - ա)(գ - բ)}$ և

$$Գ = \frac{հաբ}{(գ - ա)(գ - բ)}:$$

12. Եթէ երկրորդ աստիճանի երկու $Ախ^2 + Բխ + Գ$, $Ա'խ^2 + Բ'խ + Գ'$ բազմեզերք իրարու հաւասար ըլլան փոփոխական խին հ, ն և ր երեք տարբեր արժէից համար պէտք է հաստատել թէ այս բազմեզերք նոյնութիւններ են, այսինքն $Ա = ա'$. $Բ = բ'$ և $Գ = գ'$:

13. Չորս անձինք Ա, Բ, Գ և Դ կը միանան ա ֆր. արժէքով տուն մի գնելու համար. առաջինը Ա՝ առանձին պիտի կրնար վճարել եթէ երկրորդը Բ՝ իւր ունեցածին $\frac{1}{հ}$րդ մասը իրեն փոխ տար. երկրորդը առանձին պիտի վճարէր եթէ երրորդը Գ՝ իւր ունեցածին $\frac{1}{ն}$րդ մասը իրեն տար. երրորդը ամբողջ վճարումը առանձին ընելու համար չորրորդ Դէն ունեցածին $\frac{1}{ր}$րդ մասը կուզէ. իսկ չորրորդին այն տունը ծախու առնելու համար կը պակսի առաջնոյն ստացուածքին $\frac{1}{ժ}$րդ մասը. անձնիւր ո՞ք քանիկա՞ն գումար ունէր.

Պատ. Ա. ունէր $ա\left(\dfrac{հնրժ - նրժ + րժ - ժ}{հնրժ - 1}\right)$

Բ. » $ա\left(\dfrac{հնրժ - հրժ + հժ - հ}{հնրժ - 1}\right)$

Գ. » $ա\left(\dfrac{հնրժ - հնժ + հն - ն}{հնրժ - 1}\right)$

Դ. » $ա\left(\dfrac{հնրժ - հնր + նր - ր}{հնրժ - 1}\right)$

14. Սեղանաւոր մի երկու տեսակ ստակ ունի, մէկ տեսակէն ա կտոր կը պակսի 20 ֆրանքը ամբողջացնելու համար. միւս տեսակէն բ կտոր կը պակսի նոյն գումարը լրացնելու համար. մէկը իւրմէ գ կտոր ստակ կը պահանջէ 20 ֆրանքի համար. իւրաքանչիւր տեսակէն ո՞րչափական տալու է:

Պատ. $\dfrac{ա(գ - բ)}{ա - բ}$ կտոր Ա. տեսակէն, $\dfrac{բ(ա - գ)}{ա - բ}$ կտոր Բ. տեսակէն.

15. Երեք թուանշաններէ բաղկացեալ թիւ մը գտնելու է որ թուաբանական յառաջատուութիւն մի կազմեն. Եթէ այս թիւը իւր թուանշանաց գումարով բաժնեմք քանորդը ըլլայ 48. և եթէ այս թիւէն 198ը բառնամք, մնացորդը փնտռուած թուոյն թուանշանները ունենայ, բայց նորա շրջուածը ըլլայ.

Պատ. 432:

ԴԱՍ ԺԴ.

ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ԵՒ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ԱՐՄԱՏ

158. ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ԲԱԶՄԵԶԵՐՑ. — *Երկու հաւասար արտադրչաց բազմապատկութեան արտադրեալը քառակուսի մ'է: Զոր օրինակ $2աբ$ին քառակուսին $2աբ \times 2աբ = 4ա^2բ^2$ է. Նմանապէս $(ա + բ)$ին քառակուսին է $(ա+բ)^2 = ա^2 + 2աբ + բ^2$. և $(ա + բ + գ)$ եռեզեր. քառակուսին է*

$$ա^2 + 2աբ + բ^2 + 2ագ + 2բգ + գ^2:$$

Այս այլ և այլ պարագայից մէջ տեսնուեցաւ 1° Երկեզեր մի քառակուսին հաւասար է առաջին եզեր քառակուսւոյ աւելի 2 անգամ առաջին եզեր երկրորդ եզերով բազմապատկութեան արտադրեալին, աւելի երկրորդ եզեր քառակուսւոյն. 2° Եռեզեր մի քառակուսին հաւասար է առաջին եզեր քառակուսւոյն, աւելի 2 անգամ առաջին եզեր երկրորդ եզրով բազմապատկութեան արտադրեալին, աւելի երկրորդ եզեր քառակուսւոյն, աւելի երկու առաջին եզերց իւրաքանչիւրին երկրորդ եզրով բազմապատկութեան ար-

տադրեալին, աւելի երկրորդ եզեր քառակուսոյն ուստի կը հետեւի

Բազմեզեր մի քառակուսին կը բաղկանայ առաջին եզեր քառակուսիէն, աւելի առաջնոյն երկրորդ եզրով բազմապատկութեան արտադրեալին կրկինէն, աւելի երկրորդ եզեր քառակուսին, աւելի առաջին իւրաքանչիւր երկու եզերց երրորդ եզրով բազմապատկութեան արտադրեալին կրկնապատկէն. աւելի իւրաքանչիւր առաջին երեք եզերց չորրորդ եզրով բազմապատկութեան արտադրեալէն, աւելի չորրորդ եզեր քառակուսիէն. և այլն:

Քառակուսի եզերց նշանները դրական են միշտ, և 2 ով բազմապատկուած արտադրեալին նշանները արտադրչաց նշաններէն կախում ունի:

Կրնանք նաև ըսել. բազմեզեր մի քառակուսին կը բաղկանայ իւր եզերց իւրաքանչիւրին քառակուսիներու գումարէն աւելի իւր եզերց երկու առ երկու առնուած եզերց արտադրեալէն:

159. ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ԱՐՄԱՏ ԲԱԶՄԵԶԵՐՑ. — Բազմեզեր մի քառակուսի արմատը ուրիշ բազմեզր մ'է որ ինքնապատկելով առաջինը կ'արտադրէ. ուրեմն եթէ բազմեզեր եզրերը տառի մը նուազող կարողութեանց համեմատ դասաւորեմք, այս բազմեզեր առաջին եզրը արմատին առաջին եզեր քառակուսին է, և երկրորդ եզրը արմատին երկրորդ եզեր առաջին եզրով արտադրեալին կրկինն է, որովհետև այս եզրը ոչ մի ուրիշ եզրով կը բաժնուի: Յետին եզրը ևս արմատին վերջին եզեր քառակուսին է, և վերջընթեր եզրը արմատին երկու անգամին վերջընթեր եզրով բազմապատկութեան արտադրեալն է:

Դիցուք Թ. առաջարկեալ բազմեզրը որոյ քառակուսի արմատը գտնել ուզեմք

$$Թ = (ա + բ + գ + դ \ldots + լ)^2 =$$
$$ա^2 + 2աբ + բ^2 + 2ագ + 2բգ + գ^2 + \ldots$$

Առաջին եզեր քառակուսի արմատը նախապէս ըստանալու համար առաջարկեալ բազմեզեր առաջին եզեր արմատը կառնեմք:

ա ին քառակուսին կամ $ա^2$ ը առաջարկեալ բազմեզրէն բառնալով կը մնայ $2աբ + բ^2 + 2ագ + գ^2 + \ldots$

Այս մնացորդին առաջին եզրը նոր ստացուած եզեր կրկինով բաժնելով արմատին երկրորդ եզրը կ'ստանամք:

Առաջարկեալ բազմեզրէն $ա + բ$ ին քառակուսին բառնալ պէտք է այսինքն $ա^2 + 2աբ + բ^2$. արդէն $ա^2$ ը բարձուած ըլլալով կը մնայ Մ մնացորդէն $2աբ + բ^2$ ը կամ $(2ա + բ)\,բ$ ը բառնալ. այս բառնալի մասը ինչպէս կը տեսնուի կը բաղկանայ առաջին եզեր կրկինին երկրորդ եզրով գումարին երկրորդ եզրով բազմապատկութեան արտադրեալէն. բարձումը կատարելով երկրորդ մնացորդ մի կ'ունենամք Մ', $2ագ + 2բգ + դ^2 + 2ադ + 2բդ \ldots$

Այս մնացորդին առաջին եզրը երրորդ եզեր արմատին առաջին եզեր կրկինով բազմապատկութեան արտադրեալն է. ուրեմն արմատին երրորդ եզրը ստանալու համար երկրորդ մնացորդին առաջին եզրը արդէն գտնուած եզեր կրկինով բաժնելու է, և այս երկրորդ մնացորդէն երեք ստացուած եզերց քառակուսին բառնալու է, այսինքն $ա^2 + 2աբ + բ^2 + 2աբ + 2բգ + գ^2$. արդէն $ա^2 + 2աբ + բ^2$ բարձուած ըլլալով բաւական է Մ'էն բառնալ $2ագ + 2բգ + գ^2$ կամ $(2ա + 2բ + գ)\,գ$ արտադրեալը: Այս բառնալի եզրը ևս կրնամք ստանալ եթէ առաջին երկու եզերց իւրաքանչիւրին կրկինը աւելի երրորդ եզրը երրորդ եզրով բազմապատկեմք. բարձումը կատարելով Մ'' երրորդ մնացորդ մի կունենամք որ է $2ադ + 2բդ + գդ + դ^2$:

Այս մնացորդին առաջին եզրը հաւասար է առաջին եզեր չորրորդ եզրով բազմապատկութեան արտադր-

եալին կրկնապատկին. ուրեմն արմատին չորրորդ եզրը կրնամք ստանալ եթէ երրորդ եզեր առաջին եզրը արդէն գտնուած առաջին եզեր կրկինով բաժնեմք..., և այսպէս գործողութիւնը յառաջ վարելով առաջարկեալ բազմեզեր քառակուսի արմատը կ'ստանամք: Ուստի կը հետեւի

159. ԿԱՆՈՆ. — *Բազմեզեր մը քառակուսի արմատը գտնելու համար պէտք է բազմեզեր եզրերը տառի մի նուազող կարողութեանց համեմատ դասաւորել. առաջին եզեր քառակուսի արմատը փնտռելու է. այս ստացուած եզրը փնտռուած քառակուսի արմատին առաջին եզրն է. յետոյ բազմեզրէն իր առաջին եզրը հանելու է եւ երկրորդը արմատին կրկինով բաժնելու է. այս բաժանման քանորդը արմատին երկրորդ եզրն է. քառակուսի արմատին այս ստացուած մասը կը քառակուսենք եւ առաջարկեալ բազմեզրէն կը հանենք. արմատին երրորդ եզրը ստանալու համար մնացորդին առաջին եզրը արմատին կրկինով կը բաժնենք եւ այսպէս կը շարունակենք մինչեւ որ մնացորդնիս ոչինչ ըլլայ կամ անհնարին բաժանման հասնինք:*

Բազմեզեր մի քառակուսի արմատը գտնելու գործողութեան ձեւը ճիշդ ամբողջ թուոյ մի քառակուսի արմատը գտնելու պէս է: Զորօրինակ.

	$9ք^2 - 30աք - 3ա^2ք + 25ա^2 + 5ա^3 + \frac{ա^4}{4}$	$3ք - 5ա - \frac{ա^2}{2}$
	$9ք^2$	
1° Մ	$-30աք - 3ա^2ք + 25ա^2 + 5ա^3 + \frac{ա^4}{4}$	$6ք - 5ա$
	$30աք - 25ա^2$	
2° Մ	$-3ա^2ք + 5ա^3 + \frac{ա^4}{4}$	$6ք - 10ա - \frac{ա^2}{2}$
3° Մ	$3ա^2ք - 5ա^3 - \frac{ա^4}{4}$	
	0	

	$4ա^2ք^6 + 16ա^3ք^5 - 20ա^5ք^3 + 40ա^6ք^2 - 24ա^7ք + 9ա^8$	$2աք^3 + 4ա^2ք^2 - 4ա^3ք + 3ա^4$
	$-4ա^2ք^6$	
1° Մ	$16ա^3ք^5 - 20ա^5ք^3 + 40ա^6ք^2 - 24ա^7ք + 9ա^8$	$4աք^3 + 4ա^2ք^2$
	$-16ա^3ք^5 - 16ա^4ք^4$	
2° Մ	$-16ա^4ք^4 - 20ա^5ք^3 + 40ա^6ք - 24ա^7ք + 9ա^8$	$4աք^3 + 8ա^2ք^2 - 4ա^3ք$
	$+16ա^4ք^4 + 32ա^5ք^3 - 16ա^6ք^2$	
3° Մ	$12ա^5ք^3 + 24ա^6ք^2 - 24ա^7ք + 9ա^8$	$4աք^3 + 8ա^2ք^2 - 8ա^3ք + 3ա^4$
	$-12ա^5ք^3 - 24ա^6ք^2 + 24ա^7ք - 9ա^8$	
4° Մ	0	

160. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ. — Երբ կ'ուզեմք հասկնալ թէ բազմեզեր մը քառակուսի արմատը ճշդութեամբ կը գտնուի թէ ոչ պէտք է գիտել. 1° Բազմեզրը տառին միոյն նուազող կարողութիւններով դասաւորելէ զկնի երկու ծայրերը ճիշդ քառակուսինե՞ր են. 2° Բազմեզեր երկրորդ և վերջընթեր եզրերը մին արմատին առաջին եզեր կրկինով և միւսը արմատին վերջին եզեր կրկինով բաժանակա՞ն են. 3° Գործողութիւնները յառաջ վարած ատեննիս մնացորդին առաջին եզրը արմատին առաջին եզեր կրկինով բաժանակա՞ն են: Երբ այս թէութիւնք կատարուած են առաջարկեալ բազմեզեր արմատը ճշդութեամբ կը գտնուի:

ՎԱՐԺՈՒԹԻՒՆՔ

1. Հաստատելու է թէ անզոյգ թուոյ մի քառակուսին 8ի բազմապատիկ, աւելի միութիւն մ'է.
2. Հաստատելու է թէ ն թուով առաջին անզոյգ թուոց գումարը $ն^2$ի հաւասար է.
3. Երբ երկու ամբողջական թուոց իւրաքանչիւրը երկու քառակուսիներու գումար է, իւրեանց արտադրեալը եւս երկու քառակուսիներու գումար է.
4. Երբ զոյգ թիւ մը երկու քառակուսիներու գումար է, իր կէսը եւս երկու քառակուսիներու գումար է:
5. Գտնելու է երկու թիւեր որոց գումարը և արտադրեալը միեւնոյն թիւը ըլլան.

6. Ուղղանկեան մի երկու կողից երկայնութիւնները գտնելու է, գիտնալով որ այս երկու կողից երկայնութիւնները ամբողջական թիւեր են. և շրջապատը ուղղանկեան մակերեւոյթին հաւասար է։

7. Գտնելու է երկու թիւ որոց տարբերութիւնը և արտադրեալը միեւնոյն թիւը ըլլան։

8. Բաժնելու է 1000ը այնպէս երկու մասերու որ մին 11ով և միւսը 17ով բաժանական ըլլայ։

9. Ի՞նչ է այն թիւը որ եթէ 94ին վերայ յաւելումք և 94էն բառնամք գումարին և տարբերութեան արտադրեալը 8592 ըլլայ։

Պատ. 18։

10. Ի՞նչ է այն թիւը որոյ $\frac{1}{7}$ը իւր $\frac{1}{8}$ով բազմապատկելով և արտադրեալը 5ով բաժնելով քանորդը ըլլայ 298 $\frac{2}{3}$։

Պատ. 224։

11. Գտնելու է երկու թիւեր, որոց վերաբերութիւնը ըլլայ $\frac{3}{4}$, և քառակուսիներուն գումարը 324900։

Պատ. Ա.ը 342. Բ.ը 456։

12. Գտնելու է երկու թիւեր, որոց քառակուսիներուն գումարն ըլլայ 4941. և տարբերութիւնը 891։

Պատ. 54 և 45։

13. Հետեւեալ հանրահաշուական քանակութեանց քառակուսի արմատները գտնել։

1° $\sqrt{ա^{2մ} + 2ա^{մ}գ^{ն} + գ^{2ն}}$

Պատ. $ա^{մ} + գ^{ն}$։

2° $\sqrt{4ք^4 + 8աք^3 + 4ա^2ք^2 + 16բ^2ք^2 + 16աբ^2ք + 16բ^4}$

Պատ. $2ք^2 + 2աք + 4բ^2$։

3° $\sqrt{9ա^2 - 6աբ + 30ագ + 6ադ + բ^2 - 10բգ - 2բդ + 25գ^2 + 10գդ + դ^2}$

Պատ. $3ա - բ + 5գ + դ$։

4° $\sqrt{\frac{9}{4} + 6ք - 17ք^2 - 28ք^3 + 49ք^4}$

Պատ. $\frac{3}{2} + 2ք - 7ք^2$։

5° $\sqrt{9ք^4 - 3աք^3 + 6բք^3 + \frac{ա^2ք^2}{4} - աբք^2 + բ^2ք^2}$։

Պատ. $3ք^2 - \frac{աք}{2} + բք$։

ԴԱՍ ԺԵ.

ԵՐԿՐՈՐԴ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԻՒՆՔ

161. ՄԻ ԱՆԾԱՆՕԹՈՎ ԵՐԿՐՈՐԴ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆ ՁԵՒ. — *Մի անծանօթով հաւասարութիւն մի երկրորդ աստիճանի է կ'ըսուի երբ անծանօթին բարձրագոյն ցուցիչը 2 է։*

Հաւասարութիւն մի անթերի է կ'ըսուի եթէ պարզութիւնները կատարելէ զկնի պարունակէ 1° անծանօթին քառակուսին, 2° անծանօթին առաջին աստիճանը և 3° ծանուցեալ եզր մի։

Այսպիսի հաւասարութեան մի ամէն եզրերը առաջին անդամին մէջ փոխադրելով իւր հանրական ձեւը կ'ըլլայ

$$աք^2 + բք + գ = 0$$

որ անթերի հաւասարութիւն մ'է, որոյ մէջ ա, բ, գ, ծանօթ թիւեր են, որք թէ դրական և թէ բացասական կրնան ըլլալ ինչպէս հետեւեալ օրինակին մէջ

$$4ք - \frac{2}{3} + \frac{ք^2}{6} - 9 - \frac{2}{3}ք^2 + \frac{22}{6} = 0,$$

կամ $$24ք - 4 + ք^2 - 54 - 4ք^2 + 22 = 0,$$

և կամ $$-3ք^2 + 24ք - 36 = 0.$$

որոյ բոլոր եզերց նշանները փոխելով կ'առնամք

$$3ք^2 - 24ք + 36 = 0$$

հաւասարութիւնը որ անթերի է։

Իսկ թերի հաւասարութիւնք հետեւեալք են.

$$4ք^2 = 64. \quad աք^2 = բք։$$

162. ԹԵՐԻ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄ. — *Երկրորդ աստիճանի թերի հաւասարութիւն մի միշտ հետեւեալ ձեւոց միոյն կրնայ վերածիլ.*

$$աք^2 + գ = 0 \quad [1]$$

կամ

$$աք^2 + բք = 0 \quad [2]$$

առաջին [1]ը լուծելու համար ծանուցեալ գ եզրը երկրորդ անդամին մէջ կը փոխադրեմք և այս նոր ստացուած հաւասարութեան երկու անդամները աով բաժնելով կ'ունենամք

$$ք^2 = -\frac{գ}{ա}:$$

Եթէ գ բացասական ըլլայ և ա դրական, հաւասարութեան երկրորդ անդամ $-\frac{գ}{ա}$ը դրական կ'ըլլայ. հետևաբար $\sqrt{-\frac{գ}{ա}}$ին քառակուսին կրնայ նկատուիլ. այսինքն

$$ք^2 = \left(\sqrt{-\frac{գ}{ա}}\right)^2:$$

Ուստի կը հետևի

$$ք = \pm\sqrt{-\frac{գ}{ա}} \quad [2]$$

ինչպէս կը տեսնեմք քին արժէքները երկուք են և հակառակ նշանով:

Եթէ $-\frac{գ}{ա}$ բացասական ըլլայ, [1] հաւասարութիւնը ոչ մի լուծում կրնայ ունենալ, զի ոչ դրական և ոչ այլ բացասական թիւ մի կայ որոյ քառակուսին բացասական ըլլայ. այս պարագայիս մէջ հաւասարութեան լուծմունք երևակայական են կ'ըսուին (**71**):

Լուծեմք նաև [2] հաւասարութիւնը

$$աք^2 + բք = 0$$

որոյ քն հասարակ արտադրիչ գտնելով կ'ունենամք

$$ք(աք + բ) = 0,$$

երկու արտադրչաց արտադրեալը զրօ ըլլալով այս արտադրիչներէն գոնէ մին զրօյի հաւասար ըլլալու է. այսպէս

$$ք = 0. \quad աք + բ = 0$$

առաջին աստիճանի հաւասարութիւններ որոց լուծմունք են

$$ք = 0. \quad և \quad ք = -\frac{բ}{ա}:$$

ՕՐԻՆԱԿ Ա. Ո՞րն է այն թիւը որոյ կէսը իւր մէկերրորդին հետ բազմապատկելով հաւասար ըլլայ 150ի:

Ունիմք

$$\frac{ք}{2} \times \frac{ք}{3} = 150,$$

կամ

$$\frac{ք^2}{6} = 150,$$

և կամ

$$ք^2 = 900,$$

ուստի

$$ք = \pm\sqrt{900} = \pm 30:$$

ՕՐԻՆԱԿ Բ. Ո՞րն է այն թիւը որոյ $\frac{3}{4}$ իւր $\frac{2}{3}$ին հետ բազմապատկելով արտադրեալը ըլլայ -2:

Ունիմք

$$\frac{3ք}{4} \times \frac{2ք}{3} = -3,$$

կամ

$$\frac{ք^2}{2} = -3,$$

և կամ

$$ք^2 = -6,$$

ուստի

$$ք = \pm\sqrt{-6}.$$

քին երկու արժէքները երևակայական են և առաջարկութիւնը անհնարին:

ՕՐԻՆԱԿ Գ. Ո՞րն է այն թիւը որ իւր քառակուսւոյն $\frac{1}{7}$ին հաւասար է։

Ունիմք

$$\frac{\text{ք}^2}{7} = \text{ք}$$

կամ $$\text{ք}^2 - 7\text{ք} = 0,$$

և կամ $$\text{ք}(\text{ք} - 7) = 0,$$

որոյ իւրաքանչիւր արտադրիչը զրոյի հաւասարցնելով կ'ստանամք

$$\text{ք} = 0, \quad \text{և} \quad \text{ք} = 7։$$

Երկրորդ աստիճանի անբերի հաւասարութեան լուծում

163. Երկրորդ աստիճանի հաւասարութիւն մի միշտ հետեւեալ ձեւոյն կրնայ վերածուիլ.

$$\text{ա}\text{ք}^2 + \text{բ}\text{ք} + \text{գ} = 0,$$

որոյ մէջ ա, բ, գ, ծանուցեալ քանակութիւնք են, որք թէ միեզր և թէ բազմեզր, թէ դրական և թէ բացասական կարեն ըլլալ. ա եթէ դրական է, որ միշտ կրնամք սեպել, առաջարկեալ հաւասարութեան բոլոր եզրերը ա ով բաժնելով

$$\text{ք}^2 + \frac{\text{բ}}{\text{ա}}\text{ք} + \frac{\text{գ}}{\text{ա}} = 0$$

հաւասարութիւնը կ'ունենամք, որոյ $\frac{\text{բ}}{\text{ա}}$ը Բ ով և $\frac{\text{գ}}{\text{ա}}$ը ժ ով կը ներկայացնեմք և կ'ունենամք

$$\text{ք}^2 + \text{Բ}\text{ք} + \text{ժ} = 0 \quad [1]$$

հաւասարութիւնը։

Այս ձեւոյն տակ պիտի տեսնեմք երկրորդ աստիճանի հաւասարութիւնները։

[1]ին երրորդ ժ եզրը երկրորդ անդամին մէջ կ'անցընեմք

$$\text{ք}^2 + \text{Բ}\text{ք} = -\text{ժ}.$$

որոյ առաջին անդամը երկեզեր մի քառակուսին կրնամք նկատել, եթէ ք^2 առաջին եզեր քառակուսին և $\text{Բ}\text{ք}$ առաջին եզեր կրկինը երկրորդ եզեր հետ բազմապատկուած սեպեմք, երկրորդ եզրը պիտի ըլլայ $\frac{\text{Բ}}{2}$. արդ այս հաւասարութեան երկու անդամոց վերայ $\frac{\text{Բ}}{2}$ին քառակուսին $\frac{\text{Բ}^2}{4}$ յաւելցնելով հաւասարութիւնը չփոխուիր. հետեւաբար ունիմք

$$\text{ք}^2 + \text{Բ}\text{ք} + \frac{\text{Բ}^2}{4} = \frac{\text{Բ}^2}{4} - \text{ժ}$$

հաւասարութիւնը, որոյ երկու անդամոց քառակուսի արմատը առնելով կ'ստանամք

$$\text{ք} + \frac{\text{Բ}}{2} = \pm\sqrt{\frac{\text{Բ}^2}{4} - \text{ժ}}$$

ուստի

$$\text{ք} = -\frac{\text{Բ}}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{Բ}^2}{4} - \text{ժ}} \quad [2]$$

Այս գործողութիւններէն կը հետեւցնեմք.

164. ԿԱՆՈՆ. — *Երկրորդ աստիճանի հաւասարութիւն մի երբ $\text{ք}^2 + \text{Բ}\text{ք} + \text{ժ} = 0$ ձեւոյն վերածուած է, իւր արմատները գտնելու համար պէտք է համարատարիչին կէսը հակառակ նշանով առնել եւ յաւելլուլ կամ պակասցնել այս կիսոյն քառակուսւոյն եւ ծանուցեալ եզեր տարբերութեան քառակուսի արմատը։*

Եթէ իւրաքանչիւր արմատ ք'ով և ք''ով նշանակեմք, $\text{ք}' > \text{ք}''$ ունիմք

$$\text{ք}' = -\frac{\text{Բ}}{2} + \sqrt{\frac{\text{Բ}^2}{4} - \text{ժ}}$$

և

$$\text{ք}'' = -\frac{\text{Բ}}{2} - \sqrt{\frac{\text{Բ}^2}{4} - \text{ժ}}։$$

[2] տարազին մէջ եթէ բ՝ $\frac{բ}{ա}$ ով և գ՝ $\frac{գ}{ա}$ ով ներկայացնենք կ'ունենամք

$$ք = -\frac{բ}{2ա} \pm \sqrt{\frac{բ^2}{4ա^2} - \frac{գ}{ա}}$$

կամ միեւնոյն յայտարարի վերածելով և պարզութիւնները կատարելով կ'ստանամք

$$ք = \frac{-բ \pm \sqrt{բ^2 - 4ագ}}{2ա} \quad [3]:$$

Լուծենք հետեւեալ հաւասարութիւնները այս ըստացուած տարազոյ միջոցաւ.

1°. $ք^2 - 12ք + 35 = 0:$

(2) տարազին միջոցաւ կ'ստանամք

$$ք = 6 \pm \sqrt{36 - 35}$$

$$ք = 6 \pm 1$$

ուստի $ք' = 7$ և $ք'' = 5:$

2°. $ք^2 + 16ք + 62 = 0:$

(2) տարազին միջոցաւ կ'ստանամք

$$ք = -8 \pm \sqrt{64 - 62}$$

$$ք = -8 \pm \sqrt{2}$$

ուստի $ք' = -6,58$ և $ք'' = -9,41:$

3°. $ք^2 - 9ք + 20 = 0:$

(2) տարազին միջոցաւ կ'ստանամք

$$ք = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 20}$$

20 են 4 յայտարարը տալով, ունիմք

$$ք = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81 - 80}{4}}.$$

ուստի $ք' = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5$ և $ք'' = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4:$

4°. $ք^2 - ք - 20 = 0:$

(2) տարազին միջոցաւ կ'ստանամք

$$ք = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 20}$$

$$ք = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{80}{4}}$$

ուստի $ք' = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$. և $ք = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4:$

5°. $8ք^2 - 2ք - 3 = 0$

որոյ եզրերը 8 ով բաժնելով կ'ստանամք

$$ք^2 - \frac{2}{8}ք - \frac{3}{8} = 0$$

(2) տարազին միջոցաւ կ'ունենամք

$$ք = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{3}{8}},$$

$$ք = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1 + 24}{64}}.$$

ուստի $ք' = \frac{1}{8} + \frac{5}{8} = \frac{3}{4}$, և $ք'' = \frac{1}{8} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{2}:$

Երկրորդ աստիճանի անբերի հաւասարութեան ուղղակի լուծում

165. ունենամք հետեւեալ

$$աք^2 + բք + գ = 0 \quad [1]$$

հաւասարութիւնը, զոր լուծելու համար երրորդ եզրը

երկրորդ անդամին մէջ կ'անցընեմք և կ'ունենամք

$$աx^2 + բx = -գ \cdot$$

այս հաւասարութեան երկու անդամները $4ա$ով բազմապատկելով կ'ստանամք

$$4ա^2x^2 + 4աբx = -4ագ \quad [1]$$

հաւասարութիւնը որ համարժէք է առաջնոյ։

Այս ձեւոյն մէջ դիւրութեամբ կը տեսնուի թէ առաջին անդամը $(2աx + բ)$ի քառակուսոյն հաւասարելու համար խումէ կը պակսի $բ^2$. ուստի եթէ այս հաւասարութեան երկու անդամոց վերայ $բ^2$ յաւելումք, կ'ստանամք

$$4ա^2x^2 + 4աբx + բ^2 = բ^2 - 4ագ$$

կամ

$$(2աx + բ)^2 = բ^2 - 4ագ \cdot$$

եթէ $բ^2 - 4ագ$ տարբերութիւնը դրական է, $(2աx + բ)$ը նորա արմատը պիտի ըլլայ. արդ այս արմատը երկու հաւասար և հակառակ նշանով արժէք ունենալով պիտի ունենամք

$$2աx + բ = \pm\sqrt{բ^2 - 4ագ}$$

որ առաջին աստիճանի հաւասարութիւն մ'է. ուստի կը քաղեմք

$$x' = \frac{-բ + \sqrt{բ^2 - 4ագ}}{2ա}, \text{ և } x'' = \frac{-բ - \sqrt{բ^2 - 4ագ}}{2ա}\,:$$

166. ԿԱՆՈՆ. — *Երկրորդ աստիճանի անթերի հաւասարութեան մը արմատները ստանալու համար, նախ xին համարտադրիչը հակառակ նշանով կ'առնենք և նորա կէսին կը գրենք առէջի կամ պակաս նշանով այս համարտադրիչին քառակուսոյն և x^2ին համարտադրիչին ծանուցեալ եզեր քառապատիկով արտադրեալոյն հետ ունեցած տարբերութեան քառակուսի արմատը. և այս զայն x^2ին համարտադրիչին կրկինով կը բաժնենք։*

Երբ xին համարտադրիչը զոյգ թիւ մ'է, նախըն-

թաց տարազը կը պարզուի։ Դիցուք $բ = 2բ'$. անթերի հաւասարութեան ձեւը պիտի ըլլայ

$$աx^2 + 2բ'x + գ = 0,$$

կամ

$$x^2 + \frac{2բ'x}{ա} + \frac{գ}{ա} = 0:$$

(**164**) կանոնին միջոցաւ կ'ստանամք

$$x' = -\frac{բ}{ա} \pm \sqrt{\frac{բ'^2}{ա^2} - \frac{գ}{ա}},$$

և $\frac{գ}{ա}$ը $\frac{բ'^2}{ա^2}$ հասարակ յայտարարի կը վերածեմք և կ'ըստանամք

$$x = \frac{-բ' \pm \sqrt{բ'^2 - ագ}}{ա}\,:$$

167. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ Ա. — Երկրորդ աստիճանի թերի հաւասարութիւնները զոր լուծեցինք (**161**) թուոյն մէջ իբրեւ անթերի հաւասարութեան մասնաւոր դէպք կարեն նկատիլ. զի եթէ

$$աx^2 + բx + գ = 0$$

անթերի հաւասարութիւնը xին առաջին կարողութիւնը չպարունակէր, $աx^2 + գ = 0$ ձեւոյն տակ պիտի ներկայանար, զոր արդէն ուսանք։ Եթէ ծանուցեալ եզրը պակսէր, $աx^2 + բx = 0$ ձեւը պիտի ունենար զոր (**161**)ին մէջ տեսանք։

Հետեւեալ հանրական

$$x = \frac{-բ \pm \sqrt{բ^2 - 4ագ}}{2ա}$$

տարազին մէջ $բ = 0$ սեպելով կ'ունենամք

$$x = \pm\frac{\sqrt{-4ագ}}{2ա} = \pm\sqrt{-\frac{4ագ}{4ա^2}} = \pm\sqrt{-\frac{գ}{ա}}.$$

եւ եթէ $գ = 0$ սեպեմք, կը գտնեմք

$$ք = \frac{-բ \pm \sqrt{բ^2}}{2ա} = \frac{-բ \pm բ}{2ա} = 0 \quad եւ \quad -\frac{բ}{ա}$$

ինչ որ գտած էինք (**161**) ին մէջ ։

168. ՏԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ Բ. — Յիշեալ հանրական

$$ք = \frac{-բ \pm \sqrt{բ^2 - 4ագ}}{2ա}$$

տարազը զոր ստացանք $ա$ զրոյէ տարբեր ենթադրելով, ստոյգ է եւս երբ $ա = 0$ ըլլայ. այսինքն երբ հաւասարութիւնը

$$բք + գ = 0$$

ձեւը ունենայ ։ Արդարեւ եթէ հանրական տարազին մէջ $ա = 0$ սեպեմք կ'ունենամք

$$ք = \frac{-բ \pm \sqrt{բ^2}}{0}$$

ուստի կը հետեւցնեմք $ք$ ին երկու անդամները

$$ք' = \frac{-բ + բ}{0} = \frac{0}{0}$$

$$ք'' = \frac{-բ - բ}{0} = \frac{-2բ}{0} = -\infty ։$$

Առաջին արմատը անսահմանութեան ձեւով կը ներկայանայ, իսկ երկրորդը անհունութեան. գալով առաջնոյն անսահմանութեան՝ առերեւութական է, զի համարիչը եւ յայտարարը $-բ - \sqrt{բ^2 - 4ագ}$ ով բազմապատկելով կը գտնեմք

$$ք = \frac{(-բ + \sqrt{բ^2 - 4ագ})\,(-բ - \sqrt{բ^2 - 4ագ})}{2ա(-բ - \sqrt{բ^2 - 4ագ})}.$$

համարիչին մէջ նշանակեալ գործողութիւնները կատարելով

$$ք = \frac{բ^2 - բ^2 + 4ագ}{2ա(-բ - \sqrt{բ^2 - 4ագ})} = \frac{2գ}{-բ - \sqrt{բ^2 - 4ագ}} ։$$

Եթէ $ա = 0$ սեպեմք այս յետին տարազը կ'առնէ

$$ք = \frac{2գ}{-բ - բ} = -\frac{գ}{բ}$$

ձեւը. արդարեւ $բք + գ = 0$ հաւասարութիւնը եւս լուծելով $ք$ ին արժէքը այսպէս պիտի գտնէինք ։

Երկրորդ աստիճանի հաւասարութեանց արմատոց յատկութիւնք

169. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Ա. — *Երկրորդ աստիճանի հաւասարութեան մը արմատոց գումարը [illegible] $ք$ ին եւ $ք^2$ ին համարտադրչաց բաժանման քանորդն է հակառակ նշանով առնուած ։*

Եթէ հետեւեալ տարազները գումարեմք

$$ք' = \frac{-բ + \sqrt{բ^2 - 4ագ}}{2ա}. \quad ք'' = \frac{-բ - \sqrt{բ^2 - 4ագ}}{2ա},$$

կ'ստանամք $\qquad ք' + ք'' = -\frac{բ}{ա} ։$

170. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Բ. — *Երկու արմատոց արտադրեալը հաւասար է ծանօթեալ եզեր $ք^2$ ին համարտադրչով բաժանման քանորդին ։*

Երկու $ք'$ եւ $ք''$ ի արժէից արտադրեալը կը գտնեմք այսպէս.

$$ք' = \frac{-բ + \sqrt{բ^2 - 4ագ}}{2ա}$$

$$ք' = \frac{-բ - \sqrt{բ^3 - 4ագ}}{2ա}$$

$$ք'ք'' = \frac{(-բ + \sqrt{բ^2 - 4ագ})\,(-բ - \sqrt{բ^2 - 4ագ})}{4ա^2}$$

կամ $$ք'ք'' = \frac{բ^2 - (բ^2 - 4ագ)}{4ա^2},$$

և կամ $$ք'ք'' = \frac{գ}{ա} :$$

131. ՏԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ Ա. — Նախընթաց երկու տեսութիւնները ուրիշ միջոցաւ կրնամք հաստատել :

Դիցուք $ք'$ և $ք''$ հետևեալ հաւասարութեան արմատք

$$աք^2 + բք + գ = 0 .$$

ուստի ունիմք

$$\begin{cases} աք'^2 + բք' + գ = 0 \\ աք''^2 + բք'' + գ = 0 \end{cases} :$$

Այս երկու հաւասարութիւնները իրարմէ բառնալով կ'առնամք

$$ա(ք'^2 - ք''^2) + բ(ք' - ք'') = 0 ,$$

և $(ք' - ք'')$ ով բաժնելով կ'ունենամք

$$ա(ք' + ք'') + բ = 0 .$$

ուստի կը հետևի

$$ք' + ք'' = -\frac{բ}{ա} \quad [1] :$$

Եթէ $աք'^2 + բք' + գ = 0$ հաւասարութեան մէջ բ ին $-ա(ք' + ք'')$ արժէքով ներկայացնեմք, կ'ունենամք այն ատեն

$$աք'^2 - ա(ք' + ք'')ք' + գ = 0$$

հաւասարութիւնը . ուստի կը քաղեմք

$$ք'ք'' = \frac{գ}{ա} \quad [2] :$$

132. ՏԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ Բ. — Երբ երկու արմատք ծանօթ են նախընթաց տեսութեանց միջոցաւ երկրորդ աստիճանի հաւասարութիւն մի կրնամք կազմել :

Զօրօրինակ . հաւասարութիւն մի կազմելու է որոյ արմատք ըլլան 3 և 5 :

Այս արմատոց գումարը հակառակ նշանով կ'առնեմք, և արտադրեալը իւր նշանով . ուստի կ'ունենամք

$$ք^2 - 7ք + 15 = 0 :$$

133. ՏԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ Գ. — Երբ երկու թուոց գումարը և արտադրեալը տրուած են նախընթաց տեսութեանց միջոցաւ դիւրութեամբ կրնամք գտնել այս թիւերը . Զօրօրինակ ,

Դիցուք երկու թուոց գումարը Գ և արտադրեալը Ա . այս երկու փնտռուած թիւերը հետևեալ

$$ք^2 - Գք + Ա = 0$$

երկրորդ աստիճանի հաւասարութեան արմատք են :

Եթէ $Գ = 8$ և $Ա = 15$ ըլլան , այս թիւերը ևս կ'ըլլան

$$ք^2 - 8ք + 15 = 0$$

հաւասարութեան արմատք որ.ք են 3 և 5 :

Այլ օրինակ . Հաւասարութիւն մի կազմելու է , որոյ արմատք ըլլան -6 և 2 :

Ունիմք $$ք' + ք'' = -4$$
$$ք'ք'' = -12 :$$

Երկրորդ աստիճանի հաւասարութիւնն է

$$ք^2 + 4ք - 12 = 0 :$$

Տարազոց վերայ քննադատութիւն

134. ԻՐԱԿԱՆ ԵՒ ԱՆՀԱՒԱՍԱՐ ԱՐՄԱՏՔ . — Երկրորդ աստիճանի $աք^2 + բք + գ = 0$ հաւասարութիւն մի

$$ք^2 + Բք + Ժ = 0$$

ձևոյն կարացինք վերածել (**139**) ին մէջ :

ք ին արմատք են

$$ք=-\frac{բ}{2}\pm\sqrt{\frac{բ^2}{4}-ժ}:$$

Բաղում պարագաներ կան նկատողութեան առնելու.

1° Դիցուք $\frac{բ^2}{4}-ժ>0$. այն ատեն հաւասարութիւնը երկու իրական և անհաւասար արմատներ ունի, զի $\frac{բ^2}{4}-ժ$ դրական քանակութեան արմատը $-\frac{բ}{2}$ի վերայ յաւելմամբ արմատոց մին կ'ստանամք, և այս մինենոյն արմատը $-\frac{բ}{2}$էն բառնալով միւս արմատը կ'ըստանամք:

Բայց $\frac{բ^2}{4}-ժ$ տարբերութիւնը զրոյէն մեծ ըլլալով, կրնամք ևս ունենալ $ժ>0$. $ժ<0$. $ժ=0$:

Եթէ ժ զրոյէն մեծ թիւ մ'է երկու արմատք միեւնոյն նշանով են, որովհետեւ ժ արտադրեալը դրական է, բաց աստի իւրեանց փոխուած նշանով գումարն բ ըլլալով, ք-ին համարտադրչին նշանէն տարբեր նշան մի ունին:

Եթէ ժ զրոյէն փոքր է, երկու արմատք հակառակ նշանով են, զի իւրեանց արտադրեալ ժն բացասական է, բաց աստի նշանը փոխուած իւրեանց գումարը բ ըլլալով, բացարձակ արժէքով մեծագոյնը ք-ին համարտադրչին նշանէն տարբեր նշան ունի:

Եթէ $ժ=0$ արմատոց մին զրօ է, զի երկու արմատներուն ժ արտադրեալը ոչինչ է, բաց աստի փոխուած նշանով գումարը բ ըլլալով, միւս արմատը հաւասար է ք-ին հակառակ նշանով համարտադրչին:

175. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ. — Երբ ունենամք $\frac{բ^2}{4}-ժ>0$, կրնամք նաեւ ենթադրել

$$\frac{բ^2}{4}-ժ=ե^2.$$

ուստի

$$ժ=\frac{բ^2}{4}-ե^2:$$

Արդ ժ-ին այս արժէքը հետեւեալ հաւասարութեան մէջ

$$ք^2+բք+ժ=0$$

կը փոխադրեմք և կ'ստանամք

$$ք^2+բք+ժ=ք^2+բք+\frac{բ^2}{4}-ե^2=0$$

կամ

$$ք^2+բք+ժ=\left(ք+\frac{բ}{2}\right)^2-ե^2=0.$$

ուրեմն երբ երկրորդ աստիճանի հաւասարութեան մի արմատք իրական և անհաւասար են, այս հաւասարութեան առաջին անդամը երկու քառակուսիներու տարբերութիւնը կրնամք նկատել:

Բայց $\left(ք+\frac{բ}{2}\right)^2-ե^2=0$, կրնամք գրել ըստ (**36**)ի

$$\left(ք+\frac{բ}{2}+ե\right)\left(ք+\frac{բ}{2}-ե\right)=0:$$

Այս ձեւոյն տակ երկու արմատոց գոյութիւնը բացայայտ է. զի երկու $ք+\frac{բ}{2}+ե$, $ք+\frac{բ}{2}-ե$ արտադրըչաց իւրաքանչիւրը զրոյի հաւասարցնելով կ'ստանամք արմատոց մին:

176 Դիցուք

$$\frac{բ^2}{4}-ժ=0.$$

այն ատեն ունիմք

$$ք'=-\frac{բ}{2}+0 \text{ կամ } -\frac{բ}{2}$$

$$ք'' = -\frac{պ}{2} + 0 \text{ կամ } -\frac{պ}{2}.$$

երկու արմատները իրական և հաւասար են, և որոց իւրաքանչիւրին արժէքը $ք$-ին համարտադրչին հակառակ նշանով կէսն է ։

177. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ. — Քանի որ $\frac{պ^2}{4} - ժ = 0$. ունիմք նաև

$$ժ = \frac{պ^2}{4}.$$

Եթէ հիմայ

$$ք^2 + պք + ժ = 0$$

հաւասարութեան մէջ $ժ$ այս արժէքով դնեմք, կ'ունենամք

$$ք^2 + պք + ժ = ք^2 + պք + \frac{պ^2}{4} = 0$$

կամ

$$ք^2 + պք + ժ = \left(ք + \frac{պ}{2}\right)^2 = 0$$

ուրեմն երբ երկու արմատները իրական և հաւասար են, հաւասարութեան առաջին անդամը քառակուսի մ'է որով կրնամք գրել այսպէս,

$$\left(ք + \frac{պ}{2}\right)\left(ք + \frac{պ}{2}\right) = 0$$

Արտադրչաց իւրաքանչիւրը զրօյի հաւասարցնելով կ'ունենամք $ք = -\frac{պ}{2}$. ըսել է երկու արմատները իրարու հաւասար են ։

178. Դիցուք

$$\frac{պ^2}{4} - ժ < 0.$$

արմատական նշանին տակ գտնուած քանակութիւնը բացասական ըլլալով, արմատները երևակայական են և առաջարկեալ հաւասարութիւնը լուծում չունի. Նմանապէս ամեն առաջարկութեան լուծում անհնարին նկատելու եմք երբ երևակայական արմատներ ունենայ ։

179. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ Ա. $\frac{պ^2}{4} - ժ < 0$, կամ $\frac{պ^2}{4} < ժ$ ենթադրութիւնը կը ցուցնէ թէ հաւասարութեան մը արմատները երևակայական կ'ըլլան երբ ծանուցեալ եզրը մեծագոյն կըլլայ $ք$-ին համարտադրչին կիսոյն քառակուսիէն ։

180. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ Բ. — Երբ $\frac{պ^2}{2} - ժ < 0$ սեպեմք կրնամք սեպել նաև

$$\frac{պ^2}{4} - ժ = -ե^2.$$

ուստի

$$ժ = \frac{պ^2}{4} + ե^2 ։$$

Արդ $ք^2 + պք + ժ$ եռեզեր մէջ եթէ $ժ$ այս արժէքով դնեմք կ'ունենամք

$$ք^2 + պք + ժ = ք^2 + պք + \frac{պ^2}{4} + ե^2 = 0.$$

կամ

$$ք^2 + պք + ժ = \left(ք + \frac{պ}{2}\right)^2 + ե^2 = 0.$$

ուրեմն երբ արմատները երևակայական են, եռեզրը երկու քառակուսիներուն գումարը կրնամք նկատել ։

Այս ձևոյն տակ անհնարութիւնը բացորոշ է, զի երկու քառակուսիներուն գումարը ոչինչ երբէք չկրնար ըլլալ ։

Նմանապէս $աք^2 + բք + գ = 0$ հաւասարութեան

$$ք = \frac{-բ \pm \sqrt{բ^2 - 4ագ}}{2ա}$$

տարազը առաջնոյն պէս կը քննադատեմք ։

Քննադատութեան համառօտութիւն

$\frac{պ^2}{4} - ժ > 0$ — արմատները իրական և անհաւասար են:

- $ժ > 0$ — Երկու արմատոց նշանները տարբեր են պ ին նշանէն ։
- $ժ < 0$ — Արմատները հակառակ նշանով են և բացարձակ արժէքով մեծագոյնը պ ին նշանէն տարբեր նշան ունի ։
- $ժ = 0$ — Արմատոց մին ոչինչ է . միւսը պ ին հակառակ նշանով համարտադրչին հաւասար է ։

$\frac{պ^2}{4} - ժ = 0$ — Արմատք իրական և հաւասար են և իւրեանց հասարակ արժէքն է $-\frac{պ}{2}$ ։

$\frac{պ^2}{4} - ժ < 0$. արմատք երեւակայական են ։

181. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ. — *Երբ $ժ < \frac{պ^2}{4}$, երկրորդ աստիճանի հաւասարութիւն մի հետեւեալ չորս ձեւովք կարէ ներկայանալ որոց մէջ քննադատութիւնը համառօտուած է .*

$ք^2 + պք + ժ = 0$	ք' և ք'' բացասական են
$ք^2 - պք + ժ = 0$	ք' և ք'' դրական են
$ք^2 - պք - ժ = 0$	ք' դրական է , ք'' բացասական և $ք' > ք''$
$ք^2 + պք - ժ = 0$	ք' դրական է , ք'' բացասական և $ք'' > ք'$

բացարձակ արժէքով ։

Երկրորդ աստիճանի եռեզեր մի յատկութիւնք

182. *Նկատողութեան առնենք հետեւեալ*

$$աք^2 + բք + գ$$

եռեզրը , որ կրնայ գրուիլ

$$աք^2 + բք + գ = ա\left(ք^2 + \frac{բ}{ա}ք + \frac{գ}{ա}\right)$$

$$ա\left(ք^2 + \frac{բ}{ա}ք + \frac{գ}{ա}\right) = ա\left\{\left(ք + \frac{բ}{2ա}\right)^2 + \frac{գ}{ա} - \frac{բ^2}{4ա^2}\right\} \quad [1]$$

ձեւով, որոյ $\left(\frac{գ}{ա} - \frac{բ^2}{4ա^2}\right)$ը նոյն ըլլալով $-\left(\sqrt{\frac{բ^2}{4ա^2} - \frac{գ}{ա}}\right)$ին քառակուսւոյն հետ, [1] ձեւը կարեմք ներկայացնել

$$ա\left\{\left(ք + \frac{բ}{2ա}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{4ա^2}{բ^2} - \frac{գ}{ա}}\right)^2\right\}$$

ձեւով ։ Այս երկու քառակուսեաց տարբերութիւնը (**36**) *երկու թուոց գումարին և տարբերութեան արտադրեալն է , հետեւաբար*

$$աք^2 + բք + գ = ա\left\{\left(ք + \frac{բ}{2ա} - \sqrt{\frac{բ^2}{4ա^2} - \frac{գ}{ա}}\right)\right.$$
$$\left.\left(ք + \frac{բ}{2ա} + \sqrt{\frac{բ^2}{4ա^2} - \frac{գ}{ա}}\right)\right\}$$

կամ որ նոյնն է

$$ա\left(ք - \frac{-բ + \sqrt{բ^2 - 4ագ}}{2ա}\right)\left(ք - \frac{-բ - \sqrt{բ^2 - 4ագ}}{2ա}\right).$$

ուստի կը հետեւի $աք^2 + բք + գ = ա(ք - ք')(ք - ք'')$ ։

Երբ ք' և ք'' երեւակայական արժէքներ ունին , այն ատեն $(ք - ք')(ք - ք'')$ արտադրեալը թուաբանական արժէք մի չունի ։

Յիշեալ գործողութիւններէն կը հետեւի

183. ԿԱՆՈՆ . — *Երկրորդ աստիճանի եռեզր մի առաջին աստիճանի արտադրչաց վերածելու համար պէտք է նախ արմատները գտնել եւ ապա նոցա իւրաքանչիւրը ք էն հանել եւ այս տարբերութեանց արտադրեալը ա ով բազմապատկել ։*

184. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ Ա. — *Երկրորդ աստիճանի բազմեզեր մի արմատք կ'ըսուին այն թիւերը որ ք ի փոխանակելով եռեզրը զրոյի կը հաւասարեցնեն ։*

185. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ Բ. — Երբ և a' և b' երկրորդ աստիճանի $ax^2 + bx + c = 0$ հաւասարութեան արմատք են, ունիմք

$$a(x - a')(x - b') = 0 \cdot \text{ կամ } x^2 - (a' + b')x + a'b' = 0$$

հաւասարութիւնը, որոյ մէջ եթէ $a' = b'$ սեպեմք կ՚ըստանամք

$$a(x - a')(x - b') = a(x - a')^2 :$$

Հետեւեալ եռեզրերը առաջին աստիճանի արտադրչաց վերածել.

1°. $$x^2 + 4x - 32 = 0$$

որոյ արմատք $+4$ և -8 ըլլալով ունիմք

$$x^2 + 4x - 32 = (x - 4)(x + 8) :$$

2°. $$10x^2 - 7x + 1 = 0,$$

զոր կրնամք գրել

$$10\left(x^2 - \frac{7}{10}x + \frac{1}{10}\right)$$

ձեւով. այս եռեզեր արմատք են $\frac{1}{2}$ և $\frac{1}{5}$. ուստի ունիմք

$$10x^2 - 7x + 1 = 10\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) :$$

3°. Պարզելու է հետեւեալ բացատրութիւնը

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x - 5}.$$

Սորա համարիչը կրնայ գրուիլ $(x-1)(x+1)$ ձեւով և յայտարարը զրոյի հաւասարելով իւր արմատք են -1 և $+5$. ուրեմն առաջարկեալ բացատրութիւնը կրնայ առնել

$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)(x - 5)}$$

ձեւը, որոյ յայտարարը և համարիչը $(x+1)$ով բաժնելով $\frac{x-1}{x-5}$ պարզ ձեւը կ՚ստանամք։

Երկրորդ աստիճանի եռեզեր փոփոխմունք

186. ՍԱՀՄԱՆՔ. — Երկրորդ աստիճանի եռեզր մի $ax^2 + bx + c$ երեք եզրով բազմեզր մ՚է որոյ մէջ a, b և c անփոփոխ թիւեր են և x փոփոխական. այնպէս որ xին այլեւայլ արժէքներ տալով եռեզրը եւս այլեւայլ արժէքներ կ՚առնէ:

Արդէն բացատրեցինք թէ եռեզեր մի արմատները ինչպէս կ՚ստացուին. և թէ այս արմատոց իրական և երեւակայական ըլլալը ինչպէս կը հասկցուի. նոյնպէս եռեզեր մի առաջին աստիճանի $a(x - x')(x - x'')$ արտադրչաց վերածելու միջոցը ցոյց տուինք: Հիմայ տեսնեմք թէ եռեզրը ինչպէս կը փոխուի xին յաջորդական արժէից նկատմամբ որք դրական և բացասական անհունութեան մէջ կը գտնուին:

Երկրորդ աստիճանի $ax^2 + bx + c = 0$ եռեզեր արմատները x' և x'' սեպելով և $x' > x''$ ունէինք

$$a(x^2 + bx + c) = a(x - x')(x - x'') :$$

187. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Ա. — *Երբ եռեզեր փոփոխական xին արժէքները x' եւ x'' արմատոց մէջ չգտնուին, այսինքն x'էն մեծ եւ x''էն փոքր ըլլան $(x - x')(x - x'')$ արտադրեալը դրական է:*

Արդարեւ եթէ $x > x'$, $x - x'$ տարբերութիւնը դրական է, նմանապէս $x - x''$ մեծագոյն իրաւամբ դրական է. սոցա արտադրեալը եւս դրական է: Եթէ $x < x''$, $x - x''$ տարբերութիւնը բացասական է, նմանապէս $x - x'$ տարբերութիւնը, սոցա արտադրեալը դրական է:

188. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Բ. — *Երբ փոփոխական xին արժէքները եռեզեր x' եւ x'' արմատոց արժէից մէջ գտնուին, այսինքն x'էն փոքր եւ x''էն մեծ ըլլան, $(x - x')(x - x'')$ արտադրեալը բացասական է:*

Արդարեւ եթէ միանգամայն $x < x'$ և $x > x''$, $x - x'$ տարբերութիւնը բացասական է և $x - x''$ տարբերու-

թիւնը դրական, հետեւաբար սոյն արտադրեալը բացասական է։ Այս արտադրեալը ա-ով բազմապատկելով նոր ստացուած արտադրեալը ա-ին նշանին հակառակ նշանն ունի։

189. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ. $աք^2+բք+գ=0$ եռեզրը իրական եւ անհաւասար արժէքներ ունենալով, միշտ $աք^2$ առաջին եզեր նշանը կը պահէ երբ ք-ին՝ $ք'$ եւ $ք''$ արմատոց արժէքներէն դուրս արժէք տամք, որովհետեւ $(ք-ք')(ք-ք'')$ արտադրեալը դրական կը մնայ. ընդհակառակն իւր $աք^2$ առաջին եզեր հակառակ նշանը ունի երբ ք-ին արժէքը երկու արմատոց մէջ կը գտնուի, որովհետեւ $(ք-ք')(ք-ք'')$ արտադրեալը բացասական է։

Եթէ ք-ին արժէքը այս արմատոց միոյն հաւասարի, եռեզրը զրոյի կը հաւասարի. ուստի կը հետեւցնեմք թէ եռեզրը իւր նշանը չկարէ փոխել առանց զրոյէն անցնելու։

190. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Գ. — *Երբ եռեզրի մը արմատները երեւակայական են ք-ին ի՛նչ արժէք որ տրուի, եռեզրի նշանը միշտ իւր առաջին եզրի նշանովն է։*

Արդարեւ եռեզեր մի երեւակայական արմատք հետեւեալ ձեւոյն տակ ներկայանալով

$$ք = յ \pm ն\sqrt{-1},$$

ունիմք

$$աք^2 + բք + գ = ա(ք - յ - ն\sqrt{-1})(ք - յ + ն\sqrt{-1})$$

յետին երկու փակագծերով նշանակուած արտադրեալը (**36**) կրնայ գրուիլ հետեւեալ ձեւովք

$$աք^2 + բք + գ = ա\left[(ք-յ)^2 - (ն\sqrt{-1})^2\right]$$
$$աք^2 + բք + գ = ա\left[(ք-յ)^2 - ն^2 \times (-1)\right]$$
$$աք^2 + բք + գ = ա\left[(ք-յ)^2 + ն^2\right]։$$

Արդ ք-ին որեւիցէ արժէից համար $(ք-յ)^2$ եւ $ն^2$

քառակուսիք դրական պիտի ըլլան, եւ հետեւաբար $(ք-յ)^2 + ն^2$ գումարը ինքնին դրական պիտի ըլլայ։

Յիշեալ երեք տեսութեանց միջոցաւ հետեւեալ եռեզերց արժէից ինչ սահմաններու մէջ փոփոխիլը որոշելու է.

1°. Ի՞նչ արժէք տալու է $ք^2 - 2ք - 8$ եռեզեր փոփոխական ք-ին որպէս զի առաջարկեալ եռեզրը բացասական ըլլայ։

Դիցուք այս եռեզեր արժէքը յ, եւ գրենք

$$յ = ք^2 - 2ք - 8։$$

Այս եռեզրը զրոյի հաւասարցնելով իւր արմատք են $ք' = 4$, $ք'' = -2$։ Ուրեմն եռեզրը բացասական ըլլալու համար, այսինքն, որպէս զի յ առաջին $ք^2$ եզեր նշանին հակառակ նշան մի ունենայ, պէտք է որ ք-ն 4էն փոքր եւ −2էն մեծ արժէք մի ունենայ (**189**)։

ք-ին ամբողջ արժէքներն են ուրեմն 3, 2, 1, 0 եւ −1. եւ եռեզրը կ'ոչնչանայ երբ ք-ն −2 եւ 4 արժէքով ներկայացնեմք։

2°. Որոշելու է փոփոխական ք-ին արժէից սահմանները, այնպէս որ $-3ք^2 - 12ք + 36$ եռեզրը բացասական ըլլայ։

Դիցուք

$$յ = -3ք^2 - 12ք + 36,$$

կամ

$$յ = -3(ք^2 + 4ք - 12).$$

$ք^2 + 4ք - 12 = 0$ եռեզեր արժէքներն են $ք' = 2$, եւ $ք'' = -6$. եռեզրը բացասական պիտի ըլլայ, այսինքն իւր առաջին եզեր նշանը պիտի ունենայ, եթէ իր ք-ին արժէքները $ք'$ եւ $ք''$ արմատոց մէջ չգտնուին։

ք-ին արժէքները կրնան ըլլալ 3, 4, 5, 6 ... ∞ եւ −7, −8, −9 ... −∞։ Եռեզրը կ'ոչնչանայ երբ ք-ն 2ով կամ −6ով ներկայացնեմք։

3°. Ինչ սահմաններու մէջ կրնան փոփոխիլ ք-ին արժէքները որպէս զի $ք^2 - 4ք + 6$ եռեզրը դրական ըլլայ։

Առաջարկեալ եռեզրը զրոյի հաւասարցնելով կը լուծեմք այսպէս.

$$ք^2 - 4ք + 6 = 0.$$

ուստի

$$ք = 2 \pm \sqrt{-2}.$$

Եռեզեր արմատները երեւակայական ըլլալով, եռեզրը միշտ դրական է ք-ին արժէքն ինչ որ լինի (**190**)։

4°. $ք^2 - 4ք - 21 = 0$ եռեզրը առանց լուծելու հասկնալ թէ 2 եւ 8 թիւերը արմատոց մէջ կը գտնուի՞ն։

Եթէ առաջարկեալ եռեզեր ք-ին 2 արժէքը տամք եռեզրը −25ի կը հաւասարի, այս արժէքը $ք^2$ եզեր նշանէն տարբեր նշան ունենալով 2ը արմատոց մէջ կը հասկցուի (**189**)։

Նուեզեր ք-ին 8 արժէք տալով նուեզեր առաջին անդամը $+11$ի կը հաւասարի. այս արժէքը $ք^2$ եղեր նշանով ըլլալուն համար 8 թիւը արմատներուն մէջ չէ հասկցուած ։

Եթէ առաջարկեալ նուեզրը լուծեմք կը գտնեմք երկու արմատներ -3 և 7։

191. *Երկրորդ աստիճանի անհաւասարութեանց վերայ վարժութիւն.* ունենամք հետեւեալ

$$ա ք^2 + բ ք + գ > 0,$$

$$\text{և} \quad ա ք^2 + բ ք + գ < 0,$$

երկրորդ աստիճանի անհաւասարութիւնները որոց մէջ ա, բ, գ ծանուցեալ դրական և կամ բացասական թիւեր են. իսկ ք փոփոխական թիւ մը որոյ սահմանները որոշելու է, այնպէս որ ք-ին այս արժէքը առաջարկեալ անհաւասարութիւնը ստուգէ ։

1°. Լուծելու է

$$3ք^2 + 5ք + \frac{4}{3} < 0$$

անհաւասարութիւնը ։

Առաջին անդամը զրոյի հաւասարցնելով կ'ստանամք $-\frac{1}{3}$ և $-\frac{4}{3}$ արմատները որք իրական և անհաւասար են. այս առաջարկեալ անհաւասարութիւնը ստուգելու համար, այսինքն առաջին անդամը առաջին եզեր հակառակ նշանը ունենալու համար, պէտք է ք-ին արժէքը $-\frac{1}{3}$-ին և $-\frac{4}{3}$-ին մէջ գտնուի. կամ որ նոյնն է

$$-\frac{4}{3} < ք < -\frac{1}{3}:$$

2°. Լուծելու է նաև

$$-9 + 6ք - ք^2 < 0$$

անհաւասարութիւնը ։

Այս պարագայիս մէջ նուեզեր արմատք իրական և 3ի հաւասար են. իսկ առաջին եզրը $-ք^2$ է. ուրեմն ք-ին ինչ արժէք որ տամք անհաւասարութիւնը ստուգուած պիտի ըլլայ բացի $ք = 3$ արժէքէն որ անհաւասարութիւնը հաւասարութեան կը դարձնէ ։

3°. Ունենամք

$$ք^2 - 3ք + 9 > 0$$

անհաւասարութիւնը, որոյ արմատք երեւակայական են և առաջին եզրը դրական է. ք-ին որ և իցէ արժէից համար միշտ անհաւասարութիւնը կայ ։

ՎԱՐԺՈՒԹԻՒՆՔ

Լուծելու է հետեւեալ հաւասարութիւնները.

1. $ք^2 - 5ք + 6 = 0.$ Պատ. $\begin{cases} ք' = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \\ ք'' = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 : \end{cases}$

2. $2ք^2 - 3ք + 1 = 0.$ Պատ. $ք' = 1.\ ք'' = \frac{1}{2}:$

3. $ք^2 - 2ք + 16 = 0$ Պատ. $ք' = 1 + 4\sqrt{-1}.\ ք'' = 1 - 4\sqrt{-1}:$

4. $\frac{2ք + 3}{10 - ք} = \frac{2ք}{25 - 3ք} - 6\frac{1}{2}$ Պատ. $ք'' = 8 \quad ք' = 13\frac{22}{31}:$

5. $\frac{25ք + 180}{10ք - 81} = \frac{40ք}{5ք - 8} - \frac{3}{5}.$ Պատ. $ք'' = \frac{72}{245} \quad ք' = 14\frac{3}{5}:$

6. $(ք^2 - 3ք - 1)^2 - 4(ք^2 - 3ք - 1) + 3 = 0.$

Այս հաւասարութիւնը լուծելու համար $(ք^2 - 5ք - 1)$ քանակութիւնը իբրև օժանդակ անծանօթ կ'առնեմք և կը գտնեմք

Պատ. $ք' = 4.\ ք'' = 3.\ ք''' = 1.\ ք'''' = -1:$

7. $\frac{\sqrt{ք^2 + ք + 6}}{3} = \frac{20 - \frac{4}{3}\sqrt{ք^2 + ք + 6}}{\sqrt{ք^2 + ք + 6}}.$

$\sqrt{ք^2 + ք + 6}$ օժանդակ անծանօթ սեպելով կ'ստանամք

Պատ. $ք' = 6.\ ք'' = -6.$ և

բաց ատի $ք = \frac{-1 \pm \sqrt{377}}{2}:$

8. $գք + \frac{ագ}{ա + բ} = (ա + բ)ք^2.$

Պատ. $ք' = \frac{գ + \sqrt{գ^2 + 4ագ}}{2(ա + բ)}.\ ք'' = \frac{գ - \sqrt{գ^2 + 4ագ}}{2(ա + բ)}:$

9. $\sqrt{2ք + 7} + \sqrt{3ք - 18} = \sqrt{7ք + 1}$. Պ. $ք' = 9$. $ք'' = -3\frac{2}{5}$:

10. $գք^2 - 2գք\sqrt{դ} = դք^2 - գդ$. Պատ. $ք' = \frac{\sqrt{գդ}}{\sqrt{գ} + \sqrt{դ}}$. $ք'' = \frac{\sqrt{գդ}}{\sqrt{գ} - \sqrt{դ}}$:

11. $2ք^2 + 3ք - 3 + \sqrt{2ք^2 + 3ք + 9} = 30$:

$2ք^2 + 3ք$ իբրեւ օժանդակ անծանօթ առնելով կը գտնեմք

$$ք' = 3 \,.\; ք'' = -\frac{9}{2} \,.\; ք = \frac{-3 \pm \sqrt{329}}{4}.$$

12. $\left(\frac{ա + ք}{ա - ք}\right)^2 = 1 + \frac{գք}{աբ}$. Պատ. $ք = ա\left(1 \pm 2\sqrt{\frac{բ}{գ}}\right)$:

13. $\frac{ա^2ք^2}{բ^2} - \frac{2աք}{կ} + \frac{բ^2}{կ^2}\,0 = .$ Պատ. $ք' = \frac{բ^2}{ակ}$. $ք'' = \frac{բ^2}{ակ}$:

14. $աբք^2 + \frac{3ա^2ք}{գ} = \frac{6ա^2 + աբ - 2բ^2}{գ^2} - \frac{բ^2ք}{գ}$.

Պատ. $ք' = \frac{2ա - բ}{ագ}$. $ք'' = -\left(\frac{3ա + 2բ}{բգ}\right)$:

15. $7\sqrt{\frac{3}{2}ք - 5} - \sqrt{\frac{ք}{5} + 45} - \frac{7}{4}\sqrt{10ք + 56} = 0$.

Պատ. $ք' = 20$. $ք'' = 5, \ldots$:

ԴԱՍ ԺԶ.

ԿՐԿՆԱԿ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄ

192. Երբ մի անծանօթով հաւասարութեան անծանօթը չորրորդ կարողութեամբ է և այս անծանօթը երբ հետեւեալ ձեւով է, կրկնակ քառակուսի կ'ըսուի:

$$աք^4 + բք^2 + գ = 0 \quad [1]:$$

Եթէ $ք^2$ը անծանօթ սեպեմք, յիշեալ հաւասարութիւնը երկրորդ աստիճանի կը վերածուի, որովհետեւ

$ք^2 = ֆ$ սեպելով ունիմք $ք^4 = ֆ^2$. և [1] հաւասարութիւնը կ'առնէ

$$աֆ^2 + բֆ + գ = 0$$

ձեւը, ուստի կը հետեւցնեմք

$$ֆ = \frac{-բ \pm \sqrt{բ^2 - 4ագ}}{2ա}$$

ք ն ֆ ին քառակուսի արմատը ըլլալով ունիմք

$$ք = \pm\sqrt{\frac{-բ \pm \sqrt{բ^2 - 4ագ}}{2ա}} \quad [2]:$$

Ինչպէս կը տեսնուի ք ին արժէքները չորս են և երկու առ երկու հաւասար և հակառակ նշանով:

193. ՏԱՐԱԶՈՑ ՎԵՐԱՅ ՔՆՆԱԴԱՏՈՒԹԻՒՆ. — 1°. Եթէ $բ^2 - 4ագ > 0$, ֆ ին երկու արժէքներն իրական են. Երկուքը միանգամայն դրական կամ բացասական կարեն ըլլալ, կամ մին դրական և միւսը բացասական: Առաջին պարագային մէջ ք ին չորս արժէքները իրական են, երկրորդ պարագային մէջ չորսը միանգամայն երեւակայական են, երրորդ պարագային մէջ երկուքը իրական են և միւս երկուքը երեւակայական:

2°. Եթէ $բ^2 - 4ագ = 0$, ֆ ին չորս արժէքները իրական են և հաւասար. ք ին արժէքները երկու առ երկու հաւասար են. իրական են եթէ բ և ա հակառակ նշանօք են, և երեւակայական՝ եթէ բ և ա մի և նոյն նշանօք են:

3°. Եթէ $բ^2 - 4ագ < 0$, ֆ ին արժէքները երեւակայական են և հետեւաբար ք ին չորս արժէքներն ալ երեւակայական են:

ՕՐԻՆԱԿ Ա. Կրկնակ քառակուսի հաւասարութեանց լուծում.

$$ք^4 - 14ք^2 - 275 = 0$$

$$ք^2 = 7 \pm \sqrt{49 + 275}.$$

ուստի կը քաղեմք

$$x^2=25.\ \text{և}\ x^2=-11.$$

x^2ին առաջին արժէքն է $x'=\pm5$. երկրորդը $x''=\pm\sqrt{-11}$:

Առաջարկեալ հաւասարութիւնը երկու իրական և երկու երևակայական արմատ ունի :

ՕՐԻՆԱԿ Բ.

$$x^4-11x^2+28=0,$$

$$x^2=\frac{11\pm\sqrt{121-112}}{2}.$$

հետևաբար

$$x=\pm\sqrt{\frac{11+\sqrt{121-112}}{2}}.\quad x=\pm\sqrt{\frac{11-\sqrt{121-112}}{2}}.$$

$x'=\pm\sqrt{7}$. և $x''=\pm2$. չորս արմատք իրական են :

194. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ. — Կրկնակ քառակուսի հաւասարութեան մը լուծման մէջ երբեմն արմատականով քանակութիւնք կը պատահին $a\pm\sqrt{b}$ ձևով, պէտք է սոցա քառակուսի արմատները գտնել:

Դիցուք թէ ունիմք

$$(\sqrt{5}\pm\sqrt{3})^2=5\pm2\sqrt{15}+3=8\pm\sqrt{60},$$

և փոխադարձաբար

$$\sqrt{8\pm\sqrt{60}}=\sqrt{5}\pm\sqrt{3}:$$

Հետևաբար արմատականով $a\pm\sqrt{b}$ քանակութիւնը երբեմն $\sqrt{c}\pm\sqrt{d}$ քանակութեան քառակուսին կրնայ ըլլալ, երբ c և d երկուքը առանց արմատականի թիւեր են. պէտք է հիմայ գիտնալ թէ aին և bին արժէքները ինչ ըլլալու են որպէս զի $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ը քառակուսի արմատ ունենայ :

Ուստի կը գրեմք հետևեալ երկու հաւասարութիւնները

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a+\sqrt{b}},$$

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{a-\sqrt{b}}:$$

xին և yին արժէքները կը փնտռենք. ուստի այս հաւասարութիւնները կը լուծեմք, $\sqrt{x}$ և $\sqrt{y}$ իբրև անծանօթ առնելով, այսպէս

$$\sqrt{x}=\frac{\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}}{2},$$

$$\sqrt{y}=\frac{\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}}{2}.$$

Նախընթաց հաւասարութեանց անդամոց իւրաքանչիւրը կը քառակուսեմք և կ'ստանամք

$$x=\frac{2a+2\sqrt{a^2-b}}{4}=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}.$$

$$y=\frac{2a-2\sqrt{a^2-b}}{4}=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}:$$

xին և yին արժէքները այն ատեն միայն առանց արմատականի են երբ a^2-b ամբողջական քառակուսի մ'է. փնտռուած պայմանը ահա այս է :

Ուրեմն դիցուք

$$a^2-b=c^2,$$

ուստի կը հետևցնեմք

$$\sqrt{ա + \sqrt{բ}} = \sqrt{\frac{ա + գ}{2}} + \sqrt{\frac{ա - գ}{2}},$$

և

$$\sqrt{ա - \sqrt{բ}} = \sqrt{\frac{ա + գ}{2}} + \sqrt{\frac{ա + գ}{2}}\ ։$$

վերոյիշեալ տարազները այս ձեւոց վերածելով արմատական նշանները իրարմէ բաժնած կ'ըլլամք, որով և իրենց թուոց վերածութիւնը դիւրացուցած ։

Իբրեւ վարժութիւն թուաւոր օրինակներ առնեմք ·

$$1^\circ\ \sqrt{7-\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{49-24}}{2}} - \sqrt{\frac{7-\sqrt{49-24}}{2}} = \sqrt{6}-1\ ։$$

$$2^\circ\ \sqrt{94+6\sqrt{245}} = \sqrt{94+\sqrt{8820}} = \sqrt{\frac{94+4}{2}}$$

$$+\sqrt{\frac{94-4}{2}} = 7+3\sqrt{5}\ ։$$

Երկեզր հաւասարութիւնք

195. ԵՐԿԵԶՐ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆ ՁԵՒ · — Երկու եզերովք հաւասարութիւն մի, երկեզր հաւասարութիւն կ'ըսուի, ինչպէս

$$ք^մ + Ա = 0 \quad [1]\ ։$$

Եթէ Ա դրական է, իր մրդ արմատը ա-ով նշանակելով կ'ունենամք $Ա = ա^մ$ ։ Եթէ Ա բացասական է, — Ա ին մրդ արմատը ա-ով ներկայացնելով կ'ունենամք $Ա = -ա^մ$, որով [1] հաւասարութիւնը $ք^մ \pm ա^մ = 0$ [2] ձեւը կ'առնէ. եթէ $ք = աֆ$ սեպեմք, [2] հաւասարութիւնը կը դառնայ

$ա^մ ֆ^մ \pm ա^մ$ հաւասարութեանց. $ֆ^մ \pm 1 = 0$ [3] ·

ինչպէս ամեն երկեզր հաւասարութիւն. երբ ֆ ին ար-

ժէքը գտնելով ա-ով բազմապատկեմք ք ին արժէքը կ'ստանամք ։

196. ԵՐԿԵԶՐ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆՑ ԼՈՒԾՈՒՄ. — Ունենամք

1°. $ք^2 - 1 = 0$ (1) հաւասարութիւնը որոյ արմատք են

$$ք = \pm 1\ ։$$

2°. $ք^2 + 1 = 0$ (2) որոյ արմատք են

$$ք = \pm\sqrt{-1}\ ։$$

3°. $ք^3 - 1 = 0$ (3) որ կրնայ գրուիլ

$$(ք - 1)(ք^2 + ք + 1) = 0$$

ձեւով · ուրեմն առաջարկեալ (3) հաւասարութիւնը երկու հաւասարութեանց կը բաժնուի

$$ք - 1 = 0 \text{ և } ք^2 + ք + 1 = 0$$

որոյ արմատներն են

$$ք = 1 \text{ և } ք = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\ ։$$

4°. $ք^3 + 1 = 0$ (4), որ նախընթաց հաւասարութեան հետ նոյն կ'ըլլայ եթէ ք ՝ — ք ով ներկայացնեմք . ուրեմն այս հաւասարութեան արմատները (3) հաւասարութեան արմատոց հետ նոյն են, եթէ իրենց նշանները փոխեմք, այսինքն $ք = 1$, և $ք = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ ։

5°. $ք^4 - 1 = 0$ (5), (1) և (2) երկու հաւասարութեանց համարժէք է, և հետեւաբար իր արմատք այս հաւասարութեանց արմատք են

$$ք = \pm 1, \quad ք = \pm\sqrt{-1}\ ։$$

6°. $ք^4 + 1 = 0$ (6) որ նոյն է

$$ք^4 + 2ք^2 + 1 = 2ք^2 \text{ և կամ } (ք^2 + 1)^2 - 2ք^2 = 0$$

հաւասարութեան հետ. արդ ունիմք

$$(ք^2 + 1 + ք\sqrt{2})(ք^2 + 1 - ք\sqrt{2}) = 0\ .$$

և հետեւաբար առաջարկեալ (6) հաւասարութիւնը երկու երկրորդ աստիճանի հաւասարութեանց փոխուեցաւ որք են

$$ք^2 + ք\sqrt{2} + 1 = 0, \text{ և } ք^2 - ք\sqrt{2} + 1 = 0\ ։$$

Այս երկու հաւասարութիւնք միայն ք֊ին նշանով կը տարբերին իրարմէ . ասոնց արմատք են

$$ք = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2}, \quad ք = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2},$$

որք (6) հաւասարութեան փնտռուած չորս արմատք են .

7°. $ք^6 - 1 = 0$ (7), որ երկու ուրիշ հաւասարութեանց կը բաժնուի

$$ք^3 - 1 = 0, \quad ք^3 + 1 = 0,$$

որոց լուծմունք (5) և (4) հաւասարութեանց վեց արմատք են . այսինքն

$$ք = \pm 1 . \quad և \quad ք = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{-3}}{2} :$$

8°. $ք^6 + 1 = 0$. (8) . որ վերինին հետ նոյնը կ'ըլլայ , երբ ք , $ք\sqrt{-1}$ ով ներկայացնեմք , որովհետև ունիմք

$$(ք\sqrt{-1})^6 = ք^6(\sqrt{-1})^6 = -ք^6 .$$

ուրեմն իւր արմատք կը ներկայանան հետևեալ

$$ք\sqrt{-1} = \pm 1, \quad ք\sqrt{-1} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

հաւասարութիւններով, զորս լուծելու համար հաւասարութեան երկու անդամները $\sqrt{-1}$ ով կը բազմապատկեմք, քանզի այն ատեն առաջին անդամք $ք \times (-1)$ ի կամ $-ք$ ի կը հաւասարին , վասնորոյ ունիմք

$$ք = \pm\sqrt{-1} . \quad և \quad ք = \frac{\pm\sqrt{3} \pm \sqrt{-1}}{2} :$$

9°. $ք^8 - 1 = 0$ (9) , որ երկու հաւասարութեանց կը բաժնուի

$$ք^4 - 1 = 0 . \quad և \quad ք^4 + 1 = 0 .$$

իւր արմատք (5) և (6) հաւասարութեանց ութը արմատք են . այսինքն

$$ք = \pm 1 . \quad ք = \pm\sqrt{-1} . \quad ք = \frac{\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2} :$$

10°. $ք^8\ 1 + = 0$, որ կրնայ գրուիլ

$$ք^8 + 2ք^4 + 1 = 2ք^4$$

կամ

$$(ք^4 + 1)^2 - 2ք^4 = 0 .$$

ուրեմն ուրիշ երկու հաւասարութեանց կը բաժնուի

$$ք^4 + 1 + ք^2\sqrt{2} = 0 . \quad և \quad ք^4 + 1 - ք^2\sqrt{2} = 0 :$$

երկուքը ևս կրկնակ քառակուսի են զոր դիւրութեամբ կը լուծեմք և կը գտնամք

$$ք = \pm\sqrt{\frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2}}, \quad և \quad ք = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2}} :$$

Եռեզր հաւասարութիւնք

197. ԵՌԵԶՐ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆ ՄԸ ԼՈՒԾՈՒՄ . — Երեք եզերովք հաւասարութիւն մը եռեզր կ'ըսուի . ինչպէս

$$աք^{2ն} + բք^ն + գ = 0 \quad [1] :$$

Դիցուք $ք^ն = յ$. ուստի $ք^{2ն} = յ^2$ [2]

առաջարկեալ հաւասարութիւնը երկրորդ աստիճանի հաւասարութեան կը վերածի

$$այ^2 + բյ + գ = 0 \quad [3],$$

զոր լուծելով կը գտնեմք

$$ք^ն = \frac{-բ \pm \sqrt{բ^2 - 4ագ}}{2ա} .$$

Հետևաբար

$$ք = \sqrt[ն]{\frac{-բ \pm \sqrt{բ^2 - 4ագ}}{2ա}} :$$

ՎԱՐԺՈՒԹԻՒՆՔ

Լուծելու է հետևեալ հաւասարութիւնները .

1. $ք^{12} - 1 = 0$:

Այս հաւասարութիւնը երկու արտադրչաց կը վերածեմք

$$(ք^6 - 1)(ք^6 + 1) = 0 .$$

այս արտադրչաց իւրաքանչիւրին լուծումը արդէն տեսանք .

2. $ք^5 - 1 = 0$:

Այս հաւասարութիւնը հետեւեալ երկու արտադրչաց կը վերածեմք

$$(ք-1)(ք^4+ք^3+ք^2+ք+1)=(ք-1)ք^2\left(ք^2+ք+1+\frac{1}{ք}+\frac{1}{ք^2}\right)=0։$$

Եթէ $ք+\frac{1}{ք}=յ$ սեպեմք, կ'ունենամք $ք^2+\frac{1}{ք^2}=յ^2-2$ հետեւաբար $ք^2(ք-1)(յ^2+յ-1)=0$. ուստի յ ին արժէքը նախ կ'ստանամք և ապա յ ին միջոցաւ ք ին արժէքները ։

3. $$ք^3-8ք^2+19ք-12=0։$$

Պատ. $ք'=1\,.\;ք''=3\,.\;ք'''=4։$

4. $$ք^4-2ք^3+ք-132=0։$$

Այս հաւասարութիւնը հետեւեալ ձեւով կարեմք գրել․

$$ք^2(ք-1)^2-ք(ք-1)-132=0$$

սեպելով $ք(ք-1)=զ$, կ'ստանամք

$$ք'=4\,.\;ք''=-3\,.\;ք'''=\frac{1\pm\sqrt{-43}}{2}։$$

5. $$ք^4+ք^3-4ք^2+ք+1=0։$$

Այս հաւասարութիւնը եթէ $(ք-1)$ով 2 անգամ բաժնեմք (82) իւր երկու արմատները 1 ի կը հաւասարին, և այս բաժանմանց քանորդը երկրորդ աստիճանի հաւասարութիւն մի կ'ըլլայ զոր լուծելը դիւրին է ։

6. $$ք^4+\frac{13}{3}ք^3-39ք-81=0,$$

որ կարէ ներկայանալ

$$ք^4-81+\frac{13}{3}ք(ք^2-9)=0 \text{ ձեւով։}$$

Պատ. $ք=\pm 3\,.\;ք=\frac{-13\pm\sqrt{-155}}{6}։$

7. $$(ք+2)^2+2(ք+2)\sqrt{ք}-3\sqrt{ք}=46+2ք։$$

Սեպելով $ք+\sqrt{ք}+2=զ$, կ'ստանամք

$$ք=4\,.\;ք=9\,,\;ք=\frac{-13\pm 3\sqrt{-3}}{2}։$$

8. $$(ա+ք)^{\frac{2}{3}}+4(ա-ք)^{\frac{2}{3}}-5(ա^2-ք^2)^{\frac{1}{3}}=0։$$

Պատ. $ք'=0\,.\;ք''=\frac{63ա}{65}։$

9. $$\frac{(1+ք)^2}{1+ք^3}+\frac{(1-ք)^2}{1-ք^3}=ա։$$

Պատ. $ք=\pm\sqrt{\frac{2}{ա}-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{4}{ա^2}-\frac{3}{4}}}։$

10. $$\frac{ք+\sqrt{ք^2-ա^2}}{ք-\sqrt{ք^2-ա^2}}=\frac{ք}{ա}։$$

Պատ. $ք=ա\,.\;ք=ա\left(\frac{-3\pm\sqrt{-7}}{8}\right)։$

ԴԱՍ ԺԶ.

ԵՐԿՐՈՐԴ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ԵՐԿՈՒ ԱՆԾԱՆՕԹՈՎ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԻՒՆՔ

198. Երկրորդ աստիճանի ք և յ անծանօթներով հաւասարութիւն մի վեց եզր կարէ ունենալ. այսինքն $ք^2$ով եզրեր, քյ ով եզրեր, $յ^2$ով եզրեր, յ ով եզրեր, ք ով եզրեր և անկախ եզրեր. ուրեմն երկրորդ աստիճանի հաւասարութիւն մի միշտ հետեւեալ ձեւոյն կարէ վերածիլ.

$$Աք^2+Բքյ+Գյ^2+Դք+Եյ+Զ=0։$$

199. ԵՐԿՈՒ ԱՆԾԱՆՕԹՈՎ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆՑ ԼՈՒԾՈՒՄ, ՈՐՈՑ ՄԻՆ ԱՌԱՋԻՆ ԱՍՏԻՃԱՆԻ Է. — Երկու անծանօթով երկու հաւասարութիւնք միշտ դիւրութեամբ կը լուծուին, եթէ մին առաջին և միւսը երկրորդ աստիճանի է. ունենամք հետեւեալ դրութիւնը

$$Աք^2+Բքյ+Գյ^2+Դք+Եյ+Զ=0 \quad [1],$$

$$աք+բյ=գ \quad [2].$$

[2] էն կ'ստանամք $յ = \frac{գ - ախ}{բ}$ ։

յին այս արժէքը [1] ին մէջ փոխադրելով մի անծանօթով երկրորդ աստիճանի հաւասարութիւն մի կ'ունենամք

$$(Աբ^2 - Բաբ + Գա^2)խ^2 + (Բբգ - 2Գագ - Դբ^2 - Եաբ)խ$$
$$+ Գգ^2 + Եբգ + Զբ^2 = 0 \quad [3]$$

հաւասարութիւնը. խն" երկու արժէք ունի. եթէ խին այս արժէքները [2] ին մէջ փոխադրեմք յին համապատասխանող արժէքները կ'ստանամք ։

Առաջարկեալ երկու հաւասարութեանց դրութիւնը երկու լուծում ունի. եթէ խին արժէքները իրական ըլլան, երկու լուծմունք եւս իրական կ'ըլլան. երեւակայական կ'ըլլան եթէ խին արժէքները երեւակայական ըլլան ։

200. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ. — Եթէ առաջարկեալ երկու անծանօթով երկու հաւասարութիւնք ի միասին երկրորդ աստիճանի ըլլան, այս հաւասարութեանց լուծման ամենէն պարզ միջոցն է յ²ը նախ տարադրել և ստանալ միայն խ անծանօթով հաւասարութիւն մի, որ չորրորդ աստիճանի կ'ըլլայ և զոր չկարեմք հանրահաշուոյս մէջ ցոյց տուած հասարակ կանոններով լուծել. ըսել է այսպիսի հաւասարութեան լուծում առ այժմ մեր ձեռնհասութենէն վեր սեպելու եմք. բայց ոչ ամենքը, զի կան այնպիսի պարզ դրութիւններ որք մասնաւոր հնարիւք կը լուծուին ։

Ահաւասիկ մի քանի պարզ դրութեանց լուծմունք.

1.
$$\left.\begin{array}{l} խ + յ = ա \\ խյ = բ^2 \end{array}\right\} \quad [1]$$

ըստ (**173**) ի գիտեմք որ խ և յ հետեւեալ

$$զ^2 - ազ + բ^2 = 0$$

հաւասարութեան արմատք են.

Ուրեմն
$$\left.\begin{array}{l} խ \\ յ \end{array}\right\} = \frac{ա \pm \sqrt{ա^2 - 4բ^2}}{2} \quad [2].$$

որպէս զի արմատք իրական ըլլան, ունենալու եմք

$$ա^2 - 4բ^2 \geqq 0 ։$$

2.
$$\left.\begin{array}{l} խ - յ = ա \\ խյ = բ^2 \end{array}\right\} \quad [1].$$

այս դրութիւնը առաջնոյն կը վերածի եթէ յը — զով ներկայացնեմք.

$$խ + զ = ա, \quad խզ = - բ^2$$

$$\left.\begin{array}{l} խ \\ զ \end{array}\right\} = \frac{ա \pm \sqrt{ա^2 + 4բ^2}}{2}$$

ուստի կ'ստանամք

$$\left.\begin{array}{l} խ = \frac{ա + \sqrt{ա^2 + 4բ^2}}{2} \\ յ = \frac{- ա + \sqrt{ա^2 + 4բ^2}}{2} \end{array}\right\} [2]. \text{ կամ } \left.\begin{array}{l} խ = \frac{ա - \sqrt{ա^2 + 4բ^2}}{2} \\ յ = -\frac{ա + \sqrt{ա^2 + 4բ^2}}{2} \end{array}\right\} [3],$$

երկու լուծմանց դրութիւնք կան որք իրական են ։

ԱՅԼ ՄԻՋՈՑ. — Եթէ առաջարկեալ դրութեան առաջին հաւասարութիւնը քառակուսեմք և նորա վերայ երկրորդին 4 անգամը կամ $4խյ = 4բ^2$ յաւելցնելով կ'ունենամք

$$խ^2 + յ^2 + 2խյ = ա^2 + 4բ^2$$

հաւասարութիւնը ։

Երկու արմատոց քառակուսի արմատը առնելով կ'ստանամք

$$խ + յ = \sqrt{ա^2 + 4բ^2}.$$

արդ գիտնալով երկու թուոց գումարը և տարբերութիւնը կարեմք դիւրաւ գտնել այս երկու թիւերը ։

3.
$$\left.\begin{array}{l} խ + յ = ա \\ խ^2 + յ^2 = բ^2 \end{array}\right\} \quad [1]$$

եթէ առաջնոյն քառակուսիէն երկրորդը բառնամք կը գտնեմք

$$2խյ = ա^2 - բ^2,$$

$$խյ = \frac{ա^2 - բ^2}{2}.$$

ուստի անծանօթք հետեւեալ հաւասարութեանց արմատք պիտի ըլլան

$$զ^2 - ազ + \frac{ա^2 - բ^2}{2} = 0 .$$

$$\left.\begin{matrix}խ\\յ\end{matrix}\right\} = \frac{ա}{2} \pm \sqrt{\frac{ա^2}{4} - \left(\frac{ա^2 - բ^2}{2}\right)} = \frac{ա}{2} \pm \sqrt{\frac{ա^2}{4} - \frac{2ա^2}{4} + \frac{2բ^2}{4}}.$$

$$խ = \frac{ա + \sqrt{2բ^2 - ա^2}}{2}$$

$$յ = \frac{ա - \sqrt{2բ^2 - ա^2}}{2}.$$

Եթէ $2բ^2 - ա^2 > 0$, գտնուած երկու արժէքներն իրական են. հակառակ պարագայի մէջ երեւակայական ։

4. $$\left.\begin{matrix} խ^2 + յ^2 = ա^2 \\ խյ = բ^2 \end{matrix}\right\} \quad [1]:$$

Երկրորդ հաւասարութեան երկու անդամները կրկնելով եթէ առաջնոյն վերայ յաւելցնեմք և կամ առաջինէն բառնամք, կ'ունենամք

$$\left.\begin{matrix} (խ + յ)^2 = ա^2 + 2բ^2 \\ (խ - յ)^2 = ա^2 - 2բ^2 \end{matrix}\right\} \quad [2]$$

հաւասարութիւնները. ուստի կը հետեւի

$$խ + յ = \pm\sqrt{ա^2 + 2բ^2}$$

$$խ - յ = \pm\sqrt{ա^2 - 2բ^2}.$$

ուրեմն

$$խ = \pm\frac{1}{2}\sqrt{ա^2 + 2բ^2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{ա^2 - բ^2}$$

$$յ = \pm\frac{1}{2}\sqrt{ա^2 + 2բ^2} + \frac{1}{2}\sqrt{ա^2 - բ^2}:$$

5. $$\begin{matrix} խ - յ = ա \\ խ^3 - յ^3 = բ^3 \end{matrix}$$

Առաջինը խորանարդելով կ'ունենամք

$$խ^3 - 3խ^2յ + 3խյ^2 - յ^3 = ա^3,$$

կամ $$խ^3 - յ^3 - 3խյ(խ - յ) = ա^3.$$

$խ^3 - յ^3$ը $բ^3$ ով, և $խ - յ$ը $ա$ ով ներկայացնելով կ'ունենամք

$$բ^3 - 3ախյ = ա^3,$$

$$խյ = \frac{բ^3 - ա^3}{3ա}:$$

խ և յ անծանօթից տարբերութիւնը և արտադրեալը ծանօթ ըլլալով կարեմք սոցա արժէքները գտնել ։ Միեւնոյն եղանակաւ կը լուծեմք

6. $$\begin{matrix} խ + յ = ա \\ խ^3 + յ^3 = բ^3 \end{matrix}$$

հաւասարութիւնը. բայց աւելի դիւրին միջոցն է երկրորդ հաւասարութիւնը առաջին հաւասարութեամբ անդամ առ անդամ բաժնել այսպէս.

$$\frac{խ^3 + յ^3}{խ + յ} = \frac{բ^3}{ա},$$

կամ

$$յ^2 - խյ + խ^2 = \frac{բ^3}{ա}:$$

Առաջին հաւասարութենէ յ ին արժէքը կ'առնեմք և երկրորդ հաւասարութեան մէջ կը դնեմք որով կ'ունենամք

$$(ա - խ)^2 - խ(ա - խ) + խ^2 = \frac{բ^3}{ա},$$

որ երկրորդ աստիճանի հաւասարութեան մի վերածեցաւ որոյ լուծումը խիստ դիւրին է ։

7. $$\begin{matrix} խ^4 + յ^4 = ա^4 \quad [1], \\ խ + յ = բ \quad [2]: \end{matrix}$$

Նախ (2) հաւասարութեան երկու անդամները կը քառակուսեմք և 2յխ եզրը երկրորդ անդամին մէջ անցնելէ զկնի նոր ստացուած հաւասարութիւնը նորէն կը քառակուսեմք և խյ ը զ ի հաւասարեցնելով կը գտնեմք

$$զ = ա^2 \pm \sqrt{\frac{ա^4 + բ^4}{2}},$$

ուստի դիւրութեամբ կ'ստանամք խ ին և յ ին արժէքներն ։

8. $$x^5 + y^5 = a^5 \quad [1],$$
$$x + y = b \quad [2] :$$

Առաջնոյն նման նախ xy արտադրեալին արժէքը կը գտնեմք.

$$xy = \frac{b^2}{2} \pm \sqrt{\frac{5b\,(b^5 + 4a^5)}{10b}} :$$

Նմանապէս լուծելու է հետեւեալ հաւասարութիւնները

1. $$x^2 - y^2 = a^2,$$
$$x \pm y = b \quad :$$

2. $$x^2 + xy + y^2 = a^2,$$
$$xy = b^2 \quad :$$

3. $$x^2 + xy + y^2 = a^2,$$
$$x \pm y = b \quad :$$

201. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ. — *Նախընթաց գործողութեանց մէջ տեսնուեցան այն գործածուած հնարք որք կը կայանային երկու անծանօթից գումարը և արտադրեալը գտնելու մէջ, որոցմով երկրորդ աստիճանի հաւասարութիւն մի կը կազմենք այս անծանօթից արժէքները սահմանելու համար:*

Երկրորդ աստիճանի այլ եւ այլ անծանօթներով հաւասարութիւնք

202. *Ունենամք լուծել*

$$x + y + z = a,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2,$$
$$xy = cz :$$

Առաջին հաւասարութեան z'ն երկրորդ անդամին մէջ անցնելէ զկնի հաւասարութեան երկու անդամները կը քառակուսեմք և կ'ստանամք

$$x^2 + 2xy + y^2 = a^2 - 2az + z^2 :$$

Եթէ $x^2 + y^2$ը $b^2 - z^2$ով, և xyը czով ներկայացնեմք կ'ունենամք

$$2z^2 - 2\,(a + c)\,z + a^2 - b^2 = 0$$

որ երկրորդ աստիճանի հաւասարութիւն մ'է և զոր լուծելով կը քաղեմք xին և yին արժէքները:

Այլ օրինակ. Լուծելու է

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2 :$$

Առաջարկեալ կոտորակները կը քառակուսեմք, այս կոտորակաց քառակուսիներուն գումարը իւրաքանչիւր կոտորակին հաւասար ըլլալով ունիմք

$$\frac{x^3}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

կամ

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

ուստի կը հետեւի

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \sqrt{\frac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$x = a\sqrt{\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}}.\quad y = b\sqrt{\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}}.\quad z = c\sqrt{\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}}.$$

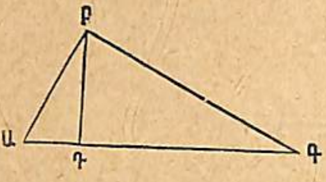
Նմանապէս լուծելու է

1. $$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = a^2,$$
$$x + u = b,$$
$$y + z = c,$$
$$yz = ux :$$

2. $$(x + y + z)^2 = 5y^2 + 8\,(x + z),$$
$$x^2 = y + z,$$
$$z^2 = x^2 + y^2 :$$

3. $$x^2 + y^2 - (z^2 + u^2) = a^2,$$
$$x + y + z + u = b,$$
$$y^2 = xz,$$
$$zy = ux :$$

Երկրորդ աստիճանի այլեւայլ անծանօթօք առաջարկութիւնք



ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Ա. — Ուղղանկիւն եռանկեան մը բարձրութիւնը և ուղիղ անկեան կողից գումարը գիտնալով, գտնելու է այս եռանկեան երեք կողերը։

Առաջարկեալ եռանկիւնը ըլլայ ԱԲԳ. կ'ուզեմք գտնել ԱԲ, ԲԳ և ԳԱ կողից երկայնութիւնները. ըստ առաջարկութեան ասացուածին ԱԲ + ԲԳ = ա և եռանկեան ԲԴ բարձրութիւնը հաւասար բ ի։

Այս առաջարկութիւնը լուծելու համար պէտք է յիշել երկրաչափական երկու տեսութիւնները։

1°. Ուղղանկեան գագաթէն հակուղղին վերայ քաշուած ուղղահայեացը միջին համեմատական է երկու հատուածոց մէջ:

2°. Ուղղանկեան իւրաքանչիւր կողը միջին համեմատական է հակուղղին եւ իւր ստորաձգին մէջ։

Արդ ԱԴ = ք. և ԴԳ = ղ ենթադրութեամբ ըստ առաջին տեսութեան ունիմք

$$ԲԴ^2 = քղ \text{ և կամ } բ^2 = քղ \quad [1].$$

ըստ երկրորդ տեսակին ունիմք

$$ԱԲ^2 = (ք + ղ)\,ք.$$

$$ԲԳ^2 = (ք + ղ)\,ղ$$

կամ

$$ԱԲ = \sqrt{(ք + ղ)\,ք} \quad [2].$$

$$ԲԳ = \sqrt{(ք + ղ)\,ղ} \quad [3]։$$

(2) և (3) հաւասարութիւնները անդամ առ անդամ գումարելով կ'ըստանամք

$$ԱԲ + ԲԳ = \sqrt{(ք + ղ)\,ք} + \sqrt{(ք + ղ)\,ղ}։$$

ԱԲ և ԲԳ ուղղանկեան երկու կողերը ըլլալով սոցա գումարն է ա, ուստի ունիմք

$$ա = \sqrt{(ք + ղ)\,ք} + \sqrt{(ք + ղ)\,ղ}$$

կամ

$$ա = \sqrt{(ք + ղ)}\,(\sqrt{ք} + \sqrt{ղ}) \quad [4]։$$

Դիցուք ք + ղ = զ.

$$ա = \sqrt{զ}\,(\sqrt{ք} + \sqrt{ղ}),$$

$$ա^2 = զ\,(ք + 2\sqrt{քղ} + ղ),$$

կամ

$$ա^2 = զ\,(ք + ղ + 2\sqrt{քղ}) \quad [4]։$$

Այս հաւասարութեան մէջ (ք + ղ) և $\sqrt{քղ}$ իւրեանց արժէքով ներկայացնելով կ'ստանամք

$$ա^2 = զ\,(զ + 2բ),$$

կամ

$$ա^2 = զ^2 + 2բզ,$$

և կամ

$$զ^2 + 2բզ - ա^2 = 0.$$

երկրորդ աստիճանի հաւասարութիւն մ'է որոյ արմատք են

$$զ = \pm\sqrt{բ^2 + ա^2} - բ.$$

Հակուղղին երկայնութիւնը և ուղիղ անկեան երկու կողից գումարը գիտնալով այս երկու կողերը դիւրութեամբ կը կազմուին։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Բ. — Ուղղանկիւն եռանկեան մի մակերեւոյթը $ս^2$ և շրջապատ 2պ ըլլալով, գտնելու է այս եռանկեան երեք կողից երկայնութիւնները։

Դիցուք ք, ղ և զ եռանկեան երեք կողերը հակուղիղը զ ներկայելով ունիմք

$$զ^2 = ք^2 + ղ^2 \quad [1],$$

$$ք + ղ + զ = 2պ \quad [2],$$

$$2ս^2 = քղ \quad [3].$$

(3) հաւասարութեան երկու անդամները 2ով բազմապատկելէ զկնի (1) հաւասարութեան վերայ կը յաւելումք և կ'ստանամք

$$զ^2 + 4ս^2 = ք^2 + ղ^2 + 2քղ,$$

կամ

$$զ^2 + 4ս^2 = (ք + ղ)^2 \quad [4].$$

(2) հաւասարութենէ կը քաղեմք

$$ք + ղ = 2պ - զ.$$

ուստի

$$(ք + ղ)^2 = (2պ - զ)^2 \quad [5].$$

(4) և (5) հաւասարութիւններէն կ'ունենամք

$$(2պ - զ)^2 = զ^2 + 4ս^2$$

հաւասարութիւնը, որոյ մէջ նշանակուած գործողութիւնները կատարելէ զկնի կ'ստանամք

$$պ^2 - պզ = ս^2.$$

ուստի կը հետեւի

$$գ = \frac{զ^2 - է^2}{զ} \quad [6]:$$

Արդ գիտնալով գին արժէքը (2) և (3) հաւասարութեանց միջոցաւ $(ա + բ)$ և $աբ$ կը հաշուեմք և ապա ային և բին արժէքները և կը գտնեմք

$$\left.\begin{matrix} ա \\ բ \end{matrix}\right\} = \frac{զ^2 + է^2}{2զ} \pm \sqrt{\frac{(զ^2 + է^2)^2}{4զ^2} - 2է^2} \quad [7]:$$

ՔՆՆԱԴԱՏՈՒԹԻՒՆ. — Առաջարկութեան հանգամանաց մինն է $զ > է$, ինչպէս (6)ի մէջ կը տեսնուի. բայց այս հանգամանքը չբաւեր, պէտք է նաեւ ային և բին արժէքները իրական և դրական ըլլալ. արդ ինչպէս (7)էն կը տեսնուի, եթէ իրական են ային և բին արժէքները, դրական ևս են. ուստի կը մնայ ապացուցանել թէ իրական են, այսինքն

$$\frac{(2^2 + է^2)^2}{4զ^2} - 2է^2 > 0 . \quad կամ \quad (զ^2 + է^2)^2 - 8զ^2 է^2 > 0 ,$$

և կամ $$զ^2 + է^2 + 2զէ\sqrt{2})\,(զ^2 + է^2 - 2զէ\sqrt{2}) > 0.$$

առաջին արտադրեալը դրական է, դալով երկրորդին պէտք է ունենալ

$$զ^2 + է^2 - 2զէ\sqrt{2} > 0 \quad [8]:$$

Սոքա են ահաւասիկ առաջարկութեան հնարութեան հանգամանք. ուստի կարեմք հետեւցնել թէ զ ի՛նչ սահմանի մէջ կրնայ փոփոխել էի տրուած արժէքից նկատմամբ և կամ է կը փոփոխի զի տրուած արժէքից նկատմամբ. ուստի հետեւեալ ենթադրութիւնը կ'ընեմք

$$\frac{զ}{է} = կ .$$

Եթէ (8)ը $է^2$ով բաժնեմք կ'ստանամք

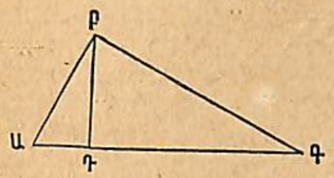
$$կ^2 - 2կ\sqrt{2} + 1 > 0 .$$

այս անհաւասարութեան առաջին եզրը դրական ըլլալով կ պէտք է

$$կ^2 - 2կ\sqrt{2} + 1 = 0$$

հաւասարութեան մեծագոյն արմատէն մեծ այսինքն $(\sqrt{2} + 1)$էն մեծ և փոքրագոյն արմատէն փոքր կամ $կ < \sqrt{2} - 1$. Արդ $զ > է$ ըլլալով $\frac{զ}{է}$ կշիռը $(\sqrt{2} - 1)$էն փոքր չկարէ ըլլալ. ուստի պէտք է որ $(\sqrt{2} + 1$էն մեծ ըլլայ: Այս թէութեամբ միայն առաջարկութիւնը հնարին է:

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Գ. — Հաշուելու է ուղղանկիւն եռանկեան մի կողերը, գիտնալով ուղիղ անկեան կողից տարբերութիւնը դ, և ուղիղ անկեան գագաթէն հակուղղին վերայ քաշուած ուղղահայեացին կազմած երկու հատուածոց տարբերութիւնը ե:



Դիցուք եռանկեան երեք կողից երկայնութիւնները ա, բ և գ. ըստ երկրաչափական մի տեսութեան ուղղանկեան մի կողն միջին համեմատական է հակուղղին և իւր ստորաձիգին մէջ. ուստի կը գրեմք

$$ԱԴ = \frac{ԱԲ^2}{ԱԳ} = \frac{բ^2}{ա} .$$

նոյնպէս ունիմք

$$ԳԴ = \frac{ԲԳ^2}{ԱԳ} = \frac{գ^2}{ա} .$$

ուստի առաջարկութեան հաւասարութիւնք են

$$բ^2 + գ^2 = ա^2 \quad [1],$$

$$բ - գ = դ \quad [2],$$

$$\frac{բ^2 - գ^2}{ա} = ե \quad [3]:$$

Այս հաւասարութիւնները լուծելու համար (3)ը (2)ով անդամ առ անդամ կը բաժնեմք և կը գտնեմք

$$բ + գ = \frac{եա}{դ} \quad [4] .$$

(4) և (2) հաւասարութիւնք երկու անծանօթից գումարը և տարբերութիւնը ցուցնելով, ունիմք

$$բ = \frac{եա + դ^2}{2դ} ,$$

$$գ = \frac{եա - դ^2}{2դ} .$$

բին և գին այս արժէքները (1)ին մէջ փոխադրելով կ'ունենամք

$$\left(\frac{բք + ա^2}{2ա}\right)^2 + \left(\frac{բք - ա^2}{2ա}\right)^2 = ք^2,$$

կամ

$$բ^2ք^2 + ա^4 = 2ա^2ք^2.$$

ուստի կը հետևի

$$ք = \frac{ա^4}{\sqrt{2ա^2 - բ^2}}.$$

քին այս արժէքը ղ և ց անծանօթոց հաւասարութեանց մէջ փոխադրելով կը քաղեմք

$$ղ = \frac{ա(բ + \sqrt{2ա^2 - բ^2}}{2\sqrt{2ա^2 - բ^2}},$$

և

$$ց = \frac{ա(բ - \sqrt{2ա^2 - բ^2}}{2\sqrt{2ա^2 - բ^2}}:$$

ՔՆՆԱԴԱՏՈՒԹԻՒՆ. —Առաջարկութիւնը հնարաւոր ըլլալու համար ք, ղ և ց անծանօթք իրական ըլլալէ զատ պէտք է ունենալ

$$բ^2 < 2ա^2,$$

կամ

$$բ < ա\sqrt{2}.$$

Այս արժէքները նաև դրական ըլլալու են և

$$բ > \sqrt{2ա^2 - բ^2},$$

կամ

$$բ > 2ա^2 - բ^2.$$

և հետևաբար

$$բ > ա:$$

Այսպէս հակուղղին երկու հատուածոց բ տարբերութիւնը ուղիղ անկեան երկու կողից տարբերութենէն մեծ է. և երկայնութեան վերայ կազմած քառակուսւոյն անկիւնագծէն աւելի փոքր, առաջարկութեան հնարաւորութեան թէութիւնք երկրաչափութեամբ կրնամք ստուգել, եթէ դրուած քանակութիւններով եռանկիւնը կազմուի։

Այս առաջարկութեան վերայ վարժութիւն մի

$$բ = 14 \text{ և } ա = 19$$

յաջորդաբար կը գտնեմք

$$ք = 50, \quad ղ = 10 \text{ և } ց = 30:$$

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Դ. — Համեմատութեան մի միջին համեմատականաց տարբերութիւնը ա է. արտաքին եզերացը բ. և իւր չորս եզերաց քառակուսիներուն գումարը գ². Ի՞նչ են այս համեմատութեան եզերը։

Դիցուք չորս եզերը ք, ղ, ց, ւ. ըստ առաջարկութեան ասացուածին ունիմք

$$ղ - ց = ա \quad [1],$$

$$ք - ւ = բ \quad [2],$$

$$ք^2 + ղ^2 + ց^2 + ւ^2 = գ^2 \quad [3]:$$

(1) և (2) հաւասարութիւնները քառակուսելով և անդամ առ անդամ յաւելցնելէ յետոյ ունիմք

$$ք^2 + ղ^2 + ց^2 + ւ^2 - 4ղց = ա^2 + բ^2.$$

որովհետև ղց հաւասար է քւ ի, նմանապէս ($ք^2 + ղ^2 + ց^2 + ւ^2$) հաւասար ըլլալով գ² ի ունիմք

$$գ^2 - 4ղց = ա^2 + բ^2 \text{ կամ } 4ղց = գ^2 - ա^2 - բ^2$$

հաւասարութիւնը։

(1)էն քաղուած ղին արժէքը նախընթաց հաւասարութեան մէջ փոխադրելով կ'ստանամք

$$4(ց + ա)ց = գ^2 - ա^2 - բ^2.$$

և կամ

$$4ց^2 + 4աց = գ^2 - ա^2 - բ^2.$$

ուստի

$$ց = \frac{-ա \pm \sqrt{գ^2 - բ^2}}{2}$$

միւս անծանօթ եզերը դիւրութեամբ կը գտնուին։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Ե. — Կազմելու է ուղղանկիւն եռանկիւն մի որոյ կողերը յաջորդական թիւեր ըլլան։

Դիցուք փնտռուած եռանկիւնը ԱԲԳ, որոյ ուղիղ անկեան մի կողին երկայնութիւնը ԱԲ = ք. միւս երկու կողերը պիտի ըլլան ք + 1 և ք + 2.

Ըստ երկրաչափական մի տեսութեան, հակուղղին քառակուսին ուղիղ անկեան երկու կողից քառակուսիներու գումարին հաւասար է. ուրեմն ունիմք

$$ԱԳ^2 = ԱԲ^2 + ԲԳ^2$$

կամ

$$(ք + 2)^2 = ք^2 + (ք + 1)^2$$

Նշանակեալ գործողութիւնները կատարելէ զկնի, կ'ունենամք

$$ք^2 - 2ք - 3 = 2 \cdot$$

ուստի

$$ք = 1 \pm \sqrt{1+3} = 3 :$$

Եռանկեան երեք կողից երկայնութիւնք են ուրեմն 3, 4 և 5. ք ին արժէքը մի է և դրական, զի բացասական թիւ մի անկարելի է որ եռանկեան մի կողը ցուցնէ։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Զ. — Ա և Բ երկու լոյսերը միացնող ուղիղ գծին վրայ կէտ մի սահմանելու է, որոցմով հաւասարապէս լուսաւորուած ըլլայ։

Դիցուք երկու լուսոյ հեռաւորութիւնը դ, և փնտռուած Գ կէտին

Ա Բ Գ
. . . . * ———————— * ———————— | . . . .

Ա էն ունեցած հեռաւորութիւնը ք. բաց աստի առաջին լուսոյ սաստկութիւնը ըլլայ ա և երկրորդինը բ. ընագիտական մի սկզբունքն է լուսոյ սաստկութիւնը հեռաւորութեան քառակուսոյն խոտորնակ կը համեմատի. հետեւաբար Գ կէտը Ա լոյսէն $\frac{ա}{ք^2}$ քանակութեամբ լոյս կ'առնոյ և Բ կէտէն $\frac{բ}{(ք-դ)^2}$ ըստ առաջարկութեան ասացուածին ունիմք

$$\frac{ա}{ք^2} = \frac{բ}{(ք-դ)^2} \quad կամ \quad ա(ք-դ)^2 = բք^2 .$$

երկրորդ աստիճանի հաւասարութիւն մի որոյ երկու անդամոց քառակուսի արմատ առնելով ունիմք

$$\sqrt{ա}\,(ք-դ) = \sqrt{բ}\,ք ,$$

կամ

$$\frac{\sqrt{ա}}{ք} = \frac{\sqrt{բ}}{ք-դ} .$$

ուստի կը քաղեմք

$$ք = \frac{դ\sqrt{ա}}{\sqrt{ա} \pm \sqrt{բ}} :$$

Առաջարկութիւնը ըսել է երկու լուծում ունի, առաջինը

$$ք' = \frac{դ\sqrt{ա}}{\sqrt{ա} + \sqrt{բ}}$$

կը համապատասխանէ Ա ին և Բ ին մէջ գտնուած կէտին, որովհետև դ էն փոքր է։

Եթէ $ա > բ$, այս արժէքը $\frac{դ}{2}$ էն աւելի մեծ է.

Եթէ $ա < բ$, այս արժէքը $\frac{դ}{2}$ աւելի փոքր է.

Եթէ $ա = բ$, այս արժէքը $\frac{դ}{2}$ ի հաւասար է.

ք ին երկրորդ արժէքն է

$$ք'' = \frac{դ\sqrt{ա}}{\sqrt{ա} - \sqrt{բ}} .$$

եթէ $ա > բ$, այս արժէքը դրական է · ուրեմն Ա ին աջ կողմը Գ կէտ մի կայ և նաև Բ էն ալ անդին. զի $ք'' > դ$։

Բայց եթէ $ա < բ$, $ք''$ բացասական է. այս լուծումը կը ցուցնէ թէ Գ կէտը Ա ին ձախ կողմը կը գտնուի. այս Գ կէտը տկար լոյսին կողմը կը գտնուի։

Եթէ $ա = բ$, $ք''$ ին արժէքը $\frac{դ}{0}$ ձևը պիտի առնէր. այս լուծումը կը ցուցնէ թէ Ա ին ձախ կողմը միանգամայն Բ ին աջ կողմը այսպիսի կէտ մի չկրնար գտնուիլ. ուրեմն միայն Ա ին և Բ ին մէջտեղը կը գտնուի փնտռուած Գ կէտը։

Եթէ $ա = բ$ և $դ = 0$, ք ին արժէքը $\frac{0}{0}$ ձևով պիտի ներկայանար, փնտռուած կէտը իրօք անորոշ պիտի ըլլար. որովհետև հաւասար սաստկութեամբ երկու լոյսեր միջոցին մէջ գտնուած որ և իցէ մի և նոյն կէտը հաւասարապէս կը լուսաւորեն։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Է. — Բաժնելու է ԱԲ գիծը այնպիսի երկու մասանց, որոց մեծագոյն ԱԳ մասը միջին համեմատական ըլլայ փոքրագունին և ամբողջ գծին։

Դիցուք ԱԲ գծին երկայնութիւնը ա. եթէ նշանակեմք ԱԳ կտորին եր-

|———————————|———————|
Ա Գ Բ

կայնութիւնը քով, ԲԳ ին երկայնութիւնը պիտի ըլլայ $(ա - ք)$. հետևաբար ըստ առաջարկութեան ասացուածին պիտի ունենամք

$$\frac{ա}{ք} = \frac{ք}{ա-ք} \quad [1]$$

համեմատութիւնը, յորմէ կը քաղեմք

$$ք^2 = ա(ա-ք), \quad կամ \quad ք^2 + աք - ա^2 = 0 \quad [2]$$

հաւասարութիւնը, որոյ լուծմունք են

$$ք = \frac{-ա \pm \sqrt{5ա^2}}{2} = \frac{ա(-1 \pm \sqrt{5})}{2} \quad [3] :$$

ՔՆՆԱԴԱՏՈՒԹԻՒՆ. — Երկու արմատք իրական են, որովհետև $\sqrt{5}$ը 2ին և 3ին մէջ կը գտնուի. խին առաջին արմատը դրական է և աէն փոքր. հարցման լուծումն այս է. բայց գալով խին երկրորդ արմատին, այս արմատը բացասական է, հետևաբար հարցման չը համապատասխաներ. Այսու ամենայնիւ այս բացասական լուծման մեկնութիւն մի տալու համար (2) հաւասարութեան մէջ խ — ա'ով կը ներկայացնեմք, այն ատեն կ'ունենամք

$$(-ա')^2 + (-ա'ա) - ա^2,$$

կամ

$$ա'^2 = ա(ա + ա').$$

այնպէս որ ա' միջին համեմատական է աին և (ա + ա')ին. ուստի առաջարկութիւնը հետևեալ հարցումը ունենալու է:

ԱԲ գծին երկայնութեան վերայ Գ' կէտ մը գտնելու է, այնպէս որ Աէն մինչ Գ' գտնուած ա' հեռաւորութիւնը միջին համեմատական ըլլայ ԱԲ և ԲԳ' գծերուն:

Նախընթաց երկու լուծմունք կարեն ամփոփիլ հետևեալ հարցման մէջ:

Անսահման գծի մը վերայ Ա և Բ երկու կէտեր առնուած են. գտնել Գ կէտ մի այս գծին վերայ այնպէս որ ԱԳ հեռաւորութիւնը միջին համեմատական ըլլայ ԲԳին և ԱԲին:

Արդէն առաջին աստիճանի շատ առաջարկութեանց լուծմանց մէջ բացասական քանակութեանց մեկնութիւններ տուինք. այսինքն բացասական լուծումը ԱԲ գծին ձախ կողմը կ'լինար դրական լուծման հակառակ:

Այս պարագայիս մէջ ևս եթէ հեռաւորութիւնները Բ կէտէն հաշուեմք, այնպէս որ ԲԳ = խ սեպեմք, ԱԳ հեռաւորութիւնը պիտի ըլլայ ըստ առաջին ձևոյն ա — խ. ուստի ունենալու եմք

$$\frac{ա}{ա - խ} = \frac{ա - խ}{խ}$$

համեմատութիւնը, յորմէ կը հետևի

$$խ^2 - 3ախ + ա^2 = 0 \quad [4]$$

հաւասարութիւնը. ուստի

$$խ = \frac{ա(3 \pm \sqrt{5})}{2} \quad [5]:$$

Այս երկու լուծմունք դրական են, առաջինը որ աէն մեծ է Գ' կէտը կը սահմանէ, իսկ երկրորդը աէն փոքր ըլլալով Գ կէտը:

ԼՈՒԾՄԱՆՑ ԿԱԶՄՈՒԹԻՒՆ. — Երբ (5) տարազը նկատողութեան առնեմք կրնամք գրել հետևեալ ձևովք

$$\left.\begin{matrix} խ' \\ խ'' \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{ա^2}{4} + ա^2} \mp \frac{ա}{2}:$$

Այս լուծմանց կազմութիւնք նոյն են ինչ որ էին տարերք երկրաչափութեան մէջ տեսնուած կազմութիւնք. որովհետև $\sqrt{\frac{ա^2}{4} + ա^2}$ը ուղղանկիւն եռանկեան մի հակուղիղն է, որոյ ուղիղ անկեան կողք ԱԲ և $\frac{ԱԲ}{2}$ են. խ'ը ստանալու համար հակուղիղէն $\frac{ԱԲ}{2}$ բառնալու է, իսկ խ'' բացարձակ արժէքը ստանալու համար երկու երկայնութիւնները գումարելու է. վերջապէս խ' կէտը դէպի աջ և խ'' կէտը հակառակ ընթացքով առնելու է:

Երբ վերը ստացուած

$$խ^2 + աx - ա^2 = 0$$

(2) հաւասարութիւնը նկատեմք, կրնամք գրել

$$խ(խ + ա) = ա^2$$

ձևով, որ հետևեալ հարցման կը համապատասխանէ:

Երկու գծեր գտնելու է խ և խ + ա, որոց տարբերութիւնը ըլլայ ա, և միջին համեմատականը $ա^2$:

Այս հարցումը ևս երկրաչափական հարցում մ'է որոյ կազմութիւնը առաջնոյն պէս է:

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Ը. — Շրջանակի մը շ շառաւիղը ուրիշ համակեդրոն շրջանակով մի միջին և արտաքին համեմատականաց բաժնելու է:

Այս առաջարկութիւնը լուծել սկսելէ յառաջ երկու ենթադրութիւններ կարեմք ընել. 1°. երկու շրջանակաց մէջ գտնուած գօտւոյ մակերևոյթը միջին համեմատական ըլլայ. 2°. անծանօթ շրջանակին մակերևոյթը միջին համեմատական ըլլայ:

Առաջին պարագային մէջ եթէ խ ցուցնէ փնտռուած շրջանակին շառաւիղը, ըստ առաջարկութեան տուացուածին ունիմք

$$\frac{\pi շ^2}{\pi(շ^2 - խ^2)} = \frac{\pi(շ^2 - խ^2)}{\pi խ^2},$$

կամ

$$(շ^2 - խ^2)^2 = շ^2խ^2.$$

ուստի կը հետևի

$$շ^2 - խ^2 = շխ. \quad կամ \quad շ^2 - խ^2 = -շխ:$$

Առաջնոյն լուծումն է

$$\text{ք} = \frac{\text{շ}(-1 \pm \sqrt{5})}{2} \quad [2] .$$

երկրորդինը

$$\text{ք} = \frac{\text{շ}(1 \pm \sqrt{5})}{2} \quad [3] :$$

ՔՆՆԱԴԱՏՈՒԹԻՒՆ. — Այս ստացուած չորս արմատք երկու առ եր կու իրարու հաւասար են և հակառակ նշանօք. բայց բացասական ար. մատք երկրաչափական այս հարցման մէջ նշանակութիւն մի չունին. անոր համար զանց կ'առնեմք և դրական արմատները նկատողութեան կ'առնեմք։

Այս արմատոց առաջինն է

$$\text{ք} = \frac{\text{շ}(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

որ կը ներկայացնէ շ շառաւիղին միջին և արտաքին համեմատականաց բա-ժանմամբ ստացուած ամենէն մեծ մասը, որ ուղղակի առաջարկութեան հարցման կը պատասխանէ :

Երկրորդ արմատն է

$$\text{ք} = \frac{\text{շ}(\sqrt{5} + 1)}{2}$$

որ այնպիսի գիծ մ'է որոյ միջին համեմատականը շ կ'ըլլար եթէ զայն միջին և արտաքին համեմատականաց բաժնէինք։ Առաջարկութիւնը կը պահանջէ որ այս գիծը չէն փոքր ըլլայ, ք ին այս արժէքը չէն մեծ ըլլալով հարցման միայն այն ատեն կը համապատասխանէ, երբ հարցումը ըլլար շրջանակի մը կեդրոնակից շրջանակ մի քաշել, այնպէս որ գօտին միջին համեմատական ըլլայ երկու շրջանակաց մակերևութից :

Այս հարցումը չպահանջէր որ փնտռուած շառաւիղը չէն փոքր ըլլայ. եթէ չէն մեծ սեպեմք, կ'ունենամք

$$(\text{ք}^2 - \text{շ}^2)^2 = \text{շ}^2\text{ք}^2$$

հաւասարութիւնը որ (1) էն չպիտի տարբերի և հետևաբար լուծումը առաջարկութեան հարցման պիտի պատասխանէ :

Դիցուք թէ անծանօթ շրջանակը միջին համեմատական է առաջարկեալ շրջանակին և գօտւոյն մէջ, ըստ այնմ կ'ստանամք

$$\frac{\pi \text{շ}^2}{\pi \text{ք}^2} = \frac{\pi \text{ք}^2}{\pi(\text{շ}^2 - \text{ք}^2)}, \text{ կամ } \text{ք}^4 + \text{շ}^2\text{ք}^2 - \text{շ}^4 = 0 . \quad [4]$$

այս կրկնակ քառակուսին դիւրին միջոցաւ մի լուծելու համար կը սեպեմք

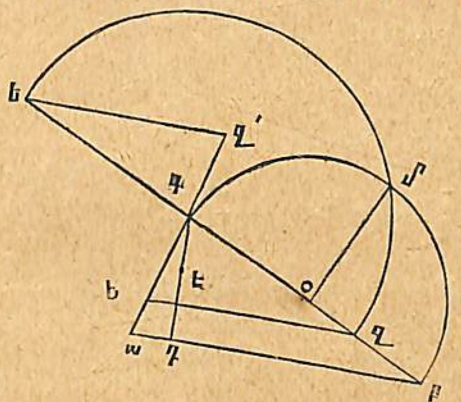
$$\text{ք}^2 = \text{շ}\text{ǂ} \quad [5] ,$$

և ապա շ^2 ով բաժնելով կ'ստանամք

$$\text{ǂ}^2 + \text{շ}\text{ǂ} - \text{շ}^2 = 0 \quad [6] .$$

որ նոյն է հաւասարութեանց առաջնոյն հետ, ǂ ին բացասական արժէքը թողլով կ'առնեմք դրական արժէքը որ շառաւիղին մեծագոյն կտորն է միջին և արտաքին համեմատականաց բաժանման մէջ. գալով անծանօթ շրջանակին ք շառաւիղին ըստ (5) ի միջին համեմատական է առաջարկեալ շրջանակին շառաւիղին և միջին համեմատական ǂ ին մէջ։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Թ. — ԱԲԳ եռանկիւնը բաժնելու է երկու համարժէք մասանց ԱԲ խարսխին զուգահեռական մը քաշելով։



Դիցուք քաշուելիք զուգահեռականը ԵԶ. որ եռանկեան կեան ԳԴ բարձրութիւնը Է կէտէն կը կտրէ :

ԱԲԳ եռանկեան մակերևոյթն է

$$\frac{1}{2} \text{ԱԲ} \times \text{ԳԴ} ,$$

ԵԱԲԶ տրապիզին մակերևոյթն է

$$\frac{1}{2} (\text{ԱԲ} + \text{ԵԶ}) \times \text{ԴԷ} :$$

Առաջարկութեան ստացուածքը կը պահանջէ որ տրապիզին մակերևոյթը եռանկեան մակերևոյթին կիսոյն հաւասար ըլլայ այսինքն ունենալու եմք հետևեալ հաւասարութիւնները

$$\frac{1}{2} (\text{ԱԲ} + \text{ԵԶ}) \text{ԴԷ} = \frac{1}{4} \text{ԱԲ} \times \text{ԳԴ} \quad [1] ,$$

կամ

$$\frac{1}{2} (\text{ԱԲ} + \text{ԵԶ}) \text{ԲԶ} = \frac{1}{4} \text{ԱԲ} \times \text{ԲԳ} \quad [2] .$$

որովհետև ունիմք

$$\frac{\text{ԴԷ}}{\text{ԳԴ}} = \frac{\text{ԲԶ}}{\text{ԲԳ}}$$

համեմատութիւնը. սեպեմք ուրեմն ԱԲ = ǂ. ԲԳ = [illegible]. ԲԶ = ք և ԵԶ = ǂ. (2) հաւասարութեան ձևը կ'ըլլայ այն ատեն

$$\frac{1}{2}(ե+ժ)ք=\frac{1}{4}աե \quad [3],$$

կամ
$$2(ե+ժ)ք=աե \quad [4],$$

ԱԲԳ և ԵԳԶ եռանկիւնք նման ըլլալով ունիմք

$$\frac{ԵԶ}{ԱԲ}=\frac{ԳԶ}{ԲԳ}=\frac{ԲԳ-ԲԶ}{ԲԳ},$$

կամ
$$\frac{ժ}{ե}=\frac{ա-ք}{ա},$$

հետևաբար
$$ժ=\frac{(ա-ք)ե}{ա} \quad [5].$$

ք ին այս արժէքը (4) ին մէջ փոխադրելով կ'ստանամք

$$2ք^2-4աք+ա^2=0,$$

երկրորդ աստիճանի հաւասարութիւն մի որոյ լուծմունք են

$$ք'=ա+\frac{ա}{2}\sqrt{2} \quad և \quad ք''=ա-\frac{ա}{2}\sqrt{2}:$$

ք ին այս երկու արժէքները իրական և դրական են, բայց ք ին առաջին արժէքը ա էն մեծ ըլլալով, զուգահեռականը առաջարկեալ եռանկիւնէն դուրս կը գտնուի, հետևաբար հարցման չը պատասխաներ:

Երկրորդ արմատը ք'' կազմելու համար նկատողութեան կ'առնումք ԳԶ որ հաւասար է ԲԳ — ԲԶ ի. այսինքն ա — ք'' կամ $\frac{ա}{2}\sqrt{2}$ և $ԳԶ^2=\frac{1}{2}ա^2$. ուրեմն $ԳԶ^2=\frac{1}{2}ԲԳ^2$. Զ կէտը սահմանելու համար պէտք է ԲԳ իբրև տրամագիծ կէս շրջանակ մը գծել, և որոյ վրայ ՕՄ շառաւիղը ուղղահայեաց բարձրացնել. ԳՄ լարը ԳԶ ի հաւասար է. վերջապէս ԳՄ շրջանակը գծել որ ԲԳ գիծը Զ կէտէն կը կտրէ:

Կը մնայ բացատրել ք'ի արժէքը որ ԲԳ կողին երկայնութեան վրայ ԳԶ ի հաւասար ԳԶ' երկայնութիւնը կը ցուցնէ և հետևաբար ԳԵԶ եռանկեան հաւասար ԳԵ'Զ' եռանկիւն մի. ըսել է հարցման պատասխանող մի լուծում կայ և այն ևս ք'' լուծումն է:

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Ժ. — Քար մը ձգեցինք հորին մէջ և թ վայրկեանէ վերջ քարին հորին յատակը զարնելու ձայնը լսուեցաւ. ի՞նչ է հորին խորութիւնը (օդին ընդդիմակայութիւնը առանց հաշուելու):

Այս առաջարկութիւնը լուծել սկսելէ յառաջ բնագիտական հետևեալ օրէնքը յիշելու եմք:

Ծանր մարմնոյ մի օդին մէջ քալած միջոցը անցած ժամանակին քառակուսոյն հետ ուղիղ կը համեմատի:

Եթէ քարին սկզբնական արագութիւնը զրօ և վերջնական արագութիւնը է սեպեմք, միջինը կ'ըլլայ $\frac{է}{2}$. հետևաբար հորին խորութիւնը ք, և քարին մինչ հորին յատակը հասնելու համար գործածուած ժամանակը $ժ_1$ով նշանակելով կ'ունենամք

$$ք=\frac{էժ_1^2}{2} \quad կամ \quad \sqrt{\frac{2ք}{է}}=ժ_1 \quad [1]:$$

Ձայնը միօրինակ կը շարժի և մէկ երկվայրկենի մէջ 333 մէթր կը քալէ, եթէ այս թիւը ա ով նշանակեմք և ձայնին հորին յատակէն մինչ մեզ հասնելու համար անցած ժամանակը $ժ_2$ով նոյնպէս կ'ունենամք

$$ք=աժ_2 \quad կամ \quad ժ_2=\frac{ք}{ա} \quad [2],$$

ուստի ըստ առաջարկութեան ասացուածին $ժ_1+ժ_2=Ժ$ ըլլալով ունիմք

$$Ժ=\sqrt{\frac{2ք}{է}}+\frac{ք}{ա} \quad [3]$$

հաւասարութիւնը զոր լուծելու համար կը գրեմք հետևեալ ձևով

$$Ժ-\frac{ք}{ա}=\sqrt{\frac{2ք}{է}} \quad [4],$$

կամ
$$Ժ^2-2\frac{Ժք}{ա}+\frac{ք^2}{ա^2}=\frac{2ք}{է} \quad [5],$$

և կամ
$$\frac{ք^2}{ա^2}-2ք\left(\frac{Ժ}{ա}+\frac{1}{է}\right)+Ժ^2=0 \quad [6].$$

ուստի
$$ք=\frac{\frac{Ժ}{ա}+\frac{1}{է}\pm\sqrt{\left(\frac{Ժ}{ա}+\frac{1}{է}\right)^2-\frac{Ժ^2}{ա^2}}}{\frac{1}{ա^2}}:$$

ՔՆՆԱԴԱՏՈՒԹԻՒՆ. — Երկու արմատք իրական են, որովհետև արմատականին տակ գտնուած քանակութիւնը դրական է, նոյնպէս (6) հաւասարութենէ կը նշմարուի որ երկու արմատք դրական են, որովհետև իւր-

եանց $b^2 a^2$ արտադրեալը և $\left(\frac{2b}{a}+\frac{2}{c}\right)a^2$ գումարը դրական են, բայց և այնպէս առաջարկութիւնը մի լուծում ունի, և եթէ հասկնալ ուզեմք թէ արմատոց ո՞րն է որ հարցման կը համապատասխանէ, (4)ը նկատողութեան կ'առնեմք, որոյ երկու անդամները քառակուսելով (5)ը ստացանք. Նորէն (5)ը պիտի ստանայինք եթէ (4) հաւասարութեան երկրորդ անդամները նոյն և հակառակ նշանով ըլլային. ուրեմն (5)ը համարժէք է հետեւեալ երկու հաւասարութեանց

$$b - \frac{x}{a} = \sqrt{\frac{2x}{c}} \cdot \quad b - \frac{x}{a} = -\sqrt{\frac{2x}{c}} :$$

Այս հաւասարութեանց առաջինը առաջարկեալ հարցման կը համապատասխանէ և որոյ լուծումը փնտռուած լուծումն է. այս լուծումը ab էն փոքր է, որովհետեւ $b - \frac{x}{a}$ դրական է. Նոյնպէս երկրորդ հաւասարութեան մէջ $ab < x$. որովհետեւ $b - \frac{x}{a}$ բացասական է. հետեւաբար (5)ին արմատոց մեծն է և առաջարկութեան համար փնտռուած լուծմէն դուրս լուծում մ'է ։

ՎԱՐԺՈՒԹԻՒՆՔ

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Ա. — Գտնելու է թիւ մը որ երեք թուանշաններէ բաղկանայ. տասնաւորաց քառակուսին ծայրերու թուանշանաց արտադրելոյն աւելի չորսի հաւասար է. տասնաւոր թուանշանին կրկինէն միաւորը բառնալով մնացորդը հարիւրաւորին հաւասար է. և երբ այս թիւը շրջեմք ուրիշ թիւ մը կ'ստանամք որ առաջինէն բառնալով մնացորդն է 590 աւելի այս երկու թուոց հասարակ տասնաւորը ։

Պատ. 864 ։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Բ. — Գտնելու է երկու ուղղանկեան x և y, z և u կողերը գիտնալով մակերեւոյթից գումարը s. խարիսխներուն գումարը a. և այս երկու ուղղանկեանց մակերեւոյթները b և b' կ'ըլլան եթէ իւրաքանչիւրին խարսխին միեւոյն բարձրութիւնը տրուի ։

Եթէ

$$s = 10, \quad a = 3, \quad b = 4, \quad b' = 4$$

կը գտնեմք

$$1^\circ\ x=1.\ y=2.\ z=2.\ u=4.\ \text{և}\ 2^\circ\ x=2.\ y=4.\ z=1.\ u=2 :$$

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Գ. — Ուղղանկիւն եռանկեան մի ուղիղ անկեան x և y կողերը հաշուելու է գիտնալով իւրեանց գումարը t և հակուղիղը a ։

Պատ. $x = \frac{t + \sqrt{2a^2 - t^2}}{2}$,

$y = \frac{t - \sqrt{2a^2 - t^2}}{2}$:

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Դ. — Գտնելու է գլանի մի բարձրութիւնը և խարսխին տրամագիծը գիտնալով նոցա գումարը p. և իւր մակերեւոյթը համարժէք a շառաւիղը ունեցող շրջանակին մակերեւոյթին ։

Դիցուք ԳԴ $= x$ և ԱԴ $= y$. ուստի ունիմք

$$ԱԲ + ԳԴ = p$$

կամ

$$2y + x = p \quad [1].$$

գլանին ամբողջ մակերեւոյթն է

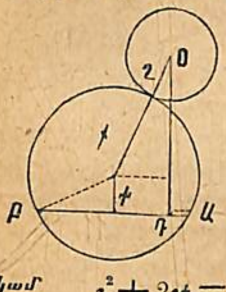
$$2\pi y^2 + 2\pi xy = \pi a^2 \quad [2].$$

(1)ին և (2)ին միջոցաւ կ'ստանամք

$$y = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 2a^2}}{2}$$

Այս լուծումը քննադատելու է ։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Ե. — Ա և Բ երկու կէտերէ անցնող շրջանակ մի գծելու է որ տրուած O շրջանակին շօշափող ըլլայ ։



ԱԲ գիծը քաշելու և O կէտէն OԴ ուղղահայեաց մի իջեցնելու է a երկայնութեամբ. դիցուք փնտռուած շրջանակին շառաւիղը x, և այս շրջանակին կեդրոնին և ԱԲ ին հեռաւորութիւնը y. ԱԲ $= 2p$ և ԱԴ $= t$. հետեւեալ հաւասարութիւնը կ'ունենամք

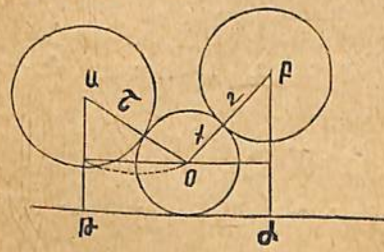
$$(r+x)^2 = (a-y)^2 + (p-t)^2.\ \text{և}\ x^2 = y^2 + p^2,$$

կամ

$$r^2 + 2rx = a^2 - 2ay - 2pt + t^2.\ x^2 = y^2 + p^2 :$$

Այս հաւասարութիւնները լուծելու և քննադատելու է ։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Զ. — Ա. Բ շրջանակներուն միանգամայն ԹԺ գծին շօշափող շրջանակ մի գծելու է ։



Դիցուք Ա և Բ կեդրոններէն ԹԺի քաշուած ուղղահայեացներուն երկայնութիւնները a և p. այս ուղղահայեացներուն իրարմէ հեռաւորութիւնը t. փնտռուած շրջանակին շառաւիղը եւս x կեդրոնին և առաջին ուղղահայեացին մէջ գտնուած հեռաւորութիւնը y ու նշանակելով դիւրութեամբ կ'ստանամք

$$(\rho + x)^2 = y^2 + (a - x)^2; \quad (r + x)^2 = (t - y)^2 + (p - x)^2 :$$

Այս հաւասարութիւնները պարզելով լուծելու և քննադատելու է ։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Է. — Հաշուելու է ԱԲԳ ուղղանկիւն եռանկեան կողերը գիտնալով իւր հակուղղին երկայնութիւնը a, և ներփակեալ շրջանակին շառաւիղը r ։

Ներփակեալ շրջանակին կեդրոնէն ուղղահայեացներ կ'իջեցնեմք եռանկեան երեք կողից վերայ. այս ուղղահայեացներուն ոտից եռանկեան գագաթներէն ունեցած հեռաւորութիւնները xով և yով նշանակելով կ'ստանամք

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - (r + a) r},$$

$$y = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - (r + a) r} ։$$

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Ը. — Քառակուսի a^2ի համարժէք ուղղանկիւն մի կազմելու է, այնպէս որ իւր կողից տարբերութիւնը հաւասար ըլլայ տըրուած b գծին երկայնութեան ։

Ուղղանկեան մեծ կողը x և փոքրը y սեպելով ունիմք

$$x - y = b,$$

$$xy = a^2$$

հաւասարութիւնները որոց լուծումները արդէն տեսանք ։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Թ. — Օ շրջանակէն դուրս առնուած Ա կէտէն հատանող մի քաշելու է, այնպէս որ ԲԳ և ԱԳ կտորներուն քառակուսեաց գումարը համարժէք ըլլայ առաջարկեալ s^2 քառակուսւոյ ։

xով և yով կը ներկայացնեմք երկու կտորները, և ԱՕ հեռաւորութիւնը եւս aով, կ'ունենամք

$$x^2 + y^2 = s^2, \quad x(x + y) = a^2 - r^2$$

հաւասարութիւնները, որոց yը տարադրելով կրկնակ քառակուսի հաւասարութիւն մի կ'ստանամք ։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Ժ. — Վաճառք մը գնեցինք և 119 Ֆք.ի ծախեցինք, այնպէս որ իւր գնոյն վերայ հարիւրէն այնչափ շահեցանք որչափ Ֆք. որ արժած էր ։

$$x \times \frac{x}{100} = 119 - x.$$

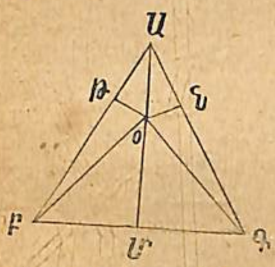
Պատ. $x' = 70$ ․ $x'' = -170$ ։

ԴԱՍ ԺԷ․

ՄԵԾԱԳՈՒՆԻ ԵՒ ՓՈՔՐԱԳՈՒՆԻ ՎՐԱՅ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՐՑՄՈՒՆՔ

203. ՍԱՀՄԱՆ․ — Երբ փոփոխական քանակութիւն մի որոշեալ սահմանի մէջ յաջորդական արժէքներ կ'առնէ, և այնպիսի արժէքի մի կը հասնի ուստի անդին չկարէ անցնիլ, փոփոխական քանակութեան արժէքը *մեծագոյն* է կ'ըսուի. իսկ *փոքրագոյն* է կ'ըսուի այն ատեն երբ այնպիսի արժէք մի կ'առնէ ուսկէց փոքր արժէք չկարէ առնել։

Երբ քանակութեան մի մեծագունէն մեծ և փոքրագունէն փոքր արժէք չկրնար տրուիլ, մեծագոյնը *բացարձակ մեծագոյն* և փոքրագոյնը *բացարձակ փոքրագոյն* կ'ըսուի ։



Առնենք հետեւեալ ԱԲԳ հաւասարակողմ եռանկեան ԱՄ բարձրութեան վերայ Օ կէտը այնպէս որ այս կէտը Ա գագաթին աւելի մօտ ըլլայ քան ԶՄ կէտ ։

Օ կէտէն ԱԳ կողին վերայ ՕՆ, ԱԲ կողին վերայ ՕԹ ուղղահայեացները կը քաշեմք, յետոյ Բ և Գ կէտերը Օ ին կը միացնեմք, եթէ ԱԲԳ ուղղութեամբ Օ կէտին շուրջը դարձող ՕԲ փոփոխական քանակութեան այլեւայլ երկայնութիւնները նկատողութեան առնեմք, կը տեսնեմք որ այս գիծը Օ կէտին ամբողջ շուրջը դարձած ատեն ՕԱ դրից մէջ *անսակարար մեծագոյն* է քանզի ԱՕՆ եռանկեան մէջ Օ կէտէն քաշուած որեւիցէ շեղ գիծ ՕԱ էն փոքր է, ուրեմն ՕԱ գիծը Ն էն դէպ ի Ա, և Ա էն դէպ ի Թ անմիջապէս հետեւող ամեն շեղ գծերէն մեծ է. բայց ասոր մեր ենթադրութիւնն է ՕԱ < ՕՄ. ուրեմն ՕԲ ին ՕԱ երկայնութիւնը անսակարար մեծագոյն է։

Նոյնպէս կը տեսնեմք ՕՔ երկայնութիւնը ՕՄ կացութեան մէջ *անսահմանօրէն փոքրագոյն* է. խոկ ՕԲ և ՕԴ գծից միոյն մէջ *բացարձակ մեծագոյն* է, ՕՆ և ՕԹ գծից միոյն մէջ *բացարձակ փոքրագոյն* է։ Վերջապէս եթէ Օ կէտը եռանկեան երեք գագաթներէն հաւասար հեռաւորութեամբ գտնուէր, ՕՔ գիծը ՕԱ, ՕԲ, ՕԴ գծից մէջ բացարձակ մեծագոյն և ՕՄ, ՕԹ, ՕՆ գծից մէջ բացարձակ փոքրագոյն պիտի ըլլար։

Մեծագունի և փոքրագունի հարցմունք թէպէտ տարրական հանրահաշուոյ սահմանէն դուրս են, բայց կան այնպիսի հարցմունք որք երկրորդ աստիճանի հաւասարութեանց կը վերածին նոքա հետզհետէ կարգաւ պիտի տեսնուին։

204. ՍԿԶԲՈՒՆՔ Ա. — *Երբ երկու փոփոխական արտադրչաց գումարը անփոփոխ է, սոցա արտադրեալը մեծագոյն ըլլալու համար երկու արտադրիչք իրարու հաւասար ըլլալու են:*

Դիցուք երկու արտադրչաց գումարը 2ա այս արտադրչաց իւրաքանչիւրը 2աէն փոքր ըլլալով, իւրեանց արտադրեալը 2աին քառակուսիէն փոքր է, ուրեմն մեծագոյն մի կայ. եթէ արտադրչաց մին քով նշանակեմք, միւս արտադրիչը պիտի ըլլայ $2ա - ք$, և սոցա արտադրեալը $ք(2ա - ք)$, զոր Մի հաւասարցնելով ունիմք

$$ք(2ա - ք) = Մ,$$

կամ

$$ք(2ա - ք) - Մ = 0 \quad [1].$$

ուստի կ'ստանամք

$$ք = ա \pm \sqrt{ա^2 - Մ} \quad [2]:$$

Հարցումը հնարաւոր ըլլալու համար պէտք է որ քին արժէքները իրական ըլլան, այսինքն Մ պէտք է որ $ա^2$էն փոքր ըլլայ։ Եթէ $Մ = ա^2$ [2]էն կը հետեւի $ք = ա$, կամ $2ա - ք = ա$, այս լուծումը ընդունելի է։

Ուրեմն երկու փոփոխական արտադրչաց արտադրեալը մեծագոյն ըլլալու համար երկու արտադրիչք

պէտք է որ հաւասար ըլլան։ Յիշեալ սկզբունքը հետեւեալ եղանակաւ դիւրութեամբ կը հաստատուի։

Դիցուք արտադրչաց մին $ա - ֆ$. միւսը պիտի ըլլայ $ա + ֆ$. իւրեանց արտադրեալն է $ա^2 - ֆ^2$. այս արտադրեալը մեծագունի հասնելու համար պէտք է որ $ֆ^2$ զրոյի հաւասարի, հետեւաբար արտադրչաց իւրաքանչիւրը աի հաւասարելու է։

Այս սկզբան տակ կ'իյնայ հետեւեալ հարցումը.

2շ շրջապատով և ա խարիսխով եռանկեանց մէջ ո՞րն է այն եռանկիւնը որոյ մակերեւոյթը մեծագոյն ըլլայ:

ա, բ, գ կողերով եռանկեան մի մակերեւոյթն է

$$Մ^2 = \sqrt{շ(շ - ա)(շ - բ)(շ - գ)}.$$

այս մակերեւոյթը $Մ^2$ին հետ մեծագոյն կ'ըլլայ. շ և $շ - ա$ արտադրիչք անփոփոխ ըլլալով նկատողութեան կ'առնեմք $(շ - բ)(շ - գ)$ արտադրեալը, որոյ արտադրչաց գումարը անփոփոխ և հաւասար է աի. ուրեմն այս արտադրեալը մեծագոյն ըլլալու համար $(շ - բ)$ հաւասար ըլլալու է $(շ - գ)$ի կամ $բ = գ$ի. այսինքն փնտռուած եռանկիւնը հաւասարասրուն եռանկիւն մ'է։

205. ՍԿԶԲՈՒՆՔ Բ. — *Երբ այլեւայլ դրական փոփոխական արտադրչաց գումարը անփոփոխ է իւրեանց արտադրեալը մեծագոյն ըլլալու համար. այս արտադրիչք իրարու հաւասար ըլլալու են:*

Դիցուք թէ արտադրիչք են ք, փ, ֆ, օ . . . և սոցա գումարը Գ։

Եթէ այս արտադրիչք հաւասար չեն՝ իւրեանց գումարը Գ առանց փոխելու այս արտադրիչներէն որեւիցէ երկուքը զորօրինակ ք և փ, կարեմք ներկայացնել $\frac{ք + փ}{2}$ իւրեանց գումարին կիսով, և $\left(\frac{ք + փ}{2}\right)\left(\frac{ք + փ}{2}\right)$ աւելի մեծ է քան քփ (**204**). ըսել է երբ երկու արտադրիչք հաւասար չեն առանց իւրեանց գումարը փոխելու, զայնս կարեմք հաւասարեցնել և արտա-

դրեալը աւելցնել. ուրեմն առաջարկեալ արտադրչաց արտադրեալը մեծագոյն կ'ըլլայ երբ արտադրիչք իրարու հաւասար ըլլան :

Հետեւեալ հարցումը այս սկզբան տակ կ'իյնայ ·

2շ շրջապատով ուղղանկեանց մէջ ո՞րն է այն ուղղանկիւնը որոյ մակերեւոյթը մեծագոյն է :

Խարսխին և բարձրութեան գումարը անփոփոխ է և հաւասար շի . իւրեանց արտադրեալը ուղղանկեան մը մակերեւոյթն է · այս արտադրեալը մեծագոյն ըլլալու համար արտադրիչք իրարու հաւասարելու են . ուրեմն մեծագոյն մակերեւոյթ ունեցող ուղղանկիւնը $\frac{1}{2}$շ կողով քառակուսին է :

206. ՍԿԶԲՈՒՆՔ Գ. — *Երբ երկու փոփոխական արտադրչաց գումարը անփոփոխ է եւ իւրաքանչիւրը տարբեր ցուցիչով, անոնց արտադրեալը մեծագոյն ըլլալու համար արտադրիչք համեմատական ըլլալու են իւրեանց ցուցիչներուն :*

Դիցուք երկու արտադրիչներն $x^{մ}$ և $y^{ն}$, սոցա գումարը $x + y = գ$: Իւրեանց արտադրեալը կարէ գրուիլ

$$մ^{մ} \times ն^{ն} \times \frac{x^{մ}}{մ^{մ}} \times \frac{y^{ն}}{ն^{ն}}$$

ձեւով. այս արտադրեալը երկու մասերէ կը բաղկանայ մին $մ^{մ} \times ն^{ն}$ անփոփոխ և միւսը $\frac{x^{մ}}{մ^{մ}} \times \frac{y^{ն}}{ն^{ն}}$, կամ

$\left(\frac{x}{մ}\right)^{մ} \times \left(\frac{y}{ն}\right)^{ն}$ փոփոխական :

Այս վերջի մասը մ թուով հաւասար արտադրիչներէ կը բաղկանայ հաւասար $\frac{x}{մ}$ի, և ն թուով հաւասար $\frac{y}{ն}$ի · այս $մ + ն$ արտադրչաց գումարը անփոփոխ է, որովհետեւ հաւասար է

$$մ \times \frac{x}{մ} + ն \times \frac{y}{ն} \text{ ի կամ } x + y \text{ ի, կամ } գ \text{ ի :}$$

Երբ այս արտադրիչք իրարու հաւասար ըլլան, իւրեանց արտադրեալը մեծագոյն կ'ըլլայ (**205**) . այսինքն երբ ունենամք

$$\frac{x}{մ} = \frac{y}{ն} \text{ կամ } \frac{x}{y} = \frac{մ}{ն} :$$

Այս սկզբան վրայ հետեւեալ հարցումը կ'ընեմք ·

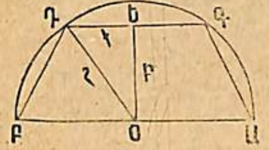
Կէս շրջանակի մը մէջ տրապէզ մը ներփակելու է որոյ Մ մակերեւոյթը մեծագոյն ըլլայ :

Դիցուք 2x տրապիզին վերի խարսխին երկայնութիւնը, հետեւաբար ունիմք

$$Մ = (շ + x)\,բ$$

կամ

$$Մ = (շ + x)\sqrt{շ^2 - x^2}$$



Եթէ մակերեւոյթը մեծագոյն ըլլայ իւր քառակուսին նմանապէս մեծագոյն պիտի ըլլայ, ուրեմն կարեմք գրել

$$Մ^2 = (շ + x)^2 (շ^2 - x^2)$$
$$Մ^2 = (շ + x)^2 (շ + x) (շ - x)$$
$$Մ^2 = (շ + x)^3 (շ - x) :$$

$Մ^2$ արժէքը մեծագոյն կ'ըլլայ երբ $(շ + x)$, և $շ - x)$ արտադրչաց արտադրեալը կարելի եղածին չափ մեծ ըլլայ · արդ այս երկու արտադրչաց գումարը 2շ է, որ անփոփոխ քանակութիւն մ'է, ուրեմն արտադրիչք իւրեանց ցուցիչներուն համեմատական ըլլալու են :

Ուստի կ'ունենամք

$$\frac{շ + x}{շ - x} = \frac{3}{1},$$

հետեւաբար

$$x = \frac{շ}{2} :$$

Ուրեմն տրապիզին վերի խարիսխը շ է, ուստի մեծագոյն տրապիզը կանոնաւոր կէս վեցանկիւնն է :

Մեծագունի եւ փոքրագունի վրայ առաջարկութիւնք

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Ա. — Գիտնալ թէ ի՞նչ սահմաններու մէջ կարէ փոփոխիլ $աք^2 + բք + գ$ եռեզրը ։

Նախ առաջարկեալ եռեզրը մի կը հաւասարցնեմք այսպէս,

$$աք^2 + բք + գ = մ \quad [1]\cdot$$

այս հաւասարութիւնը լուծելով կը գտնեմք

$$ք = \frac{-բ \pm \sqrt{բ^2 - 4ագ + 4ամ}}{2ա} \quad [2].$$

հարցումը հնարաւոր ըլլալու համար պէտք է ունենալ

$$բ^2 - 4ագ + 4ամ > 0, \quad կամ \quad 4ամ > 4ագ - բ^2 \quad [3]։$$

Բայց երբ այս անհաւասարութենէն հանկնալ ուզեմք մի ամենէն մեծ արժէքը, ուստի չկարէ անդէն անցնիլ, երկու պարագաներ նկատողութեան կ'առնեմք

1°. Եթէ ա դրական է, (3)ին երկու անդամները 4աով կարեմք բաժնել (**139**) և ունենալ

$$մ > \frac{4ագ - բ^2}{4ա} \quad [4]։$$

Այս պարագայիս մէջ եռեզրը $\frac{4ագ - բ^2}{4ա}$ արժէքէն մեծ ամեն արժէք կարէ առնուլ և մինչեւ իսկ այս արժէքը ունենալ որ իւր փոքրագոյնն է։

2°. Եթէ ա բացասական է, (3)ը 4աով բաժնելով անհաւասարութեան ընթացքը կը փոխեմք (**139**) այսպէս.

$$մ < \frac{4ագ - բ^2}{4ա} \quad [5].$$

այս պարագայիս մէջ եռեզրը $\frac{4ագ - բ^2}{4ա}$ արժէքէն փոքր ամեն արժէք կարէ առնել, մինչեւ իսկ այս արժէքին կը հասնի որ իւր մեծագոյնն է։

Ամեն պարագայի մէջ մի փոքրագոյն և մեծագոյն արժէքները արմատականը կ'ոչնչացնեն. արդարեւ (**182**) տեսանք թէ եռեզրը միշտ

$$ա\left\{\left(ք + \frac{բ}{2ա}\right)^2 + \frac{4ագ - բ^2}{4ա2}\right\}$$

ձեւով կարէ ներկայանալ. ուստի երբ ք աստիճանաբար աճի, $-\infty$ էն

մինչ $+\infty$, $\left(ք + \frac{բ}{2ա}\right)^2$ եզրը միշտ դրական ըլլալով $+\infty$ էն սկսեալ կը նուազի. ապա զրոյի կը հաւասարի երբ $ք = -\frac{բ}{2ա}$ ըլլայ և կ'աճի մինչ $+\infty$. իւր փոքրագոյնը զրոն է։

Հետեւեալ

$$ա\left\{\left(ք + \frac{բ}{2ա}\right)^2 + \frac{4ագ - բ^2}{4ա^2}\right\}$$

քանակութիւնը $\left(ք + \frac{բ}{2ա}\right)^2$էն կը տարբերի միայն $\frac{4ագ - բ^2}{4ա^2}$ անփոփոխ քանակութեամբ, սա եւս $+\infty$ է սկսեալ կը նուազի և կը հասնի $\frac{4ագ - բ^2}{2ա}$ փոքրագունի, երբ $ք = -\frac{բ}{2ա}$ է։ Ապա քին հետ անհունօրէն կ'աճի։ Եւ երբ եռեզրը կազմելու համար աով բազմապատկեմք, արտադրեալը միեւնոյն ընթացքով փոփոխումներ կը կրէ եթէ $ա > 0$, և հակառակ ընթացքով եթէ $ա < 0$։

Ուրեմն

Եթէ ա դրական է, եռեզրը $+\infty$ է սկսեալ կը նուազի մինչ $\frac{4ագ - բ^2}{4ա^2}$ փոքրագոյնը. յետոյ կ'աճի մինչ $+\infty$: Եթէ ա բացասական է, $-\infty$ է սկսեալ կ'աճի մինչ $\frac{4ագ - բ^2}{4ա^2}$ մեծագոյնը, յետոյ կը նուազի մինչ $-\infty$։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Բ. $ա^2$ թիւը երկու դրական արտադրիչներու վերածելու է, այնպէս որ նոցա գումարը փոքրագոյն ըլլայ։

Այս արտադրիչներուն գումարը փոքրագոյն ըլլալու համար իւրաքանչիւրը աի հաւասար ըլլալու է, որովհետեւ (**204**) գիտեմք թէ երկու արտադրիչներուն գումարը անփոփոխ 2ա ըլլալով իրենց արտադրեալը $ա^2$էն մեծ չկարէ ըլլալ. ուրեմն այս փնտռուած երկու արտադրիչներուն գումարը եթէ 2աէն փոքր ըլլայ, իրենց արտադրեալը եւս $ա^2$էն փոքր կ'ըլլայ. հետեւաբար այս արտադրեալը $ա^2$ ըլլալու համար փնտռուած արտադրիչներուն փոքրագոյն գումարը 2ա կարէ ըլլալ։ Ուստի կը հետեւի

Թիւ մը երկու արտադրիչներու վերածելու համար այնպէս որ նո-

ցա գումարը փոքրագոյն ըլլայ, պէտք է զայն հաւասար երկու արտադրիչներու վերածել:

Այս առաջարկութիւնը ուրիշ միջոցով մի ևս կը լուծեմք:

Դիցուք թէ փնտռուած երկու արտադրիչք են x և y. և սոցա փոքրագոյն գումարը a. ուստի ունիմք

$$xy = m^2$$

և

$$x + y = a.$$

երկու թուոց արտադրեալը և գումարը ծանօթ ըլլալով կ'ունենամք

$$x^2 - ax + m^2 = 0 \quad [1]$$

հաւասարութիւնը, որոյ լուծմունք են

$$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4m^2}}{2} \quad [2]$$

x ին և y ին արժէքները իրական ըլլալու համար պէտք է ունենալ

$$a^2 - 4m^2 \geqq 0,$$

ուստի

$$a \geqq 2m.$$

ըսել է երկու արտադրիչներուն գումարը $2m$ էն փոքր չկարէ ըլլալ. ուրեմն $2m$ գումարը փոքրագոյնն է:

[1] ին մէջ a ը $2m$ ով ներկայացնելով կ'ստանամք

$$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \frac{2m}{2}.$$

ուստի

$$x = y = m:$$

Այս առաջարկութիւնը հետեւեալ հարցման լուծումը կուտայ:

Միեւնոյն $Մ^2$ մակերեւոյթը ունեցող ուղղանկեանց մէջ ո՞րն է այն որոյ շրջապատը փոքրագոյն ըլլայ:

Առանց դժուարութեան պիտի գտնեմք թէ ւ կողով քառակուսին է:

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Գ. — Խարիսխը b և բարձրութիւնը h եռանկեան մէջ ուղղանկիւն մի կազմելու է, այնպէս որ մակերեւոյթը մեծագոյն ըլլայ.

Եռանկեան մէջ ուղղանկիւնը կազմելու համար եռանկեան կողից միոյն վերայ կէտ մի կ'առնեմք և անկէց խարսխին զուգահեռական մի կը քաշեմք որ երկու կողերը երկու կէտերէն կը կտրէ, այս կէտերէն ուղղահայեացներ կ'իջեցնեմք խարսխին վերայ. եթէ զուգահեռականը եռանկեան գագաթին մօտէն քաշուէր ուղղանկեան մակերեւոյթը խիստ փոքր կ'ըլլար. այս մակերեւոյթը հետզհետէ կ'աճի եթէ քաշուած զուգահեռականը եռանկեան գագաթէն հետզհետէ հեռանայ. բայց այս աճումը սահման մի ունի. յորժամ անդին զուգահեռականը անսահմանօրէն խարսխին մօտենալով ուղղանկեան մակերեւոյթը կը նուազի մինչ զրօ: Ուրեմն մակերեւոյթը մեծագոյն մի ունենալու է: Դիցուք ուղղանկեան բարձրութիւնը x և խարիսխը y. ուղղանկեան մակերեւոյթը $Մ$ ի հաւասարցնելով կ'ունենամք

$$xy = Մ \quad [1].$$

ըստ մի երկրաչափական տեսութեան x և y փոփոխականաց մէջ հետեւեալ համեմատութիւնը ունիմք

$$\frac{y}{b} = \frac{h - x}{h} \quad [2].$$

(1) y ին արժէքը առնելով (2) ին մէջ կը փոխադրեմք և կ'ստանամք

$$\frac{bx(h - x)}{h} = Մ \quad [3]:$$

Առանց այս հաւասարութիւնը լուծելու նկատողութեան կ'առնեմք իւր առաջին անդամը որոյ մէջ $\frac{b}{h}$ արտադրիչը անփոփոխ ըլլալով այս անդամին մեծագոյնը $x(h - x)$ արտադրեալէն կախում ունի. արդ x և $(h - x)$ երկու արտադրիչք անփոփոխ գումար մի ունին. ուրեմն երկու արտադրիչներու արտադրեալը մեծագոյն ըլլալու համար երկու արտադրիչք իրարու հաւասար ըլլալու են (**204**). արդ պէտք է ունենալ $x = \frac{h}{2}$ և հետեւաբար $y = \frac{b}{2}$. այս արժէքները ընդունելի են, ուստի կը հետեւի

Եռանկեան մէջ մեծագոյն ուղղանկիւն մի կազմելու համար բարձրութեան կէսէն խարիսխին զուգահեռական մի քաշելու է, այս ուղղանկեան մակերեւոյթը $xy = \frac{bh}{4}$. ինչպէս կը տեսնեմք ուղղանկեան մակերեւոյթին կէսն է:

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Դ. — Առաջարկեալ O շրջանակին մէջ

հաւասարասրուն եռանկիւն մի կազմելու է այնպէս որ շրջապատը մեծագոյն ըլլայ ։

Դիցուք փնտռուած եռանկիւնը ԱԲԳ, որոյ խարիսխը ԲԳ ։ Եռանկեան Ա գագաթէն ԱԹ ուղղահայեացը խարսխին վրայ կ'իջեցնեմք և կ'երկարեմք մինչ Դ կէտը ։ Եռանկեան մակերեւոյթը Մ սեպելով ունիմք

$$Մ = ԱԹ \times ԲԹ \quad [1] :$$

Եթէ O շրջանակին շառաւիղը շ և և ՕԹ ին երկայնութիւնը ք ըլլայ կ'ունենամք այն ատեն

$$Մ = (շ + ք)\left(\sqrt{շ^2 - ք^2}\right) \quad [2] .$$

հետեւաբար

$$Մ^2 = (շ + ք)^2 (շ^2 - ք^2)$$

և կամ
$$Մ^2 = (շ + ք)^3 (շ - ք) \quad [3] :$$

$Մ^2$ ին մեծագոյն արժէքը, կամ որ նոյն է $(շ + ք)^3$ $(շ - ք)$ արտադրեալին կարեմք փնտռել, որովհետեւ երկու արտադրիչներուն գումարը անփոփոխ 2շ է. ուստի (**204**) կը գտնեմք $ք = \frac{շ}{2}$. ըսել է մեծագոյն շրջապատ ունեցող եռանկիւնը հաւասարանկիւն եռանկիւնն է ։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Ե. Ք փոփոխականին ո՞նչ արժէք տալու է որպէսզի $\frac{ք - 4}{ք^2 - 3ք - 3}$ մեծագոյն կամ փոքրագոյն ըլլայ ։

Դիցուք Մ այս կոտորակին արժէքը.

$$\frac{ք - 4}{ք^2 - 3ք - 3} = Մ$$

$$ք - 4 = Մք^2 - 3Մք - 3Մ ,$$

կամ
$$Մք^2 - 3Մք - ք - 3Մ + 4 = 0 .$$

և կամ

$$ք^2 - \frac{(3Մ + 1)ք}{Մ} - \frac{3Մ}{Մ} + \frac{4}{Մ} = 0 .$$

ուստի

$$ք = \frac{3Մ + 1}{2Մ} \pm \sqrt{\frac{9Մ^2 + 1 + 6Մ}{4Մ^2} + \frac{3Մ}{Մ} - \frac{4}{Մ}} :$$

Արմատականին մէջ գտնուած քանակութիւնները պարզելով կը գտնեմք

$$ք = \frac{3Մ + 1 \pm \sqrt{21Մ^2 - 10Մ + 1}}{2Մ} :$$

ք ին արժէքները իրական ըլլալու համար պէտք է ունենալ

$$21Մ^2 - 10Մ + 1 \geqq 0 :$$

Այս անհաւասարութեան առջին անդամը երկու արտադրչայ կարեմք վերածել (**182**). և ունենալ

$$21\left(Մ - \frac{1}{3}\right)\left(Մ - \frac{1}{7}\right) \geqq 0 .$$

ուստի կը հետեւի

$$Մ > \frac{1}{3} \quad կամ \quad Մ < \frac{1}{7} :$$

Առաջարկեալ կոտորակը ամեն արժէք կարէ առնել $-\infty$ սկսեալ մինչ $\frac{1}{7}$. և $\frac{1}{3}$ էն մինչ $+\infty$. բայց $\frac{1}{7}$ և $\frac{1}{3}$ մէջ գտնուած արժէքներէն ոչ մին. $\frac{1}{7}$ը և $-\infty$ ի մէջ գտնուած արժէքներէն մեծագոյնն է. $\frac{1}{3}$ այն արժէքներէն փոքրագոյնն է որ այս սահմանին և $+\infty$ ի մէջ կը գտնուին ։

Եթէ այս երկու սահմանաց համապատասխանող ք ին

արժէքները սահմանել ուզեմք, կը տեսնեմք որ $\text{Մ} = \frac{1}{7}$ և $\text{Մ} = \frac{1}{3}$ սեպելով, $\dagger$ին երկու արմատները կ'ըլլան $\frac{3\text{Մ} + 1}{2\text{Մ}}$ կամ, $\dagger = 5$. $\dagger = 3$ ։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Զ. — Հետեւեալ կոտորակին մեծագոյնը և փոքրագոյնը գտնելու է.

$$\frac{\dagger^2 + 3}{2\dagger - \dagger^2 - 1} \text{ ։}$$

Դիցուք

$$\frac{\dagger^2 + 3}{2\dagger - \dagger^2 - 1} = \text{Մ} .$$

կամ $$\dagger^2 (1 + \text{Մ}) - 2\text{Մ}\dagger + \text{Մ} + 3 = 0 .$$

ուստի

$$\dagger = \frac{\text{Մ} + \sqrt{-4\text{Մ} - 3}}{1 + \text{Մ}} .$$

որպէս զի $\dagger$ին արժէքները իրական ըլլան, ունենալու եմք

$$-4\text{Մ} - 3 \geq 0 .$$

կամ $$4\text{Մ} + 3 \leq 0 .$$

և կամ $$\text{Մ} \leq -\frac{3}{4} \text{ ։}$$

Մ ին արժէքը պէտք է որ $-\frac{3}{4}$ էն փոքր ըլլայ, ուրեմն առ առաւելն $-\frac{3}{4}$ կարէ ըլլալ և առաջարկեալ կոտորակը մեծագոյն մի ունի և ոչ փոքրագոյն ։

Երբ $\text{Մ} = -\frac{3}{4}$ կ'ստանամք $\dagger = -3$ ։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Է. — Գտնելու է հետեւեալ կոտորակին մեծագոյնը և փոքրագոյնը.

$$\frac{4\dagger - 2\dagger^2 + 1}{\dagger^2 + 1} \text{ ։}$$

Այս կոտորակը Մ ի հաւասարցնելով կ'ստանամք

$$\frac{4\dagger - 2\dagger^2 + 1}{\dagger^2 + 1} = \text{Մ}$$

հաւասարութիւնը որ նոյն է

$$\dagger^2 (\text{Մ} + 2) - 4\dagger - (1 - \text{Մ}) = 0$$

հաւասարութեան հետ, և որոյ արմատք են

$$\dagger = \frac{2 \pm \sqrt{-\text{Մ}^2 - \text{Մ} + 6}}{\text{Մ} + 2} \text{ ։}$$

$\dagger$ ին արժէքները իրական ըլլալու համար

$$-(\text{Մ}^2 + \text{Մ} - 6) \geq 0$$

ըլլալու է. արդ $\text{Մ}^2 + \text{Մ} - 6$ եռեզրը զրոյի հաւասարցնելով իւր արմատները կ'ըլլան $+2$ և -3 ։ Որպէս զի $-(\text{Մ}^2 + \text{Մ} - 6)$ եռեզրը զրոյէն մեծ ըլլայ պէտք է որ իւր առաջին եզրէն տարբեր նշան մի ունենայ. այս ալ այն ատեն կ'ըլլայ երբ Մ ին արժէքները 2 և -3 երկու արմատոց մէջ կը գտնուին (**189**) ։

Մ ի արժէքները կարեն ըլլալ 2. 1. 0. -1. -2. և -3 ուստի կը տեսնուի թէ 2 մեծագոյն է և -3 փոքրագոյն ։

Մ ը 2 ի հաւասարցնելով $\dagger$ին արժէքը կ'ըլլայ $\frac{1}{2}$. իսկ $\text{Մ} = -3$, $\dagger$ հաւասար կ'ըլլայ -2 ի ։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Ը. — Գտնելու է $\frac{\dagger^2 - 4}{\dagger^2 - \dagger - 2}$ կոտորակին մեծագոյնը և փոքրագոյնը ։

Այս կոտորակը Մ ի հաւասարցնելով ունիմք

$$\frac{ք^2 - 4}{ք^2 - ք - 2} = Մ$$

կամ

$$ք = \frac{Մ \pm \sqrt{9Մ^2 - 24Մ + 16}}{2(Մ - 1)}.$$

ք իրական ըլլալու համար պէտք է ունենալ

$$9Մ^2 - 24Մ + 16 \geq 0.$$

այս եռեզրը զրոյի հաւասարցնելով իւր երկու արմատները $\frac{4}{3}$ կ'ըլլան, ուրեմն Մ ին ինչ արժէք ալ տրուի եռեզրը դրական պիտի մնայ. հետեւաբար առաջարկեալ կոտորակը ոչ մեծագոյն ունի և ոչ փոքրագոյն:

Երբ $Մ = \frac{4}{3}$ սեպեմք ք՝ կը հաւասարի 2 ի. եթէ առաջարկեալ կոտորակին մէջ ք՝ 2 ով ներկայացնեմք կոտորակը $\frac{0}{0}$ ձեւը կ'առնէ:

Անսահմանութեան ձեւը չունենալու համար նկատողութեան կ'առնեմք տրուած կոտորակին համարիչը և յայտարարը որք կարեն գրուիլ այսպէս.

$$\frac{ք^2 - 4}{ք^2 - ք - 2} = \frac{(ք - 2)(ք + 2)}{(ք - 2)(ք + 1)} = \frac{ք + 2}{ք + 1}$$

կամ

$$\frac{ք + 2}{ք + 1} = \frac{4}{3} = Մ:$$

207. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ. — Եթէ $9Մ^2 - 24ʃ + 16$ եռեզեր արմատք փոխանակ իրարու հաւասար ըլլալու՝ երեւակայական ըլլային, այս պարագայիս մէջ կոտորակը ոչ մեծագոյն և ոչ ալ փոքրագոյն կարէր ունենալ:

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Թ. — Ի՞նչ սահմանաց մէջ կարէ փոփոխիլ

$$\frac{2ք^2 + 4ք + 5}{3ք^2 + 6ք + 7}$$

նշանացոյցը երբ ք՝ $-\infty$ էն մինչ $+\infty$ ամեն իրական արժէքներ առնէ:

Առաջարկեալ կոտորակը Մ ի հաւասարցնենք և փընտռենք ք փոփոխականի արժէքը հետեւեալ հաւասարութեան միջոցաւ

$$\frac{2ք^2 + 4ք + 5}{3ք^2 + 6ք + 7} = Մ.$$

կամ

$$(2 - 3Մ)ք^2 + (4 - 6Մ)ք + 5 - 7Մ = 0.$$

ուստի կ'ստանամք

$$ք = \frac{-(2 - 3Մ) \pm \sqrt{(2 - 3Մ)^2 - (2 - 3Մ)(5 - 7Մ)}}{2 - 3Մ}.$$

ք ին արժէքները որպէս զի իրական ըլլան, արմատականին մէջ գտնուած քանակութիւնը դրական ըլլալու է, այսինքն պէտք է ունենալ

$$(2 - 3Մ)^2 - (2 - 3Մ)(5 - 7Մ) \geq 0.$$

Մ ի արժէքները կը տեսնեմք որ $\frac{2}{3}$ ի և $\frac{3}{4}$ ի մէջ կը գտնուին. ուրեմն ք ին արժէքը ինչ որ ալ լինի Մ ի արժէքները $\frac{2}{3}$ ին և $\frac{3}{4}$ ին մէջ հանկցուած են. տեսնենք հիմայ թէ որք են ք ին այն արժէքները որ Մ հաւասարի $\frac{2}{3}$ ի և $\frac{3}{4}$ ի:

Նախ նկատողութեան առնենք մեծագոյն արժէքը որ է $\frac{3}{4}$. երբ $Մ = \frac{3}{4}$, արմատականը կ'ոչնչանայ և ք կը հաւասարի 1 ի. ըսել է առաջարկեալ նշանացոյցը մեծագոյն կ'ըլլայ այն ատեն երբ փոփոխական ք ին 1 արժէք տրուի:

Դիցուք $\text{Մ} = \frac{2}{3}$ արմատականը նորէն զրոյի կը վերածի և ք՝ $\frac{0}{0}$ ձեւը կ'առնէ որ անստուգութեան նշան է ։

Եթէ վերոյիշեալ արմատական նշանին տակ գտնուած քանակութիւնը ուրիշ ձեւով գրեմք այսինքն կատարեալ բազմապատկութիւնները և պարզութիւնները ընեմք կ'ստանամք

$$\sqrt{(2-3\text{Մ})^2-(2-3\text{Մ})(5-7\text{Մ})} = \sqrt{-6+17\text{Մ}+12\text{Մ}^2}$$

$$= \sqrt{(3\text{Մ}-2)(3-4\text{Մ})} = \sqrt{3\text{Մ}-2}\cdot\sqrt{3-4\text{Մ}}\text{ ։}$$

Նաեւ $(2-3\text{Մ})$ը կարեմք ներկայացնել

$-(3\text{Մ}-2)$ ով կամ $-\sqrt{3\text{Մ}-2}\times\sqrt{3\text{Մ}-2}$,

$$\text{և } \text{ք} = \frac{+\sqrt{3\text{Մ}-2}\times\sqrt{3\text{Մ}-2}\pm\sqrt{3\text{Մ}-2}\cdot\sqrt{3-4\text{Մ}}}{-\sqrt{3\text{Մ}-2}\cdot\sqrt{3\text{Մ}-2}}$$

$$= \frac{+\sqrt{3\text{Մ}-2}\pm\sqrt{3-4\text{Մ}}}{-\sqrt{3\text{Մ}-2}}$$

Եթէ հիմայ $\text{Մ} = \frac{2}{3}$ սեպեմք, քին արժէքը $\frac{\text{Մ}}{2}$ ձեւը կ'առնէ որ անհունութեան նշան է, այսինքն նշանացոյցը $\frac{2}{3}$ին պիտի մերձենայ ։ Երբ քին արժէքները երթալով աճին, այսինքն երբ ք անհունօրէն աճի, կոտորակը իւր փոքրագունին կը հասնի ։

Այս առաջարկութիւնք բաւական են հասկցնելու թէ հետեւեալ նշանացոյցները ի՞նչ սահմանաց մէջ կը փոփոխին.

1° $\frac{\text{ք}^2-2\text{ք}+2}{2\text{ք}-2}$. 2° $\frac{\text{ք}^2+2\text{ք}-1}{\text{ք}^2-2\text{ք}+1}$. 3° $\frac{\text{ք}^2+14\text{ք}+9}{\text{ք}^2+4\text{ք}+3}$.

4° $\frac{\text{ք}^2+34\text{ք}-71}{\text{ք}^2+2\text{ք}-7}$. 5° $\frac{2\text{ք}}{1+\text{ք}^2}$. 6° $\frac{2\text{ք}+1}{1+\text{ք}^2}$. 7° $\frac{\text{ք}^2+30\text{ք}+15}{\text{ք}^2}$.

8° $\frac{\text{ք}^2-2\text{ք}+2}{\text{ք}^2-2\text{ք}-8}$. 9° $\frac{\text{ք}^2-4}{\text{ք}^2-\text{ք}-2}$. 10° $\frac{\text{ա}\text{ք}^2+\text{բ}\text{ք}+\text{գ}}{\text{ա}'\text{ք}^2+\text{բ}'\text{ք}+\text{գ}'}$.

Վերոյիշեալ առաջարկութեանց լուծումներէն յառաջ կը բերեմք հետեւեալ կանոնը ։

Մեծագունի կամ փոքրագունի նմանակայ եղող նշանացոյցը նախ անծանօթ քանակութեան մը կը հաւասարցնեմք զորօրինակ **Մ** *ի. նոր ստացուած հաւասարութիւնը փոփոխական ք ի նկատմամբ կը լուծեմք ։*

Եթէ փակագծի մէջ գտնուած քանակութիւնը երկրորդ աստիճանի է զայն զրոյի հաւասարցնելով կը լուծեմք ։ Երբ արմատները իրական եւ անհաւասար են, անոնց մեծ արմատը մեծագոյն եւ անոնց փոքրը փոքրագոյն կ'ըլլայ եթէ առաջին եզրը բացասական է (Առաջարկ. Է.) ։ Եթէ առաջին եզրը դրական ըլլայ անոնց փոքրը մեծագոյն կ'ըլլայ, եւ անոնց մեծը փոքրագոյն (Առաջարկ. Ե.) ։ Երբ արմատք հաւասար են եւ կամ երեւակայական, այն ատեն ոչ մեծագոյն եւ ոչ ալ փոքրագոյն կայ (Առաջարկ. Ը.) ։ Բայց երբ արմատականին տակ գտնուած քանակութիւնը առաջին աստիճանի է եւ կամ միայն երկրորդ աստիճանի եզր մը ունի առանց առաջին աստիճանը պարունակող եզրի. այն ատեն մեծագոյն կայ առանց փոքրագունի, կամ փոքրագոյն առանց մեծագունի (Առաջարկ. Բ.) ։

ՎԱՐԺՈՒԹԻՒՆՔ

1. Թիւ մը երկու մասերու բաժնելու է, այնպէս որ իւրեանց քառակուսիներուն և կամ խորանարդներուն գումարը մեծագոյն ըլլայ ։

Պատ. Այս թիւը երկու հաւասար մասերու բաժնելու է ։

2. Քառակուսայ մի մէջ ներփակեալ ուղղանկեանց ո՞րն է այն որոյ մակերեւոյթը փոքրագոյն ըլլայ ։

Քառակուսի մ'է որոյ գագաթները առաջարկեալ քառակուսայ կողերուն կիսոյն վրայ հաստատուած են ։

3. Գտնելու է $\frac{ա+ք}{ա-ք}+\frac{ա-ք}{ա+ք}$ին փոքրագոյնը ։

Կը գտնեմք $ք = 0$. և փոքրագոյնն է 2 ։

4. Եռանկեան մէջ ներփակեալ ուղղանկեանց մէջ ո՞րն է այն որոյ մակերեւոյթը մեծագոյն ըլլայ ։

Պատ. Եռանկեան բարձրութեան կիսոյն հաւասար բարձրութեամբ ուղղանկիւնն է ։

5. Միեւնոյն շրջապատը ունեցող եռանկեանց մէջ ո՞րն է այն որոյ ուղիղ անկեան գագաթէն քաշուած ուղղահայեացը մեծագոյն ըլլայ ։

Պատ. Հաւասարասրուն եռանկիւնն է ։

6. Հետեւեալ նշանացոյցին մեծագոյնը և փոքրագոյնը սահմանելու է, և ք ին համապատասխանող արժէքները ։

$$\frac{2ք^2-3ք+1}{ք^2-5ք+1}$$

Պատ. Մեծագոյն $\frac{9-2\sqrt{15}}{21}$ երբ $ք=\frac{1+\sqrt{15}}{7}$

փոքրագոյն $\frac{9+2\sqrt{15}}{21}$ երբ $ք=\frac{1-\sqrt{15}}{7}$ ։

7. Առաջարկեալ շրջանակի մէջ ներփակեալ ուղղանկեանց ո՞րն է այն որոյ մակերեւոյթը մեծագոյն ըլլայ ։

Պատ. Քառակուսին ։

8. ր շառաւիղով և բ բարձրութեամբ ուղիղ կոնոսի մէջ ներփակեալ գլաններէն ո՞րն է այն որոյ մակերեւոյթը մեծագոյն ըլլայ ։

Այն գլանն է որոյ խարսխի շառաւիղը և բարձրութիւնը կոնոսին բարձրութեան և խարսխին շառաւիղին կիսոյն հաւասար է ։

9. ք ին ի՞նչ արժէք տալու է որպէս զի $\sqrt{ք}+\sqrt{10-ք}$ նշանացոյցը մեծագոյն ըլլայ։ $ք = 5$ ըլլալով Մ հաւասար կ'ըլլայ $2\sqrt{5}$ ի ։

10. ԱԲԳ կէս շրջանակը տրուած է որոյ ԵԶ շօշափող մի տանելու է, այնպէս որ տրամագծին երկու ծայրերէն քաշուած ԱԵ և ԳԶ ուղղահայեացներով կազմուած ուղղանկիւն տրապէզը $Մ^2$ փոքրագոյն մակերեւոյթը ունենայ ։

Պատ. փոքրագոյն ուղղանկիւն տրապէզը պարփակեալ քառակուսւոյ կիսոյն հաւասար է ։

փոխադարձ հաւասարութիւնք

Երբ հաւասարութեան մի ծայրերէն հաւասար հեռաւորութեամբ գտնուող եզերց համարտադրիչք հաւասար են, և արմատք եւս ա, $\frac{1}{ա}$ են, այսինքն երկու արմատոց արտադրեալն միութիւնն է հաւասարութիւնը փոխադարձ է կ'ըսուի · զորօրինակ

$$5ք^4+4ք^3-2ք^2+4ք+5=0 \quad [1]$$

չորրորդ աստիճանի փոխադարձ հաւասարութիւն մ'է, որովհետեւ ա այս հաւասարութեան արմատը սեպելով $\frac{1}{ա}$ը եւս նորա արմատը կարէ նկատուիլ ։

Դիցուք [1]ին արմատը ա, այն ատեն կ'ունենամք

$$5ա^4+4ա^3-2ա^2+4ա+5=0 \quad [2] .$$

այս հաւասարութեան առաջին անդամին մէջ ա ը $\frac{1}{ա}$ով ներկայացնելով կ'ունենամք վերստին

$$5\frac{1}{ա^4}+4\frac{1}{ա^3}-2\frac{1}{ա^2}+4\frac{1}{ա}+5=0 ,$$

որ [2]ին հետ նոյն է, զի հասարակ յայտարարի վերածելով

$$\frac{5+4ա-2ա^2+4ա^3+5ա^4}{ա^4}=0 \quad [3]$$

հաւասարութիւնը կ'ստանամք որ [2]էն միայն իւր եզերց կարգովը կը տարբերի ։

Լուծենք յիշեալ

$$5x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 4x + 5 = 0 \quad [1]$$

չորրորդ աստիճանի փոխադարձ հաւասարութիւնը, որոյ առաջին անդամը x^2ով բաժնելով կ'ունենանք

$$5x^2 + 4x - 2 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} = 0 \quad [2],$$

զոր կարեմք գրել

$$5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$$

ձեւով: Արդ $x + \frac{1}{x} = y$ սեպելով $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ հաւասար կ'ըլլայ $(y^2 - 2)$ի. հետեւաբար [1]ը երկրորդ աստիճանի

$$5(y^2 - 2) + 4y - 2 = 0$$

կամ

$$5y^2 + 4y - 12 = 0$$

հաւասարութեան կը վերածի, զոր լուծելով կ'ստանամք

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{5} = \frac{-2 \pm 8}{5}$$

ուստի

$$y' = \frac{6}{5} \quad և \quad y'' = -2 .$$

xին արժէքը ստանալու համար կը լուծեմք

$$x + \frac{1}{x} = \frac{6}{5}$$

և

$$x + \frac{1}{x} = -2$$

հաւասարութիւնները, այս կերպով xին չորս արժէքները կ'ըլլան

$$-1,\quad -1.\quad \frac{3 + 4\sqrt{-1}}{5}.\quad և \quad \frac{3 - 4\sqrt{-1}}{5} :$$

208. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ. — Երբ հաւասարութեան մի արմատք իրարու հետ այնպէս առնչութիւն ունենան որ իւրեանց արտադրեալը միութեան հաւասարի. այս պարագային մէջ երկու զոյգ արմատոց գումարը yով ներկայացնելով yին արժէից թիւը փնտռուած արմատոց թուոյն կիսոյն հաւասար կ'ըլլայ այսինքն հաւասարութեան աստիճանը կիսով չափ կը նուազի:

209. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ Ա. — Զոյգ աստիճանով հաւասարութիւն մի փոխադարձ ըլլալու համար, հաւասարութեան ծայրերէն հաւասար հեռաւորութեամբ գտնուող եզերց համարտադրիչք իրարու հաւասար ըլլալու են կամ բացարձակ արժէքով հաւասար և հակառակ նշանով. այս պարագային մէջ հաւասարութիւնը միջին եզրէ զուրկ է:

210. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ Բ. — Անզոյգ աստիճանով հաւասարութիւն մի փոխադարձ ըլլալու համար, իր ծայրերէն հաւասար հեռաւորութեամբ գտնուող եզերց համարտադրիչք հաւասար ըլլալու են, կամ բացարձակ արժէքով հաւասար և հակառակ նշանով. այս պարագային մէջ երբ ծայրերէն հաւասար հեռաւորութեամբ գտնուող եզերք միեւնոյն նշանով են առաջարկեալ հաւասարութեան արմատոց մին -1 է, եթէ ծայրերէն հաւասար հեռաւորութեամբ եզերց համարտադրիչք հակառակ նշանով են, հաւասարութեան արմատոց մին $+1$ է:

Ունենամք լուծել հետեւեալ

$$x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 5x - 1 = 0$$

հինգերորդ աստիճանի փոխադարձ հաւասարութիւնը, որոյ ծայրերէն հաւասար հեռաւորութեամբ գտնուող եզերց համարտադրիչք իրարու հաւասար և հակառակ նշանօք ըլլալով + 1 փնտռուած արմատոց մին է, [1]ին առաջին անդամը ք — 1 ով բաժանական է (52) եթէ այս համարտադրիչք հակառակ նշանով ըլլան․ արմատոց մին — 1 կ'ըլլայ և հաւասարութեան առաջին անդամը ք + 1 ով բաժանական կ'ըլլայ․ երկու պարագային մէջ ես առաջարկեալ անզոյգ աստիճանով հաւասարութիւնը զոյգ աստիճանի կը վերածեմք ք — 1 ով կամ ք + 1 ով բաժանմամբ․ այս կերպով չորրորդ աստիճանի փոխադարձ հաւասարութիւն մի կ'ունենամք, որոյ լուծման եղանակը ցուցուցինք ։

Երրորդ աստիճանի հաւասարութեանց լուծում

211. *Երրորդ աստիճանի մի անծանօթով հաւասարութիւն մի կը պարունակէ անծանօթին երրորդ կարողութիւնը, ստորին կարողութիւնները և անծանօթէ անկախ եզր մի․ այսպէս․*

$$աք^3 + բք^2 + ք + գ = 0 .$$

այս ձևով յաճախակի կը ներկայանան երրորդ աստիճանի հաւասարութիւնք, զորս լուծելու համար այնպիսի ձևոյ մի վերածելու է, որոյ մէջ երկրորդ աստիճանով եզրը անհետացած ըլլայ․ այս գործածելիք միջոցնիս նախ երկրորդ աստիճանի հաւասարութեանց վրայ կը կատարեմք և ապա կ'անցնինք երկրորդ աստիճանի հաւասարութեանց ։

212. ԵՐԿՐՈՐԴ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՆՐԱԿԱՆ ՏԱՐԱԶԻ ՎԵՐԱԾՈՒՄԸ․ — Առնենք հետեւեալ հաւասարը․

$$ք^2 + բք + գ = 0 \quad [1] ։$$

Դիցուք $ք = յ + զ$․ հետեւաբար

$$(յ + զ)^2 + բ(յ + զ) + գ = 0$$

գործողութիւնները կատարելով կ'ունենամք

$$յ^2 + 2զյ + զ^2 + բյ + բզ + գ = 0 ,$$

կամ $$յ^2 + (2զ + բ)յ + զ^2 + բզ + գ = 0 \quad [2] ։$$

յին համարտադրիչը $2զ + բ = 0$ սեպելով $զ$ հաւասար կ'ըլլայ $\frac{-բ}{2}$ի․ այն ատեն [1]ը կ'առնէ

$$յ^2 + \frac{բ^2}{4} - \frac{բ^2}{2} + գ = 0$$

կամ $$յ^2 - \frac{բ^2}{4} + գ = 0 \quad [3]$$

ձևը, որ երկրորդ աստիճանի թերի հաւասարութիւն մ'է․ որոյ լուծմունք են

$$յ = \pm\sqrt{\frac{բ^2}{4} - գ} .$$

քին արժէքը առնալու համար յին արժէքին վրայ զին արժէքը կ'աւելցնեմք․ հետեւաբար

$$ք = յ + զ = -\frac{բ}{2} \pm \sqrt{\frac{բ^2}{4} - գ} ։$$

213. ԵՐՐՈՐԴ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՆՐԱԿԱՆ ՏԱՐԱԶԻ ՎԵՐԱԾՈՒՄԸ․ — Դիցուք թէ ունիմք

$$աք^3 + բք^2 + ք + գ = 0 \quad [1]$$

երրորդ աստիճանի հաւասարութիւնը, որոյ երկրորդ եզրը, այսինքն բարձրագոյն աստիճանով եզրէն մէկ պակաս աստիճանով եզրը կ'ուզեմք ջնջել և ստանալ երրորդ աստիճանի հաւասարութիւն մի աւելի

պարզ ձեւոյ տակ . ասոր համար [1]ին մէջ $ք = յ + զ$ կը սեպեմք և կ'ունենամք

$$ա(յ + զ)^3 + բ(յ + զ)^2 + յ + զ + դ = 0$$

կամ

$$ա(յ^3 + 3յ^2զ + 3յզ^2 + զ^3) + բ(յ^2 + 2յզ + զ^2) + յ + զ + դ = 0 \; [2]։$$

Այս հաւասարութեան $յ^2$ով եզրերը ջնջելու համար $(3զ + բ)յ^2 = 0$ [3] կը սեպեմք և կ'ստանամք

$$ա(յ^3 + 3յզ^2 + զ^3) + բ(2յզ + զ^2) + յ + զ + դ = 0 \; [4]$$

հաւասարութիւնը . [3]էն կը քաղեմք

$$զ = -\frac{բ}{3}.$$

զին այս արժէքը [4]ին մէջ փոխադրելով

$$յ^3 + պք + ղ = 0 \quad [5]$$

պարզ ձեւը կ'ստանամք , որ երրորդ աստիճանի հանրական տարազին վերածուածն է ։

214. ԼՈՒԾՈՒՄՆ ԵՐՐՈՐԴ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆ · — Դիցուք թէ երրորդ աստիճանի հաւասարութեան վերածումը կատարուած է , կոտորակներէ խորշելու համար երրորդ աստիճանի հաւասարութիւնը հետեւեալ ձեւով պիտի ներկայացնեմք

$$ք^3 + 3պք + 2ղ = 0 \quad [1],$$

որոյ մէջ պ և ղ իրական քանակութիւններ են ։

Եթէ սեպեմք $ք = յ + զ$, [1]ը կ'առնէ

$$յ^3 + զ^3 + 3(յզ + պ)(յ + զ) + 2ղ = 0$$

ձեւը , որ ստուգուած է

երբ $\quad յզ + պ = 0 \quad$ և $\quad յ^3 + զ^3 + 2ղ = 0$

սեպեմք , ուստի կը հետեւին

$$յ^3զ^3 = -պ^3, \quad յ^3 + զ^3 = -2ղ ։$$

Երկու թուոց գումարը և արտադրեալը ծանուցեալ ըլլալով ,

$$տ^2 + 2ղտ - պ^3 = 0$$

հաւասարութեան արմատք են $յ^3$ և $զ^3$.

ուրեմն

$$յ^3 = -ղ + \sqrt{ղ^2 + պ^3}, \quad զ^3 = -ղ - \sqrt{ղ^2 + պ^3} \quad [2].$$

և որովհետեւ $\qquad ք = յ + զ$

ուստի

$$ք = \sqrt[3]{-ղ + \sqrt{ղ^2 + պ^3}} + \sqrt[3]{-ղ - \sqrt{ղ^2 + պ^3}}։$$

Եթէ արմատականաց արժէքները երբէք նկատողութեան չառնէինք [2]ը քին համար միայն մի արժէք պիտի տար , բայց իւրաքանչիւր արմատական երեք արմատ ունենալով որովհետեւ ամեն քանակութիւն երեք արմատ ունի (1) երկու արմատականներուն գումարը ինը տարբեր արմատներ յառաջ պիտի բերէ , այս ինը արմատները միանգամայն ընդունելի չեն , որովհետեւ յին և զին արժէքները ստուգելու են $յզ = -պ$, $յ^3 + զ^3 = -2ղ$ երկու հաւասարութիւնները · արդ

---

(1) Ինչպէս երկեզը հաւասարութեանց մէջ տեսնուեցաւ $ք^3 = 1$, քին արմատներն էին $ք = 1$, $ք = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$. ուստի կը հետեւի թէ միութիւնը երեք արմատ ունի . եթէ $Ա = ա^3$ Աի խորանարդ արմատն ստանալու համար միութեան երեք խորանարդ արմատները աով բազմապատկելու է . եթէ ուզեմք հասկնալ թէ միութեան երկու երեւակայական արմատք ինչպէս կազմուած են իրարու նկատմամբ . կը տեսնեմք որ իւրաքանչիւրը միւսոյն քառակուսին է . այնպէս որ

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)\left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right) = 1 \cdot \text{ և } \frac{(-1 - \sqrt{-3})^2}{2}$$

$$= \frac{(-1 + \sqrt{-3})}{2} \text{ իսկ } \left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)։$$

առաջին հաւասարութիւնը $փ^3ֆ^3 = -բ^3$ով ներկայացուած է. ըսել է $-բ^3$ երեք տարբեր խորանարդ արմատներ կուտայ փֆի. եթէ միութեան երեւակայական խորանարդ արմատները $ա$ով և $ա^2$ով ներկայացնենք, փֆին երեք արժէքները որ $փ^3ֆ^3 = -բ^3$ին կը համապատասխանեն, են $փֆ = -բ$, $փֆ = -բա$, $փֆ = -բա^2$:
[2] տարազը միանգամայն տալու է [1]ին արմատները և այն հաւասարութեան արմատները զոր ստանալու համար բ՝ $բա$ով և $բա^2$ով կը ներկայացնենք: Արդ բ քանակութիւնը իրական ըլլալով երկու խորանարդ արմատոց արժէից այն ամեն զուգադրութիւնները միայն ընդունելու է որոց արտադրեալները երբ երեւակայական չեն:

Երբ $ժ^2 + բ^3$ քանակութիւնը դրական է իւրաքանչիւր արմատական իրական արժէք մի ունի, դիցուք առաջին արմատականին իրական արժէքը Ա և երկրորդինը Բ. առաջին արմատականին երեք արժէքներն պիտի ըլլան $Ա$, $Աա$, $Աա^2$, և երկրորդինը $Բ$, $Բա$, $Բա^2$. արդ առաջին երեք քանակութիւնները վերջի երեք քանակութիւններով բազմապատկելով և նկատելով որ $ա$ և $ա^2$ երեւակայական քանակութիւններ են, $ա^3 = 1$, և $ա^4$ երեւակայական, որովհետեւ $ա^3 = 1$ ըլլալով $ա^4 = ա$ կ'ըլլայ հետեւաբար մանական արտադրեալներուն մէջ միայն երեք իրական արտադրեալներ կան, որք են $Ա \times Բ$, $Աա \times Բա^2$, $Աա^2 \times Բա$. ուստի կը հետեւի թէ քին արժէք կարեն միայն ըլլալ

$$Ա + Բ, \quad Աա + Բա^2, \quad Աա^2 + Բա$$

առաջին արմատը իրական է, իսկ միւս երկուքը երեւակայական:

Առնենք ուրիշ օրինակ մի և լուծենք

$$ք^3 - 6ք - 9 = 0 \quad [1],$$

այս հաւասարութեան մէջ

$$բ = -2, \quad ժ = -\frac{9}{2}.$$

ուստի

$$\sqrt{ժ^2 + բ^3} = \frac{7}{2},$$

հետեւաբար

$$Ա = \sqrt[3]{-ժ + \sqrt{ժ^2 + բ^3}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = 2$$

$$Բ = \sqrt[3]{-ժ - \sqrt{ժ^2 + բ^3}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2}} = 1$$

[1]ին երեք արմատներն են $ք = 3$

$$ք = -1 + \sqrt{-3} + \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3}) = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{-3})$$

$$ք = -1 - \sqrt{-3} + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}) = \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{-3})$$

ՎԱՐԺՈՒԹԻՒՆՔ

Լուծելու է հետեւեալ հաւասարութիւնները.

1. $ք^3 - 9ք^2 + 26ք - 24 = 0$.

Պատ. $ք = 2, 3, 4$:

2. $ք^3 - 14ք^2 + 21ք - 10 = 0$.

Պատ. $ք = -1, 2, 7$:

3. $3ք^3 - 14ք^2 + 21ք - 10 = 0$.

Պատ. $ք = 1, \frac{5}{3}, 2$:

4. $ք^3 - 49ք - 120 = 0$.

Պատ. $ք = -3, -5, 8$:

5. $ք^3 - 13ք^2 + 38ք + 16 = 0 .$

Պատ. $ք = 8 ,\ \frac{5 + \sqrt{33}}{2} ,\ \frac{5 - \sqrt{33}}{2}$:

6. $ք^3 - 6ք^2 + 19ք - 44 = 0 .$

Պատ. $ք = 4 ,\ 1 + \sqrt{10} ,\ 1 - \sqrt{10}$:

7. $ք^3 + \frac{82}{15}ք^2 - \frac{173}{5}ք - \frac{126}{5} = 0 .$

Պատ. $\frac{2}{3} ,\ \frac{21}{5} ,\ -9$:

8. $ք^3 + \frac{8}{5}ք^2 + \frac{9}{100}ք - \frac{9}{100} = 0 .$

Պատ. $\frac{1}{5} ,\ -\frac{3}{10} ,\ -\frac{3}{2}$:

9. $ք^3 - 12ք^2 + 45ք - 53 = 0 .$

Պատ. 5,8793 :

10. $ք^3 - 13ք^2 + 49ք - 45 = 0 .$

Պատ. $ք = 5 ,\ 4 + \sqrt{7} ,\ 4 - \sqrt{7}$:

ԴԱՍ ԺԸ.

ՅԱՌԱՋԱՏՈՒԹԻՒՆՔ ԵՒ ՆՇԱՆԱԿՔ

Տարբերական յառաջատութիւնք

215. ՍԱՀՄԱՆ. — *Թուաբանական կամ տարբերական յառաջատութիւն կ՚ըսուին կարգ մը թիւեր, որոց իւրաքանչիւրը իւր նախընթաց թիւէն հաւասար քանակութեամբ կը տարբերի. այս տարբերութիւնը յառաջատութեան տարբերութիւն կը կոչուի :*

Երբ յառաջատութեան մը եզերք երթալով աճին, յառաջատութիւնը աճեցող է կ՚ըսուի, նուազող է կ՚ըսուի երբ եզերք երթալով նուազին :

Յառաջատութեան մը եզերց մին միւսոյն ետեւը կարգով գրուած է և առաջին եզրը ÷ նշանով նախադասուած է. ինչպէս հետեւեալ

÷ 3 . 7 . 11 . 15 . 19 : 23 . 27 . . . ,

÷ 34 . 28 . 22 . 16 . 10 . 4 . . . ,

երկու տարբերական յառաջատութիւնները, մին աճեցող և միւսը նուազող. տարբերութիւնք են 4 և 6 :

Երբ յառաջատութիւն մը աճեցող է, իւր տարբերութիւնը դրական է, երբ նուազող է, տարբերութիւնը բացասական է :

Տարբերական յառաջատութեան մը եզրերը հասարակօրէն ա . բ . գ . . . . . ժ . ի . լ . գրերով պիտի նշանակեմք, տարբերութիւնը թէ դրական ըլլայ և թէ բացասական տ ով և թիւ եզերացը ն ով, պիտի ունենամք այսպէս

÷ ա . բ . գ . . . ժ . ի . լ . . . . [1] :

216. ՆՐԴ ԿԱՐԳԻՆ ԵԶԵՐ ԱՐԺԷՔ. — *Ըստ տրուած սահմանի, աճեցող յառաջատութեան մի մէջ, մէկ եզրը նախընթաց եզեր վրայ տարբերութիւնը յաւելմամբ յառաջ կուգայ. երկրորդ եզրը ուրեմն հաւասար է ա + տ. երրորդը ա + 2տ. չորրորդը ա + 3տ, . . . , նրդը ա + (ն — 1) տ. ուրեմն որեւէ կարգի եզր մը կազմելու համար, պէտք է առաջին եզեր վրայ, նկատեալ եզրը նախադասող եզերաց թուով տարբերութիւնը յաւելուլ. ինչպէս հետեւեալ տարազը կը ցուցնէ.*

$$լ = ա + (ն - 1)\,տ \qquad [2].$$

այս տարազը նոյնպէս նուազող յառաջատութեան մի

համար եւս է․ բաւական է որ տարբերութիւնը բացասական ըլլայ (**215**)։

217. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ․ — Վերը տրուած [2] տարազը, ա․ լ․ տ․ ր․ չորս թուոց մէջ առնչութիւն մը ըլլալով, առնցմէ եթէ երեքը ծանուցեալ ըլլան միւս չորրորդը այն տարազով կրնամք սահմանել․ բաւական է որ հաւասարութիւնը այս անծանօթ քանակութեան նկատմամբ լուծուի․ ուրեմն չորս առաջարկութեանց լուծում կուտայ և այս լուծմունք են

$$
\left.\begin{array}{l}
լ = ա + (ր - 1)տ \cdot \quad ա = լ - (ր - 1)տ \\
տ = \dfrac{լ - ա}{ր - 1} \quad , \quad ր = 1 + \dfrac{լ - ա}{տ}
\end{array}\right\} \quad [3]
$$

218. ԹՈՒԱԲԱՆԱԿԱՆ ՄԻՋԻՆ ԹՈՒՈՑ ՆԵՐՄՈՒԾՈՒՄ․ — Երկու առաջարկեալ թուոց մէջ, ա ի և բ ի մէջ թուաբանական ս թուով միջին թիւեր ներմուծելու է, այսինքն յառաջատութիւն մի ունիմք որոյ ծայրերն են ա և բ․ և որոյ միջին եզերց թիւը ս ըլլայ։

Այս առաջարկը լուծելու համար բաւական է յառաջատութեան տարբերութիւնը գտնել, քանզի այս տարբերութիւնը առաջին եզեր վրայ յաւելմամբ երկրորդ եզրը կ'ստանամք, երկրորդին վրայ յաւելմամբ երրորդ եզրը, և այսպէս շարունակ․ արդ փնտռուած յառաջատութեան մէջ գիտեմք առաջին եզրը որ է ա, վերջինը բ և թիւ եզերացը ս + 2․ ուրեմն [3] տարազին միջոցաւ կ'ստանամք

$$
տ = \frac{բ - ա}{ս + 1} \quad [4]
$$

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Ա․ — Հետեւեալ երկու թուոց մէջ, այսինքն 7 ին և 46 ին մէջ 12 թուաբանական միջին թիւեր ներմուծել.

$$
\frac{46 - 7}{13} = 3 \cdot
$$

և փնտռուած յառաջատութիւնն է

÷ 7․ 10․ 13․ 16․ 19․ 22․ 25․ 28․ 31․ 34․ 37․ 40․ 43․ 46․։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Բ. — Ի՞նչ են այն թէութիւնք որպէս զի ա․ բ․ գ թիւերը յառաջատութեան մը մասունք նկատուին ։

Դիցուք այս թիւերը իրենց մեծութեան կարգով շարուած են, անծանօթ յառաջատութեան մէջ միջին եզերք պիտի գտուին. զորս կրնամք նկատել իբրեւ թուաբանական միջին թիւեր, ա և բ ի, և բ և գ ի մէջ. հետեւաբար եթէ այս միջին եզերց թիւերը (Մ — 1) և (Ն — 1) ով նշանակեմք, տարբերութիւնը հաւասար ըլլալու է (**218**)։

$$
\frac{բ - ա}{Մ} \quad և \quad \frac{գ - բ}{Ն} .
$$

ուրեմն պէտք է ունենալ

$$
\frac{բ - ա}{Մ} = \frac{գ - բ}{Ն} \quad [5].
$$

փնտռուած թէութիւնք սոքա են . երկու ամբողջ թիւեր գտնելու եմք որ համեմատական ըլլան (բ — ա) և (գ — բ) տարբերութեանց ։ Այս թէութիւնք բաւական են, երբ ա, բ, գ ամբողջ թիւեր են, քանզի եթէ (բ — ա) և (գ — բ) կոտորակաւոր ըլլային, պէտք էր զայնս միեւնոյն յայտարարի վերածել և Մ և Ն հաւասար առնել համարիչաց. երկու արդիւնքները որեւէ ամբողջ թուով մը երբ բազմապատկեմք, Մ և Ն տարբեր արժէքներ կ'ունենան, անանկ որ այս պարագայիս մէջ խնդիրը անսահման լուծում ունի ։

219. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Ա․ — *Եթէ [1] յառաջատութեան յաջորդական եզերաց մէջ երկուքական Մ թուով թուաբանական միջին թիւեր մտցնեմք, նոր յառաջատութիւն մի կ'ունենամք, որոյ տարբերութիւնը առջի տարբերութեան (Մ + 1) ով բաժանման քանորդն է ։*

Արդարեւ այլեւայլ մասնական յառաջատութեանց տարբերութիւնք են (**218**)

$$
\frac{բ - ա}{Մ + 1}, \quad \frac{գ - բ}{Մ + 1}, \quad \frac{դ - գ}{Մ + 1}, \ldots
$$

ուրեմն ամենքը $\frac{տ}{Մ + 1}$ ի հաւասար են (**215**) . Ինչպէս իւրաքանչիւրին յետին եզրը, հետեւեալին առաջին եզրն է . ուրեմն զանոնք իբրեւ մի յառաջատութիւն կարեմք նկատել ։

220. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Բ․ — *Որեւիցէ թուաբանական յառաջա-*

տուեալ մէջ երկու ծայրերէն հաւասար հեռաւորութեամբ զետեղուող երկու եզրաց գումարները հաւասար են երկու ծայրերուն գումարին :

Դիցուք հետևեալ յառաջատութիւնը

$$\div ա \cdot բ \cdot գ \cdot դ \cdots ժ \cdot ի \cdot լ \cdots$$

երկրորդ եզրը $բ$, հաւասար է $(ա + տ)$ի . և վերջընթեր $ի$՝ հաւասար է $(լ - տ)$ի . ուրեմն իրենց գումարն է

$$բ + ի = ա + լ :$$

Հանրական կերպով ցուցնենք . եթէ $կ$ ցուցնէ իրմէ յառաջ ո թուով եզրեր ունեցող եզրը , և $ֆ$ ևս իրմէ վերջը ո եզրեր ունեցող եզրը . ուստի իրենց գումարն է

$$կ + ֆ = ա + լ :$$

221. ՅԱՄԱՋԱՏՈՒԹԵԱՆ ՄԸ ԵԶԵՐՑ ԳՈՒՄԱՐԸ . — Առնենք յառաջատութիւն մի , որոյ առաջին եզրը $ա$, վերջինը $լ$ և թիւ եզերացը $ն$ ըլլայ . այս եզերաց գումարը $գ$ ով նշանակելով ունիմք

$$գ = ա + բ + գ + դ \cdots + ժ + ի + լ .$$

յառաջատութեան եզերաց գումարը չփոխուիր , եթէ հակադարձ կարգով գրենք . ինչպէս

$$գ = լ + ի + ժ + \cdots + դ + գ + բ + ա .$$

երկու յառաջատութեանց եզերաց գումարը պիտի ըլլայ

$$2գ = (ա + լ) + (բ + ի) + (գ + ժ) \cdots + (ժ + գ) + (ի + բ) + (լ + ա) :$$

Արդ փակագծին մէջ առնուած գումարները $(ա + լ)$ի հաւասար են (**220**) , և իրենց թիւը $ն$ ըլլալով ունիմք

$$2գ = (ա + լ) \times ն . \quad կամ \quad գ = \left(\frac{ա + լ}{2}\right) \times ն \quad [6] .$$

ուստի կը հետևի

Տարբերական յառաջատութեան մը եզերաց գումարը հաւասար է ծայրերուն գումարին կիսոյն եզերաց թուով բազմապատկութեան արտադրելոյն :

Օրինակ . Գտնելու է թուաբանական յառաջատութեան մը $10^{րդ}$ եզերաց գումարը . յառաջատութիւնը ըլլայ

$$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots 21 ,$$

սորա գումարն է

$$\left(\frac{3 + 21}{2}\right) 10 = 120 :$$

222. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ . — Եթէ միայն առաջին եզրը $ա$, տարբերութիւնը $տ$ և եզերաց թիւը ծանուցեալ ըլլային , նախադաս տարազը գործածելու համար , հարկ էր նախ վերջին եզրը $լ$ հաշուել [2] տարազին միջոցաւ , և իւր արժէքը [6] տարազին մէջ տեղափոխել . այս կերպով կ՚ընդունիմք

$$գ = \frac{[2ա + (ն - 1) տ] ն}{2} \quad [7] :$$

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Գ. — Գտնել $ն$ թուով նախնական ամբողջ թուոց գումարը .

$$1 + 2 + 3 \cdots + ն .$$

այս թիւերը տարբերական յառաջատութիւն մը կը կազմեն , որոյ տարբերութիւնը 1 է , եզերաց գումարը պիտի ըլլայ

$$գ = \frac{(1 + ն) ն}{2} , \quad կամ \quad գ = \frac{ն (ն + 1)}{2} \quad [8] .$$

Ուրեմն $ն$ թուով նախնական ամբողջ թուոց գումարը գտնելու համար վերջի եզրը կը բազմապատկեմք զինքը ամբողջապէս յետադասող եզրով , և ապա այս արտադրելոյն կէսը կ՚առնեմք :

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Դ. — Գտնել $ն$ թուով նախնական անզոյգ թուոց գումարը .

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 \ldots$$

այս թիւերը այնպէս յառաջատուութիւն մը կը կազմեն որոց տարբերու-
թիւնը 2 է, (7) տարազին միջոցաւ ունիմք

$$\text{գ} = \frac{[2+2(\text{ն}-1)]\,\text{ն}}{2}, \text{ կամ } \text{գ} = \text{ն}^2 \quad [9].$$

այսպէս ն թուով նախնական անզոյգ թուոց արտադրեալը հաւասար է ն ին քառակուսւոյն ։

223. Նախընթաց [2] և [6] տարազներուն միջոցաւ ա . վ . տ . ն . գ . քանակութեանց մէջ առնչութիւններ կը գտնեմք, այսինքն այս հինգ քանակութեանց որ և իցէ երեքը ծանուցեալ ըլլալով, միւս երկուքը կըրնամք գտնել.

1°	տրուած	ըլլալով	ա . վ . տ .	գտնել	ն . գ .
2°	»	»	ա . վ . ն .	»	տ . գ .
3°	»	»	ա . վ . գ .	»	տ . ն .
4°	»	»	ա . տ . ն .	»	վ . գ .
5°	»	»	ա . տ . գ .	»	վ . ն .
6°	»	»	ա . ն . գ .	»	վ . տ .
7°	»	»	վ . տ . ն .	»	ա . գ .
8°	»	»	վ . տ . գ .	»	ա . ն .
9°	»	»	վ . ն . գ .	»	ա . տ .
10°	»	»	տ . ն . գ .	»	ա . վ .

Այս առաջարկութեանց մէջ հինգերորդը և ութերորդը երկրորդ աստիճանի են, միւս ութը հատը առաջին աստիճանի ։

Քանորդական յառաջատութիւն

224. ՍԱՀՄԱՆ . — Երկրաչափական կամ քանորդական յառաջատութիւն կ'ըսուի կարգ մը թուոց, այնպէս որ իւրաքանչիւր եզեր իւր նախընթաց եզրով ունեցած կշիռը անփոփոխ է, այս անփոփոխ կշիռը յառաջատութեան ընդհանուր համեմատականը կ'ըսուի ։

ինչպէս

$$\div 1 : 5 : 25 : 125 : 625 : \dots \quad [1]$$

$$\div 1250 : 250 : 50 : 10 : 2 \quad [2]$$

թիւերը երկրաչափական յառաջատութիւն մը կը կազմեն, որոյ ընդհանուր համեմատականը 5 է, քանզի իւրաքանչիւր եզր հաւասար է նախադաս եզեր այս ընդհանուր համեմատականով բազմապատկութեանց արտադրեալոյն . [1] օրինակին մէջ ընդհանուր համեմատականը միութենէ մեծ ըլլալով, եզերք երթալով կ'աճին, այս տեսակ յառաջատութիւնք աճեցող է կ'ըսուին, հակառակ պարագայի մէջ, ինչպէս [2] յառաջատութիւնը, որոյ ընդհանուր համեմատականը $\frac{1}{5}$ ըլլալով յառաջատութիւնը նուազող է կ'ըսուի ։ Հասարակօրէն քանորդական յառաջատութեան մը եզերք, ա . բ . գ . դ . . . . ժ . ի . լով պիտի նշանակեմք ընդհանուր համեմատականը հ ով, և լրդ եզր թիւը ն ով ։

Այս կերպով պիտի ունենամք

$$\div \text{ա} : \text{բ} : \text{գ} : \text{դ} : \dots : \text{ժ} : \text{ի} : \text{լ} : \dots \quad [3]։$$

225. ԹՐԴ ԵԶԵՐ ԱՐԺԷՔԸ . — Ըստ վերոյիշեալ սահմանի, քանորդական յառաջատութեան մի եզեր յաջորդերը կազմելու համար, նախընթաց եզեր ընդհանուր համեմատականով բազմապատկութեան արտադրեալը կ'առնեմք, եթէ առաջին եզրը ա ըլլայ, երկրորդ եզրը հաւասար կ'ըլլայ ահ ի, երրորդը ահ^2 ի, չորրորդը ահ^3 ի, և նրդը $\text{ահ}^{\text{ն}-1}$ ի . ուրեմն որեւիցէ կարգի եզրը հաւասար է առաջին եզեր ընդհանուր համեմատականով բազմապատկութեան արտադրելոյն, և որոյ ցուցիչը նախընթաց եզերաց թուոյն հաւասար է, ինչպէս հետեւեալ տարազին մէջ կը տեսնուի .

$$\text{լ} = \text{ահ}^{\text{ն}-1} \quad [4]։$$

226. ՀԵՏԵՒՈՒԹԻՒՆ . — Նախընթաց [4] տարազին մէջ

ա . լ . ք . թ . չորս թուոց մէջ առնչութիւն կայ, երբ առնցմէ երեքը ծանուցեալ ըլլան, չորրորդը այս տարազին միջոցաւ կ'ստացուի

$$\text{լ} = \text{ա}\text{ք}^{\text{թ}-1} \qquad \text{ա} = \frac{\text{լ}}{\text{ք}^{\text{թ}-1}}$$

$$\text{ք} = \sqrt[\text{թ}-1]{\frac{\text{լ}}{\text{ա}}} \qquad \text{թ} = 1 + \frac{\text{Նշ. լ} - \text{Նշ. ա}}{\text{Նշ. ք}}$$

վերջին տարազը նշանակները ուսանելէ յետոյ կը գործածենք :

227. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Ա. — *Աճեցող յառաջատուութեան մի եզերք շարունակ աւելնալով, իւր եզրերը որեւիցէ տրուած թիւէ մի մեծ կարենան ըլլալ :*

Դիցուք թէ ժ . ի . լ . [3] յառաջատուութեան երեք եզրերն են, ըստ սահմանի ունիմք

$$\text{ի} = \text{ժ}\text{ք} . \quad \text{լ} = \text{ի}\text{ք} ,$$

և բարձմամբ

$$\text{լ} - \text{ի} = (\text{ի} - \text{ժ})\,\text{ք} :$$

Ընդհանուր համեմատականը ք, միութենէ մեծ ըլլալով, (լ — ի) տարբերութիւնը (ի — ժ) տարբերութենէ մեծ է . ուրեմն մի եզեր նախադաս եզրէն ունեցած տարբերութիւնը երթալով կ'աճի , եթէ այս տարբերութիւնը անփոփոխ ըլլար , ինչպէս տարբերական յառաջատուութեան մէջ տեսանք , ա առաջին եզեր վրայ կրնայինք աւելցնել այնչափ անգամ տարբերութիւն , որչափ որ գումարը մեծցնել ուզէինք . նմանապէս քանորդական յառաջատուութեան մը համար , եթէ այս տարբերութիւնը ինչպէս տեսանք երթալով աճի :

228. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Բ. — *Նուազող յառաջատուութեան եզրերը շարունակ պզտիկնալով, եզերք անհունօրէն կը նուազին եւ ամեն թիւէ փոքր կարենան ըլլալ :*

Ինչպէս եթէ [3] յառաջատուութեան մէջ ընդհանուր

համեմատականը միութենէ փոքր ըլլար , $\frac{1}{\text{ա}}, \frac{1}{\text{բ}}, \frac{1}{\text{գ}}, \ldots \frac{1}{\text{ժ}}, \frac{1}{\text{ի}}, \frac{1}{\text{լ}}, \ldots$ եզերք ուրիշ քանորդական յառաջատուութիւն մը կը կազմէին , որոյ $\frac{1}{\text{ք}}$ համեմատականը միութենէ մեծ կ'ըլլար . քանզի

$$\text{բ} = \text{ա} \times \text{ք} . \quad \text{գ} = \text{բ} \times \text{ք} . \quad \text{դ} = \text{գ} \times \text{ք} , \ldots$$

հաւասարութիւններէն կը հետեւցնենք

$$\frac{1}{\text{բ}} = \frac{1}{\text{ա}} \times \frac{1}{\text{ք}} . \quad \frac{1}{\text{գ}} = \frac{1}{\text{բ}} \times \frac{1}{\text{ք}} . \quad \frac{1}{\text{դ}} = \frac{1}{\text{գ}} \times \frac{1}{\text{ք}} \ldots$$

Նախադաս տեսութենէն կը հետեւցնեմք թէ $\frac{1}{\text{ժ}}, \frac{1}{\text{ի}}, \frac{1}{\text{լ}}$ կոտորակները ուզածնուս չափ կրնամք մեծցնել , հետեւաբար իրենց ժ . ի . լ . յայտարարները նուազեցնել:

229. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Գ. — *Երկրաչափական յառաջատուութեան երկու ծայրերէն հաւասար հեռաւորութեամբ գտնուած եզերց արտադրեալք միշտ հաւասար են ծայրերուն արտադրելոյն :*

Ունենամք հետեւեալ

$$\div\div\ \text{ա} : \text{բ} : \text{գ} : \text{դ} \ldots . \text{թ} : \text{ժ} : \text{ի} : \text{լ}$$

յառաջատուութիւնը , որոյ գ և ժ եզրերը ի նկատի առնեմք , որք ծայրերէն հաւասար հեռաւորութեամբ կը գտնուին :

Ունիմք $\qquad \text{գ} = \text{ա}\text{ք}^2 \quad [1] ,$

ունիմք նաեւ $\text{լ} = \text{ժ}\text{ք}^2$ հետեւաբար $\text{ժ} = \frac{\text{լ}}{\text{ք}^2} \quad [2] .$

[1] և [2] հաւասարութիւնները անդամ առ անդամ բազմապատկելով կ'ստանամք

$$գժ = \frac{աք^2լ}{ք^2} \text{ կամ } ալ.$$

ուրեմն դիցուք դ և բ այն երկու եզրերը որ դ էն յառաջ մ թուով եզրեր գտնուին և բ էն վերջ մ թուով եզրեր, հետևաբար

$$դ = աք^մ \quad [1]$$

և

$$լ = բք^մ \text{ ուստի } բ = \frac{լ}{ք^մ} \quad [2].$$

[1]ը [2]ով բազմապատկելով կ'ստանամք

$$դբ = \frac{աք^մ լ}{ք^մ} \text{ կամ } ալ։$$

230. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ. — *Երբ յառաջատուութեան եզերաց թիւը անզոյգ է, մէջտեղը գտնուող եզրը ծայրերուն արտադրելոյն քառակուսի արմատին հաւասար է։*

231. ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՄԻՋԻՆ ԹՈՒՈՑ ՄՈՒՏՔ. — Երկու ա և բ տրուած թուոց մէջ մ թուով միջին թիւեր մտցնել, այսինքն քանորդական յառաջատուութիւն մը կազմել, այնպէս որ ա և բ ծայրի եզերք ըլլան և մ ևս միջին եզերց թիւը։

Այս հարցումը լուծելու համար յառաջատուութեան ընդհանուր համեմատականը նախ հաշուելու եմք, քանզի առաջին եզրը այս համեմատականով բազմապատկելէ զկնի երկրորդ եզրը կ'ընդունիմք, երկրորդ եզրը նոյն համեմատականով բազմապատկելով երրորդ եզրը կ'ընդունիմք, և այսպէս շարունակ. ուստի այս յառաջատուութեան մէջ առաջին և վերջին եզրերը նկատեմք որք են ա և բ, և եզերաց թիւը որ է $(մ + 2)$. ուրեմն [4] տարազին միջոցաւ ունիմք

$$ք = \sqrt[մ+1]{\frac{բ}{ա}}։$$

ՕՐԻՆԱԿ. 5 միջին թիւեր մտցնելու է 5ին և 3125ին մէջ։
Ընդհանուր համեմատականն է

$$ք = \sqrt[3+1]{\frac{3125}{5}} = 5$$

փնտռուած յառաջատուութիւնն է ուրեմն

$$\div 5 : 25 : 125 : 625 : 3125 ։$$

232. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Դ. — *Եթէ քանորդական յառաջատուութեան մը երկու առ երկու յաջորդական եզերաց մէջ մ թուով միջին թիւեր մտցնեմք, նոր յառաջատուութիւն մը կը կազմեմք, որոյ ընդհանուր համեմատականը առաջարկեալ յառաջատուութեան ընդհանուր համեմատականին $(մ + 1)$րդ արմատն է։*

Մասնական այլևայլ յառաջատուութեանց ընդհանուր համեմատականն է

$$\sqrt[մ+1]{\frac{բ}{ա}},\ \sqrt[մ+1]{\frac{գ}{բ}},\ \sqrt[մ+1]{\frac{դ}{գ}} \ldots,$$

իւրաքանչիւրը $\sqrt{ք}$ ի հաւասար է, ինչպէս կը տեսնուի, իւրաքանչիւրին յետին եզրը յետագային առաջին եզրն է, ուստի իբրև մի յառաջատուութիւն կրնամք նկատել։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Ա. — Ի՞նչ են այն թէութիւնք, որպէս զի ա. բ. գ. թիւերը յառաջատուութեան մի մասունք համարուին։

Եթէ նկատելու ըլլամք ա իբրև առաջին եզր, բ եզրը $(մ+1)$րդ, և գ եզրը $(ն+1)$րդ, կ'ունենամք (223)

$$բ = աք^մ \quad գ = աք^ն.$$

ք կը ցուցնէ անծանօթ ընդհանուր համեմատականը, եթէ առաջի հաւասարութիւնը նրդ. կարողութեան հանեմք և երկրորդը մրդ. պիտի ունենամք

$$բ^ն = ա^ն ք^{մն}. \quad գ^մ = ա^մ ք^{մն}.$$

ուստի ք տարադրելով

$$\frac{բ^ն}{ա^ն} = \frac{գ^մ}{ա^մ}. \text{ կամ } \left(\frac{բ}{ա}\right)^ն = \left(\frac{գ}{ա}\right)^մ։$$

փնտռուած թէւթիւ՞ք ասքա են. եթէ $\frac{\text{բ}}{\text{ա}}$ և $\frac{\text{գ}}{\text{ա}}$ կոտորակները պարզուէին $\frac{\text{բ}}{\text{ա}}$ և $\frac{\text{գ}}{\text{ա}}$ իրենց ամենապարզ ձեւոյն վերածելով, և անպարզելի կոտորակները $\frac{\text{կ}}{\text{ե}}$ և $\frac{\text{է}}{\text{լ}}$ համարժէք կոտորակներով ներկայացնելով կունենայինք

$$\left(\frac{\text{կ}}{\text{ե}}\right)^{\text{ն}} = \left(\frac{\text{է}}{\text{լ}}\right)^{\text{մ}}. \quad \text{կամ} \quad \frac{\text{կ}^{\text{ն}}}{\text{ե}^{\text{ն}}} = \frac{\text{է}^{\text{մ}}}{\text{լ}^{\text{մ}}}.$$

այս կոտորակները նաւ անպարզելի ըլլալով, իրարու հաւասար ըլլալու համար պէտք է ունենալ

$$\text{կ}^{\text{ն}} = \text{է}^{\text{մ}}. \quad \text{ե}^{\text{ն}} = \text{լ}^{\text{մ}}:$$

Ինչպէս կը տեսնեմք կ և ե, նոյնպէս է և լ միեւնոյն թուով նախնական արտադրիչներէ կազմուած ըլլալու են. կ և է, ե և լ քանակութեանց ցուցիչք $\frac{\text{մ}}{\text{ն}}$ անփոփոխ կշռով են. եթէ այս թէւթիւնք լրացեալ են $\frac{\text{մ}}{\text{ն}}$ կշիռը սահմանուած է, բայց մ և ն անսահման են, այնպէս որ ա. բ. գ. անսահման թուով յառաջատութեանց եզրերը կրնան համարուիլ:

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ Բ. — Քանորդական յառաջատութեան եզերք ըլլան 1 և 10. նորա մասերը կազմող չափական եզրերը ի՞նչ կարեն ըլլալ:

Գիցուք թէ փնտռուած եզերց մին է

$$\left(\frac{\text{կ}}{\text{հ}}\right)^{\text{մ}} = (10)^{\text{ն}} \quad \text{կամ} \quad \frac{\text{կ}^{\text{մ}}}{\text{հ}^{\text{մ}}} = 10^{\text{ն}}:$$

$\frac{\text{կ}}{\text{հ}}$ անպարզելի կոտորակ մ'է. մ և ն նաւ ամբողջ թիւեր են, ուստի երկրորդ անդամը ամբողջ թիւ ըլլալով առաջինը նաւ ամբողջ թիւ մը ըլլալու է, $\frac{\text{կ}^{\text{մ}}}{\text{հ}^{\text{մ}}}$ անպարզելի նկատուած ատեն, պէտք է ունենալ $\text{հ} = 1$. հետեւաբար $\text{կ}^{\text{մ}} = 10^{\text{ն}}$. այս վերջին հաւասարութիւնը ունենալու համար, պէտք չէ որ կ' 10ին 2 և 5 նախնական արտադրիչներէն զատ մին իր մէջ պարունակէ, այսինքն ունենամք $\text{կ} = 2^{\text{ա}} \times 5^{\text{բ}}$. այն ատեն պէտք է որ $2^{\text{ամ}} \times 5^{\text{բմ}} = 2^{\text{ն}} \times 5^{\text{ն}}$. ուստի կը հետեւի $\text{ամ} = \text{բմ} = \text{ն}$, կամ $\text{ա} = \text{բ} = \frac{\text{ն}}{\text{մ}}$. այսպէս կին մէջ 2ին և 5ին ցուցիչք հաւասար ըլլալու են, կամ ուրիշ կերպ գրուցելով կը տասնին մէկ կարողութիւնը ըլլալու

է. Ուրեմն տասնին կարողութիւնք են միայն այն չափական թիւք որոց եզերք են 1. 10 եւայլն:

233. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Ե. — *Որեւիցէ քանորդական յառաջատութեան մը մէջ, ծայրերէն հաւասար հեռաւորութեամբ գտնուած երկու եզերաց արտադրեալը անփոփոխ եւ հաւասար է ծայրերուն արտադրելոյն:*

Ունենամք

$$\div\ \text{ա} : \text{բ} : \text{գ} : \text{դ} : \ldots\ldots \text{ժ} : \text{կ} : \text{լ}$$

սահմանեալ յառաջատութիւնը, որոյ երկրորդ եզր բ հաւասար է ահի. վերջընթեր եզրը կ հաւասար է $\frac{\text{լ}}{\text{հ}}$ի. ուրեմն նոյն արտադրեալն է $\text{բկ} = \text{ալ}$. կամ հանրական եղանակաւ երկրորդ եզրը գ հաւասար ահի և +րդ եզրը որ լումէ առաջ կ հատ ունի, հաւասար է $\frac{\text{լ}}{\text{հ}}$ի. ուրեմն նոյն արտադրեալը $\text{գկ} = \text{ալ}$:

234. ՅԱՌԱՋԱՏՈՒԹԵԱՆ ՄԻ ԵԶԵՐԱՑ ԱՐՏԱԴՐԵԱԼԸ. — Յառաջատութեան մը եզերաց արտադրեալը Ա ով նշանակենք, որ ա ով կ'սկսի և լ ով կը վերջանայ և որու եզերաց թիւը Ն է:

Ինչպէս.

$$\text{Ա} = \text{ա} : \text{բ} : \text{գ} : \text{դ} \ldots\ldots \text{ժ} : \text{կ} : \text{լ} \quad [1].$$

եթէ արտադրիչներուն կարգը փոխեմք, արտադրեալը անփոփոխ կը մնայ. այսպէս.

$$\text{Ա} = \text{լ} : \text{կ} : \text{ժ} : \ldots\ldots \text{դ} : \text{գ} : \text{բ} : \text{ա}.$$

եթէ այս երկու հաւասար արտադրեալները մին միւսով բազմապատկեմք, և միեւնոյն կարգի արտադրիչները երկուքական ժողովեմք՝ կ'ունենամք.

$$\text{Ա}^2 = (\text{ալ})(\text{բկ})(\text{գժ})\ldots\ldots(\text{ժգ})(\text{կբ})(\text{լա}) \quad [2].$$

փակագծին մէջ առնուած բոլոր արտադրեալք հաւասար են ալի (**233**). այս արտադրեալներու թիւը յառաջատութեան եզերաց թիւն է.

$$\text{Ա}^2 = (\text{ալ})^{\text{ն}}.$$

ուստի կը քաղեմք

$$\text{Ա} = \sqrt{(\text{ալ})^{\text{ն}}} \quad [3]:$$

235. ՔԱՆՈՐԴԱԿԱՆ ՅԱՌԱՋԱՏՈՒԹԵԱՆ ՄԻ ԵԶԵՐԱՑ ԳՈՒՄԱՐԸ. — *Յառաջատութեան մի եզերաց գումարը գ ով ներկայացնելով կ'ունենամք*

$$\text{գ} = \text{ա} + \text{բ} + \text{գ} + \text{դ} + \ldots + \text{ժ} + \text{ի} + \text{լ} \quad [1].$$

եթէ այս յառաջատութեան երկու անդամները հ ով բազմապատկեմք, կ'ունենամք

$$\text{գհ} = \text{ահ} + \text{բհ} + \text{գհ} + \text{դհ} + \ldots + \text{ժհ} + \text{իհ} + \text{լհ} \quad [2].$$

բայց դրութեամբ

$$\text{Ահ} = \text{բ} \cdot \text{բհ} = \text{գ} \cdot \text{գհ} = \text{դ} \cdot \text{ժհ} = \text{ի} \cdot \text{իհ} = \text{լ}.$$

ուրեմն նախընթաց հաւասարութիւնը կը դրուի ·

$$\text{գհ} = \text{բ} + \text{գ} + \text{դ} + \ldots + \text{ի} + \text{լ} + \text{լհ}.$$

ձեւով եթէ $\text{հ} > 1$, *գ ը գհ էն կը բառնամք և նման եզերաց ջնջումը կատարելով կ'ունենամք*

$$\text{գհ} - \text{գ} = \text{լհ} - \text{ա}. \text{ կամ } \text{գ}(\text{հ} - 1) = \text{լհ} - \text{ա}.$$

ուստի

$$\text{գ} = \frac{\text{լհ} - \text{ա}}{\text{հ} - 1} \quad [3]:$$

ուստի կը հետեւի

236. ԿԱՆՈՆ. — *Աճեցող քանորդական յառաջատութեան եզերաց գումարը ընդունելու համար, պէտք է բազմապատկել վերջին եզրը ընդհանուր համեմատականով, այս արտադրեալէն առաջին եզրը բառնալ, և տարբերութիւնը նոյն ընդհանուր համեմատականէն 1 պակաս թուով բաժնել:*

Եթէ $\text{հ} < 1$ *սեպենք, գ ը, գհ է չկարեմք բառնալ, այլ գհ պէտք է գ էն բառնալ. ինչպէս*

$$\text{գ} - \text{գհ} = \text{ա} - \text{լհ}. \text{ կամ } \text{գ}(1 - \text{հ}) = \text{ա} - \text{լհ}.$$

վասնորոյ

$$\text{գ} = \frac{\text{ա} - \text{լհ}}{1 - \text{հ}} \quad [4].$$

ուստի կը հետեւի

237. ԿԱՆՈՆ. — *Նուազող յառաջատութեան եզերաց գումարը ընդունելու համար, յառաջատութեան առաջին եզրէն պէտք է բառնալ վերջին եզեր ընդհանուր համեմատականով բազմապատկութեան արտադրեալը, և այս տարբերութիւնը միութենէն պակաս ընդհանուր համեմատականով բաժնել:*

238. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ Ա. — *Եթէ միայն առաջին եզրը, ընդհանուր համեմատականը և եզերաց թիւը ծանուցեալ ըլլային, նախընթաց տարազները գործածելու համար պէտք պիտի ըլլար նախ վերջին եզրը հաշուել* **(225)** *ի* [4] *տարազին օժանդակութեամբ, և այս արժէքը* **(235)** *կամ* **(236)** *տարազին մէջ փոխանակել այսպէս.*

$$[5] \quad \text{գ} = \frac{\text{ահ}^{\text{ն}} - \text{ա}}{\text{հ} - 1}. \quad \text{և} \quad \text{գ} = \frac{\text{ա} - \text{ահ}^{\text{ն}}}{1 - \text{հ}} \quad [6]:$$

ՕՐԻՆԱԿ. *Քանորդական յառաջատութեան մը 15 եզերաց գումարը գտնելու է, գիտնալով առաջին եզրը 5. ընդհանուր համեմատականը 5:*

239. ՆՈՒԱԶՈՂ ՅԱՌԱՋԱՏՈՒԹԵԱՆ ՄԸ ԵԶԵՐԱՑ ԳՈՒՄԱՐԻՆ ՍԱՀՄԱՆ. — *Նուազող յառաջատութեան եզերաց գումարը տուող տարազը կրնայ գրուիլ*

$$\text{գ} = \frac{\text{ա}}{1 - \text{հ}} - \frac{\text{լհ}}{1 - \text{հ}}.$$

ուստի եթէ եզերաց թիւը երթալով անսահմանօրէն աճի, $\frac{\text{ա}}{1 - \text{հ}}$ *նշանացոյցը որ առաջին եզրէն և ընդհանուր համեմատականէն կախումն ունի, և միեւնոյն արժէքը միշտ*

կը պահէ, բայց $\left(\frac{ւք}{1-ք}\right)$ արտադրեալը իւր մէջ ւ արտադրիչը պարունակելով որ անսահմանօրէն կը նուազի (**234**) և $\left(\frac{ք}{1-ք}\right)$ արտադրիչը որ միշտ անփոփոխ է ուզածնուս չափ կրնանք պզտիկցնել, հետեւաբար եզերաց գումարը $\frac{ա}{1-ք}$էն փոքր ըլլալով, $\frac{ա}{1-ք}$էն ունեցած տարբերութիւնը ուզածնուս չափ կարեմք պզտիկցնել եթէ եզերաց թիւը ըստ բաւականի մեծցնեմք, ուրիշ կերպ ըսելով $\frac{ա}{1-ք}$ նշանացոյցը եզերաց գումարին սահմանն է, երբ եզերաց թիւը անսահմանօրէն աճի, այս սահմանը գ ով նշանակելով ունիմք

$$գ = \frac{ա}{1-ք} \quad [7].$$

ուստի կը հետեւի

240. ԿԱՆՈՆ. — *Անսահմանօրէն երկնցած նուազող քանորդական յառաջատուութեան մը եզերաց գումարը գտնելու համար, յառաջատուութեան առաջին եզրը պէտք է բաժնել միութենէ պակաս ընդհանուր համեմատականով:*

ՕՐԻՆԱԿ Ա. Պարզ պարբերական 0,56363656 . . . տասնորդական կոտորակը անսահմանօրէն նուազող քանորդական յառաջատուութեան եզերաց գումարին սահմանն է, այս յառաջատուութեան առաջին եզրը 0,56. ընդհանուր համեմատականի 0,01, քանզի առաջարկեալ կոտորակը հետեւեալ ձեւով կարեմք գրել.

$$0{,}36 + 0{,}0036 + 0{,}000036 + 0{,}00000036 + \text{եւայլն}:$$

Վերոյիշեալ կանոնին միջոցաւ այս փնտռուած գումարը կը գտնեմք $\frac{0,56}{1-0,01}$. հետեւաբար պարբերական պարզ կոտորակին սահմանը հասարակ կոտորակ մ'է, որոյ համարիչը հաւասար է պարբերութեան և յայտարարը հաւասար է պարբերութեան մէջ գտնուող թուանշանաց թուով ամբողջ 9 ի. այս կանոնը թուաբանութեան մէջ կը տրուի։

ՕՐԻՆԱԿ Բ. Եթէ քառակուսւոյ մի մէջ քառակուսի մը կազմենք, այնպէս որ իւր գագաթները առաջարկեալ քառակուսւոյ կողից մէջտեղը

ըլլայ և կրկնել միեւնոյն կողմութիւնը երկրորդ քառակուսւոյն վրայ, յետոյ երրորդին վրայ և այսպէս շարունակ. գտնել քառակուսիներու մակերեւութից գումարը:

Ինչպէս յայտնի կը տեսնուի, իւրաքանչիւր քառակուսի պարփակեալ քառակուսւոյ կէսն է. հետեւաբար, եթէ տրուած քառակուսւոյ մակերեւոյթը իբրեւ միութիւն առնեմք, ներփակեալ քառակուսիներու մակերեւոյթները հետեւեալ կերպով կը ցուցուին.

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \text{եւայլն}$$

որք քանորդական յառաջատուութիւն մի կը կազմեն, որ անսահմանօրէն նուազող է, այս յառաջատուութեան առաջին եզրը $\frac{1}{2}$ ըլլալով, այնպէս նաև իւր ընդհանուր համեմատականը, ուստի ունիմք $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$ կամ 1. որ է եզերաց գումարին սահման, որ առաջարկեալ քառակուսւոյն հաւասար է:

241. ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ Բ. — *Հետեւեալ տարազք*

$$ւ = աք^{ն-1}$$

$$գ = \frac{ւք - ա}{ք - ա}.$$

որոց ա, ք, ն, ւ և գ հինգ քանակութիւնները կը պարունակեն, որոցմէ երկուքը անծանօթ են, բայց միւս երեք քանակութեանց միջոցաւ այս անծանօթները կարեմք հաշուել. ուստի կը ծագին տասը հատ զանազան առաջարկութիւնք, որք հետեւեալ աղիւսակին մէջ կը տեսնուին.

1°	տրուած	ըլլալով	ւ. ք. գ.	գտնել	ն. ա.
2°	»	»	ա. ք. գ.	»	ն. ւ.
3°	»	»	ա. ւ. գ.	»	ն. ք.
4°	»	»	ա. ւ. ք.	»	ն. գ.
5°	»	»	ւ. ն. գ.	»	ք. ա.
6°	»	»	ա. ն. գ.	»	ք. ւ.
7°	»	»	ա. ւ. ն.	»	ք. գ.
8°	»	»	ւ. ն. ք.	»	գ. ա.
9°	»	»	ա. ն. ք.	»	գ. ւ.
10°	»	»	ն. ք. գ.	»	ա. ւ.

վերջի չորս առաջարկութիւնք առաջին աստիճանի հաւասարութեամբ կը լուծուին, բայց երկու նախընթաց առաջարկութիւնները լուծելու համար պէտք է լուծել Ն — 1 աստիճանով հաւասարութիւններ, իսկ Մնացեալ չորս առաջարկութիւնք ուրիշ նոր հաւասարութեանց միջոցաւ կը լուծուին. այս հաւասարութիւնք ցուցիչաւոր կ'ըսուին, քանզի անծանօթ Ն ցուցիչով են, որոց լուծումը Նշանակները ուսանելէն վերջը կարելի է կատարել:

ՎԱՐԺՈՒԹԻՒՆՔ

1. Ո՞րն է այն տարբերական յառաջատութիւնը, որոյ որ և է երկու եզերաց գումարը յառաջատութեան մասը ըլլայ։

Պատ. Այն յառաջատութիւնն է որոյ առաջին եզրը տարբերութեան մէկ բազմապատիկն է։

2. Ո՞րն է այն քանորդական յառաջատութիւնը, որոց որ և է երկու եզերաց արտադրեալը յառաջատութեան մասը ըլլայ։

Պատ. Այն յառաջատութիւնն է որոյ առաջին եզրը ընդհանուր համեմատականին մէկ կարողութիւնն է։

3. Մարդ մը 360 Ֆր. տարեկան վարձքով ծառայ մը կ'առնէ իւր քով, և խօսք կուտայ ամեն մէկ հետեւեալ տարւոյ սկզբան 20 Ֆր. վարձքը աւելցնել. ծառային վաստկած գումարը ի՞նչ է 15 տարի վերջ։

Պատ. 7500:

4. Եթէ ա. բ. գ. դ. . . . ը. ժ. ի. լ թուաբանական յառաջատութեան մը եզերք ըլլան, որոյ տարբերութիւնը եւս դ. ցուցնել թէ $\frac{1}{աբ}$, $\frac{1}{բգ}$, $\frac{1}{գդ}$, ... $\frac{1}{ըժ}$, $\frac{1}{ժի}$, $\frac{1}{իլ}$ կոտորակաց գումարը հաւասար է $\frac{ալդ}{լ - ա}$ ի:

5. Երկրաչափական յառաջատութեան մի առաջին վեց եզերաց գումարը 157,5. եզերաց թիւը 7. և վերջի վեց եզերաց գումարը 315. որո՞նք են այս եզերք։

Պատ. 2,5 · 5 · 10 · 20 · 40 · 80 և 160:

6. Երկրաչափական յառաջատութեան մը եզերաց թիւն 5 է, զոյգ կարգով եզերաց գումարը գիտենք, նոյնպէս նաեւ անզոյգ կարգով եզերաց գումարը. գտնել այս յառաջատութեան հինգ եզրերը։

Նախ միջին եզրերը հաշուելու է, միւսները սորա միջոցաւ կը գտնուին:

7. Երկրաչափական յառաջատութեան մը եզերաց թիւն է 6. երկու միջին եզերաց գումարը և երկու արտաքիններունը գիտենք. գտնել այս յառաջատութիւնը։

Նախ երկու միջին եզերաց արտադրեալը գտնելու է, ապա այս եզրերը. յառաջատութեան ընդհանուր համեմատականը սահմանուած կ'ըլլայ, նոյնպէս նաեւ իւր զանազան եզրերը։

8. Երկրաչափական յառաջատութեան մը եզերաց թիւը 4 է. եզերաց գումարը ա. և իրենց քառակուսիներու գումարը բ. գտնել այս չորս եզրերը։

Իբրեւ անծանօթ առնելու է երկու միջին եզերաց գումարին և տարբերութեան կէսը:

9. Երկրաչափական յառաջատութեան մը եզերաց թիւն է 4. միջին երկու եզերաց գումարը ա, երկու ծայրերուն գումարը բ. գտնել այս յառաջատութեան եզրերը։

Նախ յառաջատութեան ընդհանուր համեմատականը հաշուելու է և ապա առաջին եզրը:

10. Գտնելու է հետեւեալ կոտորակաց գումարին սահմանը. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \ldots$ որոց համարիչք տարբերական յառաջատութիւն մի կը կազմեն, և յայտարարք քանորդական յառաջատութիւն մի։

Այս շարքը այլեւայլ երկրաչափական նուազող յառաջատութեանց կը վերածեմք և կը տեսնեմք որ փնտռուած սահմանը 2 է։

Նշանակք

242. ՍԱՀՄԱՆ. — Եթէ նկատողութեան առնեմք երկու յառաջատութիւններ, մինն քանորդական միութենէ սկսող և միւսն տարբերական զրոյէն սկսող, երկորդին եզերք առաջնոյն եզերաց նշանակները կը սեպուին, որք միեւնոյն կարգով են: Զորօրինակ,

$$\begin{matrix} \div\div\ 1 : ք : ք^2 : ք^3 : ք^4 : \ldots\ldots : ք^մ : \ldots\ldots : ք^ն : \ldots\ldots : ք^ո \\ \div\ 0 . դ . 2դ . 3դ . 4դ \ldots\ldots\ մդ \ldots\ldots\ նդ \ldots\ldots\ ոդ \end{matrix} \qquad [1]$$

երկու յառաջատութիւնք ի միասին նշանակաց դրութիւն մի կը կազմեն:

Քանորդական յառաջատութեան իւրաքանչիւր եզր ք ին մի կարողութիւնն է, քանզի առաջին եզրը 1 է.

փոխադարձաբար ընդհանուր համեմատականին որեւիցէ մի կարողութիւնը, օրինակի համար $ք^ն$ այս յառաջատութեան մի եզրն է. այսինքն $(ն + 1)$րդ կարգի եզրն է։

Նախընթաց քանորդական յառաջատութեան որեւիցէ կարգի եզեր ցուցիչք տարբերական յառաջատութեան նոյն կարգի եզեր համարտադրչին հաւասար է։

Ընդհանրապէս քանորդական յառաջատութեան ընդհանուր համեմատական ք, միութենէ մեծ թիւ մը առնելու է, և թուաբանական յառաջատութեան տարբերութիւնը ա դրական. ուստի կը հետեւի թէ թուանշանք իրենց նշանակներով համընթաց կ'աճին. թուոյ մը օրինակի համար ա-ին նշանակը կը ցուցուի այսպէս Նշ. ա։

Եթէ նախընթաց [1] երկրաչափական յառաջատութեան եզերաց մէջ $ս — 1$ թուով քանորդական միջին եզրեր ներմուծեմք նոյնպէս տարբերական յառաջատութեան մէջ նոյն թուով տարբերական միջին եզրեր կ'ունենամք հետեւեալ յառաջատութիւնները.

$$\sqrt[ս]{ք} : \sqrt[ս]{ք^2} : \sqrt[ս]{ք^3} : \sqrt[ս]{ք^4} : \ldots \sqrt[ս]{ք^ր} : \ldots\ldots : \sqrt[ս]{ք^ն} : \ldots\ldots : \sqrt[ս]{ք^ս} \quad [2]$$

$$0 \cdot \frac{ա}{ս} \cdot \frac{2ա}{ս} \cdot \frac{3ա}{ս} \cdot \frac{4ա}{ս} \cdot \ldots\ldots \frac{րա}{ս} : \ldots\ldots \frac{նա}{ս} \cdot \ldots \frac{սա}{ս}$$

որոց միոյն ընդհանուր համեմատականը $\sqrt[ս]{ք}$ է և միւսոյն տարբերութիւնը $\frac{ա}{ս}$։

Այս տարբերական յառաջատութեան իւրաքանչիւր եզր իրեն համապատասխանող քանորդական յառաջատութեան եզեր նշանակները կը սեպուին. ինչպէս $\sqrt[ս]{ք}$-ին նշանակը $\frac{ա}{ս}$ է, և $\sqrt[2]{ք^2}$-ինը $\frac{2ա}{ս}$ է։

Եթէ երկու յառաջատութեանց յաջորդական եզե-

րաց մէջ $ն — 1$ թուով ուրիշ միջին եզրեր մտցնեմք նոր երկու յառաջատութիւններ կ'ստանամք.

$$\div 1 : \sqrt[ն]{ք} : \sqrt[ն]{ք^2} : \sqrt[ն]{ք^3} : \sqrt[ն]{ք^4} : \ldots\ldots : \sqrt[ն]{ք^ր} : \ldots\ldots : \sqrt[ն]{ք^ն} : \ldots\ldots,$$

$$\div 0 \cdot \frac{ա}{ն} \cdot \frac{2ա}{ն} \cdot \frac{3ա}{ն} \cdot \frac{4ա}{ն} \ldots\ldots \frac{րա}{ն} \ldots\ldots \frac{նա}{ն} \ldots\ldots [3],$$

այնպէս որ տարբերական յառաջատութեան միջին եզերք իրենց համապատասխանող քանորդական յառաջատութեան եզերաց նշանակներն են։

243. ԻԲՐԵՒ ՑՈՒՑԻՉ ՆԿԱՏՈՒՈՂ ՆՇԱՆԱԿՔ. — Երբ ունենամք

$$ա^մ = բ$$

հաւասարութիւնը, բ թուոյն նշանակը մ է կ'ըսուի, հաստատուն խարիսխը ա ըլլալով։

Ընդհանրապէս խարիսխ կ'ըսուի այն թիւը որոյ նշանակը 1 է։

244. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Ա. — *Երկու թուոց արտադրելոյն նշանակը հաւասար է այս երկու թուոց նշանակաց գումարին։*

Դիցուք թէ երկու բ և գ թուոց նշանակներն են մ և ն. (**243**) ուստի ունենալու եմք

$$ա^մ = բ. \quad ա^ն = գ.$$

այս երկու հաւասարութիւնները անդամ առ անդամ բազմապատկելով կ'ստանամք

$$ա^{մ+ն} = բգ.$$

ուրեմն $(մ + ն)$ը բգ արտադրելոյն նշանակն է. հետեւաբար

$$Նշ.\ բգ = Նշ.\ բ + Նշ.\ գ \quad [1]։$$

245. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Բ. — *Երկու թուոց բաժանման քանորդին նշանակը հաւասար է այս երկու թուոց նշանակաց տարբերութեան։*

Դիցուք թէ երկու բ և գ թուոց նշանակներն + եւ ‡ են (**243**), ունիմք

$$ա^{+} = բ. \quad ա^{‡} = գ.$$

այս երկու հաւասարութիւնները անդամ առ անդամ բաժնելով կ'ստանամք

$$ա^{+-‡} = \frac{բ}{գ}.$$

ուրեմն $\frac{բ}{գ}$ին նշանակն է (+ — ‡).

ուստի

$$Նշ.\, \frac{բ}{գ} = Նշ.\, բ - Նշ.\, գ \quad [2] :$$

246. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Գ. — *Թուոյ մը րրդ կարողութեան նշանակը հաւասար է (ինչ որ ալ ըլլայ ր, թէ ամբողջ եւ թէ կոտորակաւոր, թէ դրական եւ թէ բացասական), այս թուոյն նշանակին րով բազմապատկութեան արտադրեալին :*

Դիցուք թէ բին նշանակը + է. այսպէս

$$ա^{+} = բ :$$

Այս հաւասարութեան երկու անդամները րրդ կարողութեան հանելով կ'ստանամք

$$ա^{ր+} = բ^{ր}.$$

ուրեմն $բ^{ր}$ին նշանակը ր+ է, վասն որոյ ունիմք

$$Նշ.\, բ^{ր} = ր\, Նշ.\, բ \quad [3] :$$

247. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Դ. — *Թուոյ մը րրդ արմատին նշանակը հաւասար է այս թուոյն նշանակին րով բաժանման քանորդին :*

Դիցուք թէ ունիմք

$$\sqrt[ր]{ա} = բ.$$

այս հաւասարութեան երկու անդամները րրդ կարողութեան հանելով կ'ստանամք

$$ա = բ^{ր}.$$

ուստի կը հետեւցնեմք

$$Նշ.\, ա = ր \cdot Նշ.\, բ,$$

և կամ

$$Նշ.\, բ = \frac{Նշ.\, ա}{ր}.$$

և կամ

$$Նշ.\, \sqrt[ր]{ա} = \frac{Նշ.\, ա}{ր} :$$

Նախընթաց չորս տեսութիւնք թուաբանական գործողութիւնները կը դիւրացնեն. այնպէս որ բազմապատկութիւնը յաւելմամբ, բաժանումը բարձմամբ, կարողութեանց ամբարձումը բազմապատկութեամբ և արմատոց գիւտը բաժանմամբ կը կատարուին :

248. ՀԱՍԱՐԱԿ ՆՇԱՆԱԿՔ. — Հետեւեալ յառաջատութիւնք

$$\div\, 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : \cdots,$$
$$\div\, 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots,$$

հասարակ նշանակաց դրութիւնը կը կազմեն, որոյ խարիսխն 10 է. այս դրութեան մէջ 10ին որեւէ կարողութեանը նշանակը հաւասար է 10ին ցուցիչին, քանզի 10ին նշանակը 1 ըլլալով ունիմք

$$Նշ.\, 10^{ֆ} = ֆ\, Նշ.\, 10 = ֆ.$$

ուրիշ որեւէ ամբողջ ու կոտորակաւոր թուոց նշանակները անհամաչափական են. այս դրութիւնը առ հասարակ գործածուելուն համար հասարակ նշանակ անունը առած է :

249. ԿՆԻՔ. — Նշանակի մը ամբողջ մասը նշանակին

կնիքը կը կոչուի. 1էն սկսեալ մինչ 10 գտնուած թուոց ամբողջ մասը մէկ թուանշանէ բաղկացեալ ըլլալով՝ նոցա նշանակները 1ին և 0ին մէջ կը գտնուին, այս նշանակաց կնիքը 0 է. 10էն մինչ 100 գտնուած թուոց ամբողջ մասը երկու թուանշանէ բաղկացեալ ըլլալով՝ նոցա նշանակները 1ին և 2ին մէջ կը գտնուին, այս նշանակաց կնիքը 1 է: Հասարակօրէն $10^{ն}-1$էն մինչ $10^{ն}$ թուոց ամբողջ մասը ն թուանշանէ բաղկացեալ է, իրենց նշանակները (ն — 1)ին և նին մէջ կը գտնուին, այս նշանակաց կնիքը (ն — 1) է:

250. ՏԵՍՈՒԹԻՒՆ Ե. — *Թիւ մը 10ին որևէ կարողութեամբ երբ բազմապատկեմք, այս թուոյն նշանակին տասնորդական մասը անփոփոխ կը մնայ. բայց իւր կնիքը կը մեծնայ, կամ կը նուազի, կարողութեան ցուցիչին մէջ գտնուած միութեամբ:*

Արդարեւ ունիմք (**244**)ի միջոցաւ

$$\text{Նշ.}\,(\text{ա} \times 10^{\text{ր}}) = \text{Նշ.}\,\text{ա} + \text{Նշ.}\,10^{\text{ր}} = \text{Նշ.}\,\text{ա} + \text{ր},$$

և (**245**)ի միջոցաւ

$$\text{Նշ.}\,\frac{\text{ա}}{10^{\text{ր}}} = \text{Նշ.}\,\text{ա} - \text{Նշ.}\,10^{\text{ր}} = \text{Նշ.}\,\text{ա} - \text{ր}:$$

251. ԱՂԻՒՍԱԿԱՑ ԿԱԶՄՈՒԹԻՒՆ. — Աղիւսակաց մէջ ամբողջ թուոց նշանակները միայն գրուած են. ամեն նշանակներ անչափական ըլլալովին, մերձաւորութեամբ գտնուած են, ընդհանրապէս եօթը ութը տասնորդականով բաւականանալու է:

(**242**)էն գիտեմք թէ յառաջատութեանց մէջ բաւական մեծ թուով միջին եզրեր մտցնելով, քանորդական յառաջատութեան մէջ երկու միջին եզրեր պիտի գտնուին, որոց մէջ առաջարկեալ թիւը պիտի հաս- կըցուի, և որոց նշանակները իրեն նշանակին մերձաւոր արժէքները պիտի ըլլան:

Զորօրինակ առնեմք 1855 թիւը և փնտռենք սորա նշանակը. կը տես-

նեմք որ 1855ը, 1000ին և 10000ին մէջ կը գտնուի իւր նշանակը եւ 3ին և 4ին մէջ կը գտնուի, եթէ քանորդական յառաջատութեան երկու եզերաց մէջ այսինքն 1000ին և 10000ին մէջ միջին եզր մը մտցնեմք և տարբերական յառաջատութեան մէջ 3ին և 4ին մէջտեղ միջին եզր մը, կ'ունենամք

$$\text{ա} = \sqrt{1000 \times 10000} = 3162,27766.$$

առաջնոյն արժէքը, և 3,5 ևս երկրորդինը. անանկ որ ունիմք

$$3,5 = \text{Նշ.}\,\text{ա} = \text{Նշ.}\,3162,27766.$$

տեսնելով որ 1855ը, 1000ին և աին մէջ կը գտնուի, իւր նշանակը 3ին և 3,5ին մէջ կը գտնուի. եթէ քանորդական յառաջատութեան մէջ 1000ին և աին մէջ միջին եզր մի մտցնեմք, նմանապէս տարբերական յառաջատութեան 3ին և 3,5ին մէջ մի միջին եզր, կ'ունենամք

$$\text{բ} = \sqrt{1000\,\text{ա}} = 1778,2794.$$

առաջնոյն արժէքը, և երկրորդինը

$$\frac{3 + 3,5}{2} = 3,25$$

այսպէս $3,25 = \text{Նշ.}\,\text{բ} = \text{Նշ.}\,1778,2794$:

Արդ 1855ը աին և բին մէջ գտնուելով, իւր նշանակը 3,25ին և 3,5ին մէջ կը գտնուի. եթէ նորէն երկու միջին եզրեր մտցնեմք երկու յառաջատութեանց մէջ, կ'ունենամք

$$3,375 = \text{Նշ.}\,\sqrt{\text{աբ}} = \text{Նշ.}\,2371,3737 = \text{Նշ.}\,\text{գ}.$$

Նոյնպէս 1855ը, բին և գին մէջ գտնուելով, իւր նշանակը 3,25ին և 3,375ին մէջ կը գտնուի, նոր գործողութեամբ կ'առնամք

$$3,3125 = \text{Նշ.}\,\sqrt{\text{բգ}} = \text{Նշ.}\,2053,5250 = \text{Նշ.}\,\text{դ}.$$

գործողութիւնները այսպէս շարունակելով, հետևեալ աղիւսակը կը կազմենք.

$$3,5 = \text{Նշ.}\,\text{ա} = \text{Նշ.}\,3162,27766$$
$$3,25 = \text{Նշ.}\,\sqrt{1000\,\text{ա}} = \text{Նշ.}\,\text{բ} = \text{Նշ.}\,1778,2724$$
$$3,375 = \text{Նշ.}\,\sqrt{\text{աբ}} = \text{Նշ.}\,\text{գ} = \text{Նշ.}\,2371,3737$$
$$3,3125 = \text{Նշ.}\,\sqrt{\text{բգ}} = \text{Նշ.}\,\text{դ} = \text{Նշ.}\,2053,5250$$

3,28125 = Նշ. √բդ = Նշ. ե = Նշ. 1910, 95294
3,265625 = Նշ. √բե = Նշ. զ = Նշ. 1843, 42296
3,2734375 = Նշ. √եզ = Նշ. է = Նշ. 1876, 8843
3,26953125 = Նշ. √զէ = Նշ. ը = Նշ. 1860, 0784
3,26757812 = Նշ. √էը = Նշ. թ = Նշ. 1851, 7321
3,26855469 = Նշ. √ըթ = Նշ. ժ = Նշ. 1855, 9005
3,26806641 = Նշ. √թժ = Նշ. ի = Նշ. 1853, 8151
3,26831055 = Նշ. √ժի = Նշ. լ = Նշ. 1854, 8575
3,26843262 = Նշ. √ժլ = Նշ. խ = Նշ. 1855, 3789

մէկ կողմէն լ և խ քանակութեանց տարբերութիւնը, միւս կողմէ ժ—լ իրարու հետ բաղդատելով ունիմք

խ = 1855, 3789	ժ = 1855, 9005
լ = 1854, 8575	լ = 1854, 8575
խ—լ = 0, 5214	ժ—լ = 1, 0430

Այնպէս որ խ—լ գրեթէ ժ—լին կէսն է։
Նմանապէս Նշ. խ և Նշ. լ, Նշ. ժ և Նշ. լ իրարու հետ բաղդատելով ունիմք

Նշ. խ = 3, 26843262	Նշ. ժ = 3, 26855469
Նշ. լ = 3, 26831055	Նշ. լ = 3, 26831055
Նշ.խ—Նշ. լ = 0, 00012207	Նշ. ժ—Նշ. լ = 0, 00024414

Կը տեսնեմք որ (Նշ. խ — Նշ. լ) հաւասար է (Նշ. ժ — Նշ. լ)ին կէսոյն. երկու թուոց տարբերութիւնը իրարու հետ այնպէս կը համեմատի, ինչպէս երկու նշանակաց տարբերութիւնը, եթէ այս համեմատութիւնը մօտ գտնուած թուոյ մը համար ալ սեպեմք 1855ին նշանակը անմիջապէս կը գտնեմք։

Եթէ խ և լի մէջ 0,5214 տարբերութիւն գտնուելով՝ նշանակաց տարբերութիւնը 0,00012207 ըլլայ, հապա 1855ին և 1854,8575ին տարբերութեան համար որ 0,1425 է ինչպիսի ըլլայ նշանակաց տարբերութիւնը։

$$+ = \frac{0,00012207 \times 0,1425}{0,5214} = 0,00003336 \cdot$$

այս թիւը լին նշանակին վրայ գումարելով կ'ունենամք

Նշ. 1855 = 3, 26834391 ։

Այս գործողութիւններէն կը տեսնուի թէ որչափ երկայն է այս միջոցաւ թուոց նշանակները հաշուել։ Տարբեր հանրահաշուայ միջոցաւ այսչափ կարեմք միայն խօսիլ։

Կարգադրութիւն եւ գործածութիւն Աղիւսակաց

252. Գործածական աղիւսակք են Լալանտի և Կալլէի աղիւսակներն. առաջինք 1էն մինչ 10000 թուոց նշանակները կը բովանդակեն և հինգ տասնորդականօք են, իսկ միւսները մինչ 108000 կը հասնին և նշանակք ընդհանրապէս 7 թուանշաններով են և մի քանի մասանց մէջ 8 թուանշաններով, կնիքները զանց առնուած են. այս երկու աղիւսակաց միջոցաւ հետեւեալ հարցումները լուծելու է. 1° Թիւ մը առաջարկուելով, իւր նշանակը գտնելու է. 2° Առաջարկուած նշանակի մը համապատասխանող թիւը գտնելու է։

Երբ առաջարկեալ թիւն աղիւսակին մէջ գտնուի, իւր նշանակն անմիջապէս կը գտնեմք աւելցնելով նորա վերայ կնիքը։

Երբ առաջարկեալ թիւը աղիւսակին սահմանէն դուրս ըլլայ, նոյն թուոյ ձախ կողմէն ստորակէտով զատելու է բաւական թուանշան, այնպէս որ այս թիւը աղիւսակին մէջ գտնուի. առաջարկեալ թիւը այս կերպով տասնորդական թուոյ մի վերածուած կ'ըլլայ։ Դիցուք Ն ամբողջ մասը և հ տասնորդական մասը. Ն թուոյ նշանակին տասնորդական մասը ն ըլլայ, և դ եւս ցուցնէ Ն և Ն + 1 թուոց նշանակաց տարբերութիւնը որ աղիւսակին մէջ հաշուեալ է. և դ' ցուցնէ Ն, և Ն + հ թուոց նշանակաց տարբերութիւնը, ինչպէս տեսանք, երբ թիւերը խիստ փոքր ըլլան, նշանակք իրենց համապատասխանող թուոց աճմանը համեմատական են։

Այնպէս որ ունիմք դ' = դ × հ. հին վերայ դ' աւել-

ցնելով Ր+Կ թուոյ նշանակին տասնորդական մասը կ'ստանամք որ առաջարկեալ ամբողջ թուոյ նշանակն եւս է:

253. ԵՐԿՐՈՐԴ ՀԱՐՑՈՒՄ. — *Նշանակի մը համապատասխանող թիւը գտնելու է:*

Նշանակին կնիքը կը ցուցնէ փնտռուած թուոյ ամենէն մեծ կարգի միութիւնը, ուստի նշանակին տասնորդական մասը նկատողութեան առնելու է, երբ համապատասխանող թիւը գտնեմք 10ին յարմար մի կարողութեամբը զայն բազմապատկելու կամ բաժնելու է:

Երբ նշանակին տասնորդական մասը աղիւսակին մէջ գտնուի, իրեն համապատասխանող թիւը անմիջապէս կը գտնեմք:

Երբ տասնորդական մասը աղիւսակին մէջ ճիշդ չը գտնուի, նորա ամենէն մերձաւորը կը փնտռենք անոնց անկէ մեծը առնելու: Դիցուք ամենէն մերձաւոր գտնուած տասնորդական մասը Ն. իրեն համապատասխանող թիւը Ր. առաջարկեալ նշանակին տասնորդական մասը Ն'. Ր և Ր + 1 թուոց նշանակաց տարբերութիւնը Տ. Ն'—Ն տարբերութիւնը Տ'. և Ր + Կ փնտռուած թիւը, ըստ նախընթաց համեմատութեան ունիմք

$$Կ = \frac{Տ'}{Տ}.$$

Կին արժէքը տասնորդականի կը վերածեմք և Ր թուոյ վրայ կ'աւելցնեմք

254. Կալլէի աղիւսակին առաջին էջերուն մէջ 1էն մինչ 1200 թուոց նշանակները գրուած են ութը տասնորդականով և գիմացը իրենց համապատասխանող թիւերը գրուած են. այս աղիւսակին ետեւէն կուգայ ուրիշ աղիւսակ մի եւս որ 1020էն մինչ 108000 ամբողջ թուոց նշանակները կը բովանդակեն. առաջին սիւնակին մէջ թիւերը իրենց բնական կարգով գրուած են, իրենց նշանակները յաջորդ սիւնակին մէջ, ուր 0 նշանակուած

է, այս սիւնակին ձախ դին առանձնացեալ թիւեր կը տեսնուին, զորս իրարու տակ վերագրեալ նկատելու եմք, լեցնելով այսպէս իւրաքանչիւր սիւնակ:

1020էն մինչ 10800 թուոց նշանակաց տասնորդական մասերը ինչ որ են նոյն են 10200էն մինչ 108000 տասնական առնուած թուոցը. սոցա մէջ հասկցուած թուոց նշանակները յաջորդ սիւնակաց միջոցաւ կ'ստանամք որոց գագաթները գրուած են 1. 2. 3. . . , 9: Օրինակ, 27796ին նշանակը գտնելու համար առաջին սիւնակին մէջ 2779 կը փնտռենք, հորիզոնական գծին վերայ յառաջ կ'երթանք մինչ այն սիւնակը որոյ գագաթը 6 նշանակուած է, փնտռուած նշանակին վերջին չորս տասնորդականներ հոն գրուած կը գտնեմք. իսկ առաջին երեք տասնորդականները առաջարկեալ թուոց ամենէն մօտը առանձնացեալ երեք տասնորդականք են. այս միջոցաւ կնիքով հանդերձ կ'ստանամք

Նշ. 27796 = 4,4439823:

Միեւնոյն եղանակաւ 27798 թուոյ նշանակը կը գտնեմք. 2779 թուոյ համապատասխանող գծին վերայ 8 նշանակուած սիւնակին մէջ ոչինչ կը գտնեմք, այս պարագայիս մէջ ստորին գծին վերայ փնտռելու է նշանակին վերջի չորս տասնորդական մասը, նոյն հորիզոնական գծին վերայ գրուած են առաջին երեք տասնորդականները, կ'ունենամք այսպէս.

Նշ. 27798 = 4,4440136:

Երկու յաջորդական թուոց նշանակաց տարբերութիւնը աջ կողմի յետին սիւնակին մէջ գրուած է, այս տարբերութիւնը ամբողջ թուոյ մը պէս գրուած է, բայց իւր միաւորը նշանակաց յետին թուանշանին կարգէն է. այս տարբերութեանց տակ աղիւսակ մի եւս կայ որ մեղկուտայ տարբերութեան մի 0,1. 0,2. 0,3 . . . . . 0,9 ով

բազմապատկութեան արտադրեալը․ այս աղիւսակին միջոցաւ կ'առնամք նաեւ 108000 էն վեր ամբողջ թուոյ վերայ գումարելի տասնորդական կոտորակին այս տարբերութեամբ բազմապատկութեան արտադրեալը ։

Զորօրինակ․ Գտնելու է 14518469 թուոյ նշանակը ։

Ձախ կողմի թուանշանաց առաջին հինգ հատը ստորակէտով մի զատելու է, որով կ'ունենամք 14518,469 , կը տեսնեմք որ 14518 ին տասնորդական մասը 0,1619068 է , ամենէն մերձաւոր տարբերութեանց աղիւսակը 299 ին պատասխանողն է և 4. 6. 9 թուոց համապատասխանող թիւերն են 120, 179, 269 . ուստի կը հետեւցնեմք

299 × 0,4 = 120 · 299 × 0,06 = 17,9 · 299 × 0,009 = 2,69 ·

փնտռուած նշանակը առնալու համար 14518 ին նշանակին յետին միաւորաց վերայ կը յաւելումք 120 , 17,9 , 2,69 թիւերը այսպէս .

Նշ. 14518	. . . .	0,1619068
0,4 ինը	. . . .	120
0,06 ինը	. . . . . .	17,9
0,009 ինը	. . . . . .	2 69
Նշ. 14518,469		7,1619209

100000 էն մինչ 108000, նշանակք 8 թուանշանով են , և 0 նշանակուած սիւնակին մէջ առանձնացեալ թիւերը չորս թուանշան ունին ։

Գտնելու է առաջարկեալ նշանակի մի համապատասխանող թիւը ․ Դիցուք նշանակին տասնորդական մասը 1619209 ։ Նախ 0 նշանակած սիւնակին մէջ չորս թուանշանէ բաղկացեալ թուոց նշանակաց մէջ կը փնտռեմք այս նշանակը որ առաջարկուածին շատ մօտ ըլլայ առանց անկեց մեծ ըլլալու , այս նշանակին համապատասխանող 1451 ը կը գտնեմք ․ միեւնոյն հորիզոնական գծին վերայ յառաջ կ'երթանք մինչեւ որ 9209 ին ամենէն մերձաւոր թիւը գտնենք , այս ամենէն մօտ թիւը 9068 է , որ 8 ով սիւնակին մէջ կը գտնուի . 9209 ի և 9068 ի մէջ գտնուած տարբերութիւնն է 141 . տարբերութեանց աղիւսակին մէջ 141 ին ամենէն մերձաւորը կը փնտռեմք , այս թիւը 120 է որ 4 ի կը պատասխանէ այսինքն 0,4 ի . 141 ի և 120 ի տարբերութիւնն է 21 . 21 ը 10 ով կը բազմապատկեմք , և 210 արտադրելոյն ամենէն մերձաւորը կը փնտռեմք որ 209 է և կը պատասխանէ 0,7 ի . ուստի կը հետեւի թէ փնտռուած թիւը 14158,47 է ։

Հետեւեալ եղանակաւ կը հաշուեմք

Նշ. + = 0,1619209

1616068 ինը	. . . .	14518
Ա. Տարբ. 141 »	. . . .	0,4
Բ. Տարբ. 21 »	. . . .	0,07
		Թ = 14518,47

Բացասական կնիք

255. Մինչեւ հիմայ 1 էն մեծ թուոց նշանակները նկատողութեան առինք , բայց երբ 1 էն աւելի փոքր թիւերով բազմապատկութիւններ կամ բաժանումներ ունենամք կատարելի , առաջարկեալ թիւերը 10 ին որ և է մի կարողութեամբ կը բազմապատկեմք . այնպէս որ 1 էն մեծ թուով մի զայն ներկայացնեմք . և եթէ բազմապատկութիւնները և բաժանումները վերջը կատարեմք , գործողութեանց արդիւնքը 10 ին նոյն կարողութեամբը բազմապատկուած կամ բաժնուած պիտի ըլլայ , այնպէս որ ստորակէտին տեղափոխութեամբ գործողութիւնը կը ճշդուի ։ Զորօրինակ .

Ունենամք հետեւեալ տասնորդական կոտորակը՝ 0,008754 . այս թիւը 1000 ով բազմապատկելով կ'առնամք 8,754 . այս թուոյն նշանակին կնիքը 0 է , նշանակին տասնորդական մասը նոյն է ինչ որ 8754 ինը : աղիւսակին մէջ կը գտնեմք 9422065 . ուրեմն ունիմք Նշ. 8,754 = 0,9422065 . 8,754 թիւը 0,008754 թիւէն 1000 անգամ մեծ ըլլալով իւր նշանակը ևս առաջարկեալ թուոյն նշանակէն 3 միութեամբ մեծ է . ուստի կը գրեմք Նշ. 0,008754 = $\bar{3}$,9422065 . այսինքն նշանակին կնիքին վերայ — նշանը դնելով ։

Դիցուք հասարակ կոտորակի մը համարչին նշանակը 2,6856866 . իսկ յայտարարինը 1,7454801 . երկրորդը առաջինէն կը բառնամք առաջնոյն վերայ 3 աւելցնելով , այս կերպով առաջարկեալ կոտորակին 1000 ով բազմապատկութեան արտադրելոյն նշանակը ստացած կ'ըլլամք . բարձումը կատարելով կ'առնամք 0,1422065 . առաջարկեալ կոտորակին նշանակը պիտի ըլլայ $\bar{3}$,9422065 . այս գործողութիւններէն կը հետեւի

1 էն փոքր տասնորդական կոտորակի նշանակը ստորակէտին աջ կողմի առաջին նշանակին թուանշանին ցուցած կարգին թուոյն կը պատասխանէ , այս թիւը բացասական առնելու է , ինչպէս նախընթաց օրինակին մէջ

0,008754 տասնորդական կոտորակին ստորակէտին աջ կողմը գտնուած առաջին նշանակիչ թիւը 8 է որ երրորդ կարգէն է. ուստի 3ը բացասական սեպեցինք:

Թուաբանական լրացուցիչք

256. ՍԱՀՄԱՆ · *Ն թուոյ 10ին թուաբանական լրացուցիչը 10 — Ն տարբերութիւնն է. ըստ այս սահմանի նշանակի մը լրացուցիչը առնելու համար իր աջ կողմի առաջին թուանշանը 10էն կը բառնամք և միւս թուանշանները 9էն:*

Զորօրինակ

$$Լ·\ 3{,}72543 = 6{,}27457$$
$$Լ·\ 7{,}28540 = 2{,}71460$$
$$Լ·\ 12{,}7258 = \bar{3}{,}2742$$

վասն զի 12,7258 թիւը 10էն բառնալու է:

Եթէ Ն թիւը բացասական հնիք մի ունենայ, այս հնիքէն 1 պակսեցնելէ զկնի նշանը փոխելով 10ին վերայ կ'աւելցնեմք և յետոյ կը գրեմք տասնորդական մասին լրացուցիչ մասը, այսպէս.

$$Լ·\ \bar{3}{,}74652 = 12{,}25348\ .$$

վասն զի

$$10 + 3 - 0{,}74652$$

գործողութիւնը կատարելու է:

Լրացուցիչներու գործածութիւն

257. *Երբ նշանակաց գործողութեան մէջ բարձում մի ունենամք կատարելի, ընդհանրապէս լրացուցիչներու գործածութեամբ յաւելման կը դարձնեմք գործողութիւնը, այսպէս ·*

$$ա - բ = ա + (10 - բ) - 10\ .$$

(ա — բ) տարբերութիւնը հաշուելու համար բաւական է աին վերայ բին լրացուցիչը գումարել և արդիւնքէն 10ը բառնալ:

Նշանակներով կատարուած գործողութեանց վերայ վարժութիւնք

ՕՐԻՆԱԿ Ա. Դիցուք

$$ք = \frac{239 \times 827 \times 543}{76 \times 17}\ :$$

գտնելու է քին արժէքը

$$Նշ.\ 239 = 2{,}3783979$$
$$Նշ.\ 827 = 2{,}9175055$$
$$Նշ.\ 543 = 2{,}7347998$$
$$Լ·\ Նշ.\ 76 = 8{,}1191864$$
$$Լ·\ Նշ.\ 17 = 8{,}7695511$$
$$Նշ.\ ք = 4{,}9194407$$

9194390 նշանակին համապատասխանող թիւն է

83069

Ա. Մնացորդ 17 03

Բ. Մնացորդ 1 002

$$ք = 83069{,}32$$

Եթէ առաջարկեալ օրինակը ուղղակի հաշուէինք, քին արժէքը 83069,355 պիտի գտնէինք. նշանակի գործածութեամբ միայն առաջի վեց թուանշանները կարացինք առնել:

Եթէ նշանակաց լրացուցիչները չգործածէինք, պէտք պիտի ըլլար կատարել երկու յաւելում և մի բարձում:

ՕՐԻՆԱԿ Բ. Հաշուելու է

$$ք = \left(\sqrt[3]{13572 \times \frac{1}{11}}\right)^2$$

Նշանացոյցը ·

$$ք = \left(\sqrt{\frac{13572}{11}}\right)^2.$$

կը գրենք

ունիմք

$$Նշ.\ ք = \frac{2}{3}\ (Նշ.\ 13572 - Նշ.\ 11)\ .$$

ուստի կը գտնեմք

$$Նշ.\ 13572 = 4,1326439$$
$$Նշ.\ 11 = 1,0413927$$

$$Նշ.\ 13572 - Նշ.\ 11 = 3,0912512$$
$$2\,(Նշ.\ 13572 - Նշ.\ 11) = 6,1825024$$
$$Նշ.\ + = \frac{2}{3}(Նշ.\ 13572 - Նշ.\ 11) = 2,0608341$$

0608341
0608111 · · · · · 11503
230 · · · · · 608

ուրեմն

$$+ = 115,03608 :$$

ՕՐԻՆԱԿ Գ. Հաշուելու է $\frac{2}{37}$ին հինգերորդ կարողութիւնը ։

Ունիմք

$$Նշ.\ 2 = \cdots\cdots 0,30103000$$
$$Նշ.\ 37 = 1,56820172$$
$$Լ՝ Նշ.\ 37 = \cdots\cdots 8,43179828$$
$$Նշ.\ \frac{2}{37} = \cdots\cdots \bar{2},73282828 :$$
$$Նշ.\left(\frac{2}{37}\right)^5 = 5\ Նշ.\ \frac{2}{37} = \cdots\cdots \bar{7},66414140$$

6641414
6641341 · · · · · 46146
73 77

$$\left(\frac{2}{37}\right)^5 = 0,0000004614677 :$$

Բաղադրեալ շահ եւ տարեւորութիւնք

258. Երբ փոխ տրուած դրամագլխոյն վրայ բարդուի իւրաքանչիւր տարւոյն շահը և բովանդակութիւնն երկրորդ տարին նորէն շահու դրուի, շահը բաղադրեալ է կ'ըսուի ։

Դիցուք 1 ֆր.ի տարեկան շահը շ, 100 ֆր.ին շահը կ'ըլլայ 100շ, իսկ Դ գումարին շահը կ'ըլլայ Դշ. դրամագլուխը տարի մը վերջը կ'ըլլայ Դ + Դշ, եթէ այն ժամանակուան գումարը Դ'ով ներկայացնեմք, կ'ունենամք

$$Դ' = Դ\,(1 + շ) ,$$

Եթէ Դ' դրամագլուխը երկրորդ տարին ալ շահու դրուի, նմանապէս երկրորդ տարւոյն վերջը կ'ունենամք

$$Դ'' = Դ'\,(1 + շ) = Դ\,(1 + շ)^2 ,$$

Եթէ Դ'' դրամագլուխը երրորդ տարին ալ շահու դրուի, այս տարւոյն վերջը դրամագլուխը կ'ըլլայ

$$Դ''' = Դ''\,(1 + շ) = Դ\,(1 + շ)^3 .$$

այսպէս շարունակ. ուրեմն Ն տարւոյն վերջը սկզբնական Դ դրամագլուխը կ'ըլլայ

$$Գ = Դ\,(1 + շ)^{Ն} ,$$

Նշանակաց գործածութեամբ ունիմք

$$Նշ.\ Գ = Նշ.\ Դ + Ն\ Նշ.\ (1 + շ) .$$

Երբ Գ, Դ, շ, Ն չորս քանակութեանց երեքը ծանօթ ըլլան, չորրորդը կարեմք դիւրութեամբ հաշուել ։

259. Դիցուք փոխառուն իւրաքանչիւր տարի դրամագլխոյ վրայ նոր գումար մի աւելցնէ, այս գումարը ես բաղադրեալ շահու տրուի մինչ ցվճարումն և առաջին տարւոյ սկիզբը շահու տրուած գումարը Ա ըլլայ երկրորդ տարւոյ սկիզբը աւելցուցած գումարը Բ, այսպէս Գ, Դ . . . Լ. երրորդ, չորրորդ և այլ տարիներու սկիզբն շահու տրուած գումարք. և Ն տարի վերջ ստանալիք գումարը Գ ըլլայ ։
Ա գումարը փոխառուին ձեռքը Ն տարի մնաց. այս գումարը բաղադրեալ շահով հանդերձ եղաւ Ա $(1+շ)^{Ն}$ ։
Բ գումարը փոխառուին քով (Ն — 1) տարի մնաց. իր բաղադրեալ շահով եղաւ Բ $(1 + շ)^{Ն-1}$ ։
Գ գումարը փոխառուին քով Ն — 2 տարի մնաց.

իւր բաղադրեալ շահով եղաւ $գ(1+շ)^{ն-2}$. և այսպէս շարունակ ։

Վերջապէս վերջին գումարը ւ մի տարի միայն․ շահով հանդերձ կ'ըլլայ $ւ(1+շ)$ ։

Ուրեմն ունենալու եմք

$$Գ = ա(1+շ)^{ն} + բ(1+շ)^{ն-1} + գ(1+շ)^{ն-2} \dots + ւ(1+շ).$$

Երբ $ա = բ = գ = դ \dots = ւ$ ըլլայ, նախընթաց հաւասարութեան երկրորդ անդամը քանորդական յառաջատուութեան մի ձևը կ'առնէ, որոյ առաջին եզրն է $ա(1+շ)$ և ընդհանուր համեմատականը $(1+շ)$ ։

Ունիմք (**235**) միջոցաւ

$$Գ = \frac{ա(1+շ)\left[(1+շ)^{ն} - 1\right]}{շ}.$$

ՕՐԻՆԱԿ Ա. Հաշուելու է թէ 8000 Ֆր. դրամագլուխը 39 տարի վերջը ի՞նչ կ'ըլլայ %ին տարեկան $4\frac{1}{2}$ շահով․

Ունիմք

$$Գ = Նշ.\ ա + ն\ Նշ.\ (1+շ)$$

$$Նշ.\ ա = Նշ.\ 8000 = \dots\dots = 3{,}9030900$$

$$Նշ.\ (1+շ) = Նշ.\ (1{,}045) = 0{,}019116290\text{4}$$

$$ն\ Նշ.\ (1+շ) = 39\ Նշ.\ (1{,}045) = \dots\dots = 0{,}7455353$$

$$Նշ.\ Գ = \dots\dots\quad 4{,}6486253$$

$$Գ = 44527^{Ֆ},19 ։$$

ՕՐԻՆԱԿ Բ. Եթէ Քրիստոսի թուականին սկիզբէն 1 սանթիմը %ին 5 շահու տրուէր, ի՞նչ կ'ըլլար 1862 տարի վերջը․

Ունիմք

$$Նշ.\ Գ = Նշ.\ ա + ն\ Նշ.\ (1+շ)$$

$$Նշ.\ ա = Նշ.\ (0{,}01) = \dots\dots = \bar{2}$$

$$Նշ.\ (1+շ) = Նշ.\ (1{,}05) = 0{,}02118929907$$

$$ն\ Նշ.\ (1+շ) = 1862\ Նշ.\ (1{,}05) = \dots\dots = 39{,}3234475$$

$$Նշ.\ Գ = \dots\dots = 37{,}3234475$$

ուստի

$$Գ = 21059472 \times 10^{30}\ Ֆր.$$

58 թուանշանով մերձաւորութեամբ թիւ մի ։

ՕՐԻՆԱԿ Գ. Ի՞նչ է 7220 Ֆր. գումարին ներկայ արժէքը որ վճարելի է 53 տարի վերջ, սակը %ին 5 ըլլալով․

$$Նշ.\ ա = Նշ.\ Գ - ն\ Նշ.\ (1+շ)$$

$$Նշ.\ Գ = Նշ.\ 7220 = \dots\dots = 3{,}85853720$$

$$Նշ.\ (1+շ) = Նշ.\ (1{,}05) = 0{,}021189299$$

$$ն\ Նշ.\ (1+շ) = 33\ Նշ.\ (1{,}05) = \dots\dots = 0{,}69924687$$

$$Նշ.\ ա = \dots\dots = 3{,}15929033$$

$$ա = 1443^{Ֆ},08 ։$$

Այս գումարը 33 տարիէն իւր բաղադրեալ շահով 7220 Ֆր. կ'ըլլայ․

ՕՐԻՆԱԿ Դ. %ին ի՞նչ սակով 28895 Ֆր.ը 75 տարի վերջը իւր բաղադրեալ շահով 250000 Ֆր. կ'ըլլայ․

$$Նշ.\ (1+շ) = \frac{Նշ.\ Գ - Նշ.\ ա}{ն}.$$

$$Նշ.\ Գ = Նշ.\ 250000 = 5{,}3979400$$

$$Նշ.\ ա = Նշ.\ 28895 = 4{,}4608227$$

$$Նշ.\ Գ - Նշ.\ ա = 0{,}9371173$$

$$Նշ.\ (1+շ) = 0{,}01283722$$

$$1+շ = 1{,}03000$$

Սակը ուրեմն %ին 3էն է ․

260. ՍԱՀՄԱՆ. — Տարեւորութիւն կ'ըսուի որոշեալ այն գումարն որ տարուէ տարի վճարուելով մինչև որոշեալ ժամանակ մը կ'ամբողջայնէ հատուցուած և կամ ընդունուած սկզբնական դրամագլուխը իր շահով հանդերձ ։

Դիցուք թէ փոխառութիւնն էր ա Ֆր. գումարը, տարուէ այս գումարին միութեան տարեկան շահը շ. և հատուցման տարի վճարուած որոշեալ գումարը ա, և հատուցման տեւողութիւնը ն տարի ։ Գտնելու է հիմայ այնպիսի տարեւորութեան, շ տարաղ մի որ ա դրամագլխոյ, ա տարեւորութեան, շ շահին և ն տեւողութեան մէջ առնչութիւն մի ըլլայ ։

Եթէ փոխառուն սպասէր մինչ ն տարի իւր պարտուց հատուցման, պարտքը ն տարի վերջ պիտի հասնէր $ա(1+շ)^{ն}$ (**258**). բայց առաջին տարւոյն վերջը սկզբնական ա գումարը կը վճարէ, եթէ այս գումարը իւր

քով մնար $\text{ն} - 1$ տարի վերջ իւր բաղադրեալ շահով հանդերձ պիտի ըլլար $\text{ա}(1+\text{շ})^{\text{ն}-1}$: Երկրորդ տարւոյն վերջը կը վճարէ նորէն ա գումարը, եթէ այս գումարը եւս իւր ձեռ.քը պահէր, $\text{ն} - 2$ տարի վերջ ա գումարը իւր բաղադրեալ շահով կ'ըլլար $\text{ա}(1+\text{շ})^{\text{ն}-2}$: Նմանապէս պիտի տեսնեմ.ք որ վերջընթեր տարւոյ վերջ վճարուած ա գումարը $\text{ա}(1+\text{շ})$ պիտի ըլլար, իսկ վերջին տարւոյ մէջ վճարուած ա գումարին վերջնական արժէ.քը ա է. Հետեւաբար ունենալու եմ.ք հետեւեալ հաւասարութիւնը.

$$\text{Դ}(1+\text{շ})^{\text{ն}}=\text{ա}(1+\text{շ})^{\text{ն}-1}+\text{ա}(1+\text{շ})^{\text{ն}-2}+\ldots\ldots+\text{ա}(1+\text{շ})+\text{ա} \quad [1].$$

այս հաւասարութեան երկրորդ անդամը եթէ շրջենք, կը տեսնեմ.ք որ երկրաչափական աճեցող յառաջատութիւն մ'է, որոյ առաջին անդամն է ա և ընդհանուր համեմատականը $(1+\text{շ})$· որոյ եզերաց գումարն է

$$\frac{\text{ա}(1+\text{շ})^{\text{ն}}-\text{ա}}{\text{շ}}.$$

Հետեւաբար

$$\text{Դ}(1+\text{շ})^{\text{ն}}=\frac{\text{ա}(1+\text{շ})^{\text{ն}}-\text{ա}}{\text{շ}}$$

տարեւորութեան հանրական տարազը այս է:

Այս տարազին միջոցաւ Դ, ա, շ և ն քանակութեանց երեք.ը ծանօթ ըլլալով Դ, ա, ն քանակութիւնները կարեմ.ք հաշուել:

$$\text{ա}=\frac{\text{Դշ}(1+\text{շ})^{\text{ն}}}{(1+\text{շ})^{\text{ն}}-1} \quad [2]$$

$$\text{Դ}=\frac{\text{ա}[(1+\text{շ})^{\text{ն}}-1]}{\text{շ}(1+\text{շ})^{\text{ն}}} \quad [3]$$

$$\text{ն}=\frac{\text{Նշ. ա}-\text{Նշ.}(\text{ա}-\text{Դշ})}{\text{Նշ.}(1+\text{շ})} \quad [4]:$$

Եթէ [1] տարազը նկատողութեան առնեմ.ք շին նկատմամբ $(\text{ն}+1)$րդ կարողութեամբ է զոր լուծելու

համար մասնաւոր հնար.ք մի գործածելու է, այսինքն շ ծանուցեալ թուով մի ներկայացնելով խարխափմամբ իւր բուն արժէ.քը գտնելու է:

Այս տարազներուն միջոցաւ հետեւեալ թուաւոր վարժութիւնները լուծենք:

ՕՐԻՆԱԿ Ա. Ի՞նչ է այն տարեւորութիւնը որ 51 տարիէն տարին %ին 4 շահով 34600 ֆք. գումարը կը հատուցանէ:

(2) տարազին միջոցաւ ունիմ.ք

$$\text{Նշ. ա}=\text{Նշ. Դշ}+\text{ն Նշ.}(1+\text{շ})-\text{Նշ.}[(1+\text{շ})^{\text{ն}}-1]$$

$$\text{Նշ.}(1+\text{շ})=\text{Նշ.}(1{,}04)=0{,}0170333393$$

$$(1+\text{շ})^{\text{ն}}=7{\cdot}390850\cdot$$

ուստի

$$\text{Նշ. Դշ}=\text{Նշ. }1384\;\ldots\ldots\ldots\ldots=3{,}1411361$$

$$\text{ն Նշ.}(1+\text{շ})=\;\ldots\ldots\ldots\ldots=0{,}8687003$$

$$\text{Նշ.}[(1+\text{շ})^{\text{ն}}-1]=\text{Նշ. }6{,}39095=0{,}8055654$$

$$\text{Լ. Նշ.}[(1+\text{շ})^{\text{ն}}-1]-10=\;\ldots\ldots=\bar{1}{,}1944346$$

$$\text{Նշ. ա}=\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=3{,}2042710$$

$$\text{ա}=1600{,}556:$$

ՕՐԻՆԱԿ Բ. Իւրաքանչիւր տարւոյ վերջ %ին 6 շահով 50 ֆք. շահու դնեմ.ք, 24 տարի վերջ ինչ գումար առնալու եմ.ք:

$$\text{Գ}=\frac{\text{ա}[(1+\text{շ})^{\text{ն}+1}-(1+\text{շ})]}{\text{շ}}$$

$$\text{Նշ.}(1+\text{շ})=\text{Նշ.}(1{,}06)=0{,}0253058653$$

$$(\text{ն}+1)\,\text{Նշ.}(1+\text{շ})=25\;\text{Նշ.}(1{,}06)=0{,}6326466$$

$$(1+\text{շ})^{\text{ն}+1}=4{,}29187$$

ուստի

$$1+\text{շ}=1{,}06$$

ուրեմն

$$(1+\text{շ})^{\text{ն}+1}-(1+\text{շ})=3{,}23187:$$

$$\text{Նշ. ա}=50=1{,}6989700$$

արդ

$$\text{Նշ.}[(1+\text{շ})^{\text{ն}+1}-(1+\text{շ})]=\text{Նշ. }3{,}23187=0{,}5094539$$

$$\text{Լ. Նշ. շ}-10=\text{Լ. Նշ. }0{,}06-10=1{,}221849$$

$$\text{Նշ. Գ}=3{,}4302717$$

ուրեմն

$$\text{Գ}=2693^{\text{ֆ}}{,}225:$$

ՕՐԻՆԱԿ Գ. 825 ֆք. տարեւորութեամբ 57 տարիէն վճարելի ի՞նչ գումար կարեմք փոխ առնել $^0/_0$ին 4,5 շահով։

$$\text{Նշ. }\text{տ} = \text{Նշ. }\text{ա} + \text{Նշ. }[(1+\text{շ})^{\text{ն}}-1] - \text{Նշ. }(1+\text{շ})^{\text{ն}} - \text{Նշ. }\text{շ}\cdot$$

$$\text{Նշ. }(1+\text{շ}) = \text{Նշ. }(1{,}045) = 0{,}01911629$$

$$\text{ն Նշ. }(1+\text{շ}) = 37\text{ Նշ. }(1{,}045) = 0{,}7073027$$

ուստի

$$(1+\text{շ})^{\text{ն}} = 5{,}09686$$

$$\text{Նշ. }\text{ա} = \text{Նշ. }825 = 2{,}9164540$$

$$\text{Նշ. }[(1+\text{շ})^{\text{ն}}-1] = \text{Նշ. }4{,}09686 = 0{,}6124512$$

$$\text{Լ՝ Նշ. }(1+\text{շ})^{\text{ն}} - 10 = \cdot\ \cdot\ \cdot = \bar{1}{,}2926973$$

$$\text{Լ՝ Նշ. }\text{շ} - 10 = \text{Լ՝ Նշ. }0{,}045 - 10 = 1{,}3467875$$

$$\text{Նշ. }\text{տ} = 4{,}1683900$$

հետեւաբար

$$\text{տ} = 14736^{\text{ֆ}}{,}35\ :$$

ՕՐԻՆԱԿ Դ. Ո՞րչափ ժամանակէն 260000 ֆք. գումարը 10000 ֆք. տարեւորութեամբ $^0/_0$ին 3,25 շահով կարելի է հատուցանել։

Ունիմք

$$\text{ն} = \frac{\text{Նշ. }\text{ա} - \text{Նշ. }(\text{ա} - \text{տշ})}{\text{Նշ. }(1+\text{շ})}$$

$$\text{Նշ. }\text{ա} = \text{Նշ. }10000 \qquad = 4$$

$$\text{Նշ. }(\text{ա} - \text{տշ}) = \text{Նշ. }1550 = 3{,}1903317$$

$$\text{Նշ. }\text{ա} - \text{Նշ. }(\text{ա} - \text{տշ} = 0{,}8096683$$

$$\text{Նշ. }(1+\text{շ}) = \text{Նշ. }(1{,}0325) = 0{,}0138901$$

ուրեմն

$$\text{ն} = \frac{0{,}8096683}{0{,}0138901} = 58,\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

գրեթէ 58 տարիէն ։

ՎԵՐՋ

ՑԱՆԿ ՆԻՒԹՈՑ

Ազդ 5

ԳԻՐՔ Ա.

Նախնական ծանօթութիւնք 7
Դաս Ա. Գործածութիւն տառից և նշանաց 8
Դաս Բ. Յաւելում 12
Դաս Գ. Բարձում 15
Դաս Դ. Բազմապատկութիւն 21
Դաս Ե. Բաժանում 30
Դաս Զ. Հանրահաշուական կոտորակք 42
Դաս Է. Հանրահաշուական արմատականք 49

ԳԻՐՔ Բ.

Առաջին աստիճանի հաւասարութեանց լուծում . . . 63
Դաս Ը. Սահմանք 63
Հաւասարութիւն մը լուծելու կանոն 69
Առաջին աստիճանի վերածուող հաւասարութիւնք . . 72
Դաս Թ. Առաջին աստիճանի երկու անծանօթով հաւասարութեանց լուծում 77
Դաս Ժ. Առաջին աստիճանի երեք անծանօթով հաւասարութեանց լուծում 87
Դէպ անհնարութեան և անսահմանութեան 96
Դաս ԺԱ. Առաջին աստիճանի առաջարկութեանց լուծում 100
Դաս ԺԲ. Մի անծանօթով առաջին աստիճանի առաջարկութեանց բացասական լուծմունք . . 110
Առաջարկութեանց տացուածոց մէջ բացասական քանակութեանց մուտք 114
Անհաւասարութիւնք 120
Առաջին աստիճանի մի անծանօթով անհաւասարու-

թիւնք 128
Դաս ԺԳ. Հանրական տարազոց վերայ քննադատու-
թիւն 132
Երեք անծանօթով երեք հաւասարութեանց հանրական
լուծմունք 143
Երկրաչափական առաջարկութեան մի լուծման վերայ
քննադատութիւն 149
Դաս ԺԴ. Քառակուսի և քառակուսի արմատ 155
Դաս ԺԵ. Երկրորդ աստիճանի հաւասարութիւնք . . . 161
Երկրորդ աստիճանի եռեզեր յատկութիւնք 178
Երկրորդ աստիճանի եռեզեր փոփոխմունք 181
Դաս ԺԶ. Կրկնակ քառակուսի հաւասարութեան լու-
ծում 186
. . . . 190
Երկեզր հաւասարութիւնք 193
Եռեզր հաւասարութիւնք . . . .
Երկրորդ աստիճանի երկու անծանօթով հաւասարու-
թիւնք 195
Երկրորդ աստիճանի այլեւայլ անծանօթներով հաւասա-
րութիւնք 200
Երկրորդ աստիճանի այլեւայլ անծանօթօք առաջարկու-
թիւնք 202
Դաս ԺԷ. Մեծագունի և փոքրագունի վերայ մի քանի
հարցմունք 219
Մեծագունի և փոքրագունի վերայ առաջարկութիւնք . 224
Փոխադարձ հաւասարութիւնք 237
Փոխադարձ հաւասարութեանց լուծում 238
Երրորդ աստիճանի հաւասարութեանց լուծում . . . 240
Դաս ԺԸ. Ցառաջատութիւնք 246
Նշանակք 265
Բաղադրեալ շահ և տարեւորութիւն 280

ՀՍԽՀ ՀԱՆՐԱՅԻՆ ԳՐԱԴԱՐԱՆ
С.С.Р.А. Публичная Библиотека
7/XI-1922
имени А. Мясникяна

Գին մէկ քառորդ ռուբլի

1527 15

20.1

ՀՀ Ազգային գրադարան
NL0065273