ՏԱՐԵՐՔ ԶԱՓԱԲԵՐՈՒԹԵԱՆ

ՀԱՄԱՌՕՏ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

Ի ՊԷՏՍ ԱԶԳԱՅԻՆ ԴՊՐՈՑԱՑ

ՆՐԿԱՍԻՐԵԱՑ

Հ. ՄԵՍՐՈՊ ՍԱՀԱԿԵԱՆ

ՄԽԻԹԱՐԵԱՆ

ՄԱՍՆ ԱՌԱՋԻՆ

ՄԱԿԱՐԴԱԿԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

ՎԵՆԵՏԻԿ

Ի ՄԽԻԹԱՐԵԱՆ ՏՊԱՐԱՆԻ

1886

ՏԱՐԵՐՔ ՁԱՓԱԲԵՐՈՒԹԵԱՆ

ՀԱՄԱՌՕՏ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

ՏԱՐԵՐՔ ԶԱՓԱԲԵՐՈՒԹԵԱՆ

ՀԱՄԱՌՕՏ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

Ի ՊԷՏՍ ԱԶԳԱՅԻՆ ԴՊՐՈՑԱՑ

ԵՐԿԱՍԻՐԵԱՑ

Հ. ՄԵՍՐՈՊ ՍԱՀԱԿԵԱՆ

ՄԽԻԹԱՐԵԱՆ

ՄԱՍՆ ԱՌԱՋԻՆ

ՄԱԿԵՐԴԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

ՎԵՆԵՏԻԿ

Ի ՄԽԻԹԱՐԵԱՆ ՏՊԱՐԱՆԻ

1886

ԾԱՆՈՒՑՈՒՄՆ

Տարբեր Երկրաչափութեան դասագիրքս հրատարակելու ժամանակ՝ կարեւոր կը համարինք ըսելու որ թէպէտ գրաբառ կամ աշխարհաբառ լեզուաւ սոյն տեսակ դասագիրք հրատարակեալ են ցարդ թէ 'ի մէնջ և թէ յազգայնոց, սակայն ըստ ընդարձակութեան և ըստ կարգաբանութեան նոր դասագրքի մը պէտքն կը զգացուէր։ Կը յուսանք որ քիչ շատ այս պակասը պիտի լեցնէ նոր աշխատասիրութիւնս, որ ամենեւին համեմատ եւրոպական ծրագրոց ուսմանց, կարեւոր ծառայութիւն մը կրնայ մատուցանել հայ ուսուցչաց և ուսանողաց։

Հետեւեցանք գլխաւորապէս Ամիոյի երկրաչափութեան դասագրոց՝ լաւագոյն դատելով զայն ուրիշներէն. յաւելուած ընելով 'ի վերջէ՝ դասագրոցս մէջ 'ի կիր առնուած ուսումնական բառից գաղղ–հայ և հայ–գաղղ. ցուցակը։

Կը յուսանք որ վայելողք ներողամիտ գտնուին մէջը տեսնուած որ և իցէ ակամայ պակասութեանց։

ՀԱՄԱՌՕՏ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԳԻՏԵԼԻՔ

Սահմանք

1. *Երկրաչափութիւնն կը խօսի մարմնոց ձեւոց և անոնց տարածութեան չափուց վրայ։*

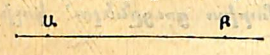
2. *Տարածութիւնն գլխաւոր երեք ուղղութեամբ կրնանք ըմբռնել. ըստ երկայնութեան, ըստ լայնութեան, և ըստ բարձրութեան կամ խորութեան։*

3. *Գիծ է մեծութիւն մը՝ ըստ մէկ ուղղութեան, այսինքն ըստ երկայնութեան միայն։ Գիծը կրնանք երեւակայել որ ձեւացած ըլլայ կէտին շարժմանէն, որով կ'ըլլայ շարք մը ամբաւ կէտերու ըստ մէկ ուղղութեան։*

4 *Երկու տեսակ գիծ կան,* ուղիղ գիծ և կոր գիծ։

Ուղիղ *է այն գիծն՝ որոյ ամէն կէտերն իրենց ուղղութիւնն երբեք չեն փոխեր. կամ, երկու կէտից մէջ ձգուած ամենէն կարճագոյն գիծն է։* Ուստի երկու կէտից մէջ մէկ ուղիղ միայն կրնայ ծգուիլ, *որ վերինին անմիջապէս հետեւանքն է։ Ասկից առաջ կու գայ՝ որ եթէ ուղիղ գծի մը երկու կէտերը դնենք ուրիշ ուղիղ գծի վրայ, այս երկու գծերն ամբողջ երկայնութեամբ զիրար պիտի չօշափեն։*

Կէտ մը նշանակելու համար կը գործածուին այբուբենի որ և իցէ գրերէն մէկն։ — Ուղիղ գիծ մը նշանակելու համար կ'առնունք այս գծին վրայ երկու կէտ, և կը դնենք անոնց վրայ երկու գիր, ինչպէս ԱԲ այն ուղիղ գիծն է՝ որ կ'անցնի Ա և Բ կէտերէն (Ձև 1)։



(Ձև 1)

5. Այն ամէն գիծ որ մէկ ուղղութիւն չունի և ուղիղ գծի մը մասունքներէ ձևացած է, կոչի բեկեալ գիծ։

Կոր գիծ կ'ըսուի այն ամէն գիծը՝ որոյ ամէն կէտերն շարունակ իրենց ուղղութիւնը կը փոխեն։

6. Մակերեւոյթ է մեծութիւն մը՝ որ երկու չափմունք ունի, երկայնութիւն և լայնութիւն. կամ կրնանք ըսել՝ մակերևոյթն է մարմնոյ մը սահմանն՝ որ զայն կը բաժնէ շրջապատող միջոցէն։

Մակերևոյթը կրնանք երևակայել որ ձևացած ըլլայ ուղիղ գծի մը շարժմանէն, բայց ոչ ըստ իրեն ուղղութեան։

Մակարդակ է այն մակերևոյթն՝ որոյ վրայ որ և իցէ երկու կէտերէ ուղիղ գիծ մը քաշելով, շօշափէ զանիկայ ամենայն կէտերով։

7. Մարմին է մեծութիւն մը՝ որ երեք չափմունք ունի, երկայնութիւն, լայնութիւն, և բարձրութիւն կամ խորութիւն։ — Մարմնոյ մը միջոցին մէջ բռնած տեղը կը կոչի տարածոց։

Գիծը, մակերևոյթը և տարածոցը՝ հասարակ անուամբ կը կոչենք ձեւ։

8. Այս տուած սահմաններէն կը ծագի որ երկրաչափութիւնն պիտի խօսի գծերու, մակերևութից և մարմնոց վրայ։ Ասոր համար երկրաչափք երկու մասն կը բաժնեն երկրաչափութիւնը. առաջինն է որ կը խօսի այն ձևերուն վրայ՝ որ մէկ կամ երկու չափմունք ունին, և կոչի Մակարդակաչափութիւն. երկրորդն է՝ որ կը խօսի այն ձևոց վրայ որոնք երկու կամ երեք չափմունք ունին և կոչի Հաստատաչափութիւն։

9. Որովհետև երկրաչափութեան մէջ քանի մը բառեր կան՝ որ ստէպ կը գործածուին, կարևոր կը համարինք անոնց բացատրութիւնը տալ հոս։

10. Հայեցողութիւն է ճշմարտութիւն մը որ բացատրութեան պէտք ունի։ Հայեցողութեան մէջ նախ և առաջ ենթադրութեան մասն կայ, և ինչ կերպ պատճառաբանութիւն որ գործածենք հայեցողութիւնը ճշմարիտ ցուցընելու՝ կոչի Ապացուցութիւն։

11. Հետևանք է այն ճշմարտութիւնն՝ որ հայեցողութիւն մը ապացուցութեամբ հաստատելէն ետև՝ անկէ կը հանենք։

12. Առաջարկութիւն կ'ըսուի խնդիր մը՝ որոյ լուծումն կը խնդրուի։

13. Առածք են այնպիսի ճշմարտութիւնք, որք ապացուցութեան կարօտ չեն, այլ յայտնի ճշմարտութիւնք են։

14. Գլխաւոր առածներն են.

Ա. Բոլորն մեծ է իրեն որ և իցէ մասէն։

Բ. Բոլորն հաւասար է իրեն մասանց գումարին։

Գ. Երկու իր՝ որ հաւասար են երրորդի մը, հաւասար են նաև իրարու։

Դ. Երկու հաւասար քանակութենէ՝ հաւասար քանակութիւն վերցնելով, հաւասարութիւնը չի կորսուիր։

Ե. Երկու հաւասար քանակութեանց վրայ՝ հաւասար քանակութիւնք յաւելլով, հաւասարութիւնն նոյն կը մնայ։

Զ. Անհաւասար քանակութեանց վրայ հաւասար քանակութիւնք աւելցընելով՝ քանակութիւնքն միշտ անհաւասար կը մնան։

Է. Երկու ձև հաւասար են՝ երբ իրարու վրայ դնելով՝ զիրար շօշափեն։

Ը. Երկու քանակութիւնք մի և նոյն թուով բազմապատկելով կամ բաժնելով իրենց զօրութիւնն չի փոխուիր։

ՄԱՍՆ ԱՌԱՋԻՆ

ՄԱԿԱՐԴԱԿԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

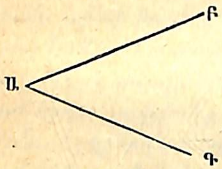
ԳԼՈՒԽ ԱՌԱՋԻՆ

ՅՕԴՈՒԱԾ ԱՌԱՋԻՆ

Անկիւնք. — Ուղղահայեաց

ՍԱՀՄԱՆՔ

1. Անկիւն. — Երբոր մէկ կէտէ՝ ԱԲ, ԱԳ երկու ուղիղ գիծ ձգուին տարբեր ուղղութեամբ, եղած ձեը կոչի անկիւն. ինչպէս ԲԱԳ անկիւնն (Ձև 2)։ ԱԲ, ԱԳ գիծերն կոչին կողմունք անկեան, և Ա կէտն՝ գագաթն անկեան։



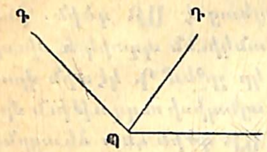
(Ձև 2)

2. Անկիւն մը կարդալու համար՝ պէտք է ձևին վրայի գիրերն գործածել. բայց այնպէս՝ որ միշտ գագաթին վրայ դրուած գիրն, մէկալ երկու ծայրերուն վրայ դրուած գրերուն մէջը գայ. ինչպէս վերի անկիւնը կարդալու համար՝ պէտք է ըսել ԲԱԳ կամ ԳԱԲ անկիւն։

3. Անկեան մը մեծութիւնն չի չափուիր կողմանց երկայնութենէն, այլ անոնց իրարմէ քիչ կամ շատ հեռանալէն, այնպէս՝ որ կողմունքն որչափ իրարու մօտենան՝ այնչափ անկիւնն կը պզտիկնայ, և որչափ հեռանան՝ այնչափ կը մեծնայ անկիւնն։

Ուստի անկեան մը մեծութեան վրայ գաղափար մը տալու համար, ենթադրենք նախ՝ որ ՊԳ կողմն (Ձև 3) դրուած

ըլլայ ՊԲ գծին վրայ. յետոյ սկսինք շրջել զայն Պ գագաթին բոլորտիքը. ՊԳ կողմն որչափ որ հեռանայ ՊԲ գծէն, այնչափ ալ կը մեծնայ ԲՊԳ անկիւնն։



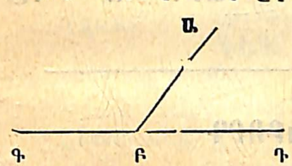
(Ձև 5)

4. Երկու անկիւնք ԱՊԳ, ԱՊԴ մերձաւոր կ'ըսուին, երբ մի և նոյն Պ գագաթն (Ձև 4) ունենան, և ԱՊ մէկ հասարակաց կողմըն, և այս գծիս մէկ կողմը՝ մէկ անկիւնն, և մէկալ կողմը՝ միւսն գտնուի։

5. Ուղիղ գիծ մը ԱՊ ուղղահայեաց կամ խոտոր է (Ձև 4) ուրիշ ԳԴ գծի, ըստ այնմ որ այս գծին հետ երկու հաւասար կամ անհաւասար մերձաւոր անկիւնք ձևացընէ։ Իսկ երկու ուղիղ գծերուն զիրար կտրած Պ կէտն կոչի ոտն ուղղահայեացին կամ խոտոր գծին։

(Ձև 4)

6. Ուղիղ անկիւն կ'ըսուի այն ամէն անկիւն՝ որոյ մէկ կողմն մէկալ կողման ուղղահայեաց է։ Երբոր երկու ուղիղ գիծ՝ ձևացընեն երկու հաւասար մերձաւոր անկիւնք, այս անկիւններն ուղիղ անկիւնք են։ ինչպէս ԳՊԱ և ԴՊԱ (Ձև 4) անկիւնքն։



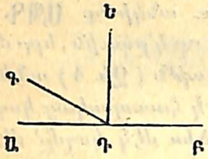
(Ձև 5)

Իսկ թէ որ երկու մերձաւոր անկիւններն հաւասար չըլլան, այլ մէկը մեծ և միւսը փոքր, մեծը կ'ըսուի բութ անկիւն, որ ուղիղ անկիւնէն մեծ է, ինչպէս ԳԲԱ անկիւնն (Ձև 5), և միւս պզտիկը՝ սուր անկիւն, որ ուղիղ անկիւնէն փոքր է, ինչպէս ԴԲԱ անկիւնն՝ մի և նոյն ձևին մէջ։

ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

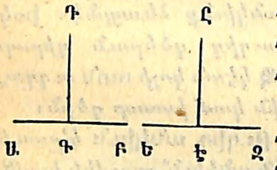
Մէկ ուղիղ գծի վրայ առնելով կէտ մը, այս կէտէն մէկ ուղղահայեաց միայն կրնանք բարձրացընել գծին եւ ոչ աւելի։

Կը բարձրացընեմ Դ կէտէն որ և իցէ ուղիղ գիծ մը ԴԳ, ԱԲ գծին վրայ։ Թէ որ ԱԴԳ, ԲԴԳ մերձաւոր անկիւնքն հաւասար են իրարու, ԴԳ ուղղահայեաց է ԱԲ գծին. իսկ թէ չէ, այլ մէկ անկիւնն պզտիկ և միւսը մեծ, ԴԳ գիծը կը շրջեմ Դ կէտին վրայ մինչև որ առնու այնպիսի ուղղութիւն մը, ինչպէս ԴԵ, որ ԱԲ գծին հետ ձևացընէ երկու հաւասար մերձաւոր անկիւնք. հետևապէս ԴԵ գիծն կ'ըլլայ միայն ուղղահայեաց, զոր կրնանք բարձրացընել Դ կէտէն՝ ԱԲ գծին վրայ (Ձև 6)։



(Ձև 6)

Հետեւանք. — Ամէն ուղիղ անկիւն իրարու հաւասար են։ Ըլլայ ԴԳ ուղղահայեաց ԱԲ գծին, և ԸԷ ուղղահայեաց ԵԶ գծին, կ'ըսենք թէ ԱԴԳ ուղիղ անկիւնն՝ հաւասար է ԵԷԸ ուղիղ անկեան (Ձև 7)։



(Ձև 7)

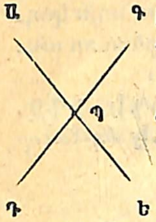
Կը դնեմ ԱԳԴ անկիւնն ԵԷԸ անկեան վրայ, դնելով ԱԲ գիծն ԵԶ գծին վրայ, այնպէս որ Գ կէտն՝ Է կէտին վրայ գայ. ԳԴ ուղղահայեաց ըլլալով ԱԲ գծին, պիտի առնու ԷԸ ուղիղ գծին ուղղութիւնն, որ է ուղղահայեաց ԵԶ գծին. և ԱԳԴ անկիւնն՝ ճիշդ պիտի գայ ԵԷԸ անկեան վրայ։

ՅՕԴՈՒԱԾ ԵՐԿՐՈՐԴ

ՄԵՐՁԱՒՈՐ ԱՆԿԻՒՆՔ. — ԸՆԴԴԻՄԱԴԱԳԱԹՆ ԱՆԿԻՒՆՔ

ՍԱՀՄԱՆՔ

1. Երբոր երկու ուղիղ գիծք զիրար կտրեն՝ կը ձևացընեն չորս անկիւնք, այս անկիւններէն որ և իցէ երկուքն, որոց միոյն կողմունքն միւսոյն կողմանց շարունակութիւնք են, կոչին



(Ձև 8)

ընդդիմադագաձն անկիւնք։ Ինչպէս ԱՊԳ և ԴՊԵ անկիւնքն (Ձև 8)։

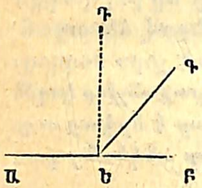
2. Երկու անկիւնք լրացուցիչք կ'ըսուին՝ երբոր երկուքին գումարն հաւասար է մէկ ուղիղ անկեան։

Երկու անկիւնք բովանդակիչք են, երբոր երկուքին գումարն հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց։

Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու ԱԲ, ԳԵ ուղիղ գծերուն զիրար կտրելէն ձևացած երկու մերձաւոր անկեանց ԱԵԳ, ԲԵԳ գումարն՝ հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց կամ 2Ո։

Թէ որ ԳԵ ուղիղ գիծն ուղղահայեաց ըլլայ ԱԲ գծին, յայտնի է թէ այն ատեն ԱԵԳ, ԲԵԳ ուղիղ անկիւնք ըլլալով անոնց գումարն կ'ըլլայ 2Ո։

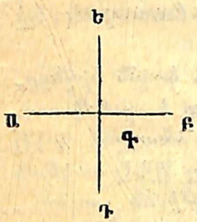


(Ձև 9)

Իսկ թէ որ ուղղահայեաց չըլլայ, կը բարձրացընեմ Ե կէտէն ԵԴ ուղղահայեաց մը՝ ԱԲ գծին վրայ. կը տեսնեմ որ ԱԵԳ բութ անկիւնն՝ մեծ է ԱԵԴ ուղիղ անկիւնէն՝ ԴԵԳ անկեամբ. և ԲԵԳ սուր անկիւնն՝ պզտիկ է ԲԵԴ ուղիղ անկիւնէն՝ նոյն ԴԵԳ անկեամբ։ Ուրեմն երկու մերձաւոր անկեանց գումարն՝

ԱԵԳ+ԲԵԳ=ԱԵԴ+ԲԵԴ=2Ո

Հետեւանք Ա. — Երբ երկու ուղիղ գիծք զիրար կտրելով ձևացընեն չորս անկիւնք, եւ անոնցմէ մին ուղիղ ըլլայ, մնացած երեքն ալ ուղիղ պիտի ըլլան։

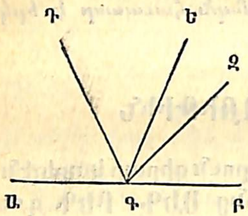


(Ձև 10)

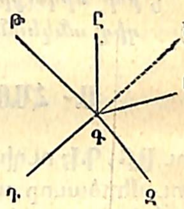
Որովհետև թէ որ ԱԳԵ անկիւնն ուղիղ է, ԲԳԵ անկիւնն որ անոր մերձաւոր անկիւն է, պէտք է որ ուղիղ ըլլայ, վասն զի իրարու բովանդակիչ են։ Նոյնպէս իմացիր միւս անկեանց համար ալ, վասն զի նոյն պատճառաւ ԲԳԵ=ԲԳԴ=ԴԳԱ։

Հետեւանք Բ. — Ուղիղ ԱԲ գծի մը մի եւ նոյն կողմէն՝ Գ կէտէն ձգուած գծերով ձեւացած՝ մերձաւոր անկեանց գումարն՝ հաւասար է երկուց ուղղոց։

Որովհետեւ այս գծերէն ձեւացած ԱԳԴ, ԴԳԵ, ԵԳԶ, ԶԳԲ *անկեանց գումարն հաւասար է*, ԱԳԵ, ԲԳԵ *մերձաւոր անկեանց գումարին* (Ձև 11)։



(Ձև 11)



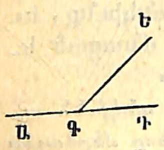
(Ձև 12)

Հետեւանք Գ. — Որ եւ իցէ Գ կէտի մը բոլորտիքն ԳԲ. ԳԶ, ԳԴ... (Ձև 12) ուղիղ գիծերով ձեւացած՝ մերձաւոր անկեանց գումարն՝ հաւասար է չորս ուղղոց։

Որովհետեւ առնելով ԴԷ գիծն, անոր իւրաքանչիւր կողմն եղած մերձաւոր անկեանց գումարն՝ հաւասար է երկուց ուղղոց. ուրեմն Գ կէտին չորս կողմն եղած բոլոր անկեանց գումարն հաւասար է չորս ուղղոց։

Բ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Թէ որ երկու ԱԳԵ, ԴԳԵ մերձաւոր անկեանց գումարն հաւասար է երկուց ուղղոց, երկու կողմունքն ԱԳ, ԴԳ, որ այս անկեանց չեն հասարակ, կը գտնուին ուղիղ գծի վրայ։



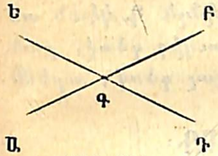
(Ձև 13)

Եթէ ԱԳԵ *անկեան* ԱԳ *կողմն երկնցընենք Գ կէտէն անդին, պէտք է որ ԳԴ ուղղութիւնն առնու, որպէս զի ձեւացընէ ԴԳԵ անկիւնն և բովանդակէ ըլլայ ԱԳԵ անկեան հետ. ապա թէ ԳԴ ուղղութիւնն չառնու, ԳԵ գծին հետ ձեւացուցած անկիւնն ԴԳԵ անկիւնէն կամ պզտիկ կ'ըլլայ և կամ մեծ, որով բովանդակիչ չ'ըլլար ԱԳԵ անկեան։*

Գ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ընդդիմագագաթն անկիւնք հաւասար են իրարու։

Ենթադրենք ԵԳԲ, ԱԳԴ *ընդդիմագագաթն անկիւնք. կ'ըսենք՝ որ այս անկիւնքն իրարու հաւասար են. վասն զի* (Ա)*



(Ձև 14)

ԵԳԱ+ԲԳԵ=2Ո

Նոյնպէս նաև

ԱԳԴ+ԵԳԱ=2Ո

Այս երկու գումարն մի և նոյն քանակութեան հաւասար ըլլալով, իրարու հաւասար են, որով կրնանք գրել.

ԵԳԱ+ԲԳԵ=ԱԳԴ+ԵԳԱ

հաւասարութեան երկու կողմէն հաւասար քանակութիւնք վերցընելով՝ հաւասարութիւնն նոյն կը մնայ. որով

ԲԳԵ=ԱԳԴ։

Նոյն ոճով կրնանք ցուցընել՝ թէ ԵԳԱ=ԲԳԴ։

ՅՕԴՈՒԱԾ ԵՐՐՈՐԴ

ԵՌԱՆԿԻՒՆՔ. — ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԻՒՆ ԵՌԱՆԿԵԱՆՑ

ՍԱՀՄԱՆ

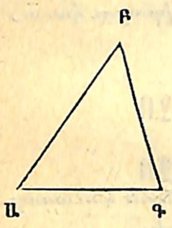
Եռանկիւն է *մակարդակի մը մասն՝ որ երեք ուղիղ գծերէ սահմանեալ է, որոնք երկու երկու զիրար կը կտրեն, և կոչին* կողմունք *եռանկեան*։

Ամէն եռանկեան մէջ կան երեք կողմունք և երեք անկիւնք. և իւրաքանչիւր անկիւն ունի մէկ հակադիր կողմն։

* *փակագծի մէջ գրուած արաբական թիւն կը ցուցընէ յօդուածը, իսկ հայկական թիւն՝ այն յօդուածին որ հայեցողութիւն ըլլալն՝ որոյ վրայ հիմնեալ է ապացուցութիւնն։ Օրինակի համար (4. Բ) կը նշանակէ՝ չորրորդ յօդուածին երկրորդ հայեցողութիւնն։ իսկ միայն (Ա) կը ցուցընէ ներկայ յօդուածին առաջին հայեցողութիւնն։*

Ա․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ամէն եռանկեան մէջ երկու կողմանց գումարն՝ մեծ է երրորդ կողմէն։



(Ձև 15)

Որովհետև Ա կէտէն մինչև Գ կէտն աւելի կարճ է միջոցն՝ ԱԳ ուղիղ գծով, քան որ և իցէ ԱԲ+ԲԳ բեկեալ գծով, ուրեմն ԱԲԳ եռանկեան մէջ

ԱԲ+ԲԳ>ԱԳ։

Հետեւանք․ — Եռանկեան որ եւ իցէ մէկ կողմն՝ մեծ է միւս կողմանց տարբերութենէն։ *վասն զի թէ որ անհաւասար անդամներէն*

ԱԲ+ԲԳ>ԱԳ

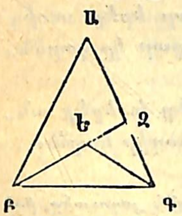
հանենք ԲԳ կողմն, կ՚ունենանք նոր անհաւասարութիւն մը

ԱԲ>ԱԳ−ԲԳ։

Բ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Եթէ ԱԲԳ եռանկեան մէջ առնենք որ եւ իցէ Ե կէտ մը՝ եւ միացընենք այս կէտը երկու ուղիղ գծերով եռանկեան ԲԳ կողման ծայրերուն հետ, այս ԵԲ, ԵԳ գծերուն գումարն՝ փոքր է եռանկեան ԱԲ, ԱԳ կողմանց գումարէն։

Կ՚երկնցընեմ ԲԵ գիծն մինչև Զ կէտը, որով կ՚ունենամ



(Ձև 16)

ԱԲԶ և ԶԵԳ եռանկիւններն։ Գիտենք որ ԲԱԶ եռանկեան մէջ (Ա)

ԲԱ+ԱԶ>ԲԵ+ԶԵ

Նոյնպէս ԶԵԳ եռանկեան մէջ

ԳԶ+ԵԶ>ԳԵ

Այս երկու անհաւասարութիւնքն իրարու հետ գումարելով անդամ առ անդամ՝ կ՚ելլէ․

ԲԱ+ԱԶ+ԳԶ+ԵԶ>ԲԵ+ԵԶ+ԳԵ

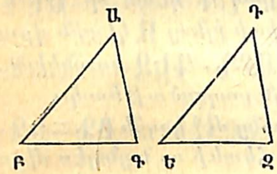
յետոյ դուրս թողլով երկու կողմէն ԵԶ անդամն, կ՚ունենանք,

ԲԱ+ԱԶ+ԳԶ>ԲԵ+ԳԵ

կամ ԲԱ+ԱԳ>ԲԵ+ԳԵ։

Գ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու եռանկիւնք հաւասար են իրարու, երբոր երկու կողմունք եւ անոնց միջի անկիւնն փոխանակաւ իրարու հաւասար ունենան։



(Ձև 17)

Ունենանք ԱԲԳ, ԴԵԶ *երկու եռանկիւնք, յորս անկիւնն* Ա=Դ, ԱԲ=ԴԵ *և* ԱԳ=ԴԶ․ *կ՚ըսենք թէ այս եռանկիւններն իրարու հաւասար են (Ձև 17)։*

Կը դնեմ ԴԵԶ եռանկիւնն ԱԲԳ եռանկեան վրայ, դնելով Դ կէտն Ա կէտին վրայ և Ե կէտը Բ կէտին վրայ, երկու հաւասար կողմունքն ԱԲ, ԴԵ զիրար պիտի չօշափեն․ այն ատեն ԴԶ կողմն պիտի առնու ԱԳ կողման ուղղութիւնն, վասն զի անկիւնն Ա=Դ ըստ ենթադրութեան․ և Զ կէտը պիտի իյնայ Գ կէտին վրայ, վասն զի ԴԶ=ԱԳ, որով և ԵԶ կողմն պիտի իյնայ ԲԳ կողման վրայ։ Ուրեմն ԱԲԳ, ԴԵԶ եռանկիւնքն զիրար պիտի չօշափեն ամենայն տարածութեամբ։

Հետեւանք․ — *Երբ երկու եռանկեանց մէջ* Ա=Դ, ԱԲ=ԴԵ, ԱԳ=ԴԶ *ըլլան, կը հետևի որ նաև* Բ=Ե, Գ=Զ *և* ԲԳ=ԵԶ։

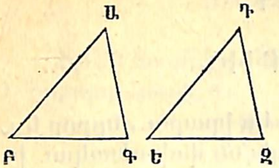
Դ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու եռանկիւնք հաւասար են՝ երբ ունենան մէկ կողմն եւ այս կողման մերձաւոր երկու անկիւնքն՝ փոխանակաւ իրարու հաւասար։

Ունենանք ԱԲԳ, ԴԵԶ *երկու եռանկիւնք, յորս կողմն* ԲԳ=ԵԶ, *և անկիւնն* Բ=Ե, *և* Գ=Զ․ *կ՚ըսենք թէ այս եռանկիւններն իրարու հաւասար են (Ձև 18)։*

Դնենք ԴԵԶ եռանկիւնը ԱԲԳ եռանկեան վրայ, դնե-

լով նախ ԵԶ կողմն ԲԳ կողման վրայ, որք իրարու հաւասար ըլլալով Ե կէտը պիտի իյնայ Բ կէտին վրայ, և Զ կէտը Գ կէտին վրայ։ Եւ որովհետև անկիւնն Ե=Բ, անոր համար ԵԴ գիծն ԲԱ կողման ուղղութեան վրայ պիտի իյնայ, նոյնպէս ԶԴ գիծն ԳԱ կողման վրայ, անկիւնն Զ=Գ ըլլալուն համար։ Որով Դ կէտն՝ որ ԵԴ և



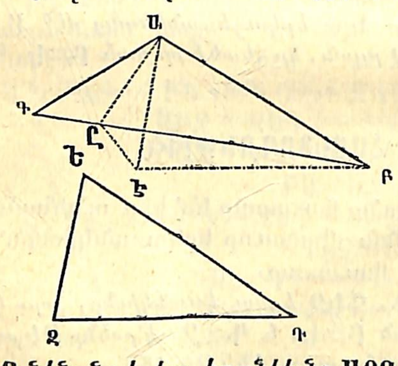
(Զև 18)

ԶԴ ուղիղ գծերուն հասարակ է, պիտի իյնայ Ա կէտին վրա որ հասարակ է ԲԱ, ԳԱ գծերուն. և ԱԲԳ, ԴԵԶ եռանկիւններն զիրար պիտի շօշափեն ամենայն տարածութեամբ։

Հետեւանք. — Երկու եռանկեանց մէջ կողմն ԲԳ=ԵԶ, անկիւնն Բ=Ե և Գ=Զ ըլլալով, կը հետևի որ նոյնպէս միւս ԲԱ=ԵԴ, ԳԱ=ԶԴ, և Ա=Դ.

Ե · ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Թէ որ երկու եռանկիւնք՝ ունենան երկու կողմունք փոխանակաւ իրարու հաւասար, եւ մէկուն այս կողմանց միջի անկիւնն՝ մեծ ըլլայ միւսին կողմանց միջի անկիւնէն, կ՚ըսեմ Թէ մեծ անկեան հակադիր կողմն՝ աւելի մեծ է միւս անկեան հակադիր կողմէն։



(Զև 19)

Ունենանք երկու եռանկիւնք ԱԲԳ, ԵԴԶ, յորս կողմն ԱԲ=ԴԵ և ԱԳ=ԵԶ. և անկիւնն ԲԱԳ մեծ է ԴԵԶ անկիւնէն; կ՚ըսենք Թէ ԲԳ կողմն մեծ է ԴԶ կողմէն։

Կը դնեմ ԴԵԶ եռանկիւնն ԱԲԳ եռանկեան վրայ, այնպէս որ ԴԵ կողմն շօշափէ ԱԲ կողմն. իսկ ԵԶ կողմն պիտի առնու ուրիշ ուղղութիւն մը, զոր օրինակ ԱԷ, որովհետև ըստ ենթադրութեան անկիւնն Ա>Ե։ Կը բաժնեմ ԳԱԷ անկիւնն երկու հաւասար մաս ԱԸ ուղիղ գծով. որ կը կտրէ ԲԳ գիծն Ը կէտին վրայ, և քաշեմ ԸԷ գիծն։ ԱԳԸ և ԱԸԷ եռանկիւնքն հաւասար են, վասն զի ունին հաւասար անկիւն մը երկու (Գ) հաւասար կողմանց մէջ, որով և ԸԳ=ԸԷ։ Արդ ԲԸԷ եռանկեան մէջ կայ (Ա)

ԲԷ<ԲԸ+ԸԷ

և փոխանակ ԸԷի դնելով ԸԳ

ԲԷ<ԲԸ+ԸԳ կամ ԲԷ<ԲԳ

և որովհետև ԲԷ=ԴԶ, ուրեմն

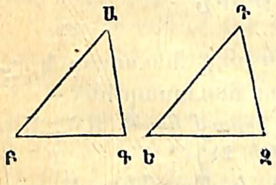
ԴԶ<ԲԳ ։

Հետեւանք. — Փոխադարձաբար կրնանք ըսել որ երկու եռանկիւնք ունենալով երկու կողմունք փոխանակաւ իրարու հաւասար, երրորդ կողմունքն իրարու հաւասար են կամ անհաւասար, ըստ այնմ՝ որ հաւասար կողմանց միջի անկիւնն հաւասար է կամ անհաւասար։

Զ · ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու եռանկիւնք հաւասար են իրարու՝ երբ իրենց երեք կողմունքն երկու երկու փոխանակաւ իրարու հաւասար ըլլան։

Ունենանք ԱԲԳ, ԴԵԶ եռանկիւնքն, յորս կողմունքն ԱԲ=ԴԵ, ԱԳ=ԴԶ և ԲԳ=ԵԶ, կ՚ըսենք Թէ այս երկու եռանկիւնքն հաւասար են իրարու։



(Զև 20)

Ըստ նախընթաց (Ե) հայեցողութեան՝ Ա անկիւնն պէտք է որ Դ անկեան հաւասար ըլլայ, վասն զի կը գտնուին երկու հաւասար կողմանց մէջ, և իրենց ԲԳ, ԵԶ կողմունքն հաւասար են ըստ ենթադրութեան։ Նոյն պատճառաւ կրնանք ցուցընել՝ որ անկիւնն Բ=Ե և Գ=Զ պէտք է ըլլան. որով ԱԲԳ, ԴԵԶ եռանկիւնքն երեք կողմունք և երեք անկիւնք երկու երկու փոխանակաւ հաւասար ունենալով իրարու հաւասար են։

Հետեւանք. — Եթէ երկու եռանկիւնք՝ ունենան երեք կողմունք երկու երկու փոխանակաւ հաւասար կողմանց՝ հակադիր անկիւնքն իրարու հաւասար են։

ՅՕԴՈՒԱԾ ՉՈՐՐՈՐԴ

ՀԱՒԱՍԱՐԱՍՐՈՒՆ ԵՌԱՆԿԻՒՆՔ

ՍԱՀՄԱՆՔ

1. Եռանկիւն մը հաւասարասրուն է՝ երբոր երկու կողմունքն միայն ունենայ իրարու հաւասար։

2. Եռանկիւն մը հաւասարակող է կամ հաւասարանկիւն՝ երբոր երեք կողմունքն կամ երեք անկիւնքն ալ հաւասար ունենայ։

3. Ուղղահայեաց մը երբոր եռանկեան գագաթէն իջնայ մինչև հակադիր կողման կամ անոր շարունակութեան վրայ, կոչի բարձրութիւն եռանկեան. և այն կողմն կ'ըսուի խարիսխ։

4. Հաւասարասրուն եռանկեան մէջ ընդհանրապէս խարիսխ կ'առնուցուի այն կողմն՝ որ միւս կողմանց հաւասար չէ։

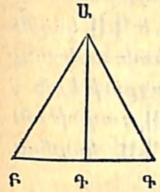
Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Հաւասարասրուն եռանկեան մէջ՝ հաւասար կողմանց հակադիր անկիւնքն՝ իրարու հաւասար են։

Ունենանք ԱԲԳ եռանկիւնն, յորում կողմն ԱԲ=ԱԳ ըլլայ, կ'ըսենք թէ անկիւնն Բ=Գ (Ձև 21)։

Առնունք ԲԳ գծին միջակէտն Դ, և միացընենք Ա գագաթին հետ ԱԴ գծով։ Այս գիծն կը բաժնէ ԱԲԳ եռանկիւնն երկու հաւասար եռանկիւնք ԱԲԴ, ԱԳԴ։ Որովհետև

ԱԴ կողմն երկուքին ալ հասարակ է, և ԱԲ=ԱԳ ըստ ենթադրութեան, և ԲԴ=ԴԳ, որովհետև ԲԳ գիծն երկու հաւասար մաս բաժնեցինք. ուրեմն (3. Չ) ԱԲԴ, ԱԳԴ եռանկիւնքն իրարու հաւասար են. որով Բ անկիւնն՝ որ հակադիր է ԱԴ կողման՝ հաւասար է Գ անկեան, որ հակադիր է նոյն ԱԴ կողման։



(Ձև 21)

Հետեւանք Ա. — Երկու եռանկիւնքն ԱԲԴ, ԱԳԴ հաւասար ըլլալով, անկիւնն ԲԱԴ=ԴԱԳ, նոյնպէս անկիւնն ԲԴԱ=ԳԴԱ. բայց այս վերջի անկիւններն մերձաւորք են իրարու, ուրեմն նաև ուղիղ անկիւնք են. ուստի հաւասարասրուն եռանկեան մը գագաթն եւ խարիսխին միջակէտը միացընող գիծն, ուղղահայեաց է այս խարսխին եւ գագաթան անկիւնն երկու հաւասար մաս կը բաժնէ։

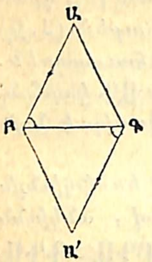
Հետեւանք Բ. — Հաւասարակող եռանկիւն մը՝ է նաև հաւասարանկիւն, այսինքն իրեն անկիւնքն՝ երեքն ալ իրարու հաւասար են։

Բ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

ՓՈԽԱԴԱՐՁԱԲԱՐ. — Թէ որ եռանկեան մը երկու անկիւնքն հաւասար են իրարու, այս անկեանց հակադիր կողմունքն ալ իրարու հաւասար են, եւ եռանկիւնն է հաւասարասրուն։

Ունենանք ԱԲԳ եռանկիւնն, յորում անկիւնն՝ Բ հաւասար ըլլայ Գ անկեանն, կ'ըսենք թէ ԱԳ կողմն ալ հաւասար է ԱԲ կողման (Ձև 22)։

Կը ձևացընեմ ԲԳ կողման վրայ ԲԳԱ՛ եռանկիւնն հաւասար ԱԲԳ եռանկեան, շինելով ԲԳԱ՛ անկիւնն հաւասար ԳԲԱ անկեան, և կողմն ԳԱ՛=ԱԲ։ Այս եռանկիւններն հաւասար են հարկաւ, վասն զի ունին հաւասար անկիւն մը երկու փոխանակաւ հաւասար կողմանց մէջ. ուրեմն ԳԲԱ՛ անկիւնն, հակադիր ԳԱ՛ կողման, հաւասար է ԲԳԱ անկեան, որ հակադիր է ԱԲ կողման, և որով հաւասար ԳԲԱ անկեան։ Այս հաստատելէն ետև, կը դարձընեմ ձևը ԲԳ կողման վրայ և կը դնեմ ԱԲԳ եռանկեան վրայ՝ Ա՛ԲԳ եռանկիւնն․ ԲԱ՛ կողմն կ՚առնու ԲԱ կողման ուղղութիւնն, որովհետև անկիւնն ԳԲԱ՛=ԳԲԱ, և ԳԱ՛ կողմն կ՚իյնայ ԳԱ կողման վրայ, որովհետև նաև անկիւնն ԲԳԱ՛=ԲԳԱ ըստ ենթադրութեան ։ Հետևապէս Ա՛ գագաթն կ՚իյնայ Ա գագաթան վրայ․ և կողմն ԳԱ հաւասար ԳԱ՛ կողման կամ ԲԱ կողման ։



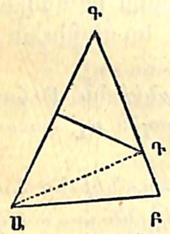
(Ձև 22)

Հետեւանք․ — Հաւասարանկիւն եռանկիւն մը է նաեւ հաւասարակող։ Որովհետև այս հաւասարանկիւն եռանկեան կողմունքն՝ հակադիր են հաւասար անկեանց ։

Գ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Թէ որ եռանկիւն մը ունենայ երկու անհաւասար անկիւն, այն կողմն որ հակադիր է այս անկեանց մեծագունին, աւելի մեծ է քան զմիւս կողմն, որ հակադիր է պզտի անկեան։

Ունենանք ԱԲԳ եռանկիւն մը, յորում Ա > Գ․ կ՚ըսենք, ԳԲ կողմն՝ որ հակադիր է Ա անկեան՝ աւելի մեծ է ԱԲ կողմէն՝ որ հակադիր է Գ անկեան ։



(Ձև 23)

Կը բաժնեմ Ա անկիւնն երկու մասն ԱԴ գծով, այնպէս որ ԳԱԴ անկիւնն՝ հաւասար ըլլայ ԱԳԴ անկեան ։ ԴԱԳ եռանկեան կողմն ԱԴ=ԴԳ, վասն զի հակադիր են հաւասար անկեանց (Բ)․ և որովհետև ԱԲԴ եռանկեան մէջ

ԱԲ < ԱԴ + ԲԴ, ուրեմն

ԱԲ < ԲԴ + ԴԳ կամ ԳԲ կողմէն ։

Հետեւանք․ — Ընդհանուր կերպով կրնանք ըսել՝ որ եռանկեան մը երկու կողմունքն հաւասար են կամ անհաւասար ըստ այնմ՝ երբ անոնց հակադիր անկիւնքն հաւասար են կամ ոչ․ եւ թէ որ անհաւասար ըլլան, միշտ մեծ կողմն՝ մեծ անկեան հակադիր է ։

ՅՕԴՈՒԱԾ ՀԻՆԳԵՐՈՐԴ

ՈՒՂՂԱՀԱՅԵԱՑ ԵՒ ԽՈՏՈՐ ԳԻԾՔ, ԿԷՏԷ ՄԸ ՈՒՂԻՂ ԳԾԻ ՄԸ ՎՐԱՅ ԶԴՈՒԱԾ․ — ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԻՒՆ ՈՒՂՂԱՆԿԻՒՆ ԵՌԱՆԿԵԱՆՑ ։

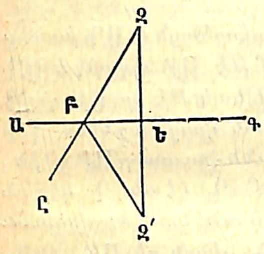
ՍԱՀՄԱՆ

Եռանկիւն մը ուղղանկիւն է՝ երբ իրեն անկեանց մին ուղիղ անկիւն ըլլայ․ և այս անկեան հակադիր կողմը կոչի հակուղիղ։

Ա․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ուղիղ գծէ դուրս եղած կէտէ մը՝ միայն մէկ ուղղահայեաց կրնանք իջեցընել այս գծին վրայ եւ ոչ աւելի ։

Ունենանք ԱԳ գիծն, և այս գծէն դուրս Զ կէտ մը, կը միացընեմ այս Զ կէտն ԱԳ գծին որ և իցէ Բ կէտին հետ, և գծին միւս կողմն կը շինեմ ԳԲԶ՛ անկիւնն՝ հաւասար ԳԲԶ անկեան, և կ՚առնում ԲԶ=ԲԶ՛ և յետոյ կը միացընեմ Զ և Զ՛ կէտերն ։



(Ձև 24)

Երկու եռանկիւնքն ԶԲԵ և Զ՛ԲԵ հաւասար են, վասն զի ԲԶ=ԲԶ՛, և ԲԵ հասարակ է, և անկիւնն ԶԲԵ=Զ՛ԲԵ անկեան, որով և անկիւնն ԲԵԶ=ԲԵԶ՛ ։ Բայց այս անկիւններն մերձաւորք են և իրենց ԶԵ, Զ՛Ե կողմունքն նոյն գծի ուղղութեան վրայ են (2․ Բ), որով և ուղիղ անկիւնք են, ուրեմն ԶԶ՛ գիծն է ուղղահայեաց ԱԳ գծին ։

Երկրորդ, համարինք թէ Զ կէտէն կրնանք ԱԳ գծին վրայ երկու ԶԵ, ԶԲ ուղղահայեացներ իջեցընել․ երկնցընենք ԶԵ գիծն՝ ԵԶ՛ քանակութեամբ հաւասար ԶԵին․ և միացընենք Զ՛ կէտն Բ կէտին հետ ։

Եռանկիւնն ԶԲԵ հաւասար է Զ՛ԲԵ եռանկեան, վասն զի ունին երկու կողմունք և անոնց միջի ԶԵԲ, Զ՛ԵԲ անկիւնքն հաւասար, ուղիղ անկիւնք ըլլալով. որով և անկիւնն ԶԲԵ=Զ՛ԲԵ, և այս երկու անկեանց գումարն երկու ուղիղ անկիւնէն պզտիկ է. վասն զի ԶԲ, Զ՛Բ կողմունքն ուղիղ գծի վրայ չեն (2, Բ), որով ԶԲ և Զ՛Բ գիծերն չեն ուղղահայեաց ԱԳ գծին։ Ուստի Զ կէտէն՝ միայն մէկ ուղղահայեաց կըրնանք ձգել ԱԳ գծին, որ է ԶԵ գիծն։

Բ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

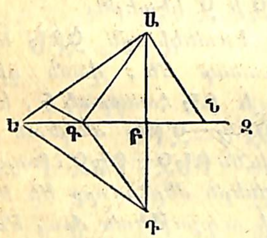
Թէ որ մէկ ուղիղ գծէն դուրս՝ առնեմ կէտ մը եւ անկէ ձգեմ ուղիղ գծին վրայ ուղղահայեաց մը եւ քանի մը խոտոր գծեր,

1. — Ուղղահայեացն ամենէն կարճագոյն գիծն է.

2. — Երկու խոտոր գծեր՝ որ հաւասարապէս հեռու են ուղղահայեացին ոտքէն՝ իրարու հաւասար են.

3. — Երկու խոտոր գծեր՝ որ անհաւասար կերպով հեռու են ուղղահայեացին ոտքէն՝ հեռագոյնն աւելի մեծ է։

1. Կը քաշեմ Ա կէտէն ԱԲ ուղղահայեացն և ԱԳ խոտոր գիծը՝ ԵԶ ուղիղ գծին վրայ, և կ'ըսեմ թէ ԱԲ պզտիկ է ԱԳ գծէն։ Որովհետև թէ որ ԱԲ գծին երկայնութեան վրայ՝ առնում ԲԴ երկայնութիւնն հաւասար ԱԲ գծին, և միացընեմ Գ կէտն Դ կէտին հետ, որով կ'ունենամ եռանկիւնն ԱԲԳ=ԴԲԳ, վասն զի ԱԲ=ԴԲ, և ԳԲ է հասարակ, և անկիւնն



(Ձև 25)

ԱԲԳ=ԳԲԴ

ուղիղ անկիւնք ըլլալով. որով և ԱԳ հաւասար կ'ըլլայ ԳԴ կողման։

Արդ գիտենք որ ԱԴ ուղիղ գիծն՝ պզտիկ է ԱԳ+ԳԴ բեկեալ գծէն. որով և ԱԴ գծին կէսն կամ ԱԲ ուղղահայեացն՝ պզտիկ է ԱԳ+ԳԴ գծին կէսէն, կամ ԱԳ խոտոր գծէն։

2. Կ'առնում ԵԶ գծին վրայ՝ ԱԲ ուղղահայեացին երկու

կողմէն հաւասար հեռաւորութիւնք, ԲԳ, ԲՆ. կը քաշեմ ԱԳ, ԱՆ խոտոր գիծերն, որք հաւասարապէս կը հեռանան ԱԲ ուղղահայեացին ոտքէն, կ'ըսեմ թէ այս երկու գիծերն իրարու հաւասար են։

Որովհետև ԱԲԳ, ԱԲՆ եռանկիւնքն՝ որ ուղիղ անկիւն մը ունին 'ի մէջ երկու հաւասար կողմանց՝ իրարու հաւասար են, ուստի ԱԳ կողմն հակադիր ԱԲԳ ուղիղ անկեան՝ հաւասար է ԱՆ կողման, որ հակադիր է ԱԲՆ ուղիղ անկեան։

3. Ըլլայ ԲԵ միջոցն՝ մեծ ԲՆ միջոցէն, կ'ըսեմ թէ ԱԵ խոտոր գիծն մեծ է ԱՆ գծէն։

Կ'առնում ԲԵ գծին վրայ երկայնութիւնն ԲԳ=ԲՆ, և կը քաշեմ ԱԳ խոտոր գիծն՝ որ հաւասար է ԱՆ գծին, որովհետև երկուքն ալ հաւասարապէս կը հեռանան ԱԲ ուղղահայեացին ոտքէն։ Յետոյ կ'երկնցընեմ ԱԲ գիծը ԲԴ երկայնութեամբ հաւասար ԱԲ գծին, և կը ձգեմ ԴԳ, ԴԵ ուղիղ գիծերն։ Երկու ԵԲԱ, ԵԲԴ անկիւններն ուղիղ ըլլալով ըստ ենթադրութեան՝ ԱԲԵ, ԴԲԵ եռանկիւնքն հաւասար են (3. Գ), որով կողմն ԱԵ=ԴԵ, նոյն պատճառաւ ԱԳ=ԴԳ։ Արդ Գ կէտն գտնուելով ԱԵԴ եռանկեան մէջ, ԱԳ+ԴԳ գծերուն գումարն՝ պզտիկ է ԱԵ+ԴԵ գծերուն գումարէն (3. Բ). ուրեմն ԱԳ խոտոր գիծն՝ որ ԱԳ+ԴԳ գումարին կէսն է, կամ ԱՆ գիծն, պզտիկ է ԱԵ խոտոր գծէն, որ կէսն է ԱԵ+ԴԵ գումարին։

Հետեւանք Ա. — Մի և նոյն կէտէն երկուքէն աւելի հաւասար խոտոր գիծեր չենք կրնար ձգել ուղիղ գծի մը վրայ։

Հետեւանք Բ. — Ուղղահայեացն կը չափէ կէտի մը հեռաւորութիւնն ուղիղ գծէ. վասն զի ամենէն կարճագոյն գիծն է՝ որ կրնանք ձգել այս կէտէն ուղիղ գծին վրայ։

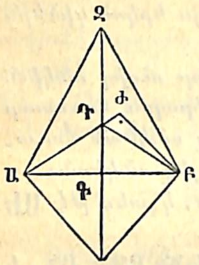
Գ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Թէ որ ԱԲ ուղիղ գծին Գ միջակէտէն քաշենք ուղղահայեաց մը ԶԵ,

1. Ուղղահայեացին ամէն մէկ կէտը հաւասարապէս հեռու է ԱԲ գծին ծայրերէն.

2. Ուղղահայեացէն դուրս եղած որ եւ իցէ կէտ՝ անհաւասար կերպով հեռու է մի եւ նոյն Ա եւ Բ ծայրեէնր։

1․ Որովհետեւ թէ որ է ԱԳ=ԳԲ, երկու խոտոր գիծերն ԱԶ=ԲԶ, վասն զի ուղղահայեացին ոտքէն հաւասարապէս հեռու են․ Նոյնպէս ուրիշ որ եւ իցէ Դ կէտ՝ ԶԳ ուղղահայեացին վրայ առնելով, միշտ ԱԴ=ԲԴ, ինչպէս նաեւ ԱԵ=ԲԵ նոյն պատճառաւ։



(Ձև 26)

2․ Առնում Ժ որ եւ իցէ կէտ մը, որ ԶԵ ուղղահայեացէն դուրս ըլլայ, եւ միացնեմ Ա եւ Բ կէտերուն հետ, կ՚ըսեմ որ ԱԺ > ԲԺ․ որովհետեւ ԲԴԺ եռանկեան մէջ գիտենք որ (3․ Ա)

ԲԴ+ԴԺ > ԲԺ

Բայց որովհետեւ ԲԴ=ԱԴ

ուստի փոխանակ ԲԴի կրնանք դնել ԱԴ, որով

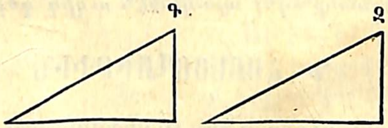
ԱԴ+ԴԺ > ԲԺ կամ ԱԺ > ԲԺ

Ուրեմն Ժ կէտն՝ որ ԶԵ ուղղահայեացէն դուրս է, աւելի մօտ է Բ կէտին քան Ա կէտին։

Ծանօթութիւն․ — Մակարդակ երկրաչափութեան մէջ կոչի տեղի երկրաչափական ուղիղ կամ կոր գիծ մը՝ որոյ ամէն մէկ կէտերն մի եւ նոյն յատկութիւնն ունին, զոր մակարդակին միւս կէտերն չունին։ — Ուրեմն վերի հայեցողութեան ձեւոյն՝ ԶԵ գիծն՝ է տեղի երկրաչափական իրեն բոլոր կէտերուն, որք հաւասարապէս հեռու են Ա եւ Բ կէտերէն։

Դ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու ուղղանկիւն եռանկիւնք հաւասար են՝ թէ որ հակուղիղն եւ անկիւն մը հաւասար ունենան։



(Ձև 27)

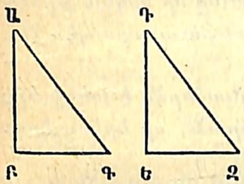
Ունենանք ԱԲԳ, ԴԵԶ երկու ուղղանկիւն եռանկիւնք, Ե եւ Բ իրենց ուղիղ անկիւններն։ Ենթադրենք որ հակուղիղքն ԱԳ=ԴԶ, եւ անկիւնն Գ=Զ, կ՚ըսենք թէ այս եռանկիւններն իրարու հաւասար են։

Դնենք ԴԵԶ եռանկիւնն ԱԲԳ եռանկեան վրայ․ Նախ ԴԶ կողմն ԱԳ կողման վրայ, Զ կէտը Գի վրայ եւ Դ կէտը Աի վրայ։ Այն ատեն ԵԶ կողմն պիտի առնու ԲԳ կողման ուղղութիւնն, վասն զի անկիւնն Գ=Զ․ եւ ԴԵ գիծն ուղղահայեաց ըլլալով ԵԶ գծին, եւ ԱԲ գիծն ԲԳ գծին, ասոնք զիրար կը շօշափեն, որովհետեւ Ա կէտէն ԲԳ գծին վրայ՝ միայն մէկ ուղղահայեաց կրնանք իջեցընել (Ա)։ Հետեւաբար երկու ուղղանկիւն եռանկիւնք ԴԵԶ, ԱԲԳ ամենայն տարածութեամբ զիրար շօշափելով՝ հաւասար են իրարու։

Ե․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու ուղղանկիւն եռանկիւնք հաւասար են՝ թէ որ հակուղիղն եւ ուրիշ կողմ մը հաւասար ունենան։

Ունենանք ԱԲԳ, ԴԵԶ երկու ուղղանկիւն եռանկիւնք, եւ Բ, Ե իրենց ուղիղ անկիւնքն․ ենթադրենք որ ԱԳ=ԴԶ եւ ԱԲ=ԴԵ, կ՚ըսենք որ այս երկու եռանկիւնքն իրարու հաւասար են։



(Ձև 28)

Կ՚առնում ԴԵԶ եռանկիւնը եւ կը դնեմ ԱԲԳ եռանկեան վրայ, դնելով ԴԵ կողմն ԱԲ կողման վրայ, եւ Ե կէտը Բի վրայ, Դ կէտը Աի վրայ․ այն ատեն ԵԶ կողմն կ՚առնու ԲԳ գծին ուղղութիւնն, որովհետեւ Ե եւ Բ ուղիղ անկիւնք են․ եւ ԴԶ հակուղիղն կ՚իյնայ ԱԳին վրայ, որովհետեւ այս երկու հաւասար գիծերն խոտոր են ԲԳ գծին եւ ԱԲ ուղղահայեացին մի եւ նոյն կողմն կը գտնուին (Բ․)։ Ուրեմն ԴԵԶ, ԱԲԳ եռանկիւնքն հաւասար են, վասն զի կողմունքն զիրար կը շօշափեն։

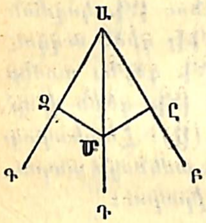
Զ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Անկեան մը կրկնահերձին* վրայ առնելով որ եւ իցէ

* Կրկնահերձ (Bissectrice) կ՚ըսուի այն ուղիղ գիծն՝ որ անկիւն մը երկու հաւասար մասն կը բաժնէ։

կէտ մը, այս կէտն հաւասար հեռաւորութիւն ունի անկեան երկու կողմունքէն։

Ըլլայ ԲԱԳ անկիւնն, և իրեն ԱԴ կրկնահերձին վրայ առնունք Մ կէտը, կ՚ըսենք թէ այս կէտը անկեան երկու կողմունքէն հաւասարապէս հեռու է։



(Ձև 29)

Իջեցընենք Մ կէտէն ԱԲ, ԱԳ կողմանց վրայ երկու ուղղահայեացք. ԱԶՄ, ԱԸՄ ուղղանկիւն եռանկիւնք իրարու հաւասար են։ Որովհետև հակուղիղն ԱՄ է հասարակ, և անկիւնն ԶԱՄ=ԸԱՄ. վասն զի ԱԴ կրկնահերձը երկու հաւասար մաս բաժնած է անկիւնը։ Ուրեմն ԶՄ=ԸՄ։

Նոյն է փոխադարձաբար մտածելով, այսինքն՝ թէ որ ուղղահայեացն ԶՄ=ԸՄ, և հակուղիղն ԱՄ հասարակ ըլլալով եռանկիւնն ԱԶՄ=ԱԸՄ կ՚ըլլայ, որով և անկիւնն

ԶԱՄ=ԸԱՄ։

Հետեւանք Ա. — *Որ և իցէ կէտ մը որ կրկնահերձէն դուրս է, անկեան երկու կողմունքէն անհաւասարապէս հեռու է։*

Հետեւանք Բ. — *Անկեան մը կրկնահերձն է տեղի երկրաչափական անկեան մէջ եղած կէտերուն, որ երկու կողմերէն հաւասարապէս հեռու են։*

ՅՕԴՈՒԱԾ ՎԵՑԵՐՈՐԴ

ԶՈՒԳԱՀԵՌԱԿԱՆ ԳԻԾՔ

ՍԱՀՄԱՆ

Երկու ուղիղ գիծք զուգահեռական *են՝ երբ մի և նոյն մակարդակին վրայ յանհունս երկընցնալով՝ամենևին զիրար չեն կտրեր։*

Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

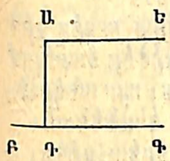
Երկու ուղիղ գիծք որ ուղղահայեաց են երրորդի մը՝ իրարու զուգահեռական են։

(Ձև 30)

Ենթադրենք որ ԱԲ և ԳԴ գիծերն ուղղահայեաց ըլլան մի և նոյն ԵԶ գծին։ Այս գիծերն չեն կրնար զիրար կտրել, որովհետև չենք կրնար մակարդակին մէկ կէտէն երկու ուղղահայեաց ձգել ԵԶ ուղիղ գծին վրայ (Ե. Ա.)։

Բ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Մէկ ուղիղ գծէ դուրս եղած Ա. կէտէն՝ մէկ զուգահեռական կրնանք քաշել այս գծին եւ ոչ աւելի։



(Ձև 31)

Այս ճշմարտութիւնս ցուցընելու համար կը քաշեմ Ա. կէտէն ԱԴ ուղղահայեացն ԲԳ գծին վրայ, և ԱԵ ուղղահայեացն՝ ԱԴ գծին վրայ։ ԱԵ և ԲԳ գիծերն զուգահեռական են, որովհետև երկուքն ալ ուղղահայեաց են ԱԴ գծին (Ա.)։ Ուրեմն կրնանք իբր յայտնի ճշմարտութիւն ըսել՝ որ Ա. կէտէն՝ միայն մէկ զուգահեռական կրնանք քաշել ԲԳ գծին եւ ոչ աւելի։

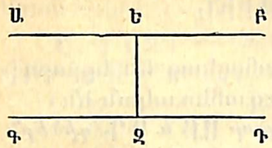
Հետեւանք. — *Թէ որ երկու ուղիղ գիծք զուգահեռական են, որ և իցէ ուղիղ գիծ՝ որ կը կտրէ մէկը, պիտի կտրէ նաև մէկալը։*

Գ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Թէ որ երկու ուղիղ գիծք ԱԲ և ԳԴ զուգահեռականք են, որ եւ իցէ ուղիղ գիծ՝ որ ուղղահայեաց է մէկուն, պէտք է որ ուղղահայեաց ըլլայ նաեւ միւսին։

Ենթադրենք որ ԵԶ գիծն ուղղահայեաց ըլլայ ԳԴ գծին, կ՚ըսենք որ պէտք է նաև ԱԲ գծին ալ ուղղահայեաց ըլլայ։

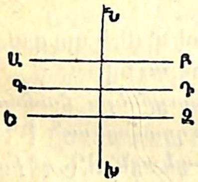
Թէ որ ԱԲ գիծն խոտոր ըլլայ ԵԶ գծին, միշտ Ե կէտէն կրնայինք անոր ուղղահայեաց մը (Ա) քաշել, որ զուգահեռական ըլլար ԳԴ գծին. բայց որովհետեւ ըստ ենթադրութեան ԱԲ զուգահեռական է ԳԴ գծին, ուրեմն պէտք է որ ուղղահայեաց ըլլայ նաեւ ԵԶ գծին։



(Ձև 32)

Հետեւանք. — Երկու ուղիղ գիծք՝ որ զուգահեռական են երրորդի մը, զուգահեռական են իրարու։ Ունենանք ԱԲ, ԳԴ, ԵԶ գիծերն, թէ որ ԱԲ և ԳԴ զուգահեռականք են ԵԶ գծին կ՚ըսենք թէ այս գիծերն իրարու ալ զուգահեռականք են (Ձև 33)։

Որովհետեւ թէ որ քաշենք ՆԽ ուղղահայեաց մը ԵԶ գծին, պէտք է որ (Ա) ուղղահայեաց ըլլայ ԱԲ, ԳԴ գծերուն, որոնք զուգահեռականք են ԵԶ գծին, ուրեմն պէտք է որ նաեւ ԱԲ, ԳԴ գիծերն իրարու զուգահեռական ըլլան։

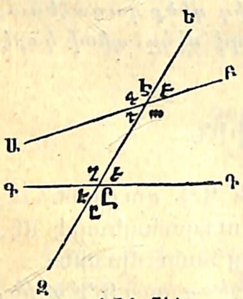


(Ձև 33)

Ծանօթութիւն. — Երբ ուղիղ գիծ մը երկու որ և իցէ ուղիղ գիծեր կտրելով ձեւացընէ ութ հատ անկիւնք, այս անկիւններն մասնաւոր անուններ կ՚ունենան։

Ունենանք ԱԲ, ԳԴ երկու գիծք, և ԵԶ գիծն զանոնք կտրելով՝ ձեւացընէ ութ հատ անկիւնք։

Չորս դ, ա, զ, ե անկիւնքն՝ որ կը գտնուին ԱԲ, ԳԴ գծերուն մէջ՝ կոչին ներքին անկիւնք (Ձև 34)։



(Ձև 34)

Իսկ արտաքին անկիւնք կ՚ըսուին գ, բ, է, ը չորս անկիւնքն՝ որ ԱԲ, ԳԴ գծերէն դուրս են։

Երկու ներքին անկիւնքն դ, ե, կամ ա, զ, որք մերձաւոր չեն իրարու, և ԵԶ հատանողին երկու կողմն կը գտնուին՝ կոչին ներքին փոխադարձ անկիւնք։

Նմանապէս արտաքին անկիւնքն գ, ը կամ բ, է՝ կոչին արտաքին փոխադարձ անկիւնք, որք ԵԶ հատանողին երկու կողմն կը գտնուին և իրարու մերձաւոր չեն։

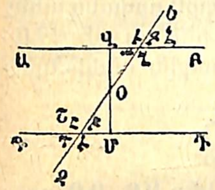
Անկիւնքն բ և ե, ա և ը, գ և զ, դ և է կոչին համակողմեան անկիւնք, որք կը գտնուին հատանողին նոյն կողմն, մէկը ներքին և միւսն արտաքին և իրարու մերձաւոր չեն։

Դ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբոր հատանող մը գայ կտրէ երկու ուղիղ զուգահեռական գիծեր՝ կը ձեւացընէ,

1. Ներքին փոխադարձ հաւասար անկիւնք.
2. Արտաքին փոխադարձ հաւասար անկիւնք.
3. Համակողմեան հաւասար անկիւնք.
4. Հատանողին մի եւ նոյն կողմն՝ երկու երկու ներքին անկեանց գումարն՝ հաւասար է երկու ուղղոց։
5. Հատանողին մի եւ նոյն կողմն՝ երկու երկու արտաքին անկեանց գումարն հաւասար է երկու ուղղոց։

Ենթադրենք որ ըլլան ԱԲ և ԳԴ երկու զուգահեռականք և ԵԶ հատանողն. որով կը ձեւանան ութ անկիւնք, չորսը սուր և չորսը բութ։ Նախ կ՚ուզենք ցուցընել որ այս չորս սուր անկիւնքն իրարու հաւասար են, նոյնպէս նաեւ չորս բութ անկիւնքն։


(Ձև 35)

Երկու սուր անկիւնքն ա և գ իրարու հաւասար են, վասն զի ընդդիմագագաթն անկիւնք են. այսպէս նաեւ բ և դ անկիւնքն։ Բայց այս չորսն ալ իրարու հաւասար ըլլալը ցուցընելու համար՝ ՀՇ գծին միջակէտէն՝ ՎՄ ուղղահայեացն կը քաշեմ ԱԲ և ԳԴ զուգահեռականաց, որով կ՚ունենամ երկու ուղղանկիւն եռանկիւնք ՀՎՕ և ՇՄՕ, որք իրարու հաւասար են (5. Դ), որովհետեւ հակուղիղն ՀՕ=ՇՕ. և անկիւնն ՀՕՎ=ՇՕՄ, ընդդիմագագաթն անկիւնք ըլլալով։ Ուրեմն այս եռանկեանց հաւասարութենէն առաջ կու գայ՝ որ անկիւնն ա=բ. որով չորս սուր անկիւնքն իրարու հաւասար են։

Նոյնպէս կը ցուցուի որ չորս բութ անկիւնքն հաւասար են իրարու, որովհետեւ իւրաքանչիւր բութ անկեան բովանդակին՝ չորս հաւասար սուր անկիւններէն մին է։

Այս հաւասարութիւնն ցուցընելէ ետեւ՝ անմիջապէս կը հետեւի, որ

1. Ներքին փոխադարձ անկիւնքն ա=բ, ը=զ, վասն զի ինչպէս ցուցինք՝ սուր անկիւնքն իրարու՝ եւ բութ անկիւնքն իրարու հաւասար են։

2. Արտաքին փոխադարձ անկիւնքն ե=է, գ=դ. վասն զի իւրաքանչիւրն՝ ներքին փոխադարձ հաւասար անկեանց ընդդիմագագաթն են։

3. Համակողմեան անկիւնքն իրարու հաւասար են, զոր օրինակ գ=բ, զ=է, ե=ը, ա=դ. վասն զի գ=ա եւ ա=բ, ուրեմն գ=բ. նոյնպէս միւս համակողմեան անկիւնքն։

4. Հատանողին մի եւ նոյն կողմը գտնուող, զոր օրինակ զ, բ, ներքին անկիւնքն իրարու բովանդակիչք են. որովհետեւ զ+ա=2Ո եւ ա=բ. ուրեմն զ+բ=2Ո. նոյնպէս նաեւ միւս կողմն գտնուող ներքին անկիւնքն։

5. Հատանողին մի եւ նոյն կողմն գտնուող՝ զոր օրինակ գ եւ է, արտաքին անկիւնքն իրարու բովանդակիչ են. որովհետեւ գ+զ=2Ո եւ զ=է, ուրեմն գ+է=2Ո. նոյնպէս հատանողին միւս կողմի արտաքին անկիւնքն։

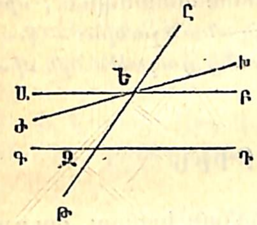
Ե. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

ՓՈԽԱԴԱՐՁՈՒԹԻՒՆ. — Երկու ուղիղ գիծք ԱԲ, ԳԴ զուգահեռական են իրարու՝ երբ ԸԹ հատանողին հետ կը ձեւացրնեն,

1. Ներքին փոխադարձ հաւասար անկիւնք.
2. Արտաքին փոխադարձ հաւասար անկիւնք.
3. Համակողմեան հաւասար անկիւնք.
4. Հատանողին ներքին մի եւ նոյն կողման բովանդակիչ անկիւնք.
5. Հատանողին արտաքին մի եւ նոյն կողման բովանդակիչ անկինք։

Ենթադրենք որ ԳԶՆ և ԲՆԶ ներքին փոխադարձ անկիւնքն հաւասար ըլլան, կ՚ըսենք թէ ԱԲ, ԳԴ ուղիղ գիծերն իրարու զուգահեռականք են։

Որովհետեւ թէ որ ԱԲ և ԳԴ ուղիղ գիծերն՝ զոյ կտրէ ԹԸ հատանողն, և ձեւացընէ հաւասար ներքին փոխադարձ անկիւնք (Գ), այն ատեն պէտք է որ ԱԲ և ԳԴ գիծերն զուգահեռական ըլլան. ապա թէ ոչ կըրնանք Ն կէտէն զուգահեռական մը ԺԽ քաշել ԳԴ գծին. բայց այն ատեն պէտք է որ ԽՆԶ=ԳԶՆ ըլլայ, իբր ներքին փոխադարձ անկիւնք, և որովհետեւ ըստ ենթադրութեան՝ ԳԶՆ=ԲՆԶ, պէտք է որ ԲՆԶ=ԽՆԶ ըլլայ, որ անկարելի է։ Ուրեմն Ն կէտէն ԱԲ գիծն միայն զուգահեռական կրնանք ձգել ԳԴ գծին։



(Ձև 36)

Մի և նոյն ապացուցութեամբ կրնանք մէկալ չորս մասերն ալ ցուցընել։

Հետեւանք. — *Երկու ուղիղ գիծեր՝ զիրար կը կտրեն, երբ հատանողի մը հետ ձեւացընեն՝ երկու ներքին մի և նոյն կողման անկիւնք, որոց գումարն երկու ուղիղ անկիւնէն փոքր է։*

ՑՕԴՈՒԱԾ ԵՕԹՆԵՐՈՐԴ

ԶՈՒԳԱՀԵՌԱԿԱՆ ԵՒ ՈՒՂՂԱՀԱՅԵԱՑ ԿՈՂՄՈՒՆՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ԱՆԿԻՒՆՔ. — ԵՌԱՆԿԵԱՆ ԿԱՄ ՈՐ ԵՒ ԻՑԷ ԲԱԶՄԱՆԿԵԱՆ ՄԸ ԱՆԿԻՒՆՆԵՐՆ Ի՛ՆՉՊԷՍ ԿՐՆԱՆՔ ՑԱՒՆԼՈՒՔ։

ՍԱՀՄԱՆՔ

1. Բազմանկիւն *կ՚ըսուի մակարդակի մաս մը՝ սահմանեալ ուղիղ գծերէ։ Այս գիծերն են բազմանկեան կողմունքն, և իրենց բովանդակութիւնը կը կազմէ ձեւոյն* պարագիծն *կամ* պարաչափն։

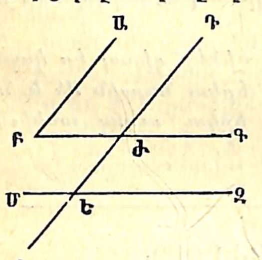
2. *Բազմանկիւն մը՝ որ միայն երեք կողմունք ունի՝ է* եռանկիւն, *չորս կողմունք ունեցողն՝ կոչի* քառակողմն, *հինգ կողմունք ունեցողն՝* հնգանկիւն, *վեց ունեցողն՝* վեց-

անկիւն, ութ ունեցողն՝ ութանկիւն, տասը ունեցողն՝ տասնանկիւն, տասուերկու ունեցողն՝ երկոտասանանկիւն, տասնըհինգ ունեցողն՝ հնգետասանանկիւն, միւս մնացածներն մասնաւոր գործածական անուն չունին։ — Բազմանկեանց երկու անմերձաւոր անկեանց գագաթունքն միացընող գիծն՝ կոչի տրամանկիւն։

Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու անկիւնք՝ որոց կողմունքն իրարու զուգահեռականք են, իրարու հաւասար են, կամ բովանդակիչ։

1. Դնենք թէ ըլլան երկու անկիւնք ԱԲԳ, ԴԵԶ, որոց ԱԲ, ԴԵ կողմունքն զուգահեռականք են, և մի և նոյն ուղղութեամբ ձգուած. նոյնպէս ԲԳ և ԵԶ կողմունքն զուգահեռականք են՝ և մի և նոյն ուղղութեամբ ձգուած. կ'ըսենք թէ այս անկիւնքն հաւասար են իրարու։



(Ձև 37)

Որովհետև անկիւնքն

ԱԲԳ=ԴԺԳ

իբր համակողմեան անկիւնք ԱԲ և ԴԺ զուգահեռականաց և ԲԳ հատանողին մէջ (6. Գ). նոյնպէս անկիւնքն ԴԺԳ=ԴԵԶ մի և նոյն պատճառաւ, ԺԳ և ԵԶ զուգահեռականաց և ԴԵ հատանողին մէջ։ Ուրեմն ԱԲԳ անկիւնն՝ հաւասար է ԴԵԶ անկեան։

2. Անկիւնքն ԱԲԳ, ՄԵՆ, որ ունին զուգահեռական կողմունք՝ և երկու երկու հակառակ կողմն ուղղուած՝ հաւասար են իրարու։

Որովհետև թէ որ երկնցընեմ ՄԵՆ անկեան կողմունքն Ե գագաթէն անդին, կ'ելլէ ԴԵԶ անկիւնն՝ որ հաւասար է ԱԲԳ անկեան, ինչպէս որ վերը ցուցինք. ուրեմն է նաև ԱԲԳ=ՄԵՆ անկեան, վասն զի ՄԵՆ=ԴԵԶ անկեան, իբր ընդդիմագագաթն անկիւն (2. Գ)։

3. Անկիւնքն ԱԲԳ, ԴԵՄ, որոց ԱԲ, ԵԴ կողմունքն

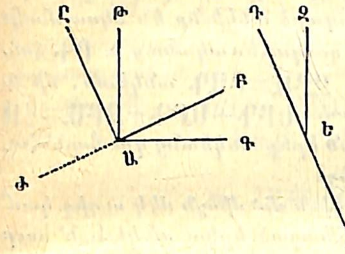
զուգահեռականք են, և մի և նոյն ուղղութեամբ ձգուած, և որոց ԲԳ, ԵՄ կողմունքն զուգահեռական են, բայց հակառակ ուղղութեամբ ձգուած, իրարու բովանդակիչ են։

Երկնցընեմ ՄԵ կողմն Ե գագաթէն անդին, ԴԵԶ անկիւնն հաւասար է ԱԲԳ անկեան, վասն զի իրենց կողմունքն զուգահեռական են, և երկու Ն'ը'ու մի և նոյն ուղղութեամբ ձգուած։ Արդ ԴԵՄ անկիւնն բովանդակիչ է ԴԵԶ անկեան, ուրեմն բովանդակիչ է նաև ԱԲԳ անկեան։

Բ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու անկիւնք՝ որոց կողմունքն իրարու ուղղահայեաց են, եթէ երկուքն ալ սուր կամ երկուքն ալ բութ ըլլան, իրարու հաւասար են. բայց թէ որ մէկը սուր եւ միւսը բութ ըլլայ՝ իրարու բովանդակիչ են։

1. Ըլլան ԲԱԳ, ԴԵԶ երկու անկիւնք, երկուքն ալ սուր, որոց ԲԱ, ԴԵ կողմունքն իրարու ուղղահայեացն են, նոյնպէս ԱԳ, ԶԵ կողմունքն. կ'ըսենք թէ այս անկիւնքն իրարու հաւասար են։ Որովհետև եթէ քաշեմ ԲԱԳ անկեան Ա գագաթէն ԱԹ, ԱԸ ուղիղ գիծերն, զուգահեռականք ԴԵԶ անկեան ԵԶ, ԵԴ կողմանց, և մի և նոյն ուղղութեամբ. այս գիծերն կը ձևացընեն ԸԱԹ



(Ձև 38)

անկիւնն՝ հաւասար ԴԵԶ անկեան (Ա)։ Արդ ԱԹ գիծը զուգահեռական ԵԶ գծին՝ ուղղահայեաց է ԱԳ գծին (6. Գ), և ԱԸ ուղիղ գիծը՝ զուգահեռական ԵԴ գծին՝ ուղղահայեաց է ԱԲ գծին. ուրեմն ԸԱԹ, ԲԱԳ անկեանց լրացուցիչն մի և նոյն է ԲԱԹ անկիւնն, և անոր համար ալ՝ իրարու հաւասար են. ուստի ԴԵԶ անկիւնն հաւասար է ԲԱԳ անկեան։

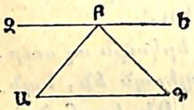
2. Ըլլան ԲԱԳ և ԶԵԷ երկու անկիւնք, մէկը սուր և միւսը բութ. ենթադրենք որ ԱԲ, ԱԳ առաջին անկեան կողմունքն՝ ուղղահայեաց ըլլան ԵԷ, ԵԶ երկրորդ անկեան կող-

մանց. կ'ըսենք թէ այս անկիւններն իրարու բովանդակիչ են։

Ցիրաւի թէ որ երկնցընեմ ԷԵ կողմը՝ որ և իջէ ԵԳ երկայնութեամբ Ն գագաթէն անդին, ԴԵԶ անկիւնն՝ հաւասար կ'ըլլայ ԲԱԳ անկեան, որովհետև իրենց կողմունքը՝ երկու երկու իրարու ուղղահայեաց են, և նոյն տեսակ անկիւնք են. և որովհետև ԴԵԶ անկիւնն՝ որ բովանդակիչ է ԶԵԷ անկեան՝ է սուր անկիւն, ուրեմն ԲԱԳ, ԶԵԷ անկիւններն իրարու բովանդակիչ են։

Գ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Եռանկեան մը անկեանց գումարն հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց։



(Ձև 59)

Ենթադրենք որ ըլլայ ԱԲԳ եռանկիւնն. Բ գագաթէն կը քաշեմ ԶԵ զուգահեռական մը ԱԳ կողման։ Անկիւնն ԵԲԳ=ԲԳԱ անկեան, որովհետև ներքին փոխադարձ անկիւնք են նկատմամբ ԱԳ և ԶԵ զուգահեռականաց և ԲԳ հատանողին. Նոյնպէս անկիւնն ԶԲԱ=ԲԱԳ անկեան, մի և նոյն պատճառաւ. և որովհետև ԵԲԳ+ԱԲԳ+ԶԲԱ=2Ո (2. Բ). ուրեմն ԱԲԳ եռանկեան երեք անկեանց գումարն՝ հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց։

Հետեւանք Ա. — Եռանկիւն մը՝ միայն մէկ ուղիղ կամ բութ անկիւն կրնայ ունենալ, մնացած երկու անկիւնքն՝ սուր անկիւնք են։

Հետեւանք Բ. — Ուղղանկիւն եռանկեան մը սուր անկեանց գումարն՝ հաւասար է մէկ ուղիղ անկեան։

Հետեւանք Գ. — Հաւասարակող եռանկեան իւրաքանչիւր անկիւն՝ հաւասար է ուղիղ անկեան երկու երրորդաց։

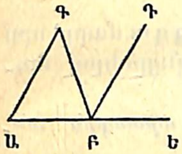
Հետեւանք Դ. — Թէ որ եռանկեան մը երկու անկիւնքն ծանօթ են, այսինքն թէ որ գիտենք թէ ինչ է անոնց գումարն, երրորդ անկիւնը կը գտնուի՝ բառնալով այս գումարը երկու ուղիղ անկիւններէն։

Հետեւանք Ե. — Թէ որ եռանկեան մը երկու անկիւնքն փոխանակաւ հաւասար են ուրիշ եռանկեան մը երկու անկեանց, տաշնոյն երրորդ անկիւնն ալ՝ հաւասար պիտի ըլլայ՝ երկրորդին երրորդ անկեան։

Դ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Եռանկեան մը՝ որ եւ իցէ մէկ կողմը երկնցընելով, ձեւացած արտաքին անկիւնն՝ հաւասար է ներքին երկու անկեանց գումարին, որք մերձաւոր չեն այս արտաքին անկեան։

Ըլլայ ԱԲԳ եռանկիւնն. երկնցընեմ ԱԲ կողմն. կ'ըսեմ թէ ԳԲԵ արտաքին անկիւնն հաւասար է Ա և Գ ներքին անկեանց գումարին։ Այս բանս ցուցընելու համար՝ կը քաշեմ Բ գագաթէն ԲԴ ուղիղ գիծը՝ զուգահեռական ԱԳ կողման։ Անկիւնքն ԱԳԲ, ԳԲԴ հաւասար են՝ իբր ներքին փոխադարձ անկիւնք, նկատմամբ ԱԳ, ԲԴ զուգահեռականաց և ԳԲ հատանողին (6. Դ)։ Նոյնպէս ԳԱԲ, ԴԲԵ անկիւնքն՝ հաւասար են, իբր համակողմեան անկիւնք՝ նկատմամբ նոյն զուգահեռականաց և ԱԵ հատանողին։



(Ձև 15)

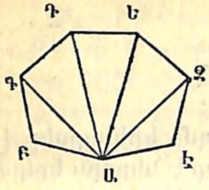
Ուրեմն ԱԳԲ+ԳԱԲ=ԳԲԴ+ԴԲԵ

կամ ԱԳԲ+ԳԱԲ=ԳԲԵ։

Ե. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Կորնթարդ բազմանկեան մը՝ ներքին անկեանց գումարն՝ հաւասար է այնքան երկու ուղիղ անկեանց՝ որչափ որ բազմանկեան մէջ կողմունք կան՝ նուազ երկու։

Բազմանկեան Ա գագաթէն կը քաշեմ այլ և այլ տրամանկիւններ՝ բոլոր մէկալ անմերձաւոր գագաթանց։ Այսով բազմանկիւնը կը բաժնեմ այնքան եռանկիւն, որչափ որ կողմունք ունի՝ նուազ երկու։ Որովհետև իւրաքանչիւր եռանկիւն բազմանկեան հետ՝ միայն մէկ հասարակ կողմ ունի, բաց 'ի ԱԲԳ, ԱԷԶ եռանկիւններէն, որք երկու հասարակ կողմունք ունին, ուստի որոշ կը տեսնուի՝ որ բազմանկեան անկեանց գումարն՝ հաւասար է եռանկեանց բոլոր անկեանց գումարին․ հետեւապէս այս գումարն այնչափ անգամ երկու ուղղոց հաւասար է, որչափ որ բազմանկիւնն կողմունք ունի՝ նուազ երկու։



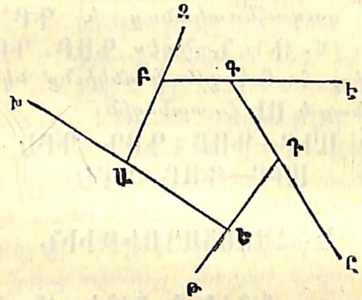
(Ձև 41)

Եթէ բազմանկեան անկեանց գումարը կոչենք Թ, մէջի ձեւացած եռանկեանց գումարին թիւն՝ պիտի ըլլայ Թ—2. և այս եռանկեանց անկեանց գումարն՝ հաւասար է 2 անգամ (Թ—2), կամ որ նոյն է 2Թ—4 ուղիղ անկեանց։

Զ· ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Բազմանկեան մը արտաքին անկեանց գումարը՝ որք կը ծեւանան իւրաքանչիւր կողմունքն երկնցընելով, հաւասար է չորս ուղիղ անկեանց։

Բազմանկեան ԱԲԳԴԵ իւրաքանչիւր արտաքին ան-



(Ձև 42)

կիւնն՝ զոր օրինակ ԲԱԽ, բովանդակիչ ըլլալով ներքին ԲԱԵ անկեան՝ որոյ մերձաւոր է, երկուքին գումարն հաւասար է երկու ուղղոց (2. Ա.)։

Ուրեմն

ԽԱԲ+ԵԱԲ=2Ո
ԶԲԳ+ԱԲԳ=2Ո
ԷԳԴ+ԲԳԴ=2Ո
ԸԴԵ+ԳԴԵ=2Ո
ԹԵԱ+ԴԵԱ=2Ո

Ց′ + Ց″ =2ԹՈ

կոչենք Ց արտաքին անկեանց գումարը, և Ց′ ներքին անկեանցն․ իսկ Թ նշանակէ 2Ո անկեանց գումարին թիւը։ Արդ արտաքին անկեանց գումարն Ց, հաւասար է,

Ց=2ԹՈ−Ց′

և որովհետև նախընթաց հայեցողութեան մէջ տեսանք՝ որ

Ց′=2ԹՈ−4Ո

ուրեմն Ց′ տառին տեղ դնենք իրեն հաւասարութիւնն

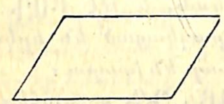
Ց=2ԹՈ−(2ԹՈ−4Ո) կամ Ց′=4Ո

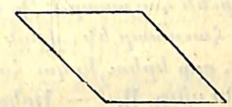
ՑՕԴՈՒԱԾ ՈՒԹԵՐՈՐԴ

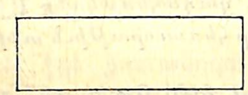
ԶՈՒԳԱՀԵՌԱԳԻԾՔ

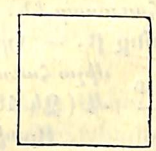
ՍԱՀՄԱՆՔ

1. Զուգահեռագիծ է այն քառակողմն՝ որոյ հակադիր կողմունքն զուգահեռական են (Ձև 43)։


(Ձև 43)


(Ձև 44)


(Ձև 45)


(Ձև 46)

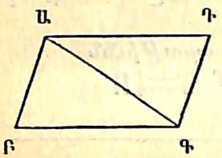
2. Տարանկիւն է զուգահեռագիծ մը, որոյ բոլոր կողմունքն հաւասար են, և անկիւնքն չեն ուղիղ (Ձև 44)։

3. Ուղղանկիւն է զուգահեռագիծ մը, որոյ բոլոր անկիւներն ուղիղ են (Ձև 45)։

4. Քառակուսի է ուղղանկիւն մը, որոյ բոլոր կողմունքն իրարու հաւասար են (Ձև 46)։

Ա· ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Զուգահեռագծի մը հակադիր կողմունքն, ինչպէս նաեւ հակադիր անկիւնքն՝ հաւասար են։



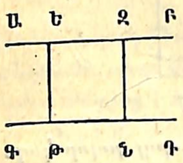
(Զև 47)

Քաշեմ ԱԳ տրամանկիւնը, որով կը բաժնեմ ԱԲԳԴ զուգահեռագիծը երկու եռանկիւն, որք իրարու հաւասար են։ Որովհետև ԱԳ կողմն հասարակ է երկու եռանկեանց, և ԲԱԳ, ԱԳԴ անկիւնքն՝ հաւասար են, իբր ներքին փոխադարձ անկիւնք, ԱԲ և ԳԴ զուգահեռականաց և ԱԳ հատանողին մէջ (6. Դ). Նոյնպէս ԱԳԲ և ԳԱԴ անկիւնքն՝ հաւասար են մի և նոյն պատճառաւ։ Ուրեմն ԱԲ կողմն՝ որ հակադիր է ԱԳԲ անկեան՝ հաւասար է ԳԴ կողման՝ որ հակադիր է ԳԱԴ անկեան. և ԲԳ կողմն՝ որ հակադիր է ԲԱԳ անկեան, հաւասար է ԱԴ կողման՝ որ հակադիր ԱԳԴ անկեան։

Այս երկու եռանկեանց հաւասարութենէն առաջ կու գայ, որ Բ անկիւնն հաւասար է Դ անկեան, և թէ ԲԱԴ. ԲԳԴ անկիւնքն հաւասար են, վասն զի բաղկացած են երկու անկիւններէ, որք երկու երկու հաւասար են իրարու։

Հետեւանք Ա. — Երկու՝ ԱԲ, ԳԴ զուգահեռականներն՝ (Զև 47) որ կը գտնուին ԱԴ և ԲԳ զուգահեռականաց մէջ, իրարու հաւասար են։

Հետեւանք Բ. — Երկու զուգահեռականք ԱԲ և ԳԴ միշտ հաւասար հեռաւորութիւն ունին իրարմէ (Զև 48)։



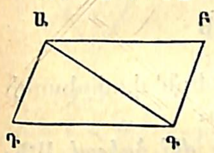
(Զև 48)

Որովհետև եթէ ԱԲ ուղիղ գծին որ և իցէ Ե, Զ կէտերէն ձգեմ ԵԹ, ԶՆ ուղղահայեացներ ԳԴ գծին վրայ, այս գծերն զուգահեռականք կ'ըլլան (6. Ա.) և հաւասար, որովհետև ձգուած են երկու զուգահեռականաց մէջ։ Ուրեմն Ե և Զ կէտերն հաւասարապէս հեռու են ԳԴ գծէն։

Բ· ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Քառակողմ մը՝ որոյ հակադիր կողմունքն հաւասար են, իրարու զուգահեռական են նաեւ, եւ ձեւն ալ զուգահեռագիծ է։

Ըլլայ քառակողմն ԱԲԳԴ, որոյ կողմունքն ԱԲ=ԴԳ և ԱԴ=ԲԳ, կ'ըսեմք թէ այս քառակողման հակադիր կողմունքն՝ զուգահեռական են։ Տրամանկիւնն ԱԳ կը բաժնէ ԱԲԳԴ ձևը երկու հաւասար եռանկիւնք։ Վասն զի այս եռանկեանց երեք կողմունքն՝ երկու երկու փոխանակաւ իրարու հաւասար են, և որովհետև հաւասար եռանկեանց մէջ հաւասար կողմանց՝ հակադիր անկիւնքն հաւասար կ'ըլլան (3. Դ), ուրեմն ԲԱԳ անկիւնն՝ որ հակադիր է ԲԳ կողման, հաւասար է ԱԳԴ անկեան, որ հակադիր է ԱԴ կողման։



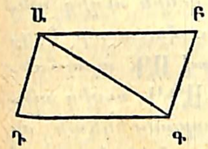
(Զև 49)

Արդ այս երկու հաւասար անկիւններն՝ կրնանք ներքին փոխադարձ անկիւններ համարել նկատմամբ երկու ուղիղ գծերու ԱԲ, ԳԴ և ԱԳ հատանողին. որով ըսել է թէ ԱԲ գիծն զուգահեռական է ԳԴ գծին (6. Ե)։

Կրնանք նմանապէս ցուցընել որ ԲԳ զուգահեռական է ԱԴ գծին. ուրեմն ԱԲԳԴ ձևն է զուգահեռագիծ մը։

Գ· ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որ եւ իցէ քառակողմ մը՝ որոյ երկու հակադիր կողմունքն հաւասար են եւ զուգահեռականք՝ է զուգահեռագիծ մը։



(Զև 50)

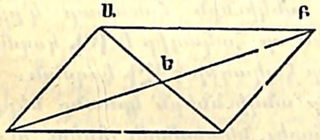
Ենթադրենք որ ԱԲԳԴ քառակողման ԱԲ կողմը հաւասար և զուգահեռական ըլլայ ԴԳ կողման. կ'ըսեմք թէ միւս երկու կողմունքն ալ՝ հաւասար և զուգահեռական պիտի ըլլան, և ձևն ալ զուգահեռագիծ։

Ու այս՝ կը քաշեմ ԱԳ տրամանկիւնն, որով կը ձևանան երկու հաւասար եռանկիւնք. որովհետեւ ԱԳ կողմն է հասարակ, եւ ԱԲ=ԳԴ ըստ ենթադրութեան, եւ ԲԱԳ, ԱԳԴ անկիւնքն հաւասար են, իբր ներքին փոխադարձ անկիւնք՝ նկատմամբ ԱԲ, ԳԴ զուգահեռականաց եւ ԱԳ հատանողին. ուրեմն այս եռանկիւնքն հաւասար ըլլալով՝ պէտք է որ ԱԴ=ԲԳ, նոյնպէս անկիւնն ԴԱԳ=ԱԳԲ, որով ԱԴ զուգահեռական է ԲԳ գծին, եւ ԱԲԳԴ քառակողմն՝ է զուգահեռագիծ մը։

Դ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Զուգահեռագծի մը տրամանկիւններն՝ փոփոխակի զիրար երկու հաւասար մաս կը կտրեն։

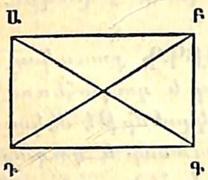
Որովհետեւ ԱԲԳԴ զուգահեռագծին մէջ ձգելով ԱԳ, ԲԴ տրամանկիւններն, կու գան զիրար կը կտրեն Ե կէտին վրայ, եւ կը ձեւացընեն չորս եռանկիւնք. առնունք ԱԲԵ եւ ԳԴԵ եռանկիւնքն, որք իրարու հաւասար են. որովհետեւ ԱԲ=ԳԴ զուգահեռագծի մէջ ըլլալով (Ա), եւ ԱԲԵ անկիւնն՝ հաւասար է ԳԴԵ անկեան, իբր ներքին փոխադարձ անկիւնք. նոյնպէս ԲԱԵ եւ ԳԴԵ անկիւնքն հաւասար են նոյն պատճառաւ։ Հետեւապէս այս եռանկիւններն հաւասար ըլլալով՝ անոնց հաւասար անկեանց հակադիր կողմունքն ալ հաւասար են իրարու. ինչպէս ԱԵ=ԵԳ եւ ԴԵ=ԵԲ։



(Ձև 51)

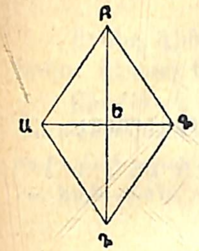
Հետեւանք Ա. — Ուղղանկեան մը տրամանկիւններն հաւասար են իրարու։

Որովհետեւ ԱԴԳ, ԲԳԴ եռանկիւնքն հաւասար են, վասն զի ունին ուղիղ անկիւն մը՝ երկու իրարու հաւասար կողմանց մէջ (Ե. Ե)։ Որով ԱԳ տրամանկիւնն՝ որ հակադիր է ԱԴԳ ուղիղ անկեան, հաւասար է ԲԴ տրամանկեան, որ հակադիր է ԲԳԴ ուղիղ անկեան։ Որով կրնանք ըսել նաեւ, որ եւ իցէ զուգահեռագիծ՝ որոյ տրամանկիւններն հաւասար են, է ուղղանկիւն մը։



(Ձև 52)

Հետեւանք Բ. — Տարանկեան մը տրամանկիւններն իրարու ուղղահայեաց են։



(Ձև 53)

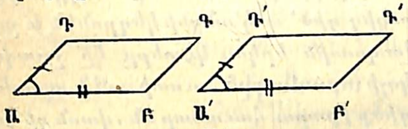
Որովհետեւ ԲԴ տրամանկիւնը, որոյ Բ եւ Դ կէտերն՝ հաւասարապէս հեռու են ԱԳ տրամանկեան երկու ծայրերէն, ուղղահայեաց է այս գծին, եւ զայն երկու հաւասար մասն կը բաժնէ։

Հետեւանք Գ. — Քառակուսւոյ մը տրամանկիւններն թէ՛ հաւասար են իրարու եւ թէ՛ ուղղահայեաց։

Որովհետեւ քառակուսին թէ՛ ուղղանկիւն է եւ թէ՛ տարանկիւն (Ձև 46)։

Ե. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու զուգահեռագիծք հաւասար են՝ երբոր ունենան հաւասար անկիւն մը, երկու փոխանակաւ հաւասար կողմանց մէջ։



(Ձև 54)

Ունենանք ԱԲԳԴ, Ա′Բ′Գ′Դ′ երկու զուգահեռագիծք, որք ունենան Ա անկիւնը հաւասար Ա′ անկեան, եւ կողմունքն ԱԴ=Ա′Դ′. ԱԲ=Ա′Բ′, կ՚ըսենք թէ այս երկու զուգահեռագիծք իրարու հաւասար են։

Վասն զի թէ որ ԱԲԳԴ զուգահեռագիծը դնեմ Ա′Բ′Գ′Դ′ զուգահեռագծին վրայ, դնելով ԱԲ կողմը Ա′Բ′ կողման վրայ, Ա եւ Ա′ անկիւններն իրարու հաւասար ըլլալով՝ ԱԴ կողմը՝ պիտի իյնայ Ա′Դ′ կողման վրայ, եւ Դ կէտը՝ Դ′ կէտին վրայ։ Եւ ԴԳ կողմը զուգահեռական ըլլալով ԱԲ կողման՝ պիտի առնու Դ′Գ′ ուղղութիւնը որ զուգահեռական է Ա′Բ′ կողման։ Մի եւ նոյն պատճառաւ ԲԳ կողմը պիտի իյնայ Բ′Գ′ կողման վրայ. հետեւապէս Գ կէտը պիտի գայ Գ′ կէտին վրայ, որով երկու զուգահեռագիծներն զիրար պիտի ծածկեն։

Հետեւանք. — Երկու ուղղանկիւնք հաւասար են՝ երբոր երկու մերձաւոր կողմունք փոխանակաւ հաւասար ունենան։

ԳԼՈՒԽ ԵՐԿՐՈՐԴ

ՑՕԴՈՒԱԾ ԻՆՆԵՐՈՐԴ

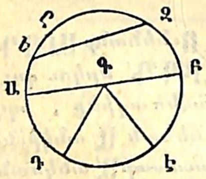
ՇՐՋԱՊԱՏ ԲՈԼՈՐԱԿԻ. — ԱՂԵՂԱՆՑ ԵՒ ԼԱՐԵՐՈՒ ԻՐԱՐՄԷ ՓՈՓՈԽԱԿԻ ԿԱԽՈՒՄՆ։

ՍԱՀՄԱՆՔ

1. Շրջապատ *է այն սահմանափակ կոր գիծն, որոյ ամէն մէկ կէտն հաւասարապէս հեռու է ներքին կէտէ մը՝ որ կոչի* կեդրոն։

2. Բոլորակն *է մակարդակին այն մասն՝ որ շրջապատով չափուած է։*

3. Շառաւիղ. — *Բոլորակի մը կեդրոնէն առ շրջապատն ձգուած ուղիղ գիծերն կ'ըսուին* շառաւիղք. *որով ամէն շառաւիղք իրարու հաւասար են։ Որ և իցէ ուղիղ գիծ՝ որ կ'անցնի կեդրոնէն և շրջապատին երկու կէտերը կը շօշափէ՝ կոչի* տրամագիծ. *ուստի ամէն տրամագիծք իրարու հաւասար են, վասն զի հաւասար են երկու շառաւիղաց։*



(Ձև 55)

4. *Շրջապատին որ և իցէ մաս մը կոչի* աղեղ. լար *է այն գիծն, որ աղեղան երկու ծայրերը իրարու հետ կը միացնէ։*

5. *Մէկ լարն՝ երկու աղեղ ունի, մէկը մեծ և միւսը փոքր, որոց միութիւնն կը ձևացնէ զշրջապատն։ Բայց այս երկու աղեղներէն փոքրագոյնն միայն կը գործածուի խնդրոց մէջ։*

Վերի դրած ձևոյն մէջ (Ձև 55) ԳԱ, ԳԲ, ԳԴ, ԳԷ *են շառաւիղք.* ԱԲ *գիծն՝ է տրամագիծ, շրջապատին* ԵՀԶ *մասն՝ է աղեղ, և* ԵԶ *գիծն է լար։*

Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

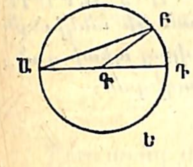
Ուղիղ գիծ մը բոլորակին շրջապատը առ առաւելն երկու կէտով կրնայ կտրել։

Որովհետև եթէ երեք կէտով կտրէր, այս երեք կէտերն հաւասար հեռաւորութիւն պիտի ունենային կեդրոնէն, և որով պիտի ըլլար երեք հաւասար ուղիղ գիծք՝ ձգեալ նոյն կէտէ առ նոյն գիծն, որ անկարելի է։

Բ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

1. Որ եւ իցէ լար փոքր է տրամագծէն։

2. Տրամագիծն՝ երկու հաւասար մասն կը բաժնէ բոլորակը եւ շրջապատը։



(Ձև 56)

1. *Որովհետև* ԱԲ *լարին (Ձև 56) ծայրերը միացնելով* Գ *կեդրոնին հետ՝* ԲԳ, ԱԳ *շառաւիղներով գիտենք, որ*

ԱԲ < ԱԳ + ԲԳ *կամ* ԱԲ < ԱԴ։

Ուրեմն ամենէն մեծ լարն՝ է տրամագիծն։

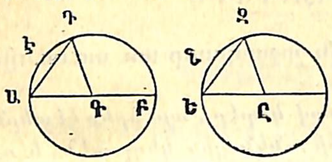
2. *Որովհետև եթէ* ԱԲԴ *մասը՝ դարձընեմ* ԱԴ *տրամագծին վրայ և դնեմ* ԱԵԴ *մասին վրայ, պէտք է որ* ԱԲԴ *կոր գիծն՝ շօշափէ* ԱԵԴ *ամէն կէրպով, որովհետև իրենց ամէն մէկ կէտերն՝ հաւասար հեռաւորութիւն ունին կեդրոնէն։ Ուրեմն* ԱԴ *տրամագիծն երկու հաւասար մասն կը բաժնէ բոլորակն ու շրջապատը։*

Գ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Մի եւ նոյն բոլորակի կամ երկու հաւասար բոլորակաց մէջ՝ հաւասար աղեղներ՝ հաւասար լար ունին. եւ փոխադարձաբար, հաւասար լարեր՝ հաւասար աղեղ ունին։

Ունենանք երկու բոլորակք ԳԱ, ԸԵ, *իրարու հաւասար. որոց աղեղներն* ԱԷԴ, ԵՆԶ *հաւասար ըլլան. կ'ըսենք թէ այս աղեղաց լարերն ալ՝ իրարու հաւասար են։*

Թէ որ այս բոլորակներն իրարու վրայ դնենք՝ զիրար պիտի շօշափեն ըստ ամենայն տարածութեան, և որովհետև ԱԷԴ, ԵՆԶ աղեղներն իրարու հաւասար են, պէտք է որ Ա կէտը Ե կէտին վրայ դնելով, Դ կէտը Զ կէտին վրայ գայ, որով այս ԱԴ, ԵԶ լարերը զիրար շօշափելով՝ իրարու հաւասար են։



(Ձև 57)

ՓՈԽԱԴԱՐՁԱԲԱՐ. — Ըլլալով լարերն ԱԴ=ԵԶ, կ'ըսենք թէ ԱԷԴ, ԵՆԶ աղեղներն իրարու հաւասար են։

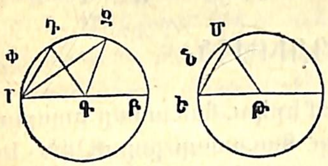
Վասն զի ձգելով ԳԱ, ԳԴ, ԸԵ, ԸԶ շառաւիղներն, երկու եռանկիւնքն ԴԳԱ=ԶԸԵ, վասն զի իրենց կողմունքն փոխանակաւ իրարու հաւասար են. որով նաև անկիւնքն ԱԳԴ=ԵԸԶ։ Արդ դնելով այս երկու բոլորակներուն կեդրոններն իրարու վրայ, և Զ կէտը Դ կէտին վրայ՝ ԱԴ լարը պիտի առնու ԵԶ լարին ուղղութիւնը, վասն զի անկիւնքն ԱԳԴ=ԵԸԶ. որով Ա և Ե կէտերն իրարու վրայ պիտի գան, և ԵՆԶ աղեղն հաւասար պիտի ըլլայ ԱԷԴ աղեղան։

Գ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Մի եւ նոյն բոլորակի կամ երկու հաւասար բոլորակաց մէջ՝ թէ որ երկու աղեղներ իրարու անհաւասար են, եւ կիսաշրջապատէն փոքր, մեծագոյն աղեղան լարն մեծ է, եւ փոխադարձաբար։

Համարինք թէ ԱՓԶ աղեղն մեծ ըլլայ ԵՆՄ աղեղէն, կ'ըսենք թէ ԱԶ լարն՝ մեծ է ԵՄ լարէն։ — Կ'առնում ԱԶ աղեղին վրայ

ԱՓԴ=ԵՆՄ



(Ձև 58)

որով լարն ԱԴ հաւասար կ'ըլլայ ՄՆ լարին (Գ), և կը քաշեմ ԳԴ, ԳԱ շառաւիղներն։ Երկու ԱԶԳ, ԱԴԳ եռանկեանց մէջ երկու կողմունքն իրարու հաւասար են, և անկիւնն ԱԳԶ > ԱԳԴ. որով երրորդ կողմն ԱԶ մեծ է ԱԴ երրորդ կողմէն, որ է ըսել ԱԶ > ԵՄ։

ՓՈԽԱԴԱՐՁԱԲԱՐ. Եթէ ԱԶ լարն մեծ է ԵՄ լարէն, պէտք է որ ԱՓԶ աղեղն՝ մեծ ըլլայ ԵՆՄ աղեղէն։ Որովհետև եթէ ԱՓԶ աղեղն հաւասար ըլլայ ԵՆՄ աղեղան, պէտք է որ ԱԶ լարն հաւասար ըլլայ ԵՄ լարին, որ մեր ենթադրութեան հակառակ է. և եթէ ԱՓԶ աղեղն փոքր ըլլայ ԵՆՄ աղեղէն, պէտք է որ նաև ԱԶ լարն փոքր ըլլայ ԵՄ լարէն, որ նոյնպէս հակառակ է մեր ենթադրութեան։

ԾԱՆՕԹՈՒԹԻՒՆ. — Վերի հայեցողութեան մէջ ենթադրեցինք որ աղեղներն կիսաշրջապատէն փոքր ըլլան, վասն զի եթէ մեծ ըլլան հակառակ յատկութիւն կ'ունենան։

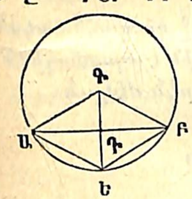
ՅՕԴՈՒԱԾ ՏԱՍՆԵՐՈՐԴ

ՇԱՌԱՒԻՂՆ ՈՒՂՂԱՀԱՅԵԱՑ ԼԱՐԻ ՄԸ՝ ԵՐԿՈՒ ՀԱՒԱՍԱՐ ՄԱՍՆ ԿԸ ԲԱԺՆԷ ԱՅՍ ԼԱՐՆ ԵՒ ԱՆՈՐ ԱՂԵՂՆ։

Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Շառաւիղ մը՝ որ ուղղահայեաց է լարի մը, երկու հաւասար մասն կը բաժնէ այս լարը եւ անոր աղեղը։

Ունենամ ԳԵ շառաւիղն ուղղահայեաց ԱԲ լարին. կը քաշեմ ԳԱ, ԳԲ շառաւիղներն. այս երկու գծերն նկատմամբ ԳԵ ուղղահայեացին՝ երկու հաւասար խոտոր գծեր են, որով նաև հաւասարապէս հեռու՝ ուղղահայեացին ոտքէն, ուրեմն ԱԴ=ԴԲ։ Դարձեալ, ԱԴ=ԴԲ ըլլալով ԳԵ ուղղահայեաց մ'է ԱԲ լարին միջակէտին, որով այս ուղղահայեացին որ և իցէ կէտն՝ հաւասարապէս հեռու է Ա և Բ ծայրերէն։



(Ձև 59)

Արդ այս կէտերէն մին՝ է Ե կէտն. ուրեմն ԱԵ միջոցն հաւասար է ԵԲ միջոցին։ Եթէ ԱԵ լարն հաւասար է ԵԲ լարին, անոնց աղեղներն ալ իրարու հաւասար են, որով աղեղն ԱԵ=ԵԲ աղեղան. ուրեմն ԳԵ շառաւիղն՝ որ ուղղահայեաց է ԱԲ լարին՝ երկու հաւասար մասն կը բաժնէ այս լարը և անոր աղեղը։

Հետեւանք Ա. — Բոլորակին կեդրոնն՝ լարին միջակէտն եւ անոր աղեղան միջակէտն կը գտնուին մի եւ նոյն ուղիղ գծին վրայ որ ուղղահայեաց է այս լարին։

Վերի ապացուցած հայեցողութենէն կը հետևին վեց ճշմարտութիւնք, այսինքն

1. Շառաւիղ մը՝ որ ուղղահայեաց է լարի մը, երկու հաւասար մասն կը բաժնէ այս լարը եւ անոր աղեղը։

2. Լարի մը միջակէտէն ուղղահայեաց մը բարձրացընելով՝ այս ուղղահայեացն կ՚անցնի բոլորակին կեդրոնէն եւ լարին աղեղան միջակէտէն։

3. Աղեղան մը միջակէտէն քաշենք ուղղահայեաց մը անոր լարին վրայ. այս ուղղահայեացն կ՚անցնի լարին միջակէտէն եւ բոլորակին կեդրոնէն։

4. Լարի մը միջակէտէն քաշուած շառաւիղ մը ուղղահայեաց է լարին, եւ անոր աղեղը երկու հաւասար մասն կը բաժնէ։

5. Շառաւիղ մը՝ որ կ՚անցնի աղեղան մը միջակէտէն, այս աղեղան լարը երկու հաւասար մասն կը բաժնէ, եւ անոր ուղղահայեաց է։

6. Աղեղան մը եւ անոր լարին միջակէտէն ուղիղ գիծ մը քաշելով՝ այս գիծն կ՚անցնի բոլորակին կեդրոնէն եւ ուղղահայեաց է լարին։

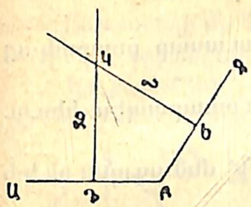
Հետեւանք Բ. — *Բոլորակի մը մէջ զուգահեռական լարերուն միջակէտաց երկրաչափական տեղին է տրամագիծն, որ ուղղահայեաց է այս տուեալ ուղիղ գծերէն մէկուն։*

Բ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երեք կէտք Ա, Բ, Գ, որք մի եւ նոյն ուղիղ գծի վրայ չեն գտնուիր, կը սահմանեն շրջապատ մը։

Կը քաշեմ ԱԲ, ԲԳ ուղիղ գծերն, յետոյ այս գծերուն Դ և Ե միջակէտէն կը բարձրացընեմ ԴԶ, ԵՆ ուղղահայեացք ԱԲ և ԲԳ գծերուն։ Այս ուղղահայեացներն գիրար պիտի կտրեն, վասն զի ԱԲ, ԲԳ գծերն զուգահեռական չեն իրարու։

Համարինք թէ ըլլայ Կ երկու գծերուն գիրար կտրած կէտը. այս կէտը գտնուելով ԴԶ ուղղահայեացին վրայ, հաւասարապէս հեռու է Ա և Բ կէտերէն. Նոյնպէս Կ կէտն գտնուելով ԵՆ ուղղահայեացին վրայ, հաւասարապէս հեռու է Բ և Գ կէտերէն, ուրեմն Կ կէտն հաւասար հեռաւորութիւն ունի Ա, Բ, Գ կէտերէն։ Դարձեալ, միայն այս կէտն է՝ որ այս յատկութիւնն ունի, որովհետև ուրիշ որ և իցէ կէտ, պէտք է որ կամ ԴԶ և կամ ԵՆ գծէն դուրս ըլլայ, որով անհաւասար կերպով կը հեռանայ Ա, Բ, Գ կէտերէն։



(Ձև 60)

Առնելով ԱԿ շառաւիղ և Կ կէտը կեդրոն, քաշենք շրջապատ մը, այս շրջապատը պէտք է որ անցնի Ա, Բ, Գ կէտերէն։

Հետեւանք. — *Երկու շրջապատք՝ որ երեք կէտեր հասարակ ունին գիրար կը շօշափեն։*

ՅՕԴՈՒԱԾ ՄԵՏԱՍԱՆԵՐՈՐԴ

ՀԱՒԱՍԱՐ ՈՒ ԱՆՀԱՒԱՍԱՐ ԼԱՐԵՐՈՒ՝ ԿԵԴՐՈՆԷՆ ՈՒՆԵՑԱԾ ՀԵՌԱՒՈՐՈՒԹԻՒՆԸ. — Ի՛ՆՉ ԿԵՐՊՈՎ ՈՒՂԻՂ ԳԻԾ ՄԸ ՇՕՇԱՓՈՂ Է ՇՐՋԱՊԱՏԻ ՄԸ. — ԶՈՒԳԱՀԵՌԱԿԱՆ ԼԱՐԵՐԷ ԿՏՐՈՒԱԾ ԱՂԵՂՆԵՐԸ ԻՐԱՐՈՒ ՀԱՒԱՍԱՐ ԵՆ։

ՍԱՀՄԱՆՔ

1. *Ուղիղ գիծ մը՝ որ շրջապատը երկու կէտով կը կտրէ, կոչի* հատանող։

2. *Ուղիղ գիծ մը* շօշափող *է շրջապատի մը, երբ արտաքին մէկ կէտով զայն կը շօշափէ։ Այս կէտն կոչի* կէտ շօշափման։

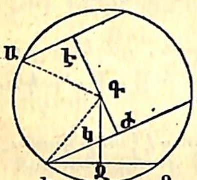
Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Մի եւ նոյն բոլորակի կամ հաւասար բոլորակաց մէջ

1. Երկու հաւասար լարեր՝ հաւասարապէս հեռու են կեդրոնէն.

2. Երկու անհաւասար լարերէն՝ մեծագոյնն աւելի մօտ է կեդրոնին։

1. Ենթադրենք ԱԲ և ԵԸ երկու հաւասար լարեր. կ'ըսենք թէ երկուքն ալ հաւասարապէս հեռու են Գ կեդրոնէն։



(Ձև 61)

Կը քաշեմ կեդրոնէն ԳԷ ուղղահայեացը ԱԲ լարին վրայ, և ԳԶ ուղղահայեացը ԵԸ լարին վրայ, յետոյ ԳԱ և ԳԵ շառաւիղներն։ Ուղղանկիւն եռանկիւնքն ԳԷԱ, ԳԶԵ իրարու հաւասար են, որովհետև ունին ԳԱ=ԳԵ իբր շառաւիղ, և ԱԷ=ԵԶ, վասն զի ԱԲ և ԵԸ հաւասար լարերուն կէսերն են (10. Ա)։ Արդ այս եռանկիւնքն հաւասար ըլլալով, ԳԷ=ԳԶ, որք կը չափեն ԱԲ և ԵԸ լարերուն հեռաւորութիւնն կեդրոնէն։

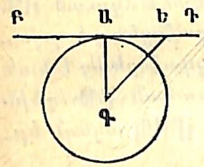
2. Ենթադրենք որ ԵԴ լարն աւելի մեծ ըլլայ ԱԲ լարէն. կ'ըսենք թէ ԵԴ աւելի մօտ է Գ կեդրոնին քան ԱԲ լարը։ Կ'առնում ԵԸԴ աղեղան վրայ, որ ըստ ենթադրութեան աւելի մեծ է քան ԱԲ աղեղը, երկայնութիւն մը ԵԸ՝ հաւասար ԱԲ աղեղան, և կը քաշեմ ԵԸ ուղիղ գիծը։ ԱԲ և ԵԸ լարերն իրարու հաւասար են, որով և հաւասարապէս հեռու կեդրոնէն. ուրեմն խնդիրն կը մնայ ցուցընելու՝ որ ԵԴ լարն աւելի մօտ է կեդրոնին քան ԵԸ լարը։

Կը քաշեմ կեդրոնէն ԳԺ ուղղահայեացն ԵԴ լարին վրայ և ԳԶ ուղղահայեացը ԵԸ լարին։ Արդ յայտնի է՝ որ ԳԺ ուղղահայեացն ԵԴ գծին՝ աւելի կարճ է քան ԳԿ խոտոր գիծը, ևս առաւել աւելի կարճ է ԳԿ+ԿԶ կամ ԳԶ գծէն, ուրով ըսել է թէ ԵԴ լարն աւելի մօտ է Գ կեդրոնին քան ԵԸ կամ ԱԲ լարը։

Բ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Շառաւիղի մը ծայրէն քաշուած ուղղահայեացն՝ շօշափող է շրջապատին։

Կը քաշեմ ԳԱ շառաւիղին Ա ծայրէն ԲԴ ուղղահայեացը, և կ'ըսեմ թէ այս ուղղահայեացն շօշափող է շրջապատին։



(Ձև 62)

Որովհետև որ և իցէ ԳԵ խոտոր գիծ՝ մեծ ըլլալով ԳԱ ուղղահայեացէն կամ շառաւիղէն, Ե կէտն շրջապատէն դուրս կը գտնուի. ուրեմն ԲԴ գիծն՝ միայն իւր Ա կէտն ունի շրջապատին վրայ։

ՓՈԽԱԴԱՐՁԱԲԱՐ. — Թէ որ ԲԴ շօշափողին Ա շօշափման կէտէն ԱԳ շառաւիղն քաշեմ, այս շառաւիղն շօշափողին ուղղահայեաց կ'ըլլայ։

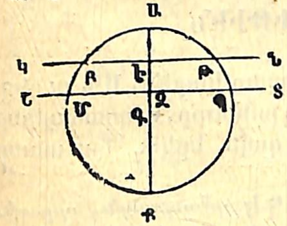
Որովհետև ԲԴ գծին որ և իցէ Ե կէտ (բաց 'ի Ա կէտէն) շրջապատէն դուրս ըլլալով, ԳԱ շառաւիղն ամենէն կարճագոյն գիծն է, որ կը չափէ կեդրոնէն մինչև ԲԴ շօշափողն. ուրեմն ԳԱ գիծն՝ ուղղահայեաց է ԲԴ գծին։

Հետեւանք Ա. — *Շրջապատին մէկ կէտին վրայ միայն մէկ շօշափող կրնանք քաշել։*

Հետեւանք Բ. — *Շօշափողին շօշափման կէտէն քաշուած ուղղահայեաց մը՝ կ'անցնի շրջապատին կեդրոնէն։*

Գ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

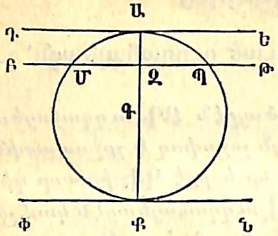
Երկու ուղիղ զուգահեռական գիծք՝ շրջապատին վրայ հաւասար աղեղներ կը հատանեն։



(Ձև 63)

Երեք դիպուած կրնայ ըլլալ։

1. Այս զուգահեռականքն կրնան ըլլալ երկուքն ալ ԿՆ, ԸՏ հատանողք։ Կը քաշեմ ԱՔ տրամագիծն՝ ուղղահայեաց այս ԿՆ, ԸՏ հատանողաց, որ անոնց աղեղներն երկու հաւասար մասն կը բաժնէ (10. Ա), որով Ա կէտն միջակէտ կ'ըլլայ ՄԱՊ աղեղան. ուստի ՄԱ=ԱՊ, և նոյնպէս ԲԱ=ԱԹ. ուսկից առաջ կու գայ



(Ձև 64)

ՄԱ−ԲԱ=ԱՊ−ԱԹ

կամ ՄԲ=ՊԹ

2. Կրնայ ըլլալ մէկը՝ ԲԹ հատանող, և միւսը ԴԵ շօշափող։ Շօշափման Ա կէտէն ձգուած ԱԳ շառաւիղն՝ ուղղահայեաց է շօշափողին, որով ուղղահայեաց է նաև անոր զուգահեռական ԲԹ գծին (6. Գ). ուրեմն այս շառաւիղն կը բաժնէ ՄԱՊ աղեղն երկու հաւասար մասն ՊԱ=ԱՄ։

3. Կրնայ ըլլալ՝ որ երկուքն ալ շօշափող ըլլան, ինչպէս ԴԵ, ՓՆ. տրամագիծն ԱՔ ուղղահայեաց ըլլալով այս գծերուն՝ կ'անցնի իրենց շօշափման Ա և Ք կէտերէն. ուրեմն ԱՄՔ աղեղն հաւասար է ԱՊՔ աղեղան։

ՅՕԴՈՒԱԾ ԵՐԿՈՏԱՍԱՆԵՐՈՐԴ

ԵՐԿՈՒ ԲՈԼՈՐԱԿԱՑ ՇՕՇԱՓՄԱՆ ԵՒ ՀԱՏՄԱՆ ՊԱՅՄԱՆՔՆ։

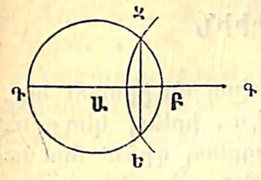
ՍԱՀՄԱՆ

Երկու շրջապատք շօշափող են իրարու՝ երբոր կէտ մը միայն ունենան հասարակաց։

Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

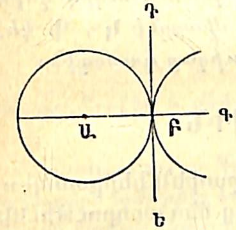
Եթէ երկու շրջապատք զիրար կտրեն, ԱԳ ուղիղ գիծն՝ որ կը միացընէ իրենց կեդրոնները, ուղղահայեաց է ԶԵ հասարակաց լարին եւ զայն երկու հաւասար մասն կը բաժնէ։

Զոր օրինակ, ունենանք ԱԵ, ԳԵ շրջապատքն, որք զիրար կը կտրեն երկու կէտով Ե և Զ։ Այս կէտերէն իւրաքանչիւրն՝ իրենց Ա և Գ կեդրոններէն հաւասարապէս հեռու ըլլալով, ԱԳ գիծն ուղղահայեաց կ'ըլլայ ԵԶ լարին, որ երկու շրջապատաց ալ հասարակ է, և զայն երկու հաւասար մասանց կը բաժնէ (10. Ա)։



(Ձև 65)

Հետեւանք. — Երբ Զ և Ե կէտերն իրարու մօտենալով վերածուին մէկ կէտի, այն ատեն երկու շրջապատք ԱԲ, ԳԲ մի միայն Բ կէտը ունին հասարակ. այս կէտը կը գտնուի ԱԳ գծին վրայ՝ որ կը միացընէ իրենց կեդրոններն. և այս երկու շրջապատներն մի և նոյն ԴԵ շօշափողն ունին այս կէտին վրայ, որ է ըսել իրարու շօշափողք են (Ձև 66)։

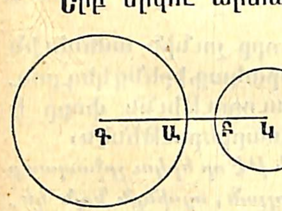


(Ձև 66)

Երկու շրջապատք՝ հինգ տարբեր դիրք կրնան ունենալ իրարու յարաբերութեամբ. այսինքն, կրնան ըլլալ ներքին կամ արտաքին. կրնան արտաքսապէս կամ ներքսապէս զիրար շօշափել. և վերջապէս, կրնան զիրար հատանել։ Այս հինգ տարբեր դրից կը համապատասխանեն հետևեալ հինգ հայեցողութիւնքն։

Բ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու արտաքին շրջապատք՝ չունին ամենեւին կէտ մը հասարակաց, իրենց կեդրոններուն հեռաւորութիւնն մեծ է՝ իրենց շառաւիղաց գումարէն։

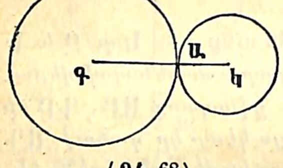


(Ձև 67)

Ուղիղ գիծն ԿԳ՝ որ կը միացընէ կեդրոնները, շրջապատներէն մէկը՝ Բ կէտին վրայ կը կտրէ և միւսը Ա կէտին վրայ. ուրեմն ԿԳ=ԿԲ+ԲԱ+ԳԱ, ուսկից ԿԲ+ԳԱ < ԿԳ

Գ· ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Թէ որ երկու շրջապատք շօշափող են իրարու արտաքսապէս, իրենց կեդրոնները միացընող գիծն՝ հաւասար է իրենց շառաւիղաց գումարին ։

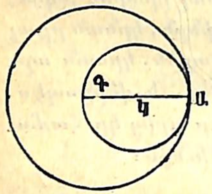


(Ձև 68)

Շրջապատներուն շօշափման Ա *կէտը կը գտնուի ուղիղ գծին վրայ՝ որ կը միացընէ* Կ, Գ *կեդրոնները․ որով* ԿԳ=ԿԱ+ԳԱ *շառաւիղաց գումարին ։*

Դ· ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու շրջապատք զիրար շօշափեն ներքսապէս․ իրենց կեդրոնաց հեռաւորութիւնն՝ հաւասար է շառաւիղաց տարբերութեան ։



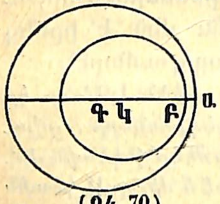
(Ձև 69)

Շրջապատից շօշափման Ա *կէտն կը գտնուի ուղիղ գծին վրայ, որ կ'անցնի* Կ *և* Գ *կեդրոններէն, որով կ'ունենանք*

ԳԿ=ԳԱ—ԿԱ

Ե· ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու ներքին շրջապատք, որք չունին ամենեւին կէտ մը հասարակաց, իրենց կեդրոններուն հեռաւորութիւնն փոքր է շառաւիղաց տարբերութենէն ։



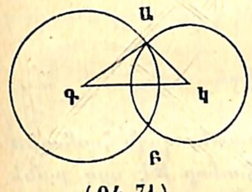
(Ձև 70)

Որովհետև թէ որ երկու շրջապատք համակեդրոն ըլլան, այսինքն նոյն կեդրոնը ունենան, կեդրոններուն հեռաւորութիւնն է զրօ․ իսկ թէ ոչ, ԳԿ *միջոցն հաւասար է* ԳԱ, ԿԲ *շառաւիղաց տարբերութեան, նուազ* Ա *և* Բ *կէտերուն մէջ եղած միջոցն․ որ է*

ԳԿ=ԳԱ—(ԿԲ+ԱԲ), *կամ* ԳԿ<ԳԱ—ԿԲ ։

Զ· ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երբ երկու շրջապատք զիրար հատանեն, երկու կեդրոններուն հեռաւորութիւնն փոքր է շառաւիղաց գումարէն, եւ մեծ է անոնց տարբերութենէն ։



(Ձև 71)

Համարինք թէ Ա *ըլլայ երկու շրջապատից զիրար կտրած կէտերուն մէկն․ կը միացընեմ* Կ *և* Գ *կեդրոնները՝* ԿԱ, ԳԱ *շառաւիղներով․ որով* ԿԳ *ուղիղ գծին հետ կը ձևացընեն եռանկիւն մը, յորում* ԿԳ *կողմն փոքր է* ԱԳ *և* ԱԿ *շառաւիղաց գումարէն, և մեծ է անոնց տարբերութենէն ։*

Հետեւանք· — *Նախընթաց հինգ հայեցողութեանց փոխադարձքն ճշմարիտ են, և նոյն կերպով կ'ապացուցուին ։ Օրինակի համար․ եթէ կեդրոնաց հեռաւորութիւնն փոքր է շառաւիղաց գումարէն և մեծ է անոնց տարբերութենէն, շրջապատքն զիրար կը կտրեն․ որովհետև եթէ ներքին կամ արտաքին ըլլային, կեդրոնաց հեռաւորութիւնն փոքր պիտի ըլլար շառաւիղաց տարբերութենէն կամ մեծ անոնց գումարէն․ և եթէ իրարու շօշափողք ըլլան, կեդրոնաց հեռաւորութիւնն հաւասար պիտի ըլլար շառաւիղաց գումարին կամ անոնց տարբերութեան ։*

ՅՕԴՈՒԱԾ ԵՐԵՔՏԱՍԱՆԵՐՈՐԴ

Ի՞նչ է չափել մեծութիւն մը. — Անկեանց յարաբերութիւնն հաւասար է անոնց աղեղանց յարաբերութեան. — Բաժնել անկիւն մը յաստիճանս, ի մանրամասունս եւ ի մանրերկրորդս. — Անկիւնք ստորագրեալք։

ՍԱՀՄԱՆՔ

1. *Մեծութիւն մը չափել է բաղդատել զայն համասեռ ծանօթ միութեան մը հետ՝ իմանալու համար թէ այս քանի անգամ կը պարունակի անոր մէջ։ Այս ծանօթ միութիւնն կոչի* չափ միութեան։

2. *Երբոր երկու մեծութեանց մէջ անոնց համասեռ միութեան չափն ճիշդ այնչափ անգամ կը պարունակի, ըսել է որ այս երկու մեծութիւնք* հասարակաց *չափ ունին*։

3. *Երկու համասեռ մեծութիւնք իրարու* չափակից *են կամ* անչափակից *ըստ այնմ երբ հասարակ չափ մ'ունին կամ չունին*։

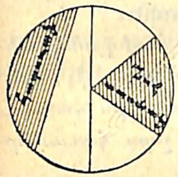
4. *Երկու համասեռ քանակութեանց մէջ եղած* յարաբերութիւնն *է այն թիւն՝ որ կը ցուցընէ մէկուն չափը, թէ որ միւսը իբր միութիւն չափուց առնուի*։

Թէ որ երկու համասեռ Ա եւ Բ քանակութիւնք իրարու մէջ չափակից են, իրենց յարաբերութիւնն ամբողջական կամ կոտորակ թիւ մ'է, զոր կ'ունենանք՝ բաժնելով իրարու վրայ երկու քանակութեանց չափն, որ է ըսել՝ այն թիւերն որ կը ցուցընեն թէ հասարակաց չափն Չ քանի անգամ կը չափէ այս քանակութիւնքն։ *Օրինակի համար դնենք թէ ըլլայ* $Ա = 25Չ$ *և* $Բ = 8Չ$ *այն ատեն* $Չ = \frac{1}{8}Բ$ *քանակութեան, որով* $Ա = \frac{25}{8}Բ$ *քանակութեան. ուստի կը հետեւի՝ որ* Ա *և* Բ *քանակութեանց մէջ եղած յարաբերութիւնն է* $\frac{25}{8}$։

5. *Երբ երկու քանակութիւնք անչափակից են իրարու,*

անհնար է մէկ քանակութեամբ չափել միւսը. բայց կրնանք այնչափ փոքր մասունք բաժնել մին, զոր օրինակ միլիոն հաւասար մասն, և գտնել երրորդ մը՝ որ երկուքն ալ գրեթէ ճիշդ անգամ չափէ, որով երկու անչափակից քանակութիւնները չափակից կ'ըլլան։

6. *Կոչի* կեդրոնական անկիւն *այն անկիւնն՝ որոյ գագաթն կը գտնուի բոլորակի մը կեդրոնին վրայ*։



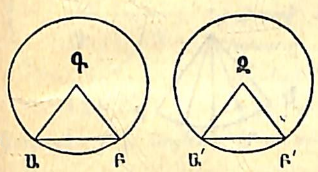
(Ձև 72)

7. *Անկիւն մը* ստորագրեալ *է բոլորակի մը մէջ, երբոր այս անկիւնս ձեւացած է երկու լարերէ, որք գիրար կը կտրեն բոլորակի մը շրջապատին վրայ*։

8 Հատուածող *կ'ըսուի բոլորակին այն մասն որ երկու շառաւիղաց մէջ կ'իյնայ։ —* Հատուածն *է բոլորակին այն մասն՝ որ աղեղի մը և անոր լարին մէջ կը գտնուի*։

Ա· ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Մի եւ նոյն բոլորակի կամ հաւասար բոլորակաց մէջ, երկու իրարու հաւասար կեդրոնական ԱԳԲ, Ա′ՋԲ′ անկիւններ՝ կը հատանեն իւրաքանչիւրն հաւասար ԱԲ, Ա′Բ′ աղեղք շրջապատին վրայ։



(Ձև 73)

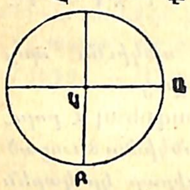
Քաշենք ԱԲ, Ա′Բ′ *լարերն, որով կ'ունենանք երկու* ԱԳԲ, Ա′ՋԲ′ *եռանկիւնները, որք իրարու հաւասար են. որովհետև ունին անկիւնքն* Գ = Ջ *երկու հաւասար կողմանց մէջ. որով* ԱԲ *հաւասար է* Ա′Բ′ *գծին. ուստի թէ որ լարերն հաւասար են, անոնց աղեղներն ալ հաւասար պիտի ըլլան. այսինքն* ԱԲ *աղեղն հաւասար է* Ա′Բ′ *աղեղան*։

ՓՈԽԱԴԱՐՁԱԲԱՐ. — *Թէ որ* Ա′Բ′, ԱԲ *աղեղներն իրարու հաւասար են, անոնց կեդրոնական անկիւններն* ԱԳԲ, Ա′ՋԲ′ *նոյնպէս իրարու հաւասար պիտի ըլլան*։

Որովհետև եթէ ԱԲ *և* Ա′Բ′ *աղեղներն հաւասար են, անոնց լարերն ալ իրարու հաւասար են. և նոյնպէս* ԱԳ = Ա′Ջ *և*

ԲԳ=Բ′Զ շառաւիղներն. ուրեմն երկու եռանկիւնքն ԱԳԲ, Ա′ԶԲ′ իրարու հաւասար են, որով նաեւ անկիւնն ԱԳԲ=Ա′ԶԲ անկեան։

Հետեւանք. — Թէ որ ԱԿԲ ուղիղ անկեան մը գագաթէն՝ իբր ՚ի կեդրոնէ՝ քաշենք որ եւ իցէ ԿԱ շրջապատ մը, ԱԲ աղեղն, որ կը կտրէ այս անկիւնը, հաւասար է շրջապատին չորրորդ մասին։



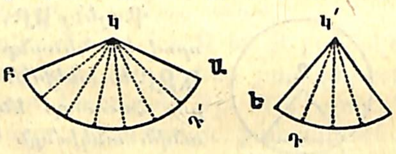
(Ձև 74)

Որովհետեւ թէ որ այս ուղիղ անկեան գագաթէն անդին երկնցընենք ԱԿ, ԲԿ ուղիղ գիծերն, կը ձեւանան չորս հատ իրարու հաւասար անկիւնք, որք շրջապատը չորս հաւասար մասունք կը բաժնեն։

Բ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Մի եւ նոյն բոլորակի կամ երկու հաւասար բոլորակաց մէջ, կեդրոնական երկու անկեանց յարաբերութիւնն՝ հաւասար է անոնց կողմանց կտրած աղեղանց յարաբերութեան։

Ենթադրենք ԱԿԲ, ԶԿ′Ե երկու կեդրոնական անկիւնք հաւասար բոլորակաց մէջ. համարինք որ այս անկեանց կտրած



(Ձև 75)

ԱԲ, ԵԶ աղեղներն հասարակ չափ մ՚ունենան. կ՚ըսենք թէ այս աղեղանց յարաբերութիւնն՝ հաւասար է կեդրոնական անկեանց յարաբերութեան։

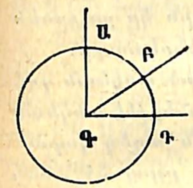
Դնենք թէ ԵԴ ըլլայ հասարակաց չափն երկու աղեղանց, և ԵԶ աղեղան մէջ 4 անգամ պարունակի, և ԱԲ աղեղան մէջ 7 անգամ, որով $\frac{\text{ԵԶ}}{\text{ԱԲ}}=\frac{4}{7}$*։*

Արդ, եթէ միացընեմ այս երկու աղեղանց բաժանման կէտերը բոլորակաց կեդրոններով, կը տեսնեմ որ ԵԿ′Զ անկիւնն՝ չորս հաւասար անկիւն կը բաժնուի, որովհետեւ աղեղներն իրարու հաւասար են, նոյնպէս ԱԿԲ անկիւնն՝ եօթն հաւասար անկիւն. ուրեմն անկիւնքն ԵԿ′Զ, ԲԿԱ այնպէս իրարու կը յարաբերին՝ ինչպէս $\frac{4}{7}$*։*

Հետեւանք. — *Դիւրին է ցուցընել՝ որ* ԵԿ′Զ, ԲԿԱ հատուածողք՝ այնպէս կը համեմատին իրարու՝ ինչպէս իրենց ԵԶ, ԲԱ աղեղներն։

Գ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Թէ որ անկեան մը գագաթն առնունք իբր կեդրոն եւ որ եւ իցէ շառաւիղով շրջապատ մը քաշենք, այս անկիւնն եւ իրեն շրջապատին վրայ կտրած աղեղն՝ նոյն չափն ունին։



(Ձև 76)

Ունենանք ԱԳԲ անկիւն մը՝ զոր կ՚ուզենք չափել. առնունք իբր միութիւն որ և իցէ ԲԳԴ անկիւն մը։ Անկեան Գ գագաթէն իբր ՚ի կեդրոնէ՝ ուզած շառաւիղով մը՝ քաշենք բոլորակի մը շրջապատը, որոյ վրայ կեդրոնական անկիւնքն ԱԳԲ, ԲԳԴ կը կտրեն ԱԲ, ԲԴ աղեղներն. և ԲԳԴ միութեան չափուն կտրած ԲԴ աղեղն կ՚առնուի իբր չափ երկայնութեան աղեղանց շրջապատին։ Արդ ԱԳԲ անկեան չափն է $\frac{\text{ԱԳԲ}}{\text{ԲԳԴ}}$ *յարաբերութիւնն, ինչպէս ԱԲ աղեղան չափն է* $\frac{\text{ԱԲ}}{\text{ԲԴ}}$ *յարաբերութիւնն. այս երկու յարաբերութիւնքն իրարու հաւասար են, որովհետեւ կեդրոնական անկիւնքն այնպէս կը յարաբերին իրարու՝ ինչպէս իրենց աղեղներն (Բ)։ Հետեւապէս կեդրոնական ԱԳԲ անկեան չափն՝ նոյն է իրեն կողմանց մէջ պարունակուած աղեղան չափուն հետ։*

Ծանօթութիւն Ա. — *Փոխանակ ըսելու*, Այս անկիւնը նոյն չափն ունի՝ ինչ որ այս ինչ աղեղն, *ընդհանրապէս կ՚ըսենք ուրիշ կերպով, թէպէտ համառօտ՝ բայց ոչ ճիշդ*, Այս անկեան չափն է այս ինչ աղեղն։

Ծանօթութիւն Բ. — Ընդհանրապէս շրջապատին չորրորդ մասն կ՚առնուի իբր միութիւն չափուց՝ աղեղանց երկայնութիւնը չափելու համար, որով ուղիղ անկիւնն՝ անկեանց՝ միութիւն չափուց կ՚ըլլայ։

Անկեանց և աղեղանց յարաբերութիւնը՝ դիւրնցընելու համար, սովորութիւն եղած է շրջապատն 360 մասն բաժնել, որք կոչին աստիճանք։ *Իւրաքանչիւր աստիճանն կը բաժնուի 60 հաւասար մասն, որ կոչին* մանրամասունք, *նոյնպէս իւրաքանչիւր մանրամասն 60 մասն, որ կոչին* մանրերկրորդք։ *Հետևապէս շրջապատին չորրորդ մասն կը պարունակէ 90 աստիճան կամ 5400 մանրամասունք և կամ 324000 մանրերկրորդք*։

Աստիճանները բացատրելու համար կը գործածուի (^{0}) *նշանն, որ կը դրուի յաջակողմն՝ թուոյն վրայ։ Մանրամասունքն* ($'$) *նշանով, և մանրերկրորդքդ* ($''$) *նշանով կը նշանակուին։ Զոր օրինակ.* $45^0, 38', 26''$ *թիւերն կը ցուցընեն 45 աստիճանք, 38 մանրամասունք և 26 մանրերկրորդք*։

Անկիւն մը չափելու համար պէտք է ուզած անկեան գագաթը դնել բոլորակին կեդրոնին վրայ, և տեսնել թէ անկեան կողմունքն շրջապատին վրայ քանի՛ աստիճան աղեղ կտրած են. դնենք թէ այս աղեղան երկայնութիւնն ըլլայ $54^0, 33', 20''$, *ուրեմն այս անկեան չափն է* $54^0, 33', 20''$։ *Թէ որ ուզենանք գիտնալ թէ այս անկիւնն ուղիղ անկեան հետ ինչ յարաբերութիւն ունի, կը վերածենք երկուքին չափն ալ մանրերկրորդաց, և կը բաժնենք իրարու վրայ, այսպէս*

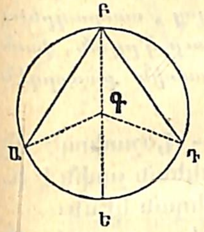
$$\frac{196400}{324000}=\frac{491}{810}=0,61 \text{ գրեթէ}:$$

Դ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Բոլորակի մը մէջ ստորագրեալ որ եւ իցէ անկեան չափն է՝ իրեն կողմանց մէջ պարունակած աղեղան կէսն։

Երեք դիպուած կրնայ պատահիլ. կրնայ ըլլալ որ բոլորակին կեդրոնն անկեան կողմանց մէկուն վրայ գտնուի, կամ անկեան կողմանց մէջ և կամ անկիւնէն դուրս։

1. *Ենթադրենք նախ որ* ԱԲԵ *ստորագրեալ անկեան մէկ կողմն անցնի* Գ *կեդրոնէն։ Կը քաշեմ* ԳԱ *շառաւիղն, որով կ՚ունենամ* ԳԲԱ *հաւասարասրուն եռանկիւն մը, որովհետև* ԳԲ=ԳԱ *իբր շառաւիղք բոլորակին, ուրեմն* ԳԲԱ *և* ԳԱԲ *անկիւնքն՝ որ այս կողմանց հակադիր են, իրարու հաւասար են։ Արդ գիտենք որ* ԱԳԵ *արտաքին անկիւնն հաւասար է այս երկու անկեանց գումարին (7. Դ), որով ստորագրեալ* ԱԲԵ *անկիւնն հաւասար է* ԱԳԵ *կեդրոնական անկեան կիսոյն։ Եւ որովհետև այս կեդրոնական անկեան չափն է իրեն կողմանց մէջ եղած* ԱԵ *աղեղն (Գ), ուրեմն* ԱԲԵ *անկեան չափն է այս աղեղան կէսն*։



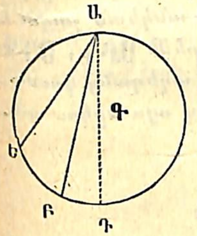
(Ձև 77)

2. *Թէ որ կեդրոնն՝* ԱԲԴ *անկեան կողմանց մէջ գտնուի, կը քաշեմ* ԲԵ *տրամագիծն։ Անկիւնն* ԱԲԴ *հաւասար է* ԱԲԵ *և* ԴԲԵ *անկեանց գումարին, որոց* ԲԵ *հասարակաց կողմն կ՚անցնի կեդրոնէն, որով* ԱԲԴ *անկեան չափն՝ է նաև այս անկեանց չափուց գումարն։ Արդ* ԱԲԵ *անկեան չափն է* ԱԵ *աղեղան կէսն, և* ԴԲԵ *անկեան չափն ալ է* ԴԵ *աղեղան կէսն, ուրեմն* ԱԲԴ *ստորագրեալ անկեան չափն է* ԱԵ *և* ԵԴ *աղեղանց գումարին կէսն, այն է* ԱԴ *աղեղին կէսն*։

3. *Ենթադրենք թէ կեդրոնն՝* ԵԱԲ *անկիւնէն դուրս ըլլայ. կը քաշեմ* ԱԴ *տրամագիծն։ Անկիւնն*

ԵԱԲ=ԵԱԴ−ԲԱԴ

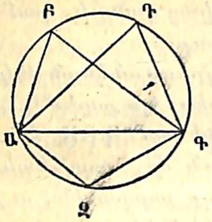
արդ ԵԱԴ *անկեան չափն է* ԵԴ *աղեղան կէսն, և* ԲԱԴ *անկեան չափն է* ԲԴ *աղեղան կէսն. ուրեմն* ԵԱԲ *անկեան չափն է* ԵԴ-ԲԴ *աղեղանց կամ* ԵԲ *աղեղան կէսն*։



(Ձև 78

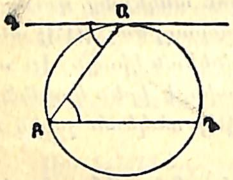
Հետեւանք Ա. — Բոլորակի մը նոյն հատուածին մէջ ստորագրեալ ԱԲԳ, ԱԴԳ եւ այլն, անկիւններն իրարու հաւասար են, որովհետեւ մի եւ նոյն ԱՁԳ աղեղան կէսն է որ զանոնք կը չափէ։

Եթէ հատուածն կիսաբոլորակ մ'է, անոր մէջ ստորագրեալ անկիւնքն ուղիղ կ'ըլլան, որովհետև իրենց չափն է շրջապատին քառորդն։ Թէ որ հատուածն կիսաբոլորակէն մեծ կամ փոքր ըլլայ, ստորագրեալ անկիւնքն՝ բութ կամ սուր կ'ըլլան, վասն զի իրենց չափն շրջապատին քառորդէն մեծ է կամ փոքր։



(Ձև 79)

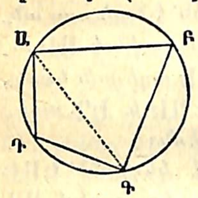
Հետեւանք Բ. — Շօշափողէ մը ԱԳ, եւ ԱԲ լարէ մը ձեւացած ԳԱԲ անկեան չափն է իրեն կողմանց մէջ պարունակած ԱԲ աղեղան կէսն։



(Ձև 80)

Որովհետև թէ որ շօշափողին զուգահեռական մը ԲԴ քաշեմ, ԱԲԴ անկիւնն հաւասար կ'ըլլայ ԳԱԲ անկեան (6. Գ). արդ ԱԲԴ անկեան չափն է ԱԴ աղեղին կէսն. ուրեմն ԳԱԲ անկեան չափն ալ է ԱԴ աղեղան կամ ԱԲ աղեղան կէսն, վասն զի ԱԴ=ԱԲ, որովհետև երկու զուգահեռականաց մէջ կը գտնուին (11. Գ)։

Հետեւանք Գ. — *Քառակողման մը, ստորագրեալ բոլորակի մը մէջ, հակադիր անկիւնքն բովանդակիչ են իրարու։*

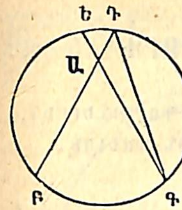


(Ձև 81)

Որովհետև ԱԲԳ անկեան չափն է իրեն կողմանց մէջ պարունակած ԱԴԳ աղեղան կէսն, և ԱԴԳ անկեան չափն է ԱԲԳ աղեղան կէսն։ Ուրեմն ԱԲԳ, ԱԴԳ անկեանց գումարին չափն է ԱԴԳ և ԱԲԳ աղեղանց գումարին կէսն, այսինքն շրջապատին կէսն. որով այս երկու անկիւնքն բովանդակիչ կ'ըլլան։

Ե. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որ եւ իցէ ԲԱԳ անկիւնն՝ որ ձեւացած է երկու հատանողներէ, որք զիրար կտրեն բոլորակի մը մէջ, իրեն չափ ունի՝ իրեն կողմանց եւ անոնց երկայնութեանց մէջ պարունակած ԲԳ եւ ԴԵ աղեղանց գումարին կէսն։

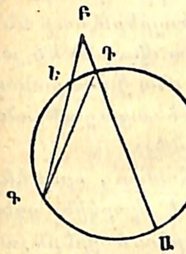


(Ձև 81)

Կը քաշեմ ԳԴ լարը. արտաքին անկիւնն ԲԱԳ=ԱԴԳ+ԴԳԱ անկեանց գումարին (7. Գ)։ Արդ այս ԱԴԳ և ԴԳԱ ստորագրեալ անկեանց չափն է ԲԳ և ԵԴ աղեղանց կէսն, որով նաև ԲԱԳ անկեան չափն ալ պիտի ըլլայ ԲԳ և ԵԴ աղեղանց գումարին կէսն։

Զ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որ եւ իցէ ԱԲԳ անկիւն, որ ձեւացած է երկու հատանողներէ, որք զիրար կը կտրեն բոլորակէն դուրս, իրեն չափ ունի իր կողմանց մէջ պարունակած ԱԳ, ԴԵ աղեղանց տարբերութեան կէսն։



(Ձև 82)

Կը քաշեմ ԴԳ լարը. ԱԴԳ արտաքին անկիւնն՝ հաւասար է ներքին ԴԲԳ և ԲԳԴ անկեանց գումարին. որով անկիւնն ԱԲԳ=ԱԴԳ−ԲԳԴ. արդ այս յետին անկիւնքն ստորագրեալ են բոլորակին մէջ, և իրենց չափն է ԱԳ և ԴԵ աղեղանց կէսերն, ուրեմն ԱԲԳ անկեան չափն ալ է ԱԳ և ԴԵ աղեղանց տարբերութեան կէսն։

Հետեւանք. — *Նոյնպէս կրնանք ցուցընել որ հատանողէ և շօշափողէ, կամ երկու շօշափողէ ձևացած անկեան չափն է՝ իրեն կողմանց մէջ պարունակած երկու աղեղանց տարբերութեան կէսն։*

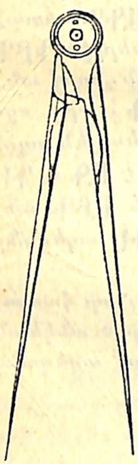
ՅՕԴՈՒԱԾ ԶՈՐԵՔՏԱՍԱՆԵՐՈՐԴ

ՆԿԱՐԱԳՐՈՒԹԻՒՆ ՔԱՆԻ ՄԸ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԳՈՐԾԻՆԵՐՈՒ։ ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆՔ ԱՆԿԻՒՆ ԵՒ ԵՌԱՆԿԻՒՆ ԳԾԵԼՈՒ։

ՍԱՀՄԱՆՔ

1. Քանոն. — Թղթոյ վրայ շիտակ գիծ մը քաշելու համար կը գործածուի քանոն ըսուած գործին. որ փայտէ կամ մետաղէ շինուած ձող մ'է՝ որոյ երեսներն մակարդակ են և եզերներն ուղիղ։

2. Կարկին. — Կարկինն է գործի մը՝ որով մակարդակին վրայ շրջապատ կը գծենք։ Այս գործին կը բաղկանայ երկու մետաղեայ ձողերէ, որ կ'ըսուին սրունք կարկինի. այս սրունից մէկ ծայրերն սուր են, իսկ միւս ծայրերն իրարու հետ միացած են յօդակապով մը, որով կրնանք ըստ կամս բանալ ու գոցել, որ է ըսել իրեն ձեւացուցած անկիւնն մեծցընել կամ փոքրցընել։



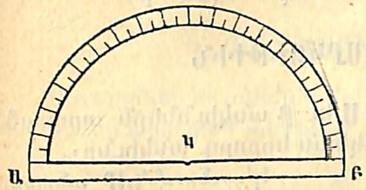
(Զև 83)

Շրջապատ մը քաշելու համար, որոյ կեդրոնն ու շառաւիղն ծանօթ է, կարկինը այնչափ կը բանամ՝ որ սրունից երկու ծայրերն շառաւիղին չափ իրարմէ հեռու ըլլան. յետոյ ոտքերէն մէկը կը դնեմ կեդրոնին վրայ և միւսը կը դարձընեմ կեդրոնին բոլորտիքը՝ մակարդակին վրայ շրջեցընելով։ Ցարժուն ծայրին վրայ մատիտ մը կամ գրիչ մը կայ՝ որով շրջապատն կը գծուի։

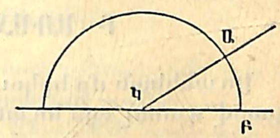
3. Անկիւնաչափ. — Անկիւնաչափն է պղնձէ կամ ոսկրէ շինուած կիսաբոլորակ մը, որոյ մէկ երեսին եզերքին վրայ 180 աստիճան բաժնուած է, և ԱԲ տրամագծով վերջացած է, միջակէտին վրայ կայ փոքրիկ ճեղք մը Կ, և կոչի կեդրոն անկիւնաչափի։

Թէ որ ուզենանք՝ օրինակի համար ԱԿԲ անկիւնը չափել, կը դնենք անկիւնաչափին կեդրոնը՝ ԱԿԲ անկեան Կ

գագաթին վրայ, այնպէս որ գործիքին տրամագծին ուղղութիւնն՝ իյնայ ԲԿ կողման վրայ։ Թէ որ ԱԿ կողմն անցնի բա-

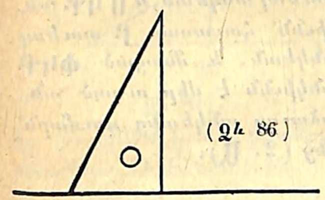


(Զև 84)



(Զև 85)

ժանման 34 աստիճանէն, ԱԿԲ անկիւնն՝ 34 աստիճան է կ'ըսենք։ Թէ որ ԱԿ կողմն կտրէ բաժանման կէտերն երկու աստիճանաց մէջ, զոր օրինակ 34 և 35, կը նայինք թէ ԱԿ կողմն որչափ հեռու է այս աստիճանաց առաջինէն, թէ որ $^{3}/_{4}$ աստիճանի մը չափ է, կ'ըսենք՝ ԱԿԲ անկիւնն է $34^{0}\ ^{3}/_{4}$ կամ $34^{0}, 45'$։



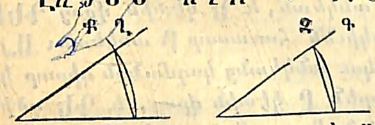
(Զև 86)

4. Ուղղաչափ. — Ուղղաչափն է փայտէ տափակ գործի մը, ուղղանկիւն եռանկեան ձեւով. և դիւրաւ գործածելու համար մէջ տեղը ծակ մը կայ՝ որ կոչի աչք ուղղաչափի։

Ա. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Ուղիղ գծի մը վրայ՝ Մ կէտէն անկիւն մը քաշել՝ հաւասար տուեալ անկեան մը։

Ըլլայ ՄՆ ուղիղ գիծն, և ԳԲԱ տուեալ անկիւնն։ Բ գագաթէն՝ որ և իցէ շառաւիղով կը քաշեմ ՆԶ աղեղը. յետոյ Մ կէտէն իբր կեդրոնէ՝ մի և նոյն ԲՆ շառաւիղով կը քաշեմ անսահման աղեղ մը ՓՔ, և ՄՆ գծին վրայ կտրած Փ կէտէն՝ կարկինով կ'առնում ՓՔ աղեղան վրայ՝ ՓԴ աղեղան մասն՝ հաւասար

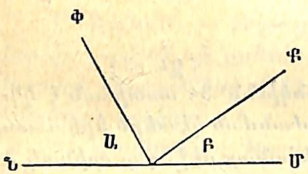


(Զև 87)

ԵԶ աղեղան. և ապա կը քաշեմ ՄՂ ուղիղ գիծը. որով կը ձևանայ ՆՄՂ անկիւնն՝ հաւասար ԱԲԳ տուեալ անկեան, վասն զի իրենց աղեղներն հաւասար են (13. Գ.)։

Բ. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Եռանկեան մը երկու Ա. եւ Բ անկիւններն տրուած ըլլալով՝ գտնել այն եռանկեան երրորդ անկիւնը։



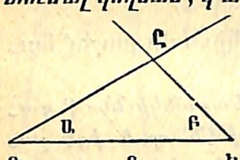
(Ձև 88)

Կ'առնում ՆՄ անսահման գծին վրայ Կ կէտը, և անոր վրայ կը ձևացընեմ ՆԿՓ անկիւնն՝ հաւասար Ա. տուեալ անկեան, և ՄԿՔ անկիւնն՝ հաւասար Բ տուեալ անկեան. և մնացած ՓԿՔ անկիւնն է մեր ուզած անկիւնն. որովհետև այս երեք մերձաւոր անկեանց գումարն՝ հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց (2. Ա.)։

Գ. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Տրուած ըլլալով եռանկեան մը երկու Ա., Բ անկիւնքն եւ մէկ Գ կողմն, ձեւացընել այս եռանկիւնն։

Թէ որ տուեալ Ա. և Բ անկիւններն՝ մերձաւոր են Գ. տուեալ կողման, կ'առնում անսահման գծի մը վրայ՝ ԴԵ երկայնութիւնն՝ հաւասար Գ գծին երկայնութեան. յետոյ Դ կէտին վրայ կը ձևացընեմ ԵԴԸ անկիւնն՝ հաւասար Ա. անկեան, և Ե կէտին վրայ ԴԵԸ անկիւնն՝ հաւասար Բ անկեան։ Այս երկու անկեանց կողմունքն զիրար կը կտրեն Ը կէտին վրայ, և ԴԵ գծին հետ կը ձևացընեն եռանկիւն մը, որ մեր առաջարկած եռանկիւնն է։



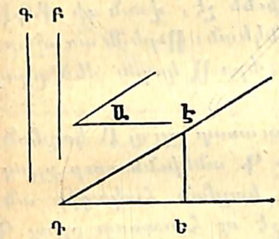
(Ձև 89)

Երբոր Ա. և Բ անկիւնքն մերձաւոր չըլլան տուեալ Գ. կողման, խնդիրն կը վերածուի նախընթաց գործողութեան, գտնելով եռանկեան երրորդ անկիւնն (Բ)։

Ծանօթութիւն. — Առաջարկութիւնն կարելի է՝ քանի որ երկու տուեալ անկեանց գումարն՝ երկու ուղիղ անկիւնէն փոքր է, ապա թէ ոչ՝ առաջարկութիւնն անկարելի կ'ըլլայ։

Դ. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Ձեւացընել եռանկիւն մը՝ որոյ երկու կողմունքն եւ անոնց ձեւացուցած անկիւնն տրուած ըլլան։

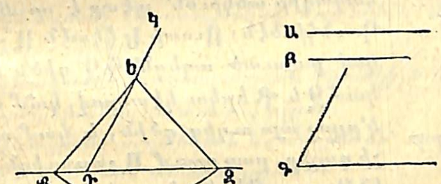


(Ձև 90)

Անսահման ուղիղ գծի մը Դ կէտին վրայ կը ձևացընեմ ԷԴԵ անկիւնն՝ հաւասար Ա. տուեալ անկեան, և իրեն կողմանց վրայ կ'առնում երկու երկայնութիւնք՝ ԴԷ՝ հաւասար տուեալ Գ. գծին երկայնութեան, և ԴԵ՝ հաւասար տուեալ Բ գծին երկայնութեան. յետոյ կը միացընեմ Է և Ե կէտերը. ելած եռանկիւնն ԷԴԵ է մեր առաջարկած եռանկիւնն։

Ե. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Ձեւացընել եռանկիւն մը՝ որոյ երկու կողմունքն եւ անոնց մէկուն հակադիր անկիւնն՝ տրուած ըլլայ։



(Ձև 91)

Տրուած ըլլան Ա. և Բ կողմունքն, և Ա. կողման հակադիր Գ. անկիւնն։

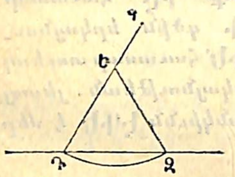
Երեք դիպուած կրնայ ըլլալ, այսինքն՝ կամ 1. Ա.>Բ, կամ 2. Ա.=Բ, և կամ 3. Ա.<Բ։

1. Անսահման ուղիղ գծի մը վրայ կը ձևացընեմ ԿԴԶ

անկիւնն՝ հաւասար Գ տուեալ անկեան, և ԿԴ կողման վրայ կ'առնում ԵԴ=Բ տուեալ կողման. և յետոյ Ե կէտը կեդրոն առնելով Ա տուեալ գծին երկայնութեամբ շառաւիղով մը կը գծեմ աղեղ մը, որ կը կտրէ անսահման գիծը Զ և Ք կէտերով. միացընելով Զ և Ե կէտերը՝ կ'ունենամ ԵԴԶ ուզած եռանկիւնս:

Եթէ միացընեմ Ք կէտն Ե կէտին հետ, կ'ելլէ ԵԴՔ եռանկիւնն, որ մեր ուզած եռանկիւնն չէ, վասն զի ՔԴԵ անկիւնն՝ հաւասար չէ Գ տուեալ անկեան: Ուրեմն առաջարկութիւնն միայն մէկ լուծումն ունի, երբ Ա կողմն՝ մեծ ըլլայ Բ կողմէն:

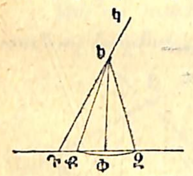
2. Ենթադրենք որ Ա կողմն հաւասար ըլլայ Բ կողման: Եռանկիւնն կրնայ չինուիլ՝ թէ որ Գ անկիւնն սուր ըլլայ.



(Ձև 92)

որովհետև Բ կողման հակադիր անկիւնն՝ պէտք է որ հաւասար ըլլայ Գ տուեալ անկեան: Ըստ այս ենթադրութեան՝ Ե կէտէն քաշելով Ա շառաւիղով աղեղը, կ'անցնի Դ և Զ կէտերէն, և որովհետև ԵԴ=Ա, և ԵԶ=Բ, ուստի ԵԴԶ հաւասարասրուն եռանկիւնն է միայն առաջարկութեան լուծումն:

3. Վերջապէս, թէ որ Ա կողմն աւելի փոքր ըլլայ Բ կողմէն, պէտք է որ Գ անկիւնն սուր ըլլայ, որովհետև Բ կողման



(Ձև 93)

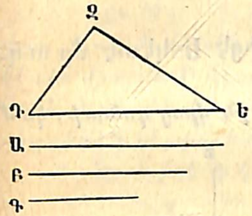
հակադիր անկիւնն՝ պէտք է որ մեծ ըլլայ Գ անկիւնէն: Ուստի Ե կէտէն Ա շառաւիղով քաշուած աղեղն՝ ԴԶ գիծն կը կտրէ կամ Զ և Ք երկու կէտերով, կամ շօշափող կ'ըլլայ այս ուղիղ գծին, և կամ ամենևին չի դպչիր, ըստ որում Ա շառաւիղն, որ ըստ ենթադրութեան փոքր է ԵԴ գծէն, ուղղահայեացէն մեծ ըլլայ և կամ փոքր:

Առաջին դիպուածին մէջ առաջարկութիւնն երկու լուծումն ունի, որք են՝ ԵԴԶ, ԵԴՔ եռանկիւններն. երկրորդին մէջ միայն մէկ լուծումն ունի, որ է ԵԴՓ ուղղանկիւն եռանկիւնն. իսկ երրորդ դիպուածին մէջ լուծումն անկարելի է:

Զ. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Ձևացընել եռանկիւն մը՝ որոյ Ա, Բ, Գ կողմունքն տրուած ըլլան:

Որ և իցէ անսահման ուղիղ գծի մը վրայ՝ կ'առնում ԴԵ=Ա կողման. յետոյ Ե կէտը կեդրոն առնելով Բ կողման



(Ձև 94)

հաւասար շառաւիղով կը քաշեմ աղեղ մը, և Դ կէտէն ուրիշ աղեղ մը Գ շառաւիղով, մինչև որ զան զիրար կտրեն Զ կէտի մը վրայ. կը միացընեմ այս կէտս՝ Դ և Ե կէտերուն հետ, ելածն ԴԵԶ է մեր ուզած եռանկիւնն. որովհետև այս եռանկեան երեք կողմունքն՝ հաւասար են տուեալ գծերուն երկայնութեան:

Ծանօթութիւն. — Այս առաջարկութիւնն կարելի է լուծել, երբոր աղեղներն զիրար կտրեն: Ուրեմն ըսել է՝ որ տուեալ գծերուն մէկն, օրինակի համար Ա գիծն՝ միւսներուն գումարէն փոքր պէտք է ըլլայ և մեծ անոնց տարբերութենէն:

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆՔ

1. Ձևացընել հաւասարակող եռանկիւն մը՝ որոյ մէկ կողմն տուեալ ըլլայ:

2. Ձևացընել հաւասարասրուն եռանկիւն մը՝ որոյ խարիսխն և բարձրութիւնն տուեալ ըլլան:

3. Ձևացընել ուղղանկիւն եռանկիւն մը՝ որոյ հակուղիղն և միւս կողմանց մին տուեալ ըլլան:

4. Ձևացընել եռանկիւն մը՝ որոյ երկու կողմունքն և այս կողմանց միոյն միջակէտը՝ հակադիր գագաթին հետ միացընող գծին երկայնութիւնն տրուած ըլլան:

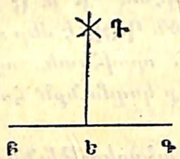
ՅՕԴՈՒԱԾ ՀՆԳԵՏԱՍԱՆԵՐՈՐԴ

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆՔ. — ՈՒՂՂԱՀԱՅԵԱՑ ԵՒ ԶՈՒԳԱՀԵՌԱԿԱՆ ՔԱՇԵԼ։

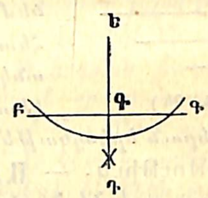
Ա. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Ուղիղ ԲԳ գծին վրայ՝ որ եւ իցէ Ե կէտէ մը ուղղահայեաց մը ծգել։

Կրնայ ըլլալ որ Ե կէտն՝ ԲԳ գծին վրայ գտնուի, կամ



(Ձև 95)



(Ձև 96)

գծէն դուրս. երկու դիպուածին մէջ ալ ուղղահայեացն նոյն կերպով կը քաշուի. (Ձև 95, 96)։

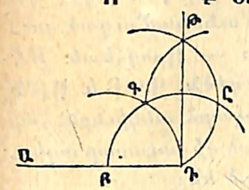
Ե կէտը կեդրոն առնելով կը քաշեմ որ և իցէ աղեղ մը, որ կտրէ ուղիղ գիծը Բ և Գ կէտերով։ Այս երկու կէտերը կեդրոն առնելով՝ ԲԳ գծին կէսէն մեծ շառաւիղով՝ աղեղներ կը քաշեմ, որք զիրար կտրեն Դ կէտին վրայ. յետոյ կը միացընեմ Ե և Դ կէտերն ուղիղ գծով. ԴԵ գիծն՝ է ուղղահայեաց ԲԳ գծին, որովհետև Դ և Ե կէտերն հաւասար հեռաւորութիւն ունին Բ և Գ կէտերէն. ուրեմն այս է մեր ուզած ուղղահայեացն։

Բ. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Ուղիղ գծի մը ծայրէն՝ բարձրացընել ուղղահայեաց մը, կամ որ նոյն է՝ ուղիղ անկիւն մը յօրինել։

Այս առաջարկութիւնս լուծելու երկու կերպ կան. մենք կը դնենք հոս երկուքն ալ. ուսանողն գործածէ՝ որն որ ընտրելագոյն համարի։

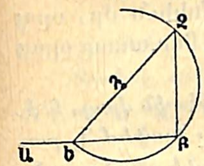
1. Ունենանք ԱԴ ուղիղ գիծն, և կ'ուզենք Դ ծայրէն ուղղահայեաց մը բարձրացընել ԱԴ գծին։ Կ'առնում Դ կէտը կեդրոն, և որ և իցէ շառաւիղով աղեղ մը կը քաշեմ, որ ԱԴ գիծը կտրէ Բ կէտով. յետոյ միշտ նոյն շառաւիղով Բ կէտէն ուրիշ աղեղ մը կը քաշեմ, որ առաջին աղեղը կտրէ Գ կէտին



(Ձև 97)

վրայ. և այս Գ կէտէն ուրիշ աղեղ մը, որ առաջինը կտրէ Ը կէտին վրայ. և Ը կէտէն ուրիշ աղեղ մը՝ որ երրորդ աղեղը կտրէ Թ կէտին վրայ. և ապա այս Թ կէտն կը միացընեմ ուղիղ գծով Դ կէտին հետ. ԹԴ գիծն է ուղղահայեաց ԱԴ գծին։

2. Որ և իցէ Դ կէտ մը կեդրոն առնելով՝ շառաւիղով մը որ անցնի Բ կէտէն, կը քաշեմ աղեղ մը, մինչև որ կտրէ ԱԲ գիծն՝ Ե կէտին վրայ, յետոյ կը միացընեմ Դ և Ե կէտերն ուղիղ գծով, և Դ կէտէն անդին կ'երկընցընեմ՝ մինչև որ կտրէ աղեղն՝ Զ կէտին վրայ. կը միացընեմ Զ և Բ կէտերն. ԶԲ գիծն ուղղահայեաց է ԱԲ գծին. որովհետև ԵԲԶ անկիւնն կը գտնուի ԶԲԵ աղեղան մէջ, որ է կիսաբոլորակ մը. ուրեմն ըսել է որ այս անկիւնն է ուղիղ անկիւն (13. Դ), ինչպէս նաև առաջին լուծման մէջ։



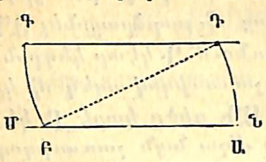
(Ձև 98)

Ծանօթութիւն. — *Այս ուղղահայեացները քաշելու ամենէն դիւրին կերպն է գործածել ուղղաչափն, դնելով զայն ուղիղ գծին վրայ, և որ կէտէն որ կ'ուզենք՝ քաշել ուղղահայեացն՝ ուղղաչափին միւս ուղղահայեաց եզերքէն։*

Գ. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Տուեալ ՄՆ ուղիղ գծի մը զուգահեռական քաշել որ եւ իցէ Դ կէտէն։

Տուեալ Դ կէտը կեդրոն առնելով կը քաշեմ աղեղ մը որ կտրէ ՄՆ գիծն՝ Բ կէտին վրայ։ Յետոյ Բ կէտէն նոյն շառաւիղով կը քաշեմ ուրիշ աղեղ մը, որ կ'անցնի Դ կէտէն և կը կտրէ ՄՆ գիծն Ա կէտին վրայ, և ապա ԴԱին հաւասար կ'առնում Բ կէտէն ԲԳ աղեղն. միացընելով Դ և Գ կէտերն իրարու հետ՝ կ'ունենամ ուզած զուգահեռականս։ — Որովհետև թէ որ քաշեմ ԴԲ գիծն, ԳԴԲ և ԱԲԴ ներքին փոխադարձ անկիւնքն՝ հաւասար են, վասն զի հաւասար աղեղներով չափուած են։



(Ձև 99)

Ծանօթութիւն. — Զուգահեռական քաշելու առաջարկութիւնն շատ կը դիւրանայ գործածելով ուղղաչափ գործին՝ զոր վերը բացատրեցինք։

Դ. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Ձեւացընել ԱԲ ուղիղ գծին վրայ անկիւն մը, որոյ գագաթն ըլլայ Ա կէտն, եւ մեծութիւնն հաւասար ըլլայ որ եւ իցէ տուեալ Ն աստիճանի մը։

Կը դնեմ անկիւնաչափին կեդրոնը՝ Ա կէտին վրայ, և իրեն տրամագիծն՝ ԱԲ գծին վրայ. յետոյ կը նշանեմ Ն բաժանման աստիճանն, որ կը համապատասխանէ տուեալ անկեան մեծութեան. կը վերցընեմ անկիւնաչափն, և կը քաշեմ ԱՆ գիծն, որ ԱԲ գծին հետ կը ձևացընէ ուզած անկիւնս։

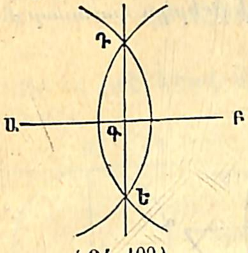
ՅՕԴՈՒԱԾ ՎԵՑՏԱՍԱՆԵՐՈՐԴ

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՔ. — ՈՒՂԻՂ ԳԻԾ ՄԸ, ԱՆԿԻՒՆ ՄԸ ԵՒ ԱՂԵՂ ՄԸ՝ ԲԱԺՆԵԼ ԵՐԿՈՒ ՀԱՒԱՍԱՐ ՄԱՍՆ. — ՏՈՒԵԱԼ ԿԷՏԷ ՄԸ՝ ԲՈԼՈՐԱԿԻ ՄԸ ՇՕՇԱՓՈՂ ՔԱՇԵԼ. — ՏՈՒԵԱԼ ԵՐԿՈՒ ԲՈԼՈՐԱԿԱՑ ՔԱՇԵԼ ՀԱՍԱՐԱԿԱՑ ՇՕՇԱՓՈՂ ՄԸ։

Ա. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Բաժնել տուեալ ուղիղ գիծ մը՝ երկու հաւասար մասանց։

Ուղիղ ԱԲ գծին Ա և Բ ծայրերէն՝ նոյն շառաւիղով երկու աղեղներ կը քաշեմ, որ ԱԲ գծին կէսէն մեծ պէտք է ըլլայ։ Այս երկու աղեղներն զիրար կը կտրեն Ե և Դ կէտերով. կը միացընեմ այս կէտերը. ԴԵ ուղիղ գիծն՝ Գ կէտով երկու հաւասար մասն կը բաժնէ ԱԲ գիծը. վասն զի Ա և Բ կէտերն հաւասար հեռաւորութիւն ունենալով Դ և Ե կէտերէն, ԴԵ գիծն՝ ուղղահայեաց է ԱԲ գծին միջակէտին (Ե. Գ.), ձևացընելով չորս ուղիղ անկիւններ։

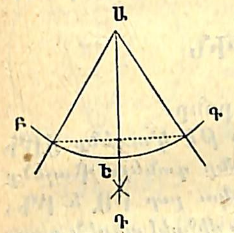


(Ձև 100)

Բ. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Բաժնել ԲԱԳ անկիւնն՝ երկու հաւասար մասանց։

Տուեալ անկեան գագաթէն՝ իբր 'ի կեդրոնէ կը քաշեմ ԲԳ աղեղ մը որ և իցէ շառաւիղով. յետոյ այս աղեղան Բ և Գ կէտերէն կը քաշեմ ուրիշ երկու աղեղներ, որք զիրար կը կտրեն Դ կէտին վրայ. միացընելով այս Դ կէտն՝ Ա գագաթան հետ, ԱԴ գիծն՝ տուեալ անկիւնը երկու հաւասար մասանց կը բաժնէ։



(Ձև 101)

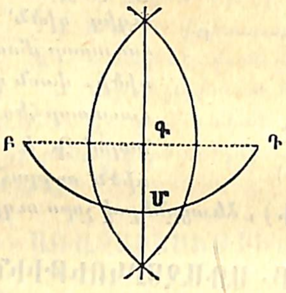
Ծանօթութիւն. — Նոյն կերպը բանեցընելով կրնանք ԲԱԳ անկեան թէ քառորդն, և թէ ութերորդ մասն գտնել, և կամ անոնց որ և իցէ փոքրագոյն բազմապատիկը։

Գ. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Բաժնել երկու հաւասար մասանց ԲԳ աղեղ մը։

Գիտենք որ աղեղան մը լարին ուղղահայեաց քաշելով, այս ուղղահայեացն (10. Ա.) երկու հաւասար մասն կը բաժնէ լարը և անոր աղեղն. ուրեմն ԲԴ լարին միջակէտէն քաշուած ԱԳ ուղղահայեացն՝ ԲՄԴ աղեղն երկու հաւասար մասն կը բաժնէ։ Որով ըսել է թէ ԲԴ գիծն՝ երկու հաւասար մասն բաժնէ։

բաժնելու է, ինչպէս որ վերն ըրինք (Ա), և երկնցընելով գիծը Գ միջակէտէն անդին, ԲՄԴ աղեղն երկու հաւասար մասն կը բաժնենք Մ կէտին վրայ։

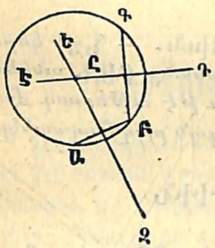


(Ձև 102)

Ծանօթութիւն. — Այս կերպով կրնանք նաև ԲՄԴ աղեղան թէ՛ քառորդ, թէ ութերորդ, և այլն, մասունքը գտնել։

Դ. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Գտնել տուեալ աղեղան մը կեդրոնը։



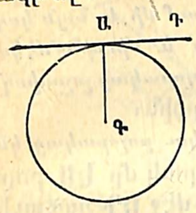
(Ձև 103)

Համարինք թէ կ'ուզենք ԱԲԳ աղեղան կեդրոնը գտնել։ Քաշենք աղեղին մէջ երկու լար ԲԱ և ԲԳ, և այս լարերուն միջակէտերէն բարձրացընենք ՁԵ, ԴԷ ուղղահայեացներն, որք զիրար կը կտրեն Ը կէտին վրայ. այս Ը կէտն է մեր խնդրած կեդրոնն։ Այս առաջարկութեան լուծման ճշմարտութիւնն հաստատեալ է նախընթացաբար ապացուցեալ (10. Բ) հայեցողութեան մը վրայ։

Ծանօթութիւն. — Նոյն ոճով կը գտնենք շրջապատի մը կեդրոնն՝ երբ չենք գիտեր։

Ե. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Որ եւ իցէ կէտէ մը՝ շօշափող քաշել տուեալ բոլորակի մը։

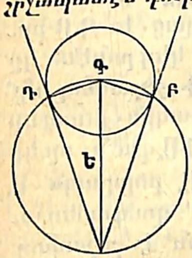


(Ձև 104)

Այս կէտս կրնայ ըլլալ կամ շրջապատին վրայ, և կամ անկէ դուրս։

Նախ՝ թէ որ Ա կէտն գտնուի շրջապատին վրայ, կը քաշեմ ԳԱ շառաւիղն, և անոր Ա ծայրէն ուղղահայեաց մը կը բարձրացընեմ ԳԱ գծին. ԴԱ գիծն է խնդրեալ շօշափողն (11. Բ)։

Երկրորդ, համարինք թէ Ա կէտն՝ շրջապատէն դուրս գտնուի. կը միացընեմ Գ և Ա կէտերն ուղիղ գծով մը, և այս գծին Ե միջակէտէն, իբր 'ի կեդրոնէ, ԵԱ շառաւիղով կը գծեմ շրջապատ մը, որ կտրէ տուեալ շրջապատը Բ և Դ կէտերով։ Յետոյ կը քաշեմ ԱԲ, ԱԴ ուղիղ գիծերն, և կ'ըսեմ թէ այս գիծերն շօշափող են ԳԲ շրջապատին։



(Ձև 105)

Որովհետև ԱԲԳ, ԱԴԳ անկիւններն՝ ստորագրեալ են ԳԴԱ և ԳԲԱ կիսաբոլորակաց մէջ, ուստի ըսել է թէ ուղիղ անկիւնք են. ուրեմն ԱԲ գիծն՝ ուղղահայեաց է ԳԲ շառաւիղին ծայրին վրայ, և ԱԴ գիծն ուղղահայեաց ԳԴ շառաւիղին. հետևաբար ԱԲ, ԱԴ գիծերն՝ շօշափողք են ԳԲ բոլորակին։

Հետեւանք. — Ա կէտէն քաշուած՝ ԱԲ և ԱԴ շօշափողներն իրարու հաւասար են. որովհետև ուղղանկիւն եռանկիւնքն ԱԲԳ, ԱԴԳ, որոց ԱԳ հակուղիղն հասարակաց է, և կողմունքն ԳԲ, ԳԴ իրարու հաւասար են, որով և անկիւնքն ԲԱԳ=ԳԱԴ. ըսել է որ ԳԱ գիծն՝ որ կը միացընէ բոլորակաց կեդրոնները, շօշափողաց ձևացուցած անկիւնն և՛ երկու հաւասար մասն կը բաժնէ։

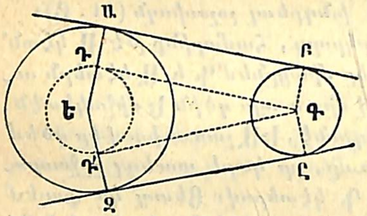
Զ· ՍՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Երկու տուեալ բոլորակաց՝ հասարակաց շօշափող մը քաշել։

Այս շօշափողն կրնայ բոլորակներն կամ մի և նոյն կողմէն շօշափել, և կամ մէկուն այս կողմէն՝ և միւսին մէկալ կողմէն։ Առաջին դիպուածին մէջ երկու բոլորակաց շօշափողն՝ արտաքին *կ՚ըսուի, և երկրորդին մէջ* ներքին։

1․ *Ենթադրենք որ ըլլան Ե և Գ երկու բոլորակաց կեդրոններն․* կը գծեմ համակեդրոն բոլորակ մը ԵԱ բոլորակին մէջ ԵԴ շառաւիղով, որ հաւասար է

ԵԱ—ԳԲ



(Ձև 106)

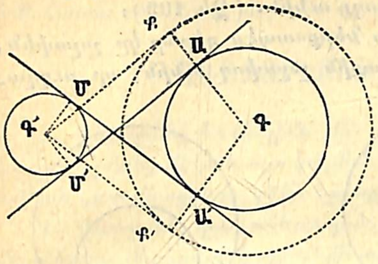
շառաւիղաց․ եւ ԳԲ բոլորակին կեդրոնէն՝ կը ձգեմ ԳԴ շօշափող մը՝ ԵԴ բոլորակին․ յետոյ կը քաշեմ ԵԴԱ գիծն, որ կը կտրէ ԵԱ բոլորակն՝ Ա կէտին վրայ, ուսկից կը քաշեմ ԱԲ գիծն՝ զուգահեռական ԳԴ գծին։ Այս ԱԲ զուգահեռականն՝ է շօշափող երկու տուեալ բոլորակաց։

Որովհետև ԱԴ, ԲԳ իրարու հաւասար են ըստ ենթադրութեան, և կը գտնուին երկու զուգահեռականաց մէջ, ուրով իրարու ալ զուգահեռական են։ Արդ ԴԱ կամ ԵԱ ուղղահայեաց ըլլալով ԴԳ գծին՝ ուղղահայեաց է նաև ԱԲ՝ անոր զուգահեռականին․ և որովհետև ԳԲ զուգահեռական է ԴԱ գծին, է նաև ուղղահայեաց նոյն ԱԲ գծին․ ուրեմն ԱԲ՝ շօշափող է երկու բոլորակաց։

Երկու բոլորակներն իրարու արտաքին ըլլալով՝ Գ կէտն արտաքին է ԵԴ բոլորակին։ Ուրեմն կրնանք Գ կէտէն երկու ԳԴ, ԳԴ՛ շօշափողք քաշել այս բոլորակին, հետևապէս ԵԱ, ԳԲ բոլորակներն՝ երկու շօշափողք ունին ԱԲ, ԶԸ, որք են հասարակք և արտաքինք։

2․ *Դնենք թէ ըլլան երկու բոլորակք ԳԱ, Գ՛Մ, որոց կ՚ուզենք քաշել ներքին հասարակ շօշափող մը։*

Կը գծեմ ԳԱ բոլորակին համակեդրոն բոլորակ մը ԳՔ, որոյ շառաւիղն հաւասար է տուեալ բոլորակաց ԳԱ+Գ՛Մ շառաւիղաց․ եւ Գ՛ կեդրոնէն՝ ԳՔ բոլորակին՝ Գ՛Ք շօշափողն կը քաշեմ։ Յետոյ միացընելով Գ եւ Ք կէտերն՝ Ա կէտէն զուգահեռական մը կը ձգեմ Գ՛Ք շօշափողին։ Այս զուգահեռականն ԱՄ՛ է ներքին շօշափող՝ տուեալ երկու բոլորակաց։



(Ձև 107)

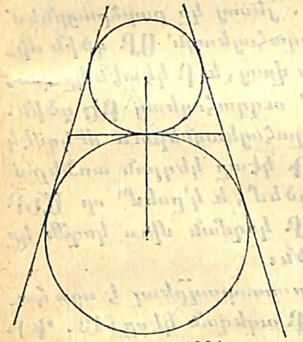
Որովհետև ինչպէս որ Գ՛Ք զուգահեռական է Մ՛Ա գծին, նոյնպէս ՔԱ զուգահեռական է Գ՛Մ՛ գծին, վասն զի ասոնք իրարու հաւասար են (Ց․ Ա․)։ Ուրեմն ՔԳ՛Մ՛Ա է ուղղանկիւն մը․ ԱՔ կամ ԳՔ շառաւիղն՝ և անոր զուգահեռականն Գ՛Մ՛ ուղղահայեացք ըլլալուն համար՝ ՔԳ՛ և ԱՄ՛ գծերուն, ԱՄ՛ է ներքին շօշափող երկու բոլորակաց։

Երկու տուեալ բոլորակներն իրարու արտաքին ըլլալով՝ Գ՛ կէտն ԳՔ բոլորակէն դուրս է, որով Գ՛ կէտէն կրնանք այս բոլորակին երկու Գ՛Ք, Գ՛Ք՛ շօշափողներ քաշել, կազմելով երկու շօշափողք ԱՄ՛, Ա՛Մ, որք հասարակք են և ներքինք։

Ծանօթութիւն․ — *Երկու բոլորակք կրնան հինգ տարբեր դիրք ունենալ․ այսինքն,*

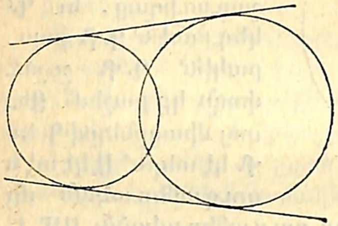
1․ *Երկու արտաքին բոլորակք, որոց կրնանք երկու արտաքին և երկու ներքին հասարակ շօշափողք քաշել, ինչպէս որ վերը տեսանք․ (Ձև 106, 107)։*

2․ *Երկու բոլորակք՝ որք արտաքսապէս զիրար կը շօշափեն, ունին երկու արտաքին հասարակ շօշափողք, և մէկ ներքին, որ ուղղահայեաց է կեդրոնները միացընող գծին․ (Ձև 108)։*

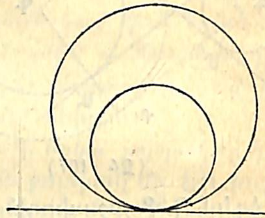

(Ձև 108)

3. Երկու բոլորակք՝ որ զիրար կը կտրեն, միայն երկու արտաքին հասարակ շօշափողք ունին. (Ձև 109):

4. Երկու բոլորակք՝ որ ներքսապէս զիրար կը շօշափեն, միայն մէկ հասարակ արտաքին շօշափող ունին, որ ուղղահայեաց է՝ իրենց կեդրոնները միացընող գծին. (Ձև 110):



(Ձև 109)

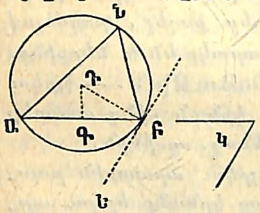


(Ձև 110)

5. Երկու բոլորակք որ համակեդրոն են, չունին հասարակաց որ և իցէ շօշափող մը:

Է. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Գծել ԱԲ ուղիղ գծին վրայ՝ բոլորակի հատուած մը, որ ընդունակ ըլլայ Կ տուեալ անկեան:



(Ձև 111)

Կը ձևացընեմ ԱԲ գծին՝ Բ ծայրին վրայ՝ անկիւնն ԱԲԵ=Կ անկեան. յետոյ կը բարձրացընեմ ԳԴ ուղղահայեացն՝ ԱԲ գծին միջակէտին վրայ, և Բ կէտէն կը քաշեմ ԲԴ՝ ուղղահայեաց ԲԵ գծին. այս ուղղահայեացներուն մէկզմէկ կտրած Դ կէտը կեդրոն առնելով ԴԲ շառաւիղով բոլորակ մը կը գծեմ, և կ՚ըսեմ՝ որ ԱՆԲ հատուածն՝ որ ԱԲԵ անկեան ԱԲ կողման միւս կողմն կը գտնուի, է առաջարկեալ հատուածն:

Որովհետև ԱՆԲ անկիւնն՝ որ ստորագրեալ է այս հատուածին մէջ, իրեն չափ ունի ԱԲ աղեղան կէսը (13. Դ). արդ ԱԲԵ անկիւնն՝ որոյ ԲԵ կողմն ուղղահայեաց է ԲԴ շառաւիղին՝ է շօշափող բոլորակին. որով իրեն չափն է ԱԲ աղեղան

կէսն. ուրեմն ԱՆԲ անկիւնն՝ հաւասար է ԱԲԵ անկեան. ուրեմն հատուածն ԱՆԲ ընդունակ է տուեալ անկեան:

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆՔ

1. Ձևացընել եռանկիւն մը՝ որոյ մէկ անկիւնն, մերձաւոր կողմանց մէկն և այս կողման միջակէտը՝ հակադիր գագաթան հետ միացընող գծին երկայնութիւնն տուեալ ըլլան:

2. Ձևացընել զուգահեռագիծ մը՝ որոյ մէկ անկիւնն և անոր երկու մերձաւոր կողմունքն տուեալ ըլլան:

3. Ձևացընել ուղղանկիւն մը՝ որոյ երկու մերձաւոր կողմունքն տրուած ըլլան:

4. Ձևացընել տարանկիւն մը՝ որոյ տրամանկիւններն տուեալ ըլլան:

5. Տուեալ շառաւիղով մը՝ գծել շրջապատ մը, որ անցնի երկու տուեալ կէտերէ:

6. Ձևացընել ուղղանկիւն մը՝ որոյ մէկ կողմն և տրամանկիւնն տուեալ ըլլան:

7. Ձևացընել զուգահեռագիծ մը՝ որոյ երկու կողմունքն և մէկ տրամանկիւնն տուեալ ըլլան:

8. Գծել շրջապատ մը՝ որ անցնի տուեալ կէտէ մը, և շօշափէ տուեալ գիծ մը:

ԳԼՈՒԽ ԵՐՐՈՐԴ

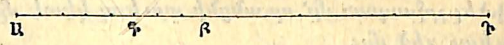
ՅՕԴՈՒԱԾ ԵՕԹՆԵՒՏԱՍՆԵՐՈՐԴ

ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ԳԻԾՔ. — ԲԱԺՆԵԼ ԵՌԱՆԿԵԱՆ ԿՈՂՄՈՒՆՔՆ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՄԱՍԱՆՑ. — ՅԱՏԿՈՒԹԻՒՆՔ ԵՌԱՆԿԵԱՆ ՄԸ ԱՆԿԵԱՆ ԿԻՍԱՀԵՐՁԻՆ:

ՍԱՀՄԱՆՔ

1. Երբ ուղիղ գիծ մը՝ կէտով մը երկու բաժնենք, այնպէս որ մէկուն մասանց՝ միւսին մասանց հետ ունեցած յարաբերութիւնն՝ հաւասար ըլլայ երկու տուեալ թուոց յարաբերութեան, *այն ատեն այս գիծն համեմատական մասանց բաժնած կ'ըլլանք, ըստ երկու տուեալ թուոց:*

Օրինակի համար, ԱԲ գիծն՝ Գ կէտով երկու բաժնեմ, որ



(Ձև 112)

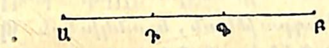
ԱԳին մասունքն այնպէս համեմատին ԳԲին մասանց, ինչպէս 5 առ 3: Գիծ մը համեմատական մասանց բաժնելու մէկ կերպ միայն կայ. այսինքն՝ պէտք է այս գծիս տուեալ թուոց գումարին չափ հաւասար մասանց բաժնել, օրինակի համար 5+3=8 մասունք, և այս սկսեալ Ա կէտէն՝ հինգերորդ բաժանման վրայ՝ Գ կէտը դնել, որով ԱԲ մասն՝ կ'ունենայ 5 մասունք, և ԳԲ մասն՝ 3 մասունք:

2. *Բայց երբոր ըսենք՝* ԱԲ գծին վրայ գտնել կէտ մը, որոյ հեռաւորութիւնն Ա եւ Բ կէտերէն՝ համեմատական ըլլայ 5 եւ 3 թուոց, *այն ատեն խնդիրն երկրորդ լուծումն մ'ալ կ'ունենայ: Որովհետև թէ որ ԱԲ միջոյն 5-3 կամ 2 հաւասար մասն բաժնենք, և թէ ԱԲ գծին շարունակութեան վրայ՝ ԲԴ երկայնութիւն մը առնունք՝ 3 անգամ հա-*

ւասար՝ այս մասանց մէկուն, այն ատեն ԱԴ գիծն 2+3 կամ 5 անգամ կը պարունակէ մի և նոյն մասն. և ԴԱ, ԴԲ միջոց յարաբերութիւնն՝ սկսեալ ԱԲ գծին Ա և Բ ծայրերէն՝ հաւասար է 5 և 3 թուոց յարաբերութեան. հետևապէս Դ կէտն ալ առաջարկութեան ըստածն կը կատարէ. որով $\frac{ԴԱ}{ԴԲ}=\frac{5}{3}$:

Արդ Գ և Դ կէտերն՝ համեմատական մասանց կը բաժնեն ԱԲ գիծը, այս երկու կէտերն կոչին լծորդ կէտք:

3. *Երբ ուղիղ գիծ մը ԱԲ՝ բաժանեալ է Գ կէտով երկու մասն, որք համեմատականք են տուեալ երկու թուոց, զոր օ-*

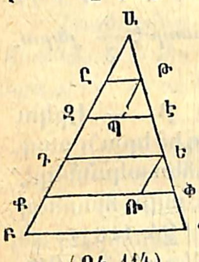


(Ձև 113)

րինակ 5 և 3. և թէ որ ԱԲ գծին վրայ առնունք երկայնութիւն մը ԱԴ, հաւասար ԳԲ երկայնութեան, այն ատեն ԴԲ=ԱԳ. և Դ կէտն՝ կը բաժնէ ԱԲ գիծը երկու մասն ԱԴ, ԴԲ խոտոր համեմատութեամբ 5 և 3 թուոց. որովհետև իրենց յարաբերութիւնն $\frac{ԱԴ}{ԲԴ}$ *է խոտոր* $\frac{ԱԳ}{ԲԳ}$ *յարաբերութեան, վասն զի հաւասար են մէկն* $\frac{3}{5}$ *և միւսն* $\frac{5}{3}$:

Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ամենայն ուղիղ գիծ, որ զուգահեռական է եռանկեան մը կողմանց մէկուն, մէկալ երկու կողմունքն՝ կը բաժնէ համեմատական մասանց:



(Ձև 114)

Ունենամ ԱԲԳ եռանկիւնն. որոյ ԲԳ կողման զուգահեռական քաշեմ ԴԵ ուղիղ գիծն. կ'ըսեմ՝ որ այս գիծն եռանկեան ԱԲ, ԱԳ կողմունքն՝ Դ և Ե կէտերուն վրայ համեմատական մասունք կը բաժնէ (Ձև 114):

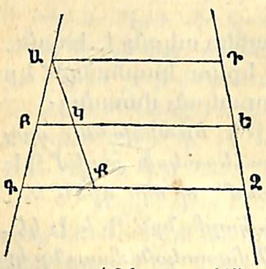
Վասն զի համարինք թէ ԱԵ առ ԵԳ ունեցած յարաբերութիւնն՝ հաւասար ըլ-

էայ $\frac{3}{2}$, որով ըսել է Թէ հասարակաց չափ մ'ունին ԱԹ, որ 3 անգամ ԱԵ մասին մէջ կը պարունակի, և 2 անգամ ԵԳ մասին մէջ. ուրեմն ԱԳ գիծն 5 մասն բաժնուած է, իւրաքանչիւրն հաւասար ԱԹ մասին:

Այս ԱԳ գծին Թ, Է, Ե, Փ բաժանմանց կէտերէն կը քաշեմ ԲԳ կողման զուգահեռականներ, ԸԹ, ՁԷ, ԴԵ, ՔՓ, և կ'ըսեմ Թէ ասոնք ԱԲ կողմն ալ նոյնպէս 5 հաւասար մասն կը բաժնեն:

Որովհետև Թ և Ե կէտերէն ԱԲ կողման զուգահեռականներ քաշելով եռանկիւններն ԵՌՓ=ԹՊԷ. վասն զի ԹԷ=ԵՓ ըստ ենԹադրուԹեան, և անկիւնքն ՊԹԷ=ՌԵՓ իբր համակողմեան անկիւնք. նմանապէս ԹԷՊ=ՌԵՓ նոյն պատճառաւ, որով ըսել է ԹՊ=ԵՌ: Արդ որովհետև ԸՁՊԹ զուգահեռագիծ մ'է, որով ԹՊ կողմն ալ հաւասար է ԸՁ կողման. Նոյնպէս ԴՔՌԵ զուգահեռագիծ է, որով ԵՌ=ԴՔ, ուրեմն ԸՁ=ԴՔ: Նմանապէս կրնանք ցուցընել որ ԱԲ կողման միւս բաժանմունքն ալ իրարու հաւասար են: Ուրեմն ԱԴ առ ԴԲ եղած յարաբերուԹիւնն՝ հաւասար է $\frac{3}{2}$, կամ ԱԵ առ ԵԳ եղած յարաբերուԹեան:

Հետեւանք Ա. — Հայեցողութեան մէջ ապացուցած երկու յարաբերուԹեանց հաւասարուԹիւնն $\frac{\text{ԱԵ}}{\text{ԵԳ}}=\frac{\text{ԱԴ}}{\text{ԴԲ}}$, կրնանք ուրիշ կերպ փոխել $\frac{\text{ԱԳ}}{\text{ԱԵ}}=\frac{\text{ԱԲ}}{\text{ԱԴ}}$, վասն զի այս յարաբերուԹեանց ամէն մէկն հաւասար է $\frac{5}{3}$ յարաբերուԹեան:



(Ձև 115)

Հետեւանք Բ. — Երկու ԱԳ, ԴՁ ուղիղ գիծերուն բազմաԹիւ զուգահեռականներէ՝ ԱԴ, ԲԵ, ԳՁ եւ այլն, հատեալ մասունքն՝ համեմատականք են իրարու. (Ձև 115):

Կը քաշեմ Ա կէտէն ԱՔ գիծն, զուգահեռական ԴՁին,

որ ԲԵ, ԳՁ գիծերն կը հատանէ: ԱԳՔ եռանկեան մէջ ԲԿ զուգահեռական ըլլալով ԳՔ կողման՝ մէկալ երկու կողմունքն համեմատական մասանց կը բաժնէ, որ է ըսել

$$\frac{\text{ԱԲ}}{\text{ԲԳ}}=\frac{\text{ԱԿ}}{\text{ԿՔ}}$$

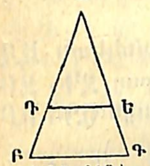
Արդ ԱԿԵԴ զուգահեռագիծ մ'է, որով ԱԿ=ԴԵ. նոյն պատճառաւ նաև ԿՔ=ԵՁ.

$$\text{ուստի}\quad \frac{\text{ԱԲ}}{\text{ԲԳ}}=\frac{\text{ԴԵ}}{\text{ԵՁ}}$$

$$\text{հետևապէս}\quad \frac{\text{ԱԲ}}{\text{ԴԵ}}=\frac{\text{ԲԳ}}{\text{ԵՁ}}:$$

Բ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ամենայն ուղիղ գիծ ԴԵ, որ ԱԲԳ եռանկեան մը ԱԲ, ԱԳ կողմունքն համեմատական մասանց կը բաժնէ, զուգահեռական է ԲԳ կողման:



(Ձև 116)

Որովհետև Դ կէտէն զուգահեռական մը քաշելով ԲԳ կողման, զգիծն ԱԳ երկու մասն կը բաժնէ՝ համեմատական ԱԴ և ԴԲ մասանց, այնպէս որ $\frac{\text{ԱԴ}}{\text{ԴԲ}}=\frac{\text{ԱԵ}}{\text{ԵԳ}}$

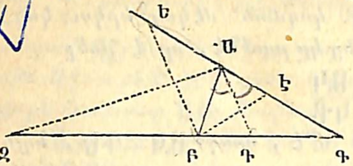
Արդ միայն մէկ կերպ կայ՝ ԱԳ կողմն համեմատական մասանց բաժնելու՝ հաւասար ԱԴ առ ԴԲ մասանց, և այն պիտի ըլլայ Ե կէտով՝ սկսեալ Ա կէտէն. ուրեմն պէտք է որ ԴԵ գիծն՝ զուգահեռական ըլլայ ԲԳ գծին:

Հետեւանք. — ԵԹէ եռանկեան մը երկու կողմունքն կիսենք, և ուղիղ գծով մը միացընենք իրենց միջակէտներն, այս գիծն՝ պէտք է որ զուգահեռական ըլլայ երրորդ կողման:

Գ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

1. ԱԲԳ եռանկեան՝ Ա անկեան՝ ԱԴ կրկնահերձն՝ ԲԳ խարիսխը երկու մասն կը բաժնէ համեմատական ԱԲ, ԱԳ կողմանց (Ձև 117):

Եռանկեան Բ գագաթէն զուգահեռական մը կը քաշեմ ԱԴ գծին, և կ'երկնցընեմ մինչև որ ԱԳ կողման երկայնութեան վրայ Ե կէտն կտրէ : ԳԵԲ եռանկեան մէջ ԱԴ գիծն, զուգահեռական ըլլալով ԵԲ կողման, կ'ունենանք հետևեալ համեմատութիւնն (Ա.), որ է $\frac{\text{ԳԴ}}{\text{ԴԲ}}=\frac{\text{ԳԱ}}{\text{ԱԵ}}$:



(Ձև 117)

Արդ ԱԵԲ եռանկիւնն է հաւասարասրուն, վասն զի ԱԴ զուգահեռական ըլլալով ԵԲ կողման, անկիւնն ԵԲԱ=ԲԱԴ իբր ներքին փոխադարձ անկիւնք, նոյնպէս համակողմեան անկիւնքն ԲԵԱ=ԴԱԳ · և որովհետև ԲԱԳ անկիւնն կէս բաժնուած է, ուրեմն անկիւնքն ԵԲԱ=ԲԵԱ, և հետևապէս ԱԲ=ԱԵ: Վերի համեմատութեան մէջ ԱԵի տեղ ԱԲ դնելով կ'ունենանք, $\frac{\text{ԳԴ}}{\text{ԴԲ}}=\frac{\text{ԳԱ}}{\text{ԱԲ}}$ · զոր կ'ուզէինք ցուցընել:

2 . Եռանկեան մը արտաքին ԲԱԵ անկեան ԱՋ կըկնահերձն՝ ԲԳ կողման երկայնութեան վրայ ՋԳ, ՋԲ մասունքն կը սահմանէ՝ համեմատականք նոյն ԱԳ, ԱԲ կողմանց (Ձև 117):

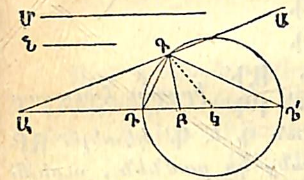
Եռանկեան Բ գագաթէն քաշենք ԲԷ գիծն՝ զուգահեռական ԱՋ գծին: ԳԱՋ եռանկեան մէջ ԲԷ զուգահեռական ըլլալով ԱՋ կողման, կը բաժնէ ԳԱ, ԳՋ երկու կողմունքն համեմատական մասանց (Ա.) · որով կ'ունենանք $\frac{\text{ՋԲ}}{\text{ՋԳ}}=\frac{\text{ԱԷ}}{\text{ԱԳ}}$:

Արդ ԱԲԷ եռանկիւնն է հաւասարասրուն · որովհետև ինչպէս վերը տեսանք, ԲԷ և ՋԱ զուգահեռականաց պատճառաւ՝ անկիւնն ԱԲԷ=ԲԱՋ, և ԲԷԱ=ՋԱԵ · որով ԱԷ=ԱԲ · ուսկից կը հետևի ուրեմն համեմատութիւնն $\frac{\text{ՋԲ}}{\text{ՋԳ}}=\frac{\text{ԱԲ}}{\text{ԱԳ}}$:

Դ · ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու կէտեր՝ որոց հեռաւորութիւնն երկու Ա, Բ կէտերէ՝ համեմատականք են երկու տուեալ Մ եւ Ն երկայնութեանց, իրենց երկրաչափական տեղիք ունին շրջապատ մը:

Ենթադրենք երկու լծորդ կէտք Դ և Դ՛, որք կը բաժնեն ԱԲ գիծը համեմատական մասանց՝ ըստ Մ և Ն տուեալ երկայնութեանց: Այս կէտերէն իւրաքանչիւրն երկրաչափական տեղեաց մասն են, վասն զի իրենց հեռաւորութիւնք ԱԲ գծին ծայրերէն՝ նոյն յարաբերութիւնն ունին՝ ինչ յարաբերութիւն որ ունի Մ առ Ն: Այս ըսելէն ետև, կ'առնում խնդրեալ երկրաչափական տեղեաց որ և իցէ կէտ մը Գ, և կը միացընեմ զայն ուղիղ գծերով Ա , Բ , Դ , Դ՛ չորս կէտերուն հետ:



(Ձև 118)

Որով ըստ ենթադրութեան կ'ունենամ $\frac{\text{ԳԱ}}{\text{ԳԲ}}=\frac{\text{Մ}}{\text{Ն}}=\frac{\text{ԴԱ}}{\text{ԴԲ}}$ ·
հետևաբար ԳԴ ուղիղ գիծն՝ որ ԳԱԲ եռանկեան ԱԲ կողմն երկու մասն կը բաժնէ՝ համեմատական ԳԱ, ԳԲ կողմանց, երկու հաւասար մասն կը բաժնէ ԱԳԲ անկիւնն. և ինչպէս որ

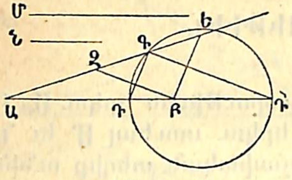
$$\frac{\text{Դ՛Ա}}{\text{Դ՛Բ}}=\frac{\text{ԳԱ}}{\text{ԳԲ}}$$

նմանապէս ԳԴ՛ ուղիղ գիծն՝ երկու հաւասար մասն կը բաժնէ ԲԳԱ՛ արտաքին անկիւնն, որ մերձաւոր է ԱԳԲ անկեան:

Արդ ԴԳԴ՛ անկիւնն ուղիղ է, որովհետև հաւասար է երկու մերձաւոր ԱԳԲ, ԲԳԱ՛ անկեանց գումարին կիսոյն, որք կը գտնուին ԱԱ՛ գծին նոյն կողմն. ուրեմն Գ կէտն է այն շրջապատին կէտերէն մին՝ որոյ տրամագիծն է ԴԴ՛ գիծն:

ՓՈԽԱԴԱՐՁԱԲԱՐ. — Շրջապատին որ եւ իցէ Գ կէտն առաջարկեալ երկրաչափական տեղեաց մասն է:

Որովհետեւ՝ եթէ քաշեմ Բ կէտէն զուգահեռական մը



(Ձև 119)

ԳԴ գծին, և երկնցնեմ մինչև Ե կէտն, ուր կը կտրէ ԱԳ գիծն, կ'ունենամ (Ա.)

$$\frac{\text{ԱԴ}}{\text{ԴԲ}}=\frac{\text{ԱԳ}}{\text{ԳԵ}}$$

Նոյնպէս Բ կէտէն ԲԶ զուգահեռական մը կը քաշեմ Դ՛Գ գծին, մինչև որ կտրէ ԱԳ գիծը, որով նոյնպէս կ'ունենամ

$$\frac{\text{ԱԴ՛}}{\text{ԲԴ՛}}=\frac{\text{ԱԳ}}{\text{ԶԳ}}$$

Արդ երկու յարաբերութիւնքն $\frac{\text{ԱԴ}}{\text{ԲԴ}}$, $\frac{\text{ԱԴ՛}}{\text{ԲԴ՛}}$ իրարու հաւասար են, որովհետեւ ըստ ենթադրութեան Դ և Դ՛ կէտերն՝ ԱԲ ուղիղ գիծը համեմատական մասանց կը բաժնեն, ուրեմն ԳԵ=ԳԶ։

Բայց ԲԵԶ եռանկեան ԶԲԵ անկիւնն՝ ուղիղ անկիւն է, վասն զի իրեն կողմունքն զուգահեռական են ԴԳԴ՛ ուղիղ անկեան կողմանց (7. Ա.), և իրեն ԵԶ հակուղիղին Գ միջակէտն հաւասարապէս հեռու է եռանկեան երեք գագաթներէն (13. Գ. Հ. Ա.). ուրեմն թէ որ նախընթաց հաւասարութեանց առաջնոյն մէջ դնենք ԲԳ փոխանակ ԳԵի, որք իրարու հաւասար են, կ'ունենանք $\frac{\text{ԱԴ}}{\text{ԴԲ}}=\frac{\text{ԱԳ}}{\text{ԲԳ}}$. որ կը ցուցնէ թէ ԴԴ՛ շրջապատին որ և իցէ Գ կէտին Ա. և Բ կէտերէն ունեցած հեռաւորութեանց ԱԳ, ԲԳ յարաբերութիւնն է անփոփոխ։ Ուրեմն Գ կէտն մասն է մեր խնդրած երկրաչափական տեղեաց, որ է ԴԴ՛ շրջապատն։

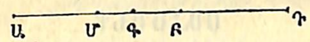
Ե. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Թէ որ ԱԲ ուղիղ գիծ մը, Դ եւ Գ կէտերով համեմատական մասանց բաժնուած է, այս գծին կէսն է միջին համեմատական Մ միջակէտին՝ Դ եւ Գ լծորդ կէտերէն ունեցած հեռաւորութեանց մէջ։

Վերի տուած սահմանէն գիտենք՝ որ $\frac{\text{ԱԴ}}{\text{ԲԴ}}=\frac{\text{ԱԳ}}{\text{ԲԳ}}=\frac{5}{3}$

կամ $$\frac{\text{ԱԴ}}{\text{ԱԳ}}=\frac{\text{ԲԴ}}{\text{ԲԳ}}$$

ուսկից առաջ կու գայ ըստ ծանօթ յատկութեան երկու հաւասար յարաբերութեանց $$\frac{\text{ԱԴ}+\text{ԲԴ}}{\text{ԱԳ}+\text{ԲԳ}}=\frac{\text{ԱԴ}-\text{ԲԴ}}{\text{ԱԳ}-\text{ԲԳ}}$$



(Ձև 120)

Արդ գումարն՝ ԱԴ+ԲԴ=5+3=8 հաւասար է ՄԴ կրկնապատկին, վասն զի Մ կէտն է միջակէտ ԱԲ գծին։ Նմանապէս ԱԳ+ԲԳ=5+3=8=2ՄԲ. նոյնպէս

ԱԴ−ԲԴ=ԱԲ=2ՄԲ

ԱԳ−ԲԳ=5−3=2ՄԳ։

Հետեւաբար՝ նախընթաց յարաբերութիւնն կ'ըլլայ

$$\frac{2\text{ՄԴ}}{2\text{ՄԲ}}=\frac{2\text{ՄԲ}}{2\text{ՄԳ}}$$

այս հաւասարութիւնը պարզելով՝ կ'ունենանք, $\frac{\text{ՄԴ}}{\text{ՄԲ}}=\frac{\text{ՄԲ}}{\text{ՄԳ}}$ որ կը ցուցնէ մեր հայեցողութիւնն։

ՓՈԽԱԴԱՐՁԱԲԱՐ. — Եթէ ՄԲ է միջին համեմատա-
կան ՄԴ եւ ՄԳ հեռաւորութեանց մէջ. ըսել է՝ որ Գ եւ
Դ կէտերն՝ ԱԲ գիծը համեմատական մասանց կը բաժ-
նեն. վասն զի վերջին հաւասարութենէն կրնանք գտնել՝ վե-
րը 'ի գործ դրած կերպով՝ թէ $\frac{\text{ԱԴ}}{\text{ԱԳ}}=\frac{\text{ԲԴ}}{\text{ԲԳ}}$։

ՅՕԴՈՒԱԾ ՈՒԹԵՒՏԱՍՆԵՐՈՐԴ

ՆՄԱՆ ԲԱԶՄԱՆԿԻՒՆՔ. — ՆՄԱՆ ԵՌԱՆԿԻՒՆՔ. — ԵՌԱՆԿԵԱՆՑ ՆՄԱՆՈՒԹԵԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՆ. — ՆՄԱՆ ԲԱԶՄԱՆԿԻՒՆՆԵՐԸ ԲԱԺՆԵԼ ՑԱՅԼ ԵՒ ԱՅԼ ՆՄԱՆ ԵՌԱՆԿԻՒՆՍ. — ՅԱՐԱԲԵՐՈՒԹԻՒՆ ՊԱՐԱԳԱՓՈՒՑ։

ՍԱՀՄԱՆՔ

1. *Երկու նոյնչափ թուով կողմունք ունեցող բազմանկիւնքն նման են՝ երբ անոնց անկիւններն փոխանակաւ իրարու հաւասար ըլլան, և հաւասար անկեանց մերձաւոր կողմունքն՝ համեմատական և նոյն կարգով դրուած։*

2. *Երկու կէտք, երկու գիծք կամ երկու անկիւնք* համադիր *կ'ըսուին, երբ երկու նման ձևոց մէջ իրարու կը համապատասխանեն։ Օրինակի համար, երկու հաւասար անկեանց գագաթունքն են համադիր կէտք. երկու տրամանկիւնք, որք համադիր անկեանց մէջ կը գտնուին, ընականապէս իրենք ալ համադիր գիծք են։*

3. *Երկու բազմանկեանց երկու համադիր կողմանց մէջ եղած հաստատուն յարաբերութիւնն՝ կոչի* յարաբերութիւն նմանութեան*։ Երբոր այս յարաբերութիւնս միութեան հաւասար ըլլայ, երկու բազմանկիւնք իրարու հաւասար են, վասն զի ըսել է՝ թէ բազմանկեանց բոլոր անկիւնք և կողմունքն՝ փոխանակաւ իրարու հաւասար են և նոյն կարգով դրուած։*

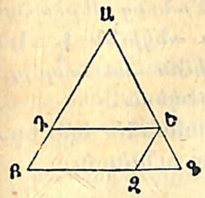
Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Եռանկեան մը կողմանց մէկուն զուգահեռական մը քաշելով՝ կ'ելլայ երկրորդ եռանկիւն մը, նման առաջնոյն։

Համարինք թէ ըլլայ ԱԲԳ *եռանկիւնն, յորում* ԴԵ *զուգահեռական է՝ եռանկեան* ԲԳ *կողման, կ'ըսենք թէ* ԱԴԵ *եռանկիւնն նման է* ԱԲԳ *եռանկեան։*

Որովհետև Ա *անկիւնն՝ երկու եռանկեանց ալ հասարակ*

է, և անկիւնքն ԱԲԳ=ԱԴԵ, ԱԳԲ=ԱԵԴ *որովհետև համակողմեան անկիւնք են նկատմամբ* ԲԳ *և* ԴԵ *զուգահեռականաց։*



(Ձև 121)

Ասկէ զատ ԴԵ *զուգահեռական ըլլալով* ԲԳի *կ'ունենանք* (17. Բ) $\frac{ԱԴ}{ԱԲ}=\frac{ԱԵ}{ԱԳ}$։

Բայց թէ որ ուզենք ցուցընել թէ այս յարաբերութիւնքն հաւասար են $\frac{ԴԵ}{ԲԳ}$ *յարաբերութեան,* Ե *կէտէն* ԵԶ *գիծն կը քաշեմ զուգահեռական* ԱԲ *կողման։ Այդէն գիտենք որ* ԳԱԲ *եռանկեան մէջ*

$$\frac{ԱԵ}{ԱԳ}=\frac{ԲԶ}{ԲԳ}$$

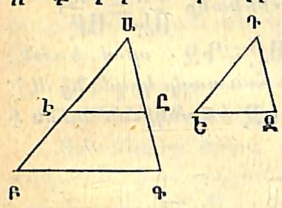
և որովհետև ԴԵԶԲ *զուգահեռագիծ մ'է, ուրեմն* ԲԶ=ԴԵ. *որով վերջին հաւասարութեան մէջ փոխանակ* ԲԶի *դնելով* ԴԵ, *կ'ունենանք* $\frac{ԱԵ}{ԱԳ}=\frac{ԴԵ}{ԲԳ}=\frac{ԱԴ}{ԱԲ}$։

Ուրեմն ԱԴԵ, ԱԲԳ *եռանկիւնքն՝ ունին հաւասար անկիւնք, և իրենց համադիր կողմունքն՝ համեմատականք են, որով ըսել է թէ նման են իրարու։*

Բ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու եռանկիւնք նման են՝ երբ իրենց անկիւններն՝ փոխանակաւ իրարու հաւասար ըլլան։

Ենթադրենք ԱԲԳ, ԴԵԶ *երկու եռանկիւնք, որոց անկիւնքն փոխանակաւ իրարու հաւասար ըլլան, որ է՝* Ա=Դ, Բ=Ե, Գ=Զ. *կ'ըսենք՝ որ այս եռանկիւններն իրարու նման են։*



(Ձև 122)

Կ'առնում ԱԲ *գծին վրայ երկայնութիւնն* ԱԷ=ԴԵ *և կը քաշեմ* Է *կէտէն* ԷԸ *գիծը զուգահեռական* ԲԳ *կողման։ Երկու եռանկիւնքն* ԱԷԸ, ԱԲԳ *նման են, ինչպէս որ վերը բացատրե-*

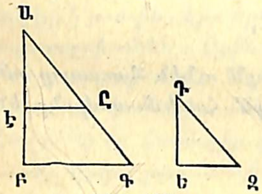
ցինք։ Արդ ԱԷԸ եռանկիւնն՝ հաւասար է ԴԵԶ եռանկեան, որովհետեւ ունին կողմունքն ԱԷ=ԴԵ, և անոնց մերձաւոր անկիւնն Ա=Դ ըստ ենթադրութեան, և անկիւնն Է=Ե, վասն զի Ե=Բ=Է. ուրեմն ԴԵԶ եռանկիւնն հաւասար ըլլալով ԱԷԸ եռանկեան՝ նման է ԱԲԳ եռանկեան։

Հետեւանք. — Երկու եռանկիւնք նման են՝ երբ երկու անկիւններ փոխանակաւ հաւասար ունենան։

Գ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու եռանկիւնք՝ երբ ունենան հաւասար անկիւն մը 'ի մէջ երկու համեմատական կողմանց, նման են իրարու։

Ըլլան ԱԲԳ, ԴԵԶ երկու եռանկիւնք, որոց անկիւնքն Ա=Դ, և $\frac{\text{ԱԲ}}{\text{ԴԵ}}=\frac{\text{ԱԳ}}{\text{ԴԶ}}$. կ'ըսենք թէ այս եռանկիւնքն նման են։ Որովհետեւ եթէ առնում երկայնութիւնն ԱԷ=ԴԵ, և Է կէտէն քաշեմ ԷԸ գիծը զուգահեռական ԲԳ կողման. եռանկիւնքն ԱԷԸ, ԱԲԳ



(Ձև 123)

(Ա.) նման են, որով կ'ունենանք $\frac{\text{ԱԲ}}{\text{ԱԷ}}=\frac{\text{ԱԳ}}{\text{ԱԸ}}$։ Արդ որովհետեւ ԴԵԶ եռանկեան երկու կողմունքն ԴԵ, ԴԶ, ըստ ենթադրութեան համեմատականք են ԱԲԳ եռանկեան ԱԲ, ԱԳ կողմանց, ուրեմն համեմատականք պիտի ըլլան նաև ԱԷԸ եռանկեան ԱԷ և ԱԸ կողմանց, որով կ'ունենանք $\frac{\text{ԴԵ}}{\text{ԱԷ}}=\frac{\text{ԴԶ}}{\text{ԱԸ}}$։

Բայց ԱԷ=ԴԵ, հետեւաբար ԱԸ=ԴԶ. որով եռանկիւնքն ԱԷԸ=ԴԵԶ, վասն զի երկու հաւասար կողմանց մէջ՝ հաւասար անկիւն մ'ունին. որով ԴԵԶ եռանկիւնն՝ նման է ԱԲԳ եռանկեան։

Դ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու եռանկիւնք, որոց երեք կողմունքն՝ փոխանակաւ համեմատականք են, նման են իրարու։

Ըլլան ԱԲԳ, ԴԵԶ երկու եռանկիւնքն, որոց կողմունքն փոխանակաւ ըլլան $\frac{\text{ԱԲ}}{\text{ԴԵ}}=\frac{\text{ԱԳ}}{\text{ԴԶ}}=\frac{\text{ԲԳ}}{\text{ԵԶ}}$. կ'ըսենք թէ այս եռանկիւնքն նման են իրարու. (Ձև 123)։

Կ'առնում երկայնութիւնքն ԱԷ=ԴԵ, և Է կէտէն կը քաշեմ ԷԸ գիծն՝ զուգահեռական ԲԳ կողման։ Եռանկիւնքն ԱԷԸ, ԱԲԳ նման են (Ա.), և իրենց համադիր կողմունքն համեմատականք։ Արդ ԴԵԶ եռանկեան կողմունքն՝ ըստ ենթադրութեան համեմատականք են ԱԲԳ եռանկեան կողմանց, ուրեմն նոյնպէս համեմատականք ԱԷԸ եռանկեան կողմանց, այսինքն $\frac{\text{ԴԵ}}{\text{ԱԷ}}=\frac{\text{ԴԶ}}{\text{ԱԸ}}=\frac{\text{ԵԶ}}{\text{ԷԸ}}$։ Բայց ԱԷ=ԴԵ, հետեւաբար նաև

$$\text{ԱԸ}=\text{ԴԶ} \text{ և } \text{ԷԸ}=\text{ԵԶ}$$

ուրեմն եռանկիւնքն ԱԷԸ=ԴԵԶ. ուստի ԴԵԶ եռանկիւնն նման է ԱԲԳ եռանկեան։

Ծանօթութիւն. — Երկու եռանկեանց նմանութեան երեք դիպուածներն, զորս տեսանք նախընթաց երեք հայեցողութեանց մէջ, համապատասխան են երրորդ յօդուածին մէջ ապացուցած եռանկեան հաւասարութեանց երեք դիպուածոց։

Ե. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու եռանկիւնք, որոց կողմունքն՝ փոխանակաւ զուգահեռական են կամ ուղղահայեացք իրարու՝ նման են։

Ենթադրենք եռանկեան մը անկիւնքն ըլլան Ա, Բ, Գ, և միւս եռանկեան անկիւնքն Ա՛, Բ՛, Գ՛։

Գիտենք որ երկու անկիւնք՝ որոց կողմունքն զուգահեռական են կամ ուղղահայեացք՝ իրարու հաւասար են և կամ բովանդակիչ (7. Ա.)։ Հետեւաբար այս անկեանց վրայ հետեւեալ չորս ենթադրութիւնները կրնանք ընել։

1. Ա+Ա′=2Ո Բ+Բ′=2Ո Գ+Գ′=2Ո
2. Ա+Ա′=2Ո Բ+Բ′=2Ո Գ=Գ′
3. Ա+Ա′=2Ո Բ=Բ′ Գ=Գ′
4. Ա=Ա′ Բ=Բ′ Գ=Գ′

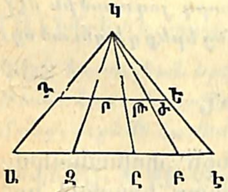
Առաջին երկու դիպուածքն չեն ընդունելի, որովհետև երկու եռանկեանց վեց անկեանց գումարն՝ չորս ուղիղ անկեանց հաւասար է։ Իսկ երրորդ և չորրորդ դիպուածքն ընդունելի են, համարելով որ Ա անկիւնն՝ հաւասար է Ա′, անկեան, ինչպէս է չորրորդ դիպուածին մէջ, ուրեմն ըսել է որ եռանկիւնքն՝ հաւասարանկիւնք են, և որով իրարու նմանք։

Ծանօթութիւն. — Երկու նման եռանկեանց համադիր կողմունքն՝ առաջին դիպուածին մէջ զուգահեռականք են, և երկրորդ դիպուածին մէջ ուղղահայեացք։

Զ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Մի եւ նոյն կէտէ ձգուած այլ եւ այլ ուղիղ գիծք՝ երկու զուգահեռականաց վրայ համեմատական մասունք կը հատանեն։

Որովհետև եթէ Կ կէտէն ձգեմ այլ և այլ ուղիղ գծեր ԴԵ և ԱԷ զուգահեռականաց վրայ, կ'ըսեմ թէ այս զուգահեռականաց վրայ հատեալ մասունքն՝ իրարու համեմատականք են։



(Ձև 124)

Վասն զի ԿԱԶ եռանկեան մէջ ԴՐ զուգահեռական ըլլալով ԱԶ գծին, ԿԴՐ, ԿԱԶ եռանկիւնք՝ նման են, որով

$$\frac{\text{ԴՐ}}{\text{ԱԶ}}=\frac{\text{ԿՐ}}{\text{ԿԶ}}։$$

Նմանապէս ԿՐԹ, ԿԶԸ եռանկիւնները նման են, ուստի և

$$\frac{\text{ՐԹ}}{\text{ԶԸ}}=\frac{\text{ԿՐ}}{\text{ԿԶ}}$$, որով կ'ունենանք $$\frac{\text{ԴՐ}}{\text{ԱԶ}}=\frac{\text{ՐԹ}}{\text{ԶԸ}}$$

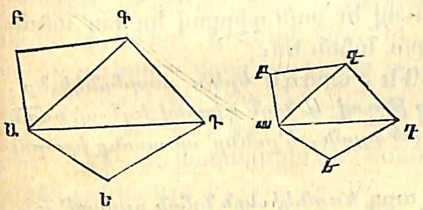
Նոյնպէս կրնանք ցուցնել որ $\frac{\text{ՐԹ}}{\text{ԶԸ}}=\frac{\text{ԹԺ}}{\text{ԸԲ}}$, և այլն։

Ուրեմն Կ կէտէն ձգուած ուղիղ գիծերն կը բաժնեն ԴԵ, ԱԷ զուգահեռական գիծերը՝ համեմատական մասանց։

Ծանօթութիւն. — Կրնայ ըլլալ որ Կ կէտն՝ ԴԵ, ԱԲ զուգահեռականաց մէջ ըլլայ։

Է. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու նման բազմանկիւնք կրնան բաժնուիլ նոյն թուով եւ նման դիրքով դրուած՝ փոխանակաւ նման եռանկեանց։



(Ձև 125)

Ենթադրենք որ ըլլան ԱԲԳԴԵ և աբգդե երկու նման բազմանկիւններ. որոց համադիր Ա, ա գագաթներէն կը քաշեմք տրամանկիւններ ԱԳ, ԱԴ, ագ, ադ։ Այս գծերըն կը բաժնեն բազմանկիւնները նոյն թուով և նման դիրքով եռանկեանց. կ'ըսենք որ այս եռանկիւններն երկու երկու՝ փոխանակաւ իրարու նման են։

1. Ըստ ենթադրութեան՝ ԱԲԳ, աբգ եռանկեանց անկիւնքն Բ=բ, և $\frac{\text{ԱԲ}}{\text{աբ}}=\frac{\text{ԲԳ}}{\text{բգ}}$ ըլլալով, (որովհետև երկու նման բազմանկեանց կողմունք են), այս եռանկիւնքն նման են (Գ)։

2. Նոյնպէս ԱԳԴ, ագդ եռանկիւնքն նման են, վասն զի անկիւնքն ԱԳԴ=ԲԳԴ−ԲԳԱ, և ագդ=բգդ−բգա. և որովհետև ըստ ենթադրութեան ԲԳԴ=բգդ, և քիչ մը առաջ ցուցինք նման եռանկեան համադիր անկիւնն ԲԳԱ=բգա. ուրեմն անկիւնն ԱԳԴ=ագդ։

Աւելի զատ, $\frac{\text{ԱԳ}}{\text{ագ}}=\frac{\text{ԲԳ}}{\text{բգ}}$, որովհետև ԱԲԳ, աբգ եռանկիւնքն նման են, և ըստ ենթադրութեան՝ $\frac{\text{ԲԳ}}{\text{բգ}}=\frac{\text{ԳԴ}}{\text{գդ}}$, ուրեմն ԱԳ, ագ կողմունքն՝ համեմատականք են ԳԴ, գդ կողմանց, որով ԱԳԴ, ագդ եռանկիւնքն նման են (Գ)։

3. *Նոյն ոճով կրնանք ցուցընել մէկալ եռանկեանց նմանութիւնն։ Որով* ԱԲԳԴԵ, աբգդե *բազմանկիւնքն՝ հաւասար թուով և նման դիրքով՝ նման եռանկեանց բաժնուած են։*

Հետեւանք. — Երկու նման բազմանկեանց համադիր տրամանկիւնքն համեմատական են համադիր կողմանց։

Ը. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

ՓՈԽԱԴԱՐՁԱԲԱՐ. — Երկու բազմանկիւնք՝ որ կազմեալ են հաւասար թուով եւ նոյն դիրքով եղեալ՝ նման եռանկիւններէն իրարու նման են։

Ենթադրենք ԱԲԳԴԵ, աբգդե *երկու բազմանկիւնք,* (Ձև 125) *որք հաւասար թուով և նոյն դիրքով եղեալ՝ նման եռանկիւններէ կազմուած ըլլան, կ՚ըսենք՝ որ ասոնք իրարու նման են։*

Որովհետև, ԱԲԳ, աբգ *եռանկիւնքն նման ըլլալով՝ անկիւնքն* ԱԲԳ$=$աբգ. *և* ԲԳԱ$=$բգա. *Նոյնպէս* ԱԳԴ *եռանկիւնն նման ըլլալով՝* ագդ *եռանկեան, անկիւնքն* ԱԳԴ, ագդ *հաւասար են, որով և* ԲԳԴ$=$բգդ, *և այսպէս հետզհետէ։*

Ասկէ զատ, եռանկիւնքն նման ըլլալով կ՚ունենանք հետեւեալ հաւասար յարաբերութիւնքն.

$$\frac{\text{ԱԲ}}{\text{աբ}}=\frac{\text{ԲԳ}}{\text{բգ}}=\frac{\text{ԱԳ}}{\text{ագ}}=\frac{\text{ԳԴ}}{\text{գդ}}=\frac{\text{ԱԴ}}{\text{ադ}}=\frac{\text{ԴԵ}}{\text{դե}}=\frac{\text{ԱԵ}}{\text{աե}}$$

ուրեմն, երկու բազմանկիւնք հաւասար անկիւնք ունենալով և համադիր համեմատական կողմունք՝ իրարու նման են։

Թ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու նման բազմանկեանց պարաչափքն՝ համեմատականք են համադիր կողմանց։

Բազմանկիւնքն (Ձև 125) *նման ըլլալով՝ իրենց համադիր կողմունքն համեմատականք են, որով հետեւեալ յարաբերութեանց* $\frac{\text{ԱԲ}}{\text{աբ}}=\frac{\text{ԲԳ}}{\text{բգ}}=\frac{\text{ԱԳ}}{\text{ագ}}=\frac{\text{ԳԴ}}{\text{գդ}}=\frac{\text{ԱԴ}}{\text{ադ}}=\frac{\text{ԴԵ}}{\text{դե}}$..... *և այլն,*

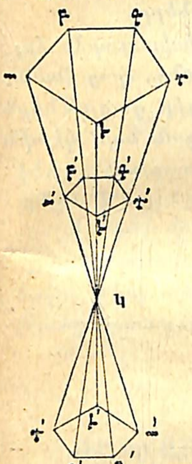
հաւասարութենէն՝ կը հանենք ըստ թուաբանական կանոնի՝

$$\frac{\text{ԱԲ}+\text{ԲԳ}+\text{ԳԴ}\cdots}{\text{աբ}+\text{բգ}+\text{գդ}\ \cdots}=\frac{\text{ԱԲ}}{\text{աբ}}$$

Արդ ԱԲ$+$ԲԳ... *համարիչն՝ մէկ բազմանկեան կողմանց գումարն է, և* աբ$+$բգ.... *անուանիչն միւս բազմանկեան կողմանց գումարն է. ուրեմն այս բազմանկեանց պարաչափքն՝ համեմատականք են* ԱԲ, աբ *համադիր կողմանց։*

Ժ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Թէ որ միացընենք *աբգդե* բազմանկեան գագաթները՝ որ եւ իցէ Կ կէտի հետ, եւ *կա*, *կբ*, *կգ* եւ այլն ուղիղ գծերուն վրայ՝ առնունք *ա′*, *բ′*, *գ′* եւ այլն, այնպէս որ $\frac{\text{կա}'}{\text{կա}}=\frac{\text{կբ}'}{\text{կբ}}=\frac{\text{կգ}'}{\text{կգ}}\ldots=$*թ*. *թ* ըլլալով տուեալ թիւ մը, *ա′բ′գ′դ′ե′* բազմանկիւնն՝ նման պիտի ըլլայ *աբգդե* բազմանկեան։


(Ձև 126)

1. *Որովհետև* կաբ, կա′բ′ *եռանկիւնքն ունենալով հաւասար անկիւն մը 'ի մէջ երկու համեմատական կողմանց՝ նման են, և իրենց համադիր անկիւնքն* կաբ$=$կա′բ′։ *Արդ այս անկիւնքն համակողմեան անկիւնք են նկատմամբ* աբ, ա′բ′ *գծերուն, և* կա *հատանողին, ուրեմն* աբ *գիծն զուգահեռական է* ա′բ′ *գծին.* *որով կ՚ունենանք* $\frac{\text{ա}'\text{բ}'}{\text{աբ}}=\frac{\text{կա}'}{\text{կա}}=$թ։ *Նոյնպէս կը ցուցուի որ* բ′գ′, գ′գ′, *և այլ գծերն՝ զուգահեռական են* բգ, գդ *գծերուն, և թէ* $\frac{\text{բ}'\text{գ}'}{\text{բգ}}=\frac{\text{գ}'\text{դ}'}{\text{գդ}}=$թ։

Անկիւնքն աբգ$=$ա′բ′գ′, *որովհետև իրենց կողմունքն զուգահեռականք են, և երկու երկու նոյն կողմն ուղղուած. Նոյնպէս անկիւնքն* բգդ$=$բ′գ′դ′, *և այլն։ Ուրեմն* աբգդե, ա′բ′գ′դ′ե′ *բազմանկիւնքն, որոց անկիւնքն երկու երկու հա-*

ւասար են, և իրենց համադիր կողմունքն համեմատականք՝ իրարու նման են։

2. Թէ որ ա′, բ′, գ′.... կէտերն դտնուին կ կէտէն անդին գծերուն երկայնութեանց վրայ, նոյն կերպով կրնանք ցուցընել՝ որ աբգդե նման է ա′բ′գ′դ′ե′. բայց իրենց համադիր կողմունքն՝ զուգահեռական են, միայն՝ փոխանակ նոյն ուղղութեամբ ըլլալու՝ հակառակ ուղղութեամբ ձգուած են։

Ծանօթութիւն. — Վերի հայեցողութեան բազմանկեանց ձևոց և դրից նմանութիւնն՝ առաջին դիպուածին մէջ կոչի համանիստ ուղիղ. և երկրորդին մէջ խոտոր։ Կեդրոնն կ կոչի կեդրոն նմանութեան, և կա, կա′ ուղիղ գծերն են գնայուն շառաւիղք ա, ա′ ... և այլ կէտից։

Կարևոր է գիտել որ երբ երկու բազմանկիւնք աբգդե, ա′բ′գ′դ′ե′ են խոտոր համանիստք, կրնանք զանոնք ուղիղ համանիստք ընել՝ շրջելով անոնց մէկը, զոր օրինակ ա′բ′գ′դ′ե′, իրեն մակարդակին վրայ, շուրջ կ կեդրոնի նմանութեան 180°, որովհետև գնայուն շառաւիղքն կա′, կբ′, կգ′... կու գան կը շօշափեն կա, կբ, կգ... համադիր շառաւիղները։

Հետեւանք. — Այս հայեցողութեան փոխադարձն՝ ճըշմարիտ է, որովհետև երկու նման բազմանկիւնք, որոց համադիր կողմունքն զուգահեռական են, համադիր գագաթներն միացընող գծերուն երկայնութիւնքն՝ կու գան նոյն կէտին վրայ գիրար կը կտրեն։

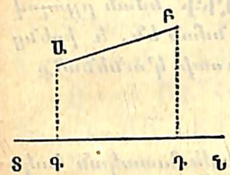
ՅՕԴՈՒԱԾ ԻՆՆԵՒՏԱՍՆԵՐՈՐԴ

ՅԱՐԱԲԵՐՈՒԹԻՒՆ ՈՒՂՂԱՆԿԻՒՆ ԵՌԱՆԿԵԱՆ ՄԸ ՈՒՂԻՂ ԱՆԿԻՒՆԷՆ՝ ՀԱԿՈՒՂԻՂԻՆ ՎՐԱՆ ՁԳՈՒԱԾ ՈՒՂՂԱՀԱՅԵԱՑԻՆ ԵՒ ԵՌԱՆԿԵԱՆ ՄԻՒՍ ԿՈՂՄԱՆՑ ՄԷՋ։

ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆՔ ՈՒՂՂԱՆԿԻՒՆ, ՍՈՒՐ ԱՆԿԻՒՆ ԵՒ ԲՈՒԹ ԱՆԿԻՒՆ ԵՌԱՆԿԵԱՆՑ ԿՈՂՄԱՆՑ ՔԱՌԱԿՈՒՍԵԱՑ ՎՐԱՅ։

ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆՔ ՆՈՅՆ ԿԷՏԷ ՇՐՋԱՊԱՏԻ ՎՐԱՅ ՁԳՈՒԱԾ ԼԱՐԵՐՈՒ, ՀԱՏԱՆՈՂԱՑ ԵՒ ՇՕՇԱՓՈՂԱՑ։

ՍԱՀՄԱՆՔ



(Ձև 127)

1. Թէ որ ՏՆ անսահման գծի մը վրայ ուղղահայեաց մը իջեցընենք Ա կէտէ, այս ուղղահայեացին Գ ոտքն կոչի ստուերագիր Ա կէտին։ Թէ որ առնունք ԱԲ գիծն, անոր ստուերագիրն կ՚ըլլայ՝ Ա և Բ ծայրերէն մէկ մէկ ուղղահայեացներ ձգելով ՏՆ գծին վրայ՝ ԳԴ միջոցն. ուրովհետև կրնանք երևակայել որ ԱԲ գիծն անթիւ կէտեր ըլլան, որդ այս կէտերէն ուղղահայեացներ ձգելով, անոնց ոտքերն կը ձևացընեն ԳԴ գիծը։

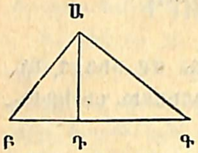
2. Գծի մը քառակուսին ըսելով՝ կ՚իմանանք այն գծին երկայնութեան չափը ցուցընող թուոյն քառակուսին, իսկ երկու գծից արտադրեալն՝ է այն գծերուն չափը ցուցընող թուոց արտադրեալն։

Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Թէ որ ԱԲԳ ուղղանկիւն եռանկեան մը՝ Ա ուղիղ անկիւնէն իջեցընենք ուղղահայեաց մը ԱԴ՝ ՚ի վերայ ԲԳ հակուղղոյն,

1. Ուղիղ անկեան իւրաքանչիւր ԱԲ կամ ԱԳ կողմն է միջին համեմատական ԲԳ հակուղղոյն եւ անոր մերձաւոր կամ ԴԳ մասին մէջ։

Եռանկիւնն ԱԲԴ նման է ԱԲԳ եռանկեան, որովհետև երկուքն ալ ուղղանկիւն եռանկիւնք են, և Բ անկիւնն՝ հասարակ է երկուքին ալ։ Այս եռանկեանց համագիր կողմունքն բաղդատելով կը գտնուի



(Ձև 128)

$$\frac{\text{ԲԳ}}{\text{ԱԲ}}=\frac{\text{ԱԲ}}{\text{ԲԴ}}$$

ուրեմն ԱԲ կողմն՝ է միջին համեմատական ԲԳ հակուղղոյն, և իրեն մերձաւոր ԲԴ հատուածոյն մէջ։ Նոյն ոճով կրնանք ցուցընել որ ԱԳ է միջին համեմատական ԲԳ և ԳԴ կողմանց մէջ, այսպէս $\frac{\text{ԲԳ}}{\text{ԱԳ}}=\frac{\text{ԱԳ}}{\text{ԴԳ}}$։

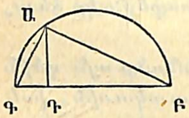
2. Ուղղահայեացն ԱԴ՝ է միջին համեմատական հակուղղոյն՝ ԲԴ եւ ԴԳ հատուածոց մէջ։

Որովհետև եռանկիւնքն ԱԲԴ և ԱԳԴ՝ նման ըլլալով մի և նոյն ԱԲԳ եռանկեան, իրարու ալ նման են, և իրենց համագիր կողմունքն համեմատականք, ուստի կ'ունենանք

$$\frac{\text{ԲԴ}}{\text{ԱԴ}}=\frac{\text{ԱԴ}}{\text{ԴԳ}}:$$

Որ է ըսել ԱԴ ուղղահայեացն՝ է միջին համեմատական հակուղղոյն՝ ԲԴ և ԴԳ հատուածոց մէջ։

Հետեւանք. — Թէ որ ԱԲԳ ուղղանկիւն եռանկեան ԲԳ հակուղիղն տրամագիծ առնելով՝ քաշենք շրջապատ մը, այս կոր գիծն կ'անցնի եռանկեան Ա գագաթէն (13. Դ. Հ). Հետեւաբար նախընթաց հայեցողութիւնը կրնանք հետեւեալ կերպով ըսել.



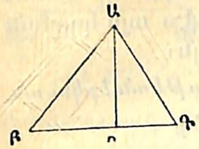
(Ձև 129)

1. Որ եւ իցէ ԱԲ լար մը՝ է միջին համեմատական 'ի մէջ ԲԳ տրամամագծին, որ կ'անցնի իւր մէկ ծայրէն, եւ իրեն ԲԴ ստուերագծին՝ 'ի վերայ նոյն տրամագծի։

2. Ուղղահայեացն ԱԴ, որ ձգուած է շրջապատի մը որ եւ իցէ Ա կէտէն՝ ԲԳ տրամագծին վրայ, է միջին համեմատական տրամագծին՝ ԲԴ եւ ԴԳ հատուածոց մէջ։

Բ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ուղղանկիւն եռանկեան մը հակուղղոյն քառակուսին՝ հաւասար է միւս երկու կողմանց քառակուսեաց գումարին։



(Ձև 130)

Ունենանք ԱԲԳ ուղղանկիւն եռանկիւնն. Ա գագաթէն կ'իջեցընենք ԲԳ հակուղղոյն վրայ՝ ԱԴ ուղղահայեացն. արդ նախընթաց հայեցողութենէն գիտենք, որ

$$\frac{\text{ԲԳ}}{\text{ԱԲ}}=\frac{\text{ԱԲ}}{\text{ԲԴ}}.\ \text{և թէ}\ \frac{\text{ԲԳ}}{\text{ԱԳ}}=\frac{\text{ԱԳ}}{\text{ԳԴ}}.$$

ուսկից կ'ունենանք $\overline{\text{ԱԲ}}^2=\text{ԲԳ}\times\text{ԲԴ}$

և $\overline{\text{ԱԳ}}^2=\text{ԲԳ}\times\text{ԳԴ}$

յաւելլով $\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԱԳ}}^2=\text{ԲԳ}(\text{ԲԴ}+\text{ԳԴ})$

և որովհետև $\text{ԲԴ}+\text{ԳԴ}=\text{ԲԳ}$, ուրեմն $\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԱԳ}}^2=\overline{\text{ԲԳ}}^2$

Ուստի $\overline{\text{ԲԳ}}^2$ հակուղղոյն քառակուսին՝ հաւասար է միւս կողմանց $\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԱԳ}}^2$ քառակուսեաց գումարին։

Ծանօթութիւն. — Այս հայեցողութիւնս կը ծառայէ գտնել ուղղանկիւն եռանկեան կողմանց մին, երբ միւս կողմունքն տուեալ ըլլան.

1. Դնենք թէ $\text{ԱԲ}=4^{\text{մ}}$ և $\text{ԱԳ}=3^{\text{մ}}$

կ'ունենանք $\overline{\text{ԲԳ}}^2=4^2+3^2$ կամ $\overline{\text{ԲԳ}}^2=16+9=25$

որով $\text{ԲԳ}=\sqrt{25}=5^{\text{մ}}$

2. Թէ որ $\text{ԲԳ}=13^{\text{մ}}$ և $\text{ԱԳ}=5^{\text{մ}}$

կ'ունենանք $169=\overline{\text{ԱԲ}}^2+25$

ուսկից $\overline{\text{ԱԲ}}^2=169-25=144$

ուրեմն $\text{ԱԲ}=12^{\text{մ}}$

Հետեւանք Ա. — Ուղղանկիւն եռանկեան մը՝ ուղիղ անկեան երկու կողմանց քառակուսիքն՝ այնպէս կը համեմատին իրարու, ինչպէս այս կողմանց ստուերագրերն հակուղղոյն վրայ՝ կը համեմատին իրարու։

Որովհետև ԱԲԳ եռանկեան Ա գագաթէն ուղղահայեաց մը իջեցընելով հակուղղոյն վրայ՝ կ'ունենանք (Բ).

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2=\text{ԲԴ}\times\text{ԲԴ}$$

$$\overline{\text{ԱԳ}}^2=\text{ԲԳ}\times\text{ԳԴ}$$

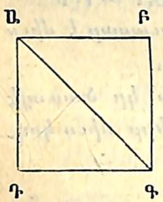
որով $$\frac{\overline{\text{ԱԲ}}^2}{\overline{\text{ԱԳ}}^2}=\frac{\text{ԲԴ}}{\text{ԳԴ}}\text{ ։}$$

Հետեւանք Բ. — Ուղղանկիւն եռանկեան մը ուղիղ անկեան մէկ կողման քառակուսին՝ այնպէս կը համեմատի հակուղղոյն քառակուսւոյն, ինչպէս այս կողման ստուերագիրն կը համեմատի հակուղղոյն։

Որովհետև $\overline{\text{ԱԲ}}^2=\text{ԲԳ}\times\text{ԲԴ}$ *հաւասարութեան երկու անդամներն ալ բաժնելով* $\overline{\text{ԲԳ}}^2$ *վրայ կ'ունենանք*

$$\frac{\overline{\text{ԱԲ}}^2}{\overline{\text{ԲԳ}}^2}=\frac{\text{ԲԴ}}{\text{ԲԳ}}$$

Հետեւանք Գ. — ԱԲԳԴ քառակուսւոյ մը՝ տրամանկեան ԱԳ առ ԱԲ կողմն ունեցած յարաբերութիւնն՝ հաւասար է $\sqrt{2}$։



(Ձև 131)

Որովհետև ԱԲԳ եռանկիւնն ուղղանկիւն է և հաւասարասրուն, ուստի կ'ունենանք

$$\overline{\text{ԱԳ}}^2=\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԲԳ}}^2=2\overline{\text{ԱԲ}}^2$$

ուսկից $$\frac{\text{ԱԳ}}{\text{ԱԲ}}=\sqrt{2}$$

Արդ չկայ թիւ մը՝ ամբողջ կամ կոտորակ, որոյ երկրորդ կարողութիւնն ըլլայ 2. ուսկից կը հետեւի՝ որ քառակուսւոյ տրամանկիւնն եւ մէկ կողմն՝ անչափական գիծեր են իրարու մէջ։

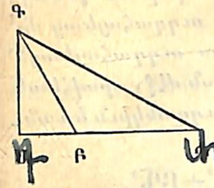
Գ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որ եւ իցէ եռանկեան մէջ՝ բութ անկեան հակադիր կողման քառակուսին՝ հաւասար է միւս կողմանց քառակուսեաց գումարին, յաւելեալ կրկին արտադրելով այս կողմանց մէկուն ընդ ստուերագրի երկրորդ կողման 'ի վերայ առաջնոյն*։

* Այս եւեւ հայեցողութիւնները լուծելու համար՝ հարկ է յիշել գրահաշուի մէջ ապացուցած երկու նախադասութիւնքն.

1. Երկու թուոց բովանդակութեան քառակուսին՝ հաւասար է այն երկու

Ունենանք ԱԲԳ եռանկիւն մը, յորում ԱԳ կողմն հակադիր ըլլայ ԱԲԳ բութ անկեան։ Գ գագաթէն կ'իջեցընեմ ԳԴ ուղղահայեաց մը ԱԲ կողման երկայնութեան վրայ, և որովհետև ԱԴԳ է ուղղանկիւն եռանկիւն մը՝ ուստի կ'ունենանք ըստ նախընթաց հայեցողութեան $\overline{\text{ԱԳ}}^2=\overline{\text{ԱԴ}}^2+\overline{\text{ԳԴ}}^2$ ։



(Ձև 132)

$$\text{Բայց}\quad \text{ԱԴ}=\text{ԱԲ}+\text{ԲԴ},$$

որ է ըսել՝ եռանկեան ԱԲ կողմն և ԲԴ, որ է ստուերագիր ԲԳ կողման երկայնութեան, որովհետև ԳԴ ուղղահայեացն՝ եռանկիւնէն դուրս կը գտնուի։

Ուրեմն $\overline{\text{ԱԴ}}^2=(\text{ԱԲ}+\text{ԲԴ})^2=\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԲԴ}}^2+2\,\text{ԱԲ}\times\text{ԲԴ}$

վերի հաւասարութեան մէջ փոխանակ $\overline{\text{ԱԴ}}^2$ *անդամոյն՝ դնելով իրեն արժէքն՝ կ'ունենանք,*

$$\overline{\text{ԱԳ}}^2=\overline{\text{ԳԴ}}^2+\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԲԴ}}^2+2\,\text{ԱԲ}\times\text{ԲԴ}\text{ ։}$$

Գիտնալով որ ԳԴԲ եռանկիւնն՝ է ուղղանկիւն, ըստ նախընթաց հայեցողութեան $\overline{\text{ԳԴ}}^2+\overline{\text{ԲԴ}}^2=\overline{\text{ԲԳ}}^2$ *. ուրեմն կը հետեւի որ*

$$\overline{\text{ԱԳ}}^2=\overline{\text{ԲԳ}}^2+\overline{\text{ԱԲ}}^2+2\,\text{ԱԲ}\times\text{ԲԴ}$$

Դ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որ եւ իցէ եռանկեան մէջ՝ սուր անկեան հակադիր կողման քառակուսին՝ հաւասար է միւս երկու կողմանց քառակուսեաց գումարին, նուազ կրկին արտադրելով այս կողման միոյն՝ ընդ ստուերագրի երկրորդ կողման 'ի վերայ առաջնոյն։

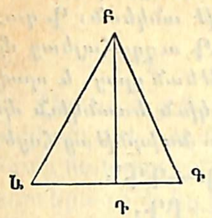
թուոց քառակուսեաց գումարին, յաւելեալ իրենց կրկին արտադրելովն.

$$(ա+բ)^2=ա^2+բ^2+2աբ\text{ ։}$$

2. Երկու թուոց տարբերութեան քառակուսին՝ հաւասար է այն երկու թուոց քառակուսեաց գումարին՝ նուազ իրենց կրկին արտադրելով.

$$(ա-բ)^2=ա^2+բ^2-2աբ\text{ ։}$$

Ունենանք ԱԲԳ եռանկիւնն, յորում ԱԲ հակադիր է Գ սուր անկեան: Այս կողման Բ ծայրէն կ'իջեցնեմ ԲԴ ուղղահայեաց մը՝ ԱԳ կողման վրայ. այս ուղղահայեացն՝ կը գտնուի եռանկեան մէջ, որովհետև Ա անկիւնն սուր է: Ուղղանկիւն եռանկիւնն ԱԴԲ կու տայ



(Ձև 133)

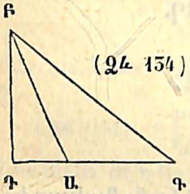
$$\overline{\text{ԱԲ}}^2=\overline{\text{ԱԴ}}^2+\overline{\text{ԲԴ}}^2$$

Արդ $\text{ԱԴ}=\text{ԱԳ}-\text{ԴԳ}$, որ է ըսել՝ եռանկեան ԱԳ կողմն՝ նուազ ԴԳ, որ է ստուերագիր ԲԳ կողման 'ի վերայ ԱԳ կողման:

Ուրեմն $\overline{\text{ԱԴ}}^2=(\text{ԱԳ}-\text{ԴԳ})^2=\overline{\text{ԱԳ}}^2+\overline{\text{ԴԳ}}^2-2\,\text{ԱԳ}\times\text{ԴԳ}$. փոխադրելով վերի հաւասարութեան մէջ $\overline{\text{ԱԴ}}^2$ զօրութիւնն, կ'ունենանք $\overline{\text{ԱԲ}}^2=\overline{\text{ԲԴ}}^2+\overline{\text{ԱԳ}}^2+\overline{\text{ԴԳ}}^2-2\,\text{ԱԳ}\times\text{ԴԳ}$: Եռանկիւնն ԲԴԳ ուղղանկիւն ըլլալով $\overline{\text{ԲԴ}}^2+\overline{\text{ԴԳ}}^2=\overline{\text{ԲԳ}}^2$ ուրեմն

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2=\overline{\text{ԲԳ}}^2+\overline{\text{ԱԳ}}^2-2\,\text{ԱԳ}\times\text{ԴԳ}:$$

Բայց կրնայ ըլլալ՝ որ Ա անկիւնն բութ ըլլայ, այն ատեն Բ գագաթէն քաշուած ԲԴ ուղղահայեացն՝ եռանկիւնէն դուրս կը գտնուի. հայեցողութիւնն նոյն լուծումն կ'ունենայ, որովհետև ԱԴԲ ուղղանկիւն եռանկիւն ըլլալով միշտ



(Ձև 134)

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2=\overline{\text{ԱԴ}}^2+\overline{\text{ԲԴ}}^2.$$

և $\overline{\text{ԱԴ}}^2=(\text{ԴԳ}-\text{ԱԳ})^2$. որով

$$\overline{\text{ԱԴ}}^2=\overline{\text{ԴԳ}}^2+\overline{\text{ԱԳ}}^2-2\,\text{ԴԳ}\times\text{ԱԳ}:$$

Հետեւանք. — Երբոր եռանկեան մը երեք կողմանց չափերն տրուած են, նախընթաց հայեցողութեամբ՝ կրնանք հաշուել մէկ կողման ստուերագիրն՝ միւս երկու կողմանց մէկուն վրայ, եւ անով՝ գագաթէ մը հակադիր կողման վրայ ձգուած ուղղահայեացին երկայնութիւնը:

Օրինակի համար ԱԲԳ եռանկեան կ'ուզենք ԲԴ բարձրութիւնն չափել, յորում $\text{ԲԳ}=4^{\text{մ}}$, $\text{ԲԱ}=3^{\text{մ}}$ և $\text{ԱԳ}=2^{\text{մ}}$:

Արդ կը տեսնենք նախ՝ որ ԲԳ կողման հակադիր Ա անկիւնն՝ բութ անկիւն է, վասն զի $\overline{\text{ԲԳ}}^2$ կամ 16, աւելի մեծ է $\overline{\text{ԲԱ}}$ և $\overline{\text{ԱԳ}}^2$ կամ 9+4 քառակուսեաց գումարէն. ուրեմն կ'ունենանք այս հաւասարութիւնն

$$\overline{\text{ԲԳ}}^2=\overline{\text{ԲԱ}}^2+\overline{\text{ԱԳ}}^2+2\,\text{ԱԳ}\times\text{ԴԱ}.$$

կամ $16=9+4+4\times\text{ԴԱ}$

որով $\text{ԴԱ}=\dfrac{16-13}{4}=0^{\text{մ}},75$

Այս ըսելէն ետև, ԲԱԴ եռանկիւնն ուղղանկիւն ըլլալով

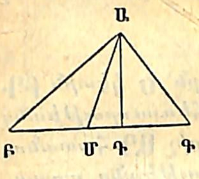
կու տայ $\overline{\text{ԲԴ}}^2=\overline{\text{ԲԱ}}^2-\overline{\text{ԴԱ}}^2$

որ է $\overline{\text{ԲԴ}}^2=9-0{,}5625=8{,}4375$

ուսկից $\text{ԲԴ}=\sqrt{8{,}4375}=2{,}905$ մերձաւորապէս

Ե. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Եթէ որ եւ լցէ ԱԲԳ եռանկեան Ա գագաթը միացընենք խարսխին Մ միջակէտին հետ, կ'ունենանք



(Ձև 135)

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԱԳ}}^2=2\,\overline{\text{ԱՄ}}^2+2\,\overline{\text{ԲՄ}}^2$$

Իջեցնենք ԱԴ ուղղահայեացը ԲԳ խարսխին վրայ. եռանկիւնքն ԱՄԳ և ԱՄԲ ըստ նախընթաց հայեցողութեանց պիտի տան

$$\overline{\text{ԱԳ}}^2=\overline{\text{ԱՄ}}^2+\overline{\text{ՄԳ}}^2+2\,\text{ՄԳ}\times\text{ՄԴ}.$$
$$\overline{\text{ԱԲ}}^2=\overline{\text{ԱՄ}}^2+\overline{\text{ՄԲ}}^2+2\,\text{ԲՄ}\times\text{ՄԴ}.$$

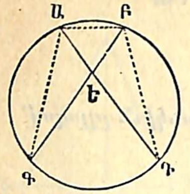
Յաւելլով այս հաւասարութիւնքն, և գիտելով որ $\text{ԲՄ}=\text{ՄԳ}$ կ'ունենանք $\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԱԳ}}^2=2\,\overline{\text{ԱՄ}}^2+2\,\overline{\text{ՄԲ}}^2$:

Ծանօթութիւն: — Այս հայեցողութիւնս՝ կը ծառայէ չափելու եռանկեան մը գագաթը հակադիր կողման միջակէտին հետ միացընող գծին երկայնութիւնը, երբ երեք կողմանց չափերն ծանօթք են: Ընդհանրապէս այս ուղիղ գիծն կը կոչուի միջահատ:

Զ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Թէ որ բոլորակի մը մակարդակին վրայ՝ առնունք Ե կէտը, եւ անկէ քաշենք հատանողներ, այս կէտին եւ հատանողաց շրջապատին վրայ կտրած կէտերուն մէջ եղած հեռաւորութեանց արտադրեալն՝ հաստատուն է:

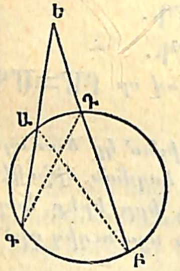
Այս տուեալ Ե կէտն կրնայ կամ բոլորակին մէջ գըտնուիլ և կամ անկէ դուրս։ Նախ համարինք որ բոլորակին մէջն է. նոյն կէտէն կը քաշեմք ԵԲ և ԵԱ գիծերը, յորոց մին շրջապատը կը կտրէ Բ և Գ կէտերուն վրայ, և երկրորդն Ա և Դ կէտերուն վրայ. և կը միացնեմ Ա ընդ Գ և Բ ընդ Դ։ Եռանկիւնքն ԱԵԳ, ԲԵԴ նման են, որովհետև իրենց Ե անկիւնքն հաւասար են՝ իբր ընդդիմագագաթն անկիւնք, և անկիւնն Բ=Ա, վասն զի մի և նոյն ԳԱԲԴ բոլորակի հատուածոյն մէջ ստորագրեալ են (13. Դ), նոյն պատճառաւ անկիւնն Գ=Դ։ Արդ այս եռանկիւնքն նման ըլլալով՝ համադիր կողմունքն հետևեալ համեմատութիւնն կու տան $\frac{ԵԳ}{ԵԴ}=\frac{ԵԱ}{ԵԲ}$։



(Ձև 136)

Ուստից կ'ելլէ ԵԳ×ԵԲ=ԵԴ×ԵԱ, այսինքն՝ Ե կէտին ԲԳ հատանողին՝ Բ և Գ կէտերէն ունեցած հեռաւորութեանց արտադրեալն՝ հաւասար է նոյն Ե կէտին՝ ուրիշ ԱԴ հատանողին, Ա և Դ կէտերէն ունեցած հեռաւորութեանց արտադրելոյն։

Երկրորդ. համարինք թէ Ե կէտն բոլորակէն դուրս գտնուի. քաշեմք ԵԳ, ԵԲ հատանողներն, որոց մին շրջապատը Ա և Գ կէտերով, և միւս Դ և Բ կէտերով կը կտրէ, յետոյ կը ձգենք ԱԲ և ԴԳ լարերը։ Եռանկիւնքն ԵԱԲ, ԵԴԳ նման են, որովհետև Ե անկիւնն հասարակ է երկուքին ալ, և անկիւնն Գ=Բ, որովհետև երկուքն ալ մի և նոյն ԱԴ աղեղին կիսովն չափուած են (13. Դ). արդ բաղդատելով այս եռանկեանց համադիր կողմունքն,



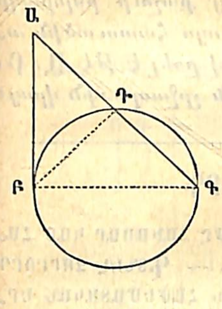
(Ձև 137)

կ'ունենանք հետևեալ հաւասարութիւնն $\frac{ԵԱ}{ԵԴ}=\frac{ԵԲ}{ԵԳ}$. ուստից կ'ելլէ ԵԱ×ԵԳ=ԵԴ×ԵԲ, որ կը ցուցնէ վերոյիշեալ հայեցողութիւնը։

Ծանօթութիւն. — ԵԳ հատանողին ԵԱ և ԵԴ հատուածքն խոտոր համեմատականք են ԵԲ հատանողին ԵԴ և ԵԲ հատուածոց։

Է. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Թէ որ բոլորակէ մը դուրս առնունք Ա կէտ մը, եւ անկէ քաշենք ԱԲ շօշափող մը, եւ որ եւ իցէ ԱԴ հատանող մը, շօշափողն է միջին համեմատական 'ի մէջ հատանողին եւ նորա արտաքին ԱԴ մասին մէջ։

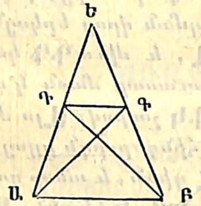


(Ձև 138)

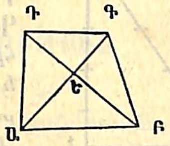
Այս հայեցողութիւնս նախընթացին անմիջական հետևանքն է. միացընենք շօշափողին շօշափման Բ կէտը՝ Գ և Դ կէտերուն հետ, ուր հատանողն կը կտրէ զշրջապատը։ Եռանկիւնքն ԱԲԳ, ԱԲԴ նման են, որովհետև Ա անկիւնն՝ հասարակ է երկուքին ալ, և ԱԲԴ անկիւնն՝ հաւասար է Գ անկեան, որովհետև մի և նոյն ԲԴ աղեղին կիսովն չափուած են (13. Դ). ուրեմն կը հետևի որ $\frac{ԱԳ}{ԱԲ}=\frac{ԱԲ}{ԱԴ}$, այսինքն՝ ԱԲ շօշափողն՝ է միջին համեմատական 'ի մէջ ԱԳ հատանողին և նորա ԱԴ արտաքին մասին։

Ը. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Եթէ երկու ուղիղ գիծք ԱԴ, ԲԳ (Ձև 140) (երկնցը-



(Ձև 139)



(Ձև 140)

նելով եթէ հարկ է) զիրար կը կտրեն Ե կէտի մը վրայ, (Ձև 139), այնպէս որ ԱԵ×ԴԵ=ԲԵ×ԳԵ, իրենց Ա, Դ, Բ, Գ ծայրերն կը գտուին մի եւ նոյն շրջապատին վրայ։

Վերջինեալ հաւասարութեան երկու անդամները բաժնելով ընդ արտադրեալն ԲԵ×ԴԵ կ'ունենանք $\frac{\text{ԱԵ}}{\text{ԲԵ}}=\frac{\text{ԳԵ}}{\text{ԴԵ}}$։

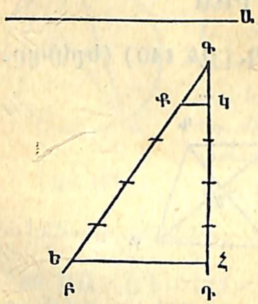
Եռանկիւնքն ԱԳԵ, ԲԴԵ նման են, վասն զի ունին հաւասար Ե անկիւն մի, 'ի մէջ երկու համեմատական կողմանց (18. Գ). և որով իրեն Ա և Բ համադիր անկիւնքն՝ հաւասար են իրարու։ Ուրեմն եթէ ԳԴ գծին վրայ քաշուի բոլորակի հատուած մը՝ ընդունակ ԳԱԴ անկեան, այս հատուածին աղեղն՝ պիտի անցնի Բ գագաթէն ալ, որով ըսել է թէ Ա, Բ, Գ, Դ չորս կէտերն կը գտնուին մի և նոյն շրջապատին վրայ։

ՅՕԴՈՒԱԾ ՔՍԱՆԵՐՈՐԴ

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆՔ. — ԲԱԺՆԵԼ ԳԻԾ ՄԸ ՀԱՒԱՍԱՐ ԿԱՄ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՄԱՍԱՆՑ ԸՍՏ ՏՈՒԵԱԼ ԳԾԵՐՈՒ. — ԳՏՆԵԼ ՉՈՐՐՈՐԴ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՄԸ ԵՐԵՔ ԳԾԵՐՈՒ, ԵՒ ՄԻՋԻՆ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ԵՐԿՈՒ ԳԾԵՐՈՒ. — ՏՈՒԵԱԼ ՈՒՂԻՂ ԳԾԻ ՄԸ ՎՐԱՅ ՁԵՒԱՑԸՆԵԼ ԲԱԶՄԱՆԿԻՒՆ ՄԸ, ՆՄԱՆ ՏՈՒԵԱԼ ԲԱԶՄԱՆԿԵԱՆ։

Ա. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Բաժնել ուղիղ գիծ մը հաւասար մասանց։



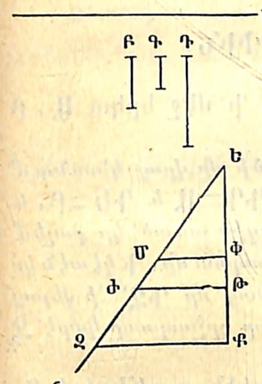
(Ձև 141)

Կ'ուզենք օրինակի համար Ա գիծը հինգ հաւասար մասն բաժնել. կ'առնունք որ եւ իցէ ԲԳԴ անկեան ԲԳ կողման վրայ երկայնութիւն մը ԳԵ=Ա, և միւս ԳԴ կողման վրայ հինգ հաւասար մասն կ'առնունք որ և իցէ ԳԿ չափով։ Այս մասանց կէտերէն հինգերորդն ըլլայ Հ, կը քաշեմ ԵՀ գիծն, և անոր զուգահեռական մը ԿՔ, Կ կէտէն։ Այս ԿՔ ուղիղ գիծն՝ ԳԵՀ եռանկեան ԳԵ, ԳՀ կողմունքն համեմատական հատուածոց կը բաժնէ, որովհետև

զուգահեռական է ԵՀ երրորդ կողման։ Արդ ըստ ենթադրութեան՝ ԳԿ հատուածն է մէկ հինգերորդ ԳՀ կողման. ուրեմն ԳՔ հատուածն ալ՝ է մէկ հինգերորդ ԳԵ կողման կամ Ա գծին։ Որով ըսել է թէ Ա գիծն հինգ հաւասար մասն բաժնելու համար՝ պէտք է ԳՔ երկայնութիւնը հինգ անգամ յաջորդաբար առնուլ Ա գծին վրայ։

Բ. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Բաժնել ուղիղ գիծ մը Ա՝ համեմատական մասանց ըստ Բ, Գ, Դ տուեալ երկայնութեանց։



(Ձև 142)

Կ'առնում ՆԵՔ անկեան ԵՆ կողման վրայ երկայնութիւնն
ԵԶ=Ա
և միւս կողման վրայ կ'առնում երկայնութիւնքն ԵՓ=Դ, ՓԹ=Գ,
ԹՔ=Բ։

Յետոյ կը քաշեմ ԶՔ գիծն, և այս գծին զուգահեռականներ կը քաշեմ Թ և Փ կէտերէն։

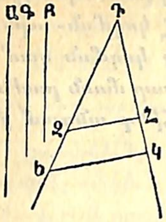
Այս զուգահեռականները կը բաժնեն ԵԶ կամ Ա գիծը (17. Ա) համեմատական մասանց ըստ ԵՓ, ՓԹ, ԹՔ հատուածոց և կամ համեմատ Դ, Գ, Բ տուեալ երկայնութեանց։

Գ. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Գտնել չորրորդ համեմատական՝ տուեալ երեք Ա, Բ, Գ ուղիղ գծերու։

Կ'առնում որ և իցէ ԵԴԿ անկեան ԵԴ կողման վրայ
ԵԴ=Ա, ԴԶ=Բ,
և միւս կողման վրայ երկայնութիւնն ԴԿ=Գ։ Կը քաշեմ

ԵԿ գիծը և անոր զուգահեռական մը Զ կէտէն՝ ԶՀ։ ԴՀ



(Ձև 143)

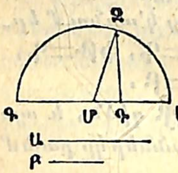
գիծն մեր ուզած չորրորդ համեմատական գիծն է. որովհետև ԶՀ զուգահեռական ըլլալով ԵԿ գծին, կ'ունենանք (17. Ա.) $\frac{\text{ԴԵ}}{\text{ԴԶ}}=\frac{\text{ԴԿ}}{\text{ԴՀ}}$. այսինքն է

$$\frac{\text{Ա}}{\text{Բ}}=\frac{\text{Գ}}{\text{ԴՀ}}։$$

Ծանօթութիւն. — Եթէ գիծն Բ հաւասար ըլլար ընդ գիծն Գ, այն ատեն ԴՀ պիտի ըլլար երրորդ համեմատական Ա և Բ գծերուն։

Դ. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Գտնել միջին համեմատական 'ի մէջ երկու Ա, Բ տուեալ ուղիղ գծերու։



(Ձև 144)

Անսահման գծի մը վրայ կ'առնում երկայնութիւնքն ԳԴ=Ա և ԴԵ=Բ, և յետոյ ԳԵ տրամագիծ առած՝ կը քաշեմ անոր վրայ կէս շրջապատ մը. Դ կէտէն կը հանեմ ուղղահայեաց մը ԴԶ՝ 'ի վերայ ԳԵ գծին, մինչև որ շրջապատը կտրէ Զ կէտով։

Այս ուղղահայեացն է մեր ուզած գիծն, որովհետև է միջին համեմատական (19. Ա. Հ) ԳԵ տրամագծին ԳԴ, ԴԵ մասանց մէջ, այսինքն Ա և Բ տուեալ գծերուն մէջ։

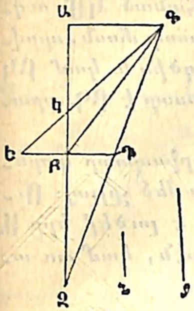
Ծանօթութիւն. — Միջին համեմատականն ԴԶ 'ի մէջ ԳԴ, ԴԵ անհաւասար գծերուն՝ փոքր է անոնց ՄԶ կիսագումարէն։

Ե. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Գտնել երկու լծորդ կէտեր՝ որք բաժնեն ԱԲ ուղիղ գիծ մը՝ համեմատական մասանց՝ Մ եւ Ն տուեալ երկու երկայնութեանց։

Կը քաշեմ ԱԲ գծին Ա ծայրէն որ և իցէ գիծ մը ԱԳ=Մ,

և միւս Բ ծայրէն՝ զուգահեռական մը ԱԳ գծին, որոյ վրայ Բ կէտին երկու կողմը կ'առնում ԲԵ, ԲԴ, հաւասար Ն երկայնութեան։ Յետոյ կը քաշեմ ԳԴ, ԳԵ գիծերը, որք կը կտրեն ԱԲ գիծը Զ և Կ կէտերուն վրայ, և զայն կը բաժնեն համեմատական հատուածք Մ և Ն տուեալ երկայնութեանց։



(Ձև 145)

Որովհետև ԱԳԿ և ԲԵԿ եռանկիւնք նման են (18. Բ), և իրենց կողմունքն համեմատական են, այնպէս որ

$$\frac{\text{ԿԱ}}{\text{ԿԲ}}=\frac{\text{ԱԳ}}{\text{ԲԵ}}։$$

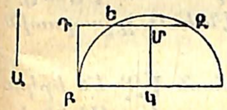
Եւ վասն զի ԱԳԶ և ԲԴԶ եռանկիւնք՝ նոյնպէս նման են, նոյն պատճառաւ կ'ունենանք նաև

$$\frac{\text{ԶԱ}}{\text{ԶԲ}}=\frac{\text{ԱԳ}}{\text{ԲԴ}}$$

և հետևաբար՝ գիծն ԲԴ=ԲԵ ըլլալով $\frac{\text{ԿԱ}}{\text{ԿԲ}}=\frac{\text{ԶԱ}}{\text{ԶԲ}}=\frac{\text{Մ}}{\text{Ն}}$։

Զ. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Գտնել երկու ուղիղ գիծեր, որոց գումարն եւ արտադրեալն տրուած ըլլան։



(Ձև 146)

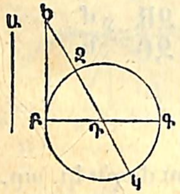
Համարինք թէ ԲԳ ըլլայ երկու առաջարկեալ գծերու գումարն, որոց արտադրեալն հաւասար ըլլայ Ա տուեալ գծին քառակուսւոյն. կը գծեմ՝ ԲԳ գիծը տրամագիծ առած՝ կիսաշրջապատ մը անոր վրայ, և Բ կէտէն կը բարձրացընեմ ԲԴ ուղղահայեացը այս տրամագծին վրայ, և կ'առնում այս գծին վրայ զերկայնութիւնն ԲԴ=Ա։ Յետոյ Դ կէտէն՝ ԲԳի զուգահեռական՝ կը քաշեմ ԴԶ գիծը՝ որ կը կտրէ շրջապատը Ե և Զ կէտերուն վրայ։

Հատանողն ԴԶ և իւր ԴԵ արտաքին մասն՝ են երկու առաջարկեալ գիծերն. որովհետև իրենց արտադրեալն հաւասար է ԲԴ շօշափողին քառակուսւոյն, կամ Ա՟ (19. Է). և իրենց գումարն ԲԳ գծին հաւասար ցուցընելու համար, բաւական է գիտնալ որ Կ կեդրոնէն հատանողին վրայ հանած ԿՄ ուղղահայեացն՝ կը բաժնէ ԵԶ լարն երկու հաւասար մասն. որովհետեւ ԴԵ+ԴԶ գումարն՝ հաւասար է ՄԴ գծին եւ կամ ԲԿ շառաւիղին կրկնապատկին, որ է ըսել հաւասար է ԲԳ տրամագծին։

Ծանօթութիւն. — Ուղիղ գիծն ԴԵ՝ շրջապատը կտրելու համար՝ պէտք է որ ԲԴ գիծն շառաւիղէն մեծ չըլլայ։ Ուրեմն առաջարկութիւնն այն ատեն կարելի է լուծել՝ երբ Ա տուեալ գիծն փոքր ըլլայ ԲԳ գումարին կիսէն, կամ առ առաւելն հաւասար այս կիսոյն։

Է. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Գտնել երկու ուղիղ գիծեր՝ որոց տարբերութիւնն եւ արտադրեալն տրուած ըլլան։



(Ձև 147)

Դնենք թէ ըլլայ ԲԳ երկու առաջարկեալ գծերու տարբերութիւնն, որոց արտադրեալն հաւասար է Ա տուեալ գծին քառակուսոյն։ Կը քաշեմ շրջապատ մը՝ ԲԳ գիծը տրամագիծ առած, եւ Բ կէտէն կը բարձրացընեմ ուղղահայեաց մը ԵԲ 'ի վերայ ԲԳ գծին, եւ այս ուղղահայեացին վրայ կ'առնում ԲԵ=Ա. յետոյ կը քաշեմ ԵԿ հատանողն՝ Ե կէտէն եւ Դ շրջապատին կեդրոնէն։

Այս հատանողն եւ իւր արտաքին մասն ԵԶ՝ են երկու առաջարկեալ գիծերն. որովհետեւ իրենց տարբերութիւնն է

$$\text{ԿԶ}=\text{ԲԳ},$$

եւ իրենց արտադրեալն հաւասար է $\overline{\text{ԲԵ}}^2$, կամ Ա^2. (19. Է)։

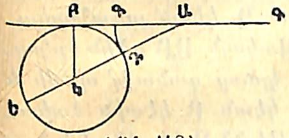
Ը. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Բաժնել ԱԲ ուղիղ գիծ մը՝ միջին եւ չորրորդ համեմատական. այսինքն՝ երկու մասն, այնպէս որ մեծագոյն մասն ըլլայ միջին համեմատական 'ի մէջ ամբողջ գծին եւ միւս փոքր մասին մէջ։

Ենթադրենք որ առաջարկութիւնն լուծեալ ըլլայ. Գ կէտն ըլլայ առաջարկեալ կէտն, որով կ'ունենանք

$$\frac{\text{ԲԱ}}{\text{ԱԳ}}=\frac{\text{ԱԳ}}{\text{ԲԳ}}$$

Այս հաւասարութենէս կը հետեւցընենք ըստ թուաբանական



(Ձև 148)

սկզբան մը $\frac{\text{ԱԲ}+\text{ԱԳ}}{\text{ԱԳ}+\text{ԲԳ}}=\frac{\text{ԱԲ}}{\text{ԱԳ}}$. արդ գիծն ԱԲ=ԱԳ+ԲԳ. ուրեմն (ԱԲ+ԱԳ) ԱԳ=$\overline{\text{ԱԲ}}^2$։ Այս նոր հաւասարութիւնս կը ցուցընէ որ Գ կէտը գտնելու համար՝ պէտք է ձեւացընել երկու ուղիղ գիծեր ԱԲ+ԱԳ եւ ԱԳ, որոց տարբերութիւնն հաւասար ըլլայ ԱԲի, եւ արտադրեալն $\overline{\text{ԱԲ}}^2$. յետոյ առնուլ ԱԲ գծին վրայ՝ սկսեալ Ա կէտէն, երկայնութիւն մը հաւասար այս գծերուն փոքրագունին. ուսկից կը հետեւի հետեւեալ լուծումն։

ԱԲ գծին վրայ Բ կէտէն ուղղահայեաց մը կը քաշեմ ԲԿ, հաւասար ԱԲ գծին կիսոյն. Կ կէտը կեդրոն առնելով կը քաշեմ շրջապատ մը ԿԲ շառաւիղով, եւ կը ձգեմ ԱԵ հատանողն, որ անցնի Ա կէտէն եւ բոլորակին կեդրոնէն։

Ամբողջ ԱԵ հատանողն եւ իրեն ԱԴ արտաքին մասն՝ են երկու գիծեր, որոց տարբերութիւնն հաւասար է ԱԲ, եւ արտադրեալն $\overline{\text{ԱԲ}}^2$։ Ուրեմն ԱԲ գծին վրայ առնելով երկայնութիւն ԱԳ=ԱԴ, կ'ունենանք Գ կէտն, որ ԱԲ գիծը կը բաժնէ միջին եւ չորրորդ համեմատական։

Հետեւանք. — Համարինք թէ ա=ԱԲ գծին երկայնութեան, ԱԲԿ ուղղանկիւն եռանկեան մէջ կ'ունենանք.

$$\overline{\text{ԱԿ}}^2=\overline{\text{ԱԲ}}^2+\overline{\text{ԲԿ}}^2$$

կամ

$$\overline{\text{ԱԿ}}^2=\text{ա}^2+\frac{\text{ա}^2}{4}=\frac{5\text{ա}^2}{4}$$

Որովհետեւ ԱԴ=ԱԿ−ԲԿ

ուրեմն

$$\text{ԱԴ}=\frac{\text{ա}\sqrt{5}}{2}-\frac{\text{ա}}{2}=\frac{\text{ա}(\sqrt{5}-1)}{2}$$

եւ որովհետեւ ԲԳ=ԱԲ−ԱԳ, ուրեմն $\text{ԲԳ}=\text{ա}-\frac{\text{ա}\sqrt{5}-\text{ա}}{2}$

$$=\frac{2\text{ա}-(\text{ա}\sqrt{5}-\text{ա})}{2}=\frac{3\text{ա}-\text{ա}\sqrt{5}}{2}=\frac{\text{ա}(3-\sqrt{5})}{2}։$$

Ծանօթութիւն. — *Նախընթաց առաջարկութիւնն չատ անգամ ընդհանուր ձեւով կ'ըսուի՝* Գտնել ուղիղ գծի մը վրայ՝ որ կ'անցնի Ա եւ Բ տուեալ կէտերէ՝ Գ կէտ մը, որոյ հեռաւորութիւնն Ա կէտէն՝ ըլլայ միջին համեմատական ՚ի մէջ իրեն հեռաւորութեան Բ կէտէն եւ ԱԲ գծին։ *Նախընթաց լուծմամբ գտած Գ կէտն՝ առաջարկութեան առաջին մասին լուծումն է։ Սակայն ԱԲ գծին երկայնութեան մը վրայ ուրիշ կէտ մ'ալ կրնայ գտնուիլ՝ որ մի և նոյն յատկութիւնն ունենայ։ Այս կէտն Բ կէտին ձախակողմն չէ, որովհետև իւր հեռաւորութիւնն Ա կէտէն չի կրնար միանգամայն մեծ ըլլալ՝ քան զհեռաւորութիւնն Բ կէտէն և ԱԲ երկայնութենէն. ուրեմն պէտք է փնտռել Ա կէտին ալ աջակողմն։ Համարինք Գ՛ ըլլայ սյս կէտին տեղն, որով կ'ունենանք* $\frac{\text{ԲԳ}'}{\text{ԱԳ}'}=\frac{\text{ԱԳ}'}{\text{ԱԲ}}$. *ուսկից կը հանենք՝* $\frac{\text{ԲԳ}'-\text{ԱԳ}'}{\text{ԱԳ}'-\text{ԱԲ}}=\frac{\text{ԱԳ}'}{\text{ԱԲ}}$։ *Արդ ԱԲ գիծն հաւասար է ԲԳ՛ և ԱԳ՛ գծերուն տարբերութեան. որով* $(\text{ԱԳ}'-\text{ԱԲ})\,\text{ԱԳ}'=\overline{\text{ԱԲ}}$ ։

Այս հաւասարութիւնն կը ցուցընէ որ Գ՛ կէտն գտնելու համար՝ պէտք է՝ (ինչպէս նախընթաց առաջարկութեան մէջ), ձեւացընել երկու ուղիղ գծեր ԱԳ՛—ԱԲ և ԱԳ՛, որոց տարբերութիւնն հաւասար ըլլայ ԱԲ գծին, և արտադրեալն ըլլայ $\overline{\text{ԱԲ}}$ *. յետոյ առնուլ ԱԲ գծին վրայ՝ Ա կէտին աջ կողմէն՝ երկայնութիւն մը՝ հաւասար այս երկու գծերէն մեծագունին, որ է ըսել հաւասար ԱԵ հատանողին։*

Ուրեմն այս առաջարկութիւնս երկու լուծումն ունի, զորս մի և նոյն ձեւով կը կատարենք, որովհետև երկու անծանօթից ԱԳ՛ և ԱԳ տարբերութիւնն՝ հաւասար է ԱԲ գծին, և իրենց արտադրեալն է $\overline{\text{ԱԲ}}$ ։

Համարելով՝ ինչպէս վերը ըրինք, $\text{ա}=\text{ԱԲ}$, *և որովհետև*

$$\text{ԱԳ}'=\text{ԱԲ}+\text{ԱԳ}$$

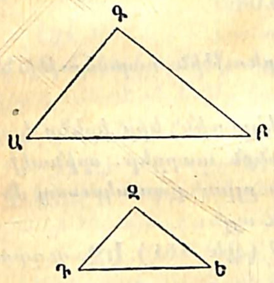
կ'ունենանք $\text{ԱԳ}'=\text{ա}+\frac{\text{ա}\sqrt{5}-\text{ա}}{2}=\frac{\text{ա}(1+\sqrt{5})}{2}$

և ըլլալով $\text{ԲԳ}'=\text{ԱԲ}+\text{ԱԳ}'$

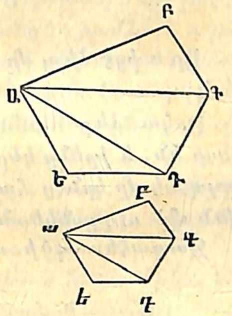
կ'ունենանք $\text{ԲԳ}'=\text{ա}+\frac{\text{ա}+\text{ա}\sqrt{5}}{2}=\frac{\text{ա}(3+\sqrt{5})}{2}$ ։

Թ. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Տուեալ ուղիղ գծի մը վրայ ձեւացընել եռանկիւն մը կամ բազմանկիւն մը, նման տուեալ եռանկեան մը կամ բազմանկեան մը։



(Ձև 149)



(Ձև 150)

1. *Ուղիղ ԴԵ գծին վրայ եռանկիւն մը ձեւացընելու համար նման ԱԲԳ եռանկեան, կ'ենթադրեմ ԴԵ համադիր ԱԲ կողման, և կը ձեւացընեմ ԵԴԶ անկիւնը՝ հաւասար ԲԱԳ անկեան, և անկիւնն ԴԵԶ=ԱԲԳ։ Եռանկիւնն ԴԵԶ նման է ԱԲԳ եռանկեան, որովհետև ունին փոխանակաւ իրարու հաւասար երկու անկիւնք (18. Բ)։*

2. *Կ'ուզենք* աբ *գծին վրայ շինել բազմանկիւն մը նման ԱԲԳԴԵ տուեալ բազմանկեան. ենթադրենք որ* աբ *համադիր ըլլայ ԱԲ կողման. տուեալ բազմանկիւնն այլ և այլ եռանկեանց կը բաժնեմ, ձգելով Ա գագաթէն ԱԳ, ԱԴ տրամանկիւնները։ Յետոյ* ագ *գծին վրայ կը ձեւացընեմ* աբգ *եռակիւնը՝ նման ԱԲԳ եռանկեան, և* ագ *գծին վրայ* ագդ *եռանկիւնը՝ նման ԱԳԴ եռանկեան. և վերջապէս* ադ *գծին վրայ՝* ադե *եռանկիւնը՝ նման ԱԴԵ եռանկեան։ Բազմանկիւնն* աբգդե *նման է ԱԲԳԴԵ բազմանկեան, որովհետև նոյն թուով այլ և այլ նման և նման դիրքով եռանկիւններ բաժնուած են (18. Ը)։*

ՅՕԴՈՒԱԾ ՔՍԱՆԵՐՈՐԴ ԱՌԱՋՆԵՐՈՐԴ

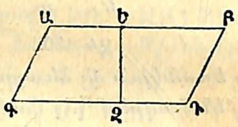
ՉԱՓ ԿԱԼԻ ՈՒՂՂԱՆԿԵԱՆ ՄԸ, ԶՈՒԳԱՀԵՌԱԳԾԻ ՄԸ, ԵՌԱՆԿԵԱՆՑ, ՏՐԱՊԻԶԻ ԵՒ ՈՐ ԵՒ ԻՑԷ ԲԱԶՄԱՆԿԵԱՆ։

ՍԱՀՄԱՆՔ

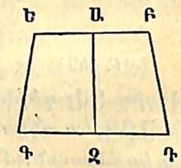
1. Որ և իցէ ձևոյ մը մակերևութին տարածութիւնն կը կոչուի կալ։

2. Երկու ձևք համազօր կ՚ըսուին՝ երբ իրենց կալերն հաւասար են, և իրենց կերպարանքն տարբեր. օրինակի համար՝ բոլորակ մը կրնայ համազօր ըլլալ քառակուսւոյ մը, եռանկիւն մը՝ ուղղանկեան մը, և այլն։

3. Զուգահեռագծի մը մէջ (Ձև 151) ԵԶ ուղղահայեացն՝ է բարձրութիւն, որ կը չափէ ԱԲ և ԳԴ կողմանց հեռաւորութիւնը, այս կողմանց որ և իցէ մին առնելով իբր խարիսխ։



(Ձև 151)



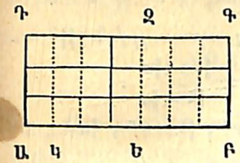
(Ձև 152)

4. Տրապիզն է այն քառակողմն, որոյ երկու հակադիր կողմունքն միայն են զուգահեռականք։ Տրապիզին երկու զուգահեռական կողմունքն ԱԲ և ԳԴ (Ձև 152) են խարիսխք, և ԵԶ ուղղահայեացն՝ որ կը չափէ այս երկու խարսխաց հեռաւորութիւնն՝ է բարձրութիւն։

Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու ուղղանկիւնք ԱԲԳԴ, ԱԵԶԴ, որք նոյն ԱԴ բարձրութիւնն ունին, համեմատականք են իրենց ԱԲ, ԱԵ խարսխաց։

Համարինք թէ ԱԲ և ԱԵ խարիսխքն՝ իրարու այնպէս համեմատին՝ ինչպէս 7 առ 4. որով ըսել է թէ այս գիծերն հասարակաց չափ մ՚ունին, որ առաջնոյն մէջ 7 անգամ կը պարունակի, և երկրորդին մէջ 4 անգամ, և այս հասարակաց չափն ըլլայ ԱԿ։ Արդ խարիսխներն այս չափով հաւասար մասանց կը բաժնեմ, և բաժանմանց կէտերէն կը բարձրացընեմ մէկ մէկ ուղղահայեացներ. ուսկից կը ձևանան եօթը հատ մասնական հաւասար ուղղանկիւններ, որովհետև նոյն բարձրութիւն և նոյն խարիսխն ունին։ Բայց ԱԲԳԴ ուղղանկեան մէջ եօթը հատ կան ասոնցմէ, և ԱԵԶԴ ուղղանկեան մէջ չորս հատ, ուրեմն ԱԲԳԴ ուղղանկիւնն՝ այնպէս կը համեմատի ԱԵԶԴ ուղղանկեան, ինչպէս 7 առ 4, կամ ինչպէս ԱԲ առ ԱԵ։



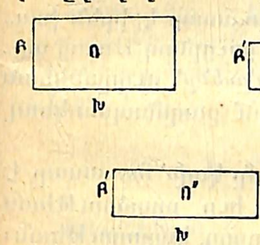
(Ձև 153)

Հետևանք. — Նոյն խարիսխն ունեցող երկու ուղղանկիւնք՝ համեմատական են իրենց բարձրութեանց։

Բ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Որ եւ իցէ երկու ուղղանկիւնք՝ այնպէս կը համեմատին իրարու, ինչպէս իրենց խարիսխքն բազմապատկեալ բարձրութեանց հետ։

Ունենանք Ո, Ո′ երկու ուղղանկիւնք, իրենց բարձրութիւնքն Բ, Բ′ և խարիսխքն Խ, Խ′. կը ձևացընեմ երրորդ մը Ո″ որ ունենայ առաջնոյն Խ խարիսխն և երկրորդին Բ′ բարձրութիւնն։ Արդ Ո′, Ո″ երկու ուղղանկիւնքն մի և նոյն Բ′ բարձրութիւնն ունենալով ըստ նախընթաց հայեցողութեան՝ խարիսխքն իրարու համեմատականք են, որով $\frac{Ո'}{Ո''}=\frac{Խ'}{Խ}$։ Եւ Ո, Ո″ ուղղանկիւնքն՝ մի և նոյն Խ խարիսխն ունենալով նմանապէս



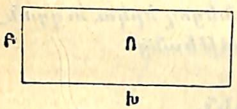
(Ձև 154)

կ'ունենանք $\frac{Ո''}{Ո}=\frac{Բ'}{Բ}$ ։ *Այս երկու հաւասարութիւնքն բազմապատկելով և դուրս թողլով հասարակաց արտադրիչն* $Ո''$ *առաջին անդամոյն մէջէն, կ'ունենանք* $\frac{Ո'}{Ո}=\frac{Բ'\times Խ'}{Բ\times Խ}$ ։

Օրինակ. — *Համարինք որ* $Խ=6^{մ}$, $Բ=4^{մ}$, $Խ'=3^{մ}$ $Բ'=2^{մ}$ *կ'ունենանք* $\frac{Ո'}{Ո}=\frac{3\times 2}{6\times 4}=\frac{1}{4}$. *ուրեմն ուղղանկիւնն* $Ո'$ *հաւասար է* $Ո$ *ուղղանկեան մէկ չորրորդին, որով* $Ո$ *չորս անգամ մեծ է* $Ո'$ *ուղղանկիւնէն*։

Գ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ուղղանկեան մը կալն՝ հաւասար է իւր խարսխին՝ բազմապատկեալ իւր բարձրութեան հետ։



(Ձև 155)

Համարինք թէ կ'ուզենք չափել $Ո$ *ուղղանկիւնը , որոյ խարիսխն կոչենք* $Խ$, *և բարձրութիւնն՝* $Բ$, *կ'առնունք իբր չափ մակերևութի միութիւնն երկայնութեան վրայ շինուած քառակուսին , և ըստ նախընթաց հայեցողութեան կ'ունենանք* $\frac{Ո}{1}=\frac{Բ\times Խ}{1\times 1}$ *կամ* $Ո=Բ\times Խ$ ։

Ուրեմն $Ո$ *ուղղանկեան* կալն հաւասար է իրեն խարսխին եւ բարձրութեան չափերը ցուցընող թուոց արտադրելոյն. *որ համառօտ կերպով կ'ըսենք՝* ուղղանկեան մը կալն՝ հաւասար է իւր խարսխին՝ բազմապատկեալ իւր բարձրութեան հետ։

Հետեւանք. — Քառակուսւոյ մը կալն՝ հաւասար է իւր խարսխին՝ բազմապատկեալ իւր բարձրութեան հետ, *այսինքն* իւր մէկ կողման երկրորդ կարողութեան։

Ծանօթութիւն. — *Եթէ առնունք միութիւն երկայնութեան* մեդրն, քառակուսի մեդրն *կ'ըլլայ միութիւն մակերևութի*։

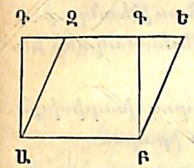
Օրինակ. — *Համարելով վերի ուղղանկեան մէջ* $Խ=3^{մ}$, 50 *և* $Բ=2^{մ}$, 25 *իրեն մակերևութին տարածութիւնն կ'ըլլայ*

3 , 50×2 , 25=7ք.մ , 8750 *և կամ* 7 *քառ. մէդր* , 87 *քառ. տասնորդամէդր և* 50 *քառ. հարիւրորդամէդր*։

Դ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Զուգահեռագծի մը կալն՝ հաւասար է իւր խարսխին՝ բազմապատկեալ իւր բարձրութեան հետ։

Ունենանք ԱԲԳԴ *զուգահեռագիծն . իրեն խարսխին*



(Ձև 156)

վրայ Ա *և* Բ *ծայրերէն բարձրացընենք մէկ մէկ ուղղահայեացներ մինչև որ հակադիր կողմը կտրեն . կ'ըսենք թէ* ԱԲԳԴ *զուգահեռագիծն՝ համազօր է* ԱԲԵԶ *ուղղանկեան . որովհետև ուղղանկիւն եռանկիւնքն* ԱԶԴ *և* ԲԵԳ *հաւասար են , վասն զի հակուղիղքն* ԱԴ=ԲԳ , *զուգահեռագծին հակադիր կողմունքն են . նոյն պատճառաւ նաև կողմն* ԱԶ=ԲԵ (Յ. Ե)։

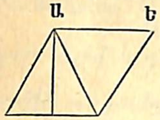
Արդ ԱԲԳԶ *քառակողմէն դուրս հանելով կարգաւ այս եռանկիւններէն իւրաքանչիւրը , ելած* ԱԲԳԴ *զուգահեռագիծն և* ԱԲԵԶ *ուղղանկիւնն՝ համազօր կը գտնենք։ Ուղղանկեան չափն է* ԱԲ×ԲԵ , *ուրեմն զուգահեռագծին կալն՝ հաւասար է* ԱԲ×ԲԵ , *այսինքն իրեն* ԱԲ *խարիսխն՝ բազմապատկեալ իւր* ԲԵ *բարձրութեան հետ*։

Հետեւանք. — *Երկու զուգահեռագիծք՝ որոց խարիսխքն հաւասար են , համեմատական են իրենց բարձրութեանց ։ Իսկ եթէ բարձրութիւնքն հաւասար ըլլան , համեմատականք են իրենց խարսխաց*։

Ե. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Եռանկեան մը կալն՝ հաւասար է իւր խարսխին՝ բազմապատկեալ բարձրութեան կիսոյն հետ։

Ունենանք ԱԲԳ *եռանկիւնն ,* ԱԳ *կողման* Ա *և* Գ *ծայրերէն մէկ մէկ զուգահեռականներ քաշենք* ԲԳ *և* ԱԲ *կողմանց . եռանկիւնքն* ԱԲԳ=ԱԳԵ , *որովհետև* ԱԳ *կողմն հասարակ է , և* ԱԵ=ԲԳ , ԵԳ=ԱԲ , *զուգահեռագծի հակադիր* կողմունքն ըլլալով, ուրեմն ԱԲԳ եռանկիւնն՝ կէսն է ԱԲԳԵ զուգահեռագծին ։ Արդ այս զուգահեռագծին չափն է ԲԳ×ԱԴ, որով ԱԲԳ եռանկեան չափն կ՚ըլլայ $\frac{\text{ԲԳ}\times\text{ԱԴ}}{2}$, որ է ըսել ԲԳ խարիսխն բազմապատկեալ ԱԴ բարձրութեան կիսոյն հետ։



(Ձև 157)

Հետեւանք Ա. — Երկու եռանկիւնք՝ որոց խարիսխքն հաւասար են, համեմատականք են իրենց բարձրութեանց. իսկ թէ որ հաւասար բարձրութիւն ունենան, համեմատականք են իրենց խարսխաց։

Հետեւանք Բ. — Երկու եռանկիւնք՝ որոց խարիսխքն և բարձրութիւնքն հաւասար են, համազօր են իրարու։

Հետեւանք Գ. — Ունենանք ԱԲԳ հաւասարակող եռանկիւն մը, և անոր մէկ կողմը կոչենք Գ, որով բարձրութիւնն կ՚ըլլայ $\frac{\text{Գ}\sqrt{3}}{2}$. որովհետև եռանկեան բարձրութիւնն

$$\overline{\text{ԱԴ}}^2=\overline{\text{ԱԲ}}^2-\overline{\text{ԲԴ}}^2$$

$$\text{ԱԴ}=\sqrt{\overline{\text{ԱԲ}}^2-\overline{\text{ԲԴ}}^2}$$

ուրեմն $$\text{ԱԴ}=\sqrt{\text{Գ}^2-\frac{\text{Գ}^2}{4}}$$

ուստից $$\text{ԱԴ}=\frac{\text{Գ}\sqrt{3}}{2}$$

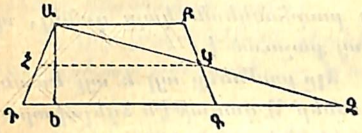
հետեւապէս իրեն տարածութեան չափն կ՚ըլլայ

$$\frac{\text{Գ}}{2}\times\frac{\text{Գ}\sqrt{3}}{2}=\frac{\text{Գ}^2\sqrt{3}}{4}\text{։}$$

Օրինակի համար՝ գնենք թէ հաւասարակող եռանկեան Գ կողմն հաւասար ըլլայ 10 մէտրի, իրեն կալն հաւասար կ՚ըլլայ 43^{մ}, 3013։

Զ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Տրապիզի մը ԱԲԳԴ կալն՝ հաւասար է իւր ԱԵ բարձրութեան՝ բազմապատկեալ իրեն ԱԲ, ԳԴ խարսխաց կիսագումարին հետ։



(Ձև 158)

Կ՚երկնցընեմ ԴԳ ստորին խարիսխը՝ վերին ԱԲ խարսխին չափ մինչև Զ կէտը, և կը քաշեմ ԱԶ գիծը ։ Եռանկիւնն ԱԲԿ հաւասար է եռանկեան ԶԳԿ, վասն զի ԱԲ=ԳԶ, և անկիւնն Բ=Գ, իբր ներքին փոխադարձ անկիւնք, նոյնպէս Ա=Զ, նոյն պատճառաւ։

Արդ ԱԲԿԶԴ ձևէն ԱԲԿ եռանկիւնը վերցընենք, կը մնայ ԱԶԴ եռանկիւնն, և եթէ ԶԳԿ եռանկիւնը վերցընենք, կը մնայ ԱԲԳԴ տրապիզն. ուրեմն ըսել է՝ որ այս եռանկիւնն և տրապիզն՝ իրարու համազօր են. և որովհետև ԱԶԴ եռանկեան չափն է ԱԵ×$\frac{1}{2}$ ԴԶ, ուրեմն տրապիզին ալ կալն՝ հաւասար է ԱԵ×$\frac{1}{2}$ ԴԶ, այսինքն բարձրութիւնն ԱԵ՝ բազմապատկեալ իւր երկու խարսխաց $\frac{\text{ԱԲ}+\text{ԴԳ}}{2}$ կիսագումարին հետ։

Հետեւանք. — Նոյնպէս կրնանք ըսել որ տրապիզին կալն՝ հաւասար է իրեն ԱԵ բարձրութեան՝ բազմապատկեալ ընդ ՀԿ գծին, որ կը միացընէ ԱԴ, ԲԳ կողմանց միջակէտքը։

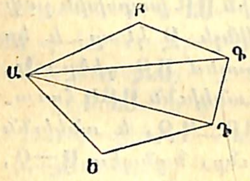
Որովհետև ԱԴԶ, ԱՀԿ եռանկիւնքն նման են, վասն զի ունին Ա հասարակ անկիւն մը, և անոր երկու կողմունքն իրարու համեմատականք են, ուրեմն $\frac{\text{ՀԿ}}{\text{ԴԶ}}=\frac{\text{ԱՀ}}{\text{ԱԴ}}$. այսինքն ՀԿ գիծն՝ հաւասար է ԴԶ գծին կիսոյն, կամ տրապիզին ԱԲ, ԳԴ խարսխաց գումարին կիսոյն։ Որով տրապիզին չափն է ԱԵ×ՀԿ արտադրեալն։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Չափել որ եւ իցէ բազմանկեան մը մակերեւոյթն։

Այս առաջարկութիւնն բազմաթիւ լուծումն ունի, զորս կարգաւ բացատրենք։

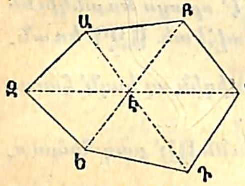
1. Կ'ուզենք ԱԲԳԴԵ բազմանկեան կալը գտնել, որ թղթոյ վրայ կամ գետնի վրայ քաշուած է։



(Զև 159)

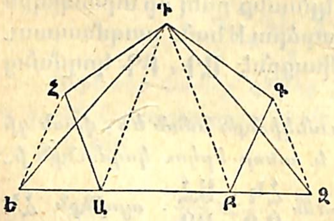
Կը բաժնենք այլ և այլ եռանկիւններ՝ Ա գագաթէն ձգելով տրամանկիւններ (Զև 159), կամ որ և իցէ միջին Է կէտէն (Զև 160) գիծեր իրեն գագաթանց։ Յետոյ զատ զատ եռանկիւններն կը չափենք, և անոնց գումարն կը ցուցնէ բազմանկեան մակերևութին չափն։

2. Երբոր առաջարկեալ բազմանկիւնն կրնանք վերածել եռանկեան մը որ՝ համազօր ըլլայ իրեն, այս եռանկիւնն կը չափենք որով բազմանկիւնն չափած կ'ըլլանք (Զև 161)։



(Զև 160)

Օրինակի համար ունենանք հնգանկիւն մը ԱԲԳԴՀ, և կ'ուզենք համազօր եռանկեան մը վերածել։ Կը քաշենք ԴԲ տրամանկիւնն, և Գ գագաթէն զուգահեռական ԴԲ գծին՝ կը ձգենք ԳԶ, մինչև որ գայ ԱԲ գծին երկայնութիւնը կտրէ Զ կէտին վրայ, յետոյ Դ և Զ կէտերը կը միացընենք ԴԶ ուղիղ գծով։ Եռանկիւնն ԴԳԲ համազօր է ԶԴԲ եռանկեան, որովհետև իրենց խարիսխն նոյն ԲԴ է, և բարձրութիւննին հաւասար։ Արդ եթէ առաջարկեալ հնգանկեան մէջ փոխանակ ԳԴԲ եռանկեան՝ դնենք ԶԴԲ եռանկիւնն,

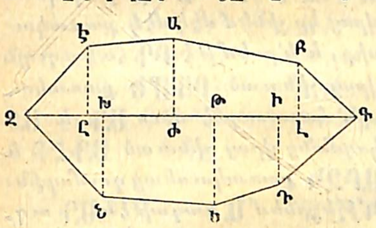


(Զև 161)

ձևն ԴԶԱՀ քառակողման կը փոխուի. ուրեմն այս կերպով բազմանկիւնը վերածեցինք ուրիշ բազմանկեան, որ համազօր է իրեն և մէկ կողմն նուազ ունի։

Նոյն կերպը բանեցընելով ԴԶԱՀ քառակողման վրայ, կը վերածենք զայն ալ ԴԵԶ եռանկեան, որ իրեն համազօր է, որով այս եռանկեան կալն՝ հաւասար է ԱԲԳԴՀ առաջարկեալ հնգանկեան կալին։

3. Երբ բազմանկիւնն գետնի վրայ է, լաւագոյն է հետևեալ կերպը բանեցընել։ — Կ'ուզենք չափել ԱԲԳԴԵՆԶԷ բազմանկեան կալը. կը քաշենք ԳԶ մեծ տրամանկիւնը, և իւրաքանչիւր գագաթներէն կ'իջեցընենք այս գծին վրայ ուղղահայեացներ. որով ամբողջ ձևն կը բաժնուի ուղղանկիւն եռանկիւններու և տրապիզներու։



(Զև 162)

Կը չափենք այս մասանց մակերևոյթները և կը գումարենք։

Այս կերպս արտաչափութեան մէջ կը գործածուի, որովհետև դիւրին է գետնոյ վրայ ուղղահայեացներ քաշել ուղղանկիւն արտաչափի ըսուած գործիքով։

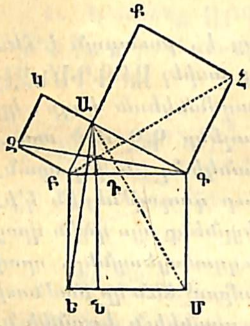
ՅՕԴՈՒԱԾ ՔՍԱՆԵՐՈՐԴ ԵՐԿՐՈՐԴ

ՅԱՐԱԲԵՐՈՒԹԻՒՆ Ի ՄԷՋ ԵՌԱՆԿԵԱՆ ՄԸ ԿՈՂՄԱՆՑ ՄԷԿՈՒՆ ՎՐԱՅ ՇԻՆՈՒԱԾ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻՈՅՆ՝ ՀԱԿԱԴԻՐ ՈՒՂԻՂ, ՍՈՒՐ ԵՒ ԲՈՒԹ ԱՆԿԵԱՆ, ԵՒ ՄԻՒՍ ԿՈՂՄԱՆՑ ՎՐԱՅ ՇԻՆՈՒԱԾ ՔԱՌԱԿՈՒՍԵԱՑ։

Ծանօթութիւն. — Առաջիկայ յօդուածին երեք հայեցողութիւնքն հիմնեալ են ԺԹ յօդուածին մէջ ապացուցեալ Բ, Գ, Դ հայեցողութեանց վրայ. հոն պարզապէս գրահաշուական կէտով մտածեցինք երկու գծերու արտադրեալքը, իսկ հիմա նոյնը ապացուցանենք երկրաչափական ձևերով։

Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ուղղանկիւն եռանկեան մը հակուղղոյն վրայ շինուած քառակուսին՝ հաւասար է միւս կողմանց վրայ շինուած քառակուսեաց գումարին։



(Ձև 163)

Ունենանք ԱԲԳ *ուղղանկիւն եռանկիւնն՝ որոյ* Ա *անկիւնն ուղիղ ըլլայ. իւրաքանչիւր կողման վրայ կը շինեմ մէկ մէկ քառակուսիք, և կ՚ըսեմ թէ* ԲԳ *հակուղղոյն վրայ շինուած* ԲԳՄԵ *քառակուսին՝ հաւասար է միւս* ԱԳ *և* ԱԲ *կողմանց վրայ շինուած* ԱԳՀՔ *և* ԱԲԶԿ *քառակուսեաց գումարին։ Կ՚իջեցընեմ* Ա *գագաթէն* ԱԴ *ուղղահայեացը՝* ԲԳ *կողման վրայ, և կ՚երկնցընեմ զայն մինչև որ կտրէ* ԵՄ *գիծը՝* Ն *կէտին վրայ. կը ձգեմ* ԱՄ, ԲՀ *գծերն։*

Նախ ԱԳՄ *եռանկիւնն հաւասար է* ՀԳԲ *եռանկեան, վասն զի ունին երկու կողմունք հաւասար, որ է՝* ԱԳ=ԳՀ, *և* ԲԳ=ԳՄ. *և անոնց միջի անկիւնն հաւասար, վասն զի* ՀԳԱ *ուղիղ անկեան վրայ աւելցընելով* ԱԳԲ *անկիւնն՝ կ՚ունենանք* ՀԳԲ *անկիւնն. նոյնպէս* ԲԳՄ *ուղիղ անկեան վրայ աւելցընելով նոյն* ԱԳԲ *անկիւնն՝ կ՚ունենանք* ԱԳՄ *անկիւնն, ուրեմն եռանկիւնն* ՀԳԲ=ԱԳՄ։

Արդ ԱԳՄ *եռանկեան կալն՝ հաւասար է* ՄԳԴՆ *ուղղանկեան կիսոյն, վասն զի ունին նոյն* ԳՄ *խարիսխն, և նոյն* ԴԳ *բարձրութիւնն, եռանկեան* Ա *գագաթն գտնուելով ուղղանկեան* ՆԴ *վերին խարսխին երկայնութեան վրայ։ Մի և նոյն պատճառաւ* ՀԳԲ *եռանկիւնն կէս է* ԱԳՀՔ *քառակուսւոյն, վասն զի նոյն* ՀԳ *խարիսխն և նոյն* ԱԳ *բարձրութիւնն ունին։ Ուրեմն եռանկիւնքն* ԱԳՄ=ՀԳԲ *ըլլալով՝* ԱԳՀՔ *քառակուսին՝ համազօր է* ԴԳՄՆ *ուղղանկեան։*

Մի և նոյն կերպով կրնամ ցուցընել որ ԱԲԶԿ *քառակուսին համազօր է* ԲԴՆԵ *ուղղանկեան։ Ուրեմն ըսել է որ*

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆՔ

1. *Գտնել ուղղանկեան մը կալը՝ որոյ խարիսխն է* 4ᵐ, 23 *և բարձր.* 2ᵐ, 61։ Պ**խ**. — 11ᵐ², 0403։

2. *Գտնել եռանկեան մը բարձրութեան մին և կալը՝ որոյ կողմանց երկայնութիւն է կարգաւ* 1ᵐ, 20. 1ᵐ, 85 *և* 2ᵐ, 25։ (*Ըստ* 19, Դ. Հ)։ Պ**խ**. — *Բարձր.* 1ᵐ, 8480. *Կալ.* 1ᵐ², 1088։

3. *Տրապիզի մը կալն է* 2034ᵐ², 60. *իւր բարձրութիւնն է* 18ᵐ, 40. *և ստորին խարիսխն* 54ᵐ, 48. *գտնել վերին խարիսխը մինչև հարիւրորդամէդր։* Պ**խ**. — 166ᵐ, 67։

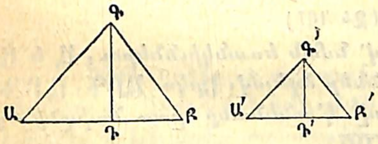
4. *Գտնել կանոնաւոր վեցանկեան մը կալը՝ հարիւրակալով, որոյ կողման երկայնութիւնն է* 450ᵐ։ Պ**խ**. — 52 *հարիւրակալ,* 61 *կալ։*

ՅՕԴՈՒԱԾ ՔՍԱՆԵՐՈՐԴ ԵՐՐՈՐԴ

ՅԱՐԱԲԵՐՈՒԹԻՒՆ ԵՐԿՈՒ ԲԱԶՄԱՆԿԵԱՆՑ ԿԱԼԵՐՈՒ. — ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆՔ. — ՓՈԽԵԼ ԲԱԶՄԱՆԿԻՒՆ ՄԸ ՅԱՅԼ ՀԱՄԱԶՕՐ ԲԱԶՄԱՆԿԻՒՆ։

Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու նման եռանկեանց կալերն համեմատականք են իրենց համադիր կողմանց քառակուսեաց։



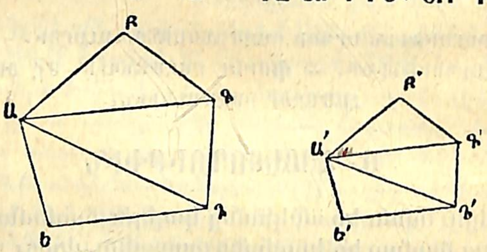
(Ձև 166)

Եռանկիւնքն ԱԲԳ, Ա′Բ′Գ′ *նմանք ըլլալով, իրենց խարիսխքն համեմատականք են երկու համադիր կողմանց. որով կ՚ունենանք հաւասարութիւնն* $\frac{\text{ԱԲ}}{\text{Ա}'\text{Բ}'}=\frac{\text{ԱԳ}}{\text{Ա}'\text{Գ}'}$։ *Եռանկեանց* Գ *և* Գ′ *գագաթներէն կ՚իջեցընենք մէկ մէկ ուղղահայեացներ խարսխաց վրայ։ Ուղղանկիւն եռանկիւնքն* ԱԴԳ, Ա′Դ′Գ′ *նման են* (18. Բ. Հ), *վասն զի ըստ ենթադրութեան Ա եւ Ա՛ սուր անկիւնքն՝ հաւասար են․ ուսկից կը հետեւի որ* $\frac{\text{ԳԴ}}{\text{Գ'Դ'}}=\frac{\text{ԱԳ}}{\text{Ա'Գ'}}$. *Այս երկու հաւասարութիւնքն անդամ առ անդամ բազմապատկելով՝ կ'ունենանք* $\frac{\text{ԱԲ}\times\text{ԳԴ}}{\text{Ա'Բ'}\times\text{Գ'Դ'}}=\frac{\overline{\text{ԱԳ}}^2}{\overline{\text{Ա'Գ'}}^2}$։ *Արդ ԱԲԳ եռանկեան չափն է* $\frac{\text{ԱԲ}\times\text{ԳԴ}}{2}$, *եւ Ա'Բ'Գ' եռանկեան չափն է* $\frac{\text{Ա'Բ'}\times\text{Գ'Դ'}}{2}$. *ուրեմն այս եռանկեանց կալերուն յարաբերութիւնն՝ հաւասար է իրենց ԱԳ, Ա'Գ' համադիր կողմանց քառակուսեաց յարաբերութեան։*

Բ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու նման բազմանկեանց կալերն՝ համեմատական են իրենց համադիր կողմանց քառակուսեաց։

Երկու նման բազմանկիւնները ԱԲԳԴԵ, Ա'Բ'Գ'Դ'Ե' կը



(Ձե 167)

տարրաբաշխեմ նոյն թուով՝ նման եռանկիւններու, Ա եւ Ա՛ գագաթներէն տրամանկիւններ ձգելով։ Երկու ԱԲԳ, Ա'Բ'Գ' եռանկիւնքն նման ըլլալով՝ կ'ունենանք ըստ նախընթաց հայեցողութեան՝ $\frac{\text{ԱԲԳ}}{\text{Ա'Բ'Գ'}}=\frac{\overline{\text{ԱԳ}}^2}{\overline{\text{Ա'Գ'}}^2}$. *Նոյնպէս ԱԳԴ եւ Ա'Գ'Դ' նման ըլլալով* $\frac{\text{ԱԳԴ}}{\text{Ա'Գ'Դ'}}=\frac{\overline{\text{ԱԳ}}^2}{\overline{\text{Ա'Գ'}}^2}$, *այս երկու հաւասարութիւնքն նոյն յարաբերութիւնն ունենալով՝ ըսել է որ* $\frac{\text{ԱԲԳ}}{\text{Ա'Բ'Գ'}}=\frac{\text{ԱԳԴ}}{\text{Ա'Գ'Դ'}}$.

որով ըսել է թէ բազմանկեանց մէջի նման եռանկիւնքն համեմատական են իրարու․ այսպէս

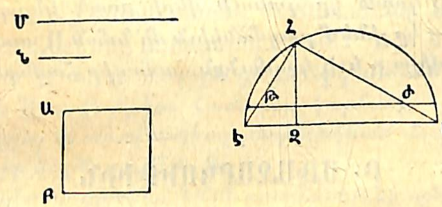
$$\frac{\text{ԱԲԳ}}{\text{Ա'Բ'Գ'}}=\frac{\text{ԱԳԴ}}{\text{Ա'Գ'Դ'}}=\frac{\text{ԱԴԵ}}{\text{Ա'Դ'Ե'}}$$

ուսկից $$\frac{\text{ԱԲԳ}+\text{ԱԳԴ}+\text{ԱԴԵ}}{\text{Ա'Բ'Գ'}+\text{Ա'Գ'Դ'}+\text{Ա'Դ'Ե'}}=\frac{\text{ԱԲԳ}}{\text{Ա'Բ'Գ'}}։$$

Արդ վերջին հաւասարութեան առաջին մասին համարիչն կը ցուցընէ ԱԲԳԴԵ բազմանկեան կալն, եւ անոր յայտարարն՝ Ա'Բ'Գ'Դ'Ե' բազմանկեան կալն․ ուրեմն այս նման բազմանկեանց կալերն համեմատական են երկու նման ԱԲԳ, Ա'Բ'Գ' եռանկեանց կալերուն, կամ երկու ԱԲ, Ա'Բ' համադիր կողմանց քառակուսեաց (Ա)։

Ա․ ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Ձեւացընել բազմանկիւն մը՝ նման տուեալ բազմանկեան մը որ այնպէս համեմատի անոր, ինչպէս Մ գիծն կը համեմատի Ն գծին։



(Ձե 168)

1․ Ենթադրենք որ այս տուեալ բազմանկիւնն քառակուսի մ'ըլլայ։ Անսահման ԷԵ գծին վրայ առնունք ԵԶ=Մ եւ ԷԶ=Ն․ եւ ԵԷ գիծը տրամագիծ առնելով՝ քաշենք կէս շրջապատ մը, եւ Զ կէտէն բարձրացընենք տրամագծին վրայ ուղղահայեաց մը ԶՀ։ Ձգենք Հ կէտէն ՀԷ, ՀԵ լարերը․ առաջնոյն վրայ առնունք ՀԹ, հաւասար՝ քառակուսւոյն ԱԲ կողման, եւ Թ կէտէն քաշենք ԹԺ զուգահեռական ԷԵ գծին․ կ'ըսենք թէ ՀԺ է առաջարկեալ քառակուսւոյն կողմն։

Որովհետև ԹԺ, ԷԵ զուգահեռական են՝ կ'ունենանք $\frac{\text{ՀԺ}}{\text{ՀԹ}}=\frac{\text{ՀԵ}}{\text{ՀԷ}}$, և հետևաբար $\frac{\overline{\text{ՀԺ}}^2}{\text{ՀԹ}^2}=\frac{\overline{\text{ՀԵ}}^2}{\text{ՀԷ}^2}$։ Բայց ԵՀԷ ուղղանկիւն եռանկիւն ըլլալով կ'ունենանք նաև (19. Բ. չ. ա).

$$\frac{\overline{\text{ՀԵ}}^2}{\text{ՀԷ}^2}=\frac{\text{ԵՁ}}{\text{ՁԷ}}=\frac{\text{Մ}}{\text{Ն}} \text{ ուրեմն } \frac{\overline{\text{ՀԺ}}^2}{\text{ՀԹ}^2}=\frac{\text{Մ}}{\text{Ն}}$$

և ՀԹ հաւասար ըլլալով ԱԲ կողման՝ կը հետևի որ ՀԺ գծին վրայ շինուած քառակուսին՝ այնպէս կը համեմատի ԱԲ գծին վրայ շինուած քառակուսոյն՝ ինչպէս Մ առ Ն։

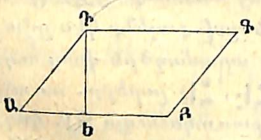
2. Համարինք թէ տուեալ ըլլայ որ և իցէ Ա բազմանկիւն մը, կոչենք Կ իրեն կողմանց մին, և Ք կոչենք առաջարկեալ բազմանկիւնը, և ք իրեն կողմանց մին՝ համադիր Կ կողման, և տուեալ գիծերն ըլլան Մ և Ն. ըստ ենթադրութեան կ'ունենամ $\frac{\text{Ք}}{\text{Ա}}=\frac{\text{Մ}}{\text{Ն}}$, և բազմանկիւններն նման ըլլալով

կ'ունենամ $\frac{\text{Ք}}{\text{Ա}}=\frac{\text{ք}^2}{\text{Կ}^2}$ ուստից $\frac{\text{ք}^2}{\text{Կ}^2}=\frac{\text{Մ}}{\text{Ն}}$

Ուրեմն ք կողմն կը գտնուի վերի ըսած կերպով. և այս կողման վրայ կը շինեմ բազմանկիւն մը՝ նման Ա տուեալ բազմանկեան, միշտ ք և Կ կողմունքն համադիր համարելով։

Բ· ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Ձեւացընել քառակուսի մը՝ համազօր տուեալ զուգահեռագծի մը կամ եռանկեան մը։



(Ձև 169)

1. Ըլլայ ԱԲ տուեալ զուգահեռագծին խարիսխն, և ԴԵ բարձրութիւնն և Ք առաջարկեալ քառակուսոյն կողմն. յայտնի է որ պիտի ունենանք $\text{Ք}^2=\text{ԱԲ}\times\text{ԴԵ}$

կամ $\frac{\text{ԱԲ}}{\text{Ք}}=\frac{\text{Ք}}{\text{ԴԵ}}$

ուրեմն Ք կողմն՝ է միջին համեմատական 'ի մէջ ԱԲ կողման և ԴԵ բարձրութեան։

2. Նոյնպէս կը ցուցուի որ տուեալ եռանկեան համազօր քառակուսոյն կողմն՝ է միջին համեմատական 'ի մէջ խարսխին եռանկեան և անոր բարձրութեան կիսոյն։

Գ· ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Ձեւացընել ուղղանկիւն մը համազօր տուեալ քառակուսոյ մը, եւ որոյ կողմանց գումարն կամ տարբերութիւնն սուեալ ըլլայ։

Այս առաջարկութիւնս լուծելու համար՝ պէտք է գտնել ուղղանկեան խարիսխն և բարձրութիւնն, այսինքն երկու գիծք՝ որոց գումարն և արտադրեալն. և կամ տարբերութիւնն և արտադրեալն, տուեալ ըլլան (20. Ձ և Է)։

Դ· ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Տուեալ ըլլան երկու նման բազմանկիւնք, ձեւացընել երրորդ մը նման անոնց եւ հաւասար անոնց գումարին կամ անոնց տարբերութեան։

Ըլլան Մ և Ք մակերևոյթքն երկու տուեալ բազմանկեանց, և Ա ու Բ երկու համադիր կողմունք այս բազմանկեանց, ըլլայ Փ առաջարկեալ բազմանկեան մակերևոյթն, և ք համադիր կողմն առ Ա և Բ։

Ինչպէս որ գիտենք՝ նման բազմանկիւնք այնպէս կը համեմատին իրարու՝ ինչպէս իրենց համադիր կողմանց քառակուսիքն, ուստի

$$\frac{\text{Մ}}{\text{Ք}}=\frac{\text{Ա}^2}{\text{Բ}^2}, \text{ ուստից } \frac{\text{Մ}}{\text{Մ}+\text{Ք}}=\frac{\text{Ա}^2}{\text{Ա}^2+\text{Բ}^2}$$

նոյն պատճառաւ $\frac{\text{Մ}}{\text{Փ}}=\frac{\text{Ա}^2}{\text{ք}^2}$.

Բայց $\text{Փ}=\text{Մ}+\text{Ք}$, և որով այս երկու համեմատութիւնք՝ երեք առաջին անդամները հաւասար ունենալով՝ պէտք է որ

$$\text{ք}^2=\text{Ա}^2+\text{Բ}^2$$

Այնպէս որ ք է հակուղիղ ուղղանկիւն եռանկեան մը, միւս կողմունքն են Ա և Բ։

Ուրեմն գտնելով ք կողմն, անոր վրայ սովորական կերպով կը շինենք բազմանկիւնն՝ նման տուեալ բազմանկեանց (20. Թ)։

Եթէ Փ բազմանկիւնն հաւասար ըլլայ Մ—Ք, կ'ունենանք նոյնպէս այս համեմատութիւնս,

$$\frac{\text{Մ}}{\text{Ք}}=\frac{\text{Ա}^2}{\text{Բ}^2}$$

Ուսկից

$$\frac{\text{Մ}}{\text{Մ}-\text{Ք}}=\frac{\text{Ա}^2}{\text{Ա}^2-\text{Բ}^2}$$

Աշկէ զատ

$$\frac{\text{Մ}}{\text{Փ}}=\frac{\text{Ա}^2}{\text{ք}^2}$$

Ուստի կը հետեւի՝ որ

$$\text{ք}^2=\text{Ա}^2-\text{Բ}^2\text{։}$$

Գ Լ Ո Ւ Խ   Չ Ո Ր Ր Ո Ր Դ

ՅՕԴՈՒԱԾ ՔՍԱՆԵՐՈՐԴ ՉՈՐՐՈՐԴ

ԿԱՆՈՆԱՒՈՐ ԲԱԶՄԱՆԿԻՒՆ. — ՈՐ ԵՒ ԻՑԷ ԿԱՆՈՆԱՒՈՐ ԲԱԶՄԱՆԿԻՒՆ ՄԸ ԿՐՆԱՅ ԲՈԼՈՐԱԿԻ ՄԸ ՍՏՈՐԱԳՐՈՒԻԼ ԵՒ ԿԱՄ ՊԱՐԱԳՐՈՒԻԼ. — ԵՐԿՈՒ ՆՄԱՆ ԲԱԶՄԱՆԿԵԱՆՑ ՊԱՐԱԳԾԻՑ ՅԱՐԱԲԵՐՈՒԹԻՒՆՆ ՆՈՅՆ Է ԻՐԵՆՑ ՇԱՌԱՒԻՂԱՑ ՅԱՐԱԲԵՐՈՒԹԵԱՆ ՀԵՏ. — ԲՈԼՈՐԱԿԻ ՄԸ ՇՐՋԱԳԾԻՆ ԱՌ ՏՐԱՄԱԳԻԾՆ ՈՒՆԵՑԱԾ ՅԱՐԱԲԵՐՈՒԹԻՒՆՆ ԱՆՓՈՓՈԽ Է։

ՍԱՀՄԱՆՔ

1. Կանոնաւոր բազմանկիւն կ'ըսուի այն ամէն բազմանկիւն՝ որոյ կողմունքն և անկիւնքն իրարու հաւասար են։ — Հաւասարակող եռանկիւնն և քառակուսին՝ են կանոնաւոր բազմանկիւնք։

2. Բազմանկիւն մը ստորագրեալ է բոլորակի մը մէջ՝ երբ իրեն բոլոր գագաթներն գտնուին բոլորակին շրջապատին վրայ. փոխադարձաբար՝ բոլորակըն պարագրեալ կ'ըսուին բազմանկեան։

3. Բազմանկիւն մը պարագրեալ է բոլորակի մը վրայ՝ երբ իրեն ամէն կողմունքն շօշափողք են բոլորակին շրջապատին, որով բոլորակն ալ ստորագրեալ կ'ըսուի բազմանկեան։

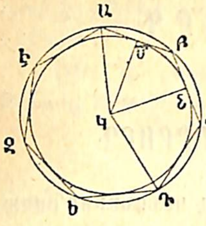
4. Փոփոխական մեծութեան մը սահման կ'ըսուի հաստատուն մեծութիւն մը, որոյ փոփոխականն կրնայ մօտենալ՝ առանց երբեք հաւասարելու անոր։

Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Ամէն կանոնաւոր բազմանկիւն կրնայ ստորագրուիլ բոլորակի մը մէջ եւ պարագրուիլ անոր վրայ։

1. Ունենանք ԱԲԳԴ... կանոնաւոր բազմանկիւն մը,

և ենթադրենք որ շրջապատ մը անցնի՝ Ա, Բ, Գ իրարու յաջորդ գագաթներէն, կ'ըսենք՝ որ պէտք է նաև Դ յաջորդ գագաթէն անցնի ։ Բազմանկեան ԱԲ և ԲԳ կողմանց վրայ իրենց միջակէտներէն կը բարձրացընեմ ՄԿ, ՆԿ ուղղահայեացները, որք գիրար կը կտրեն Կ կէտին վրայ՝ որ է կեդրոն Ա, Բ, Գ գագաթներէն անցնող շրջապատին (Ձև 170) ։



(Ձև 170)

Յետոյ ԱԿՆԲ քառակողմն կը դնեմ ՆԿԴԳ քառակողման վրայ, շրջելով զայն ՆԿ գծին վրայ ։ Արդ ինչպէս որ ուղիղ անկիւնքն ԲՆԿ=ԳՆԿ, որով ԲՆ կողմն կ'իյնայ ՆԳ կողման վրայ, և Բ կէտն Գ կէտին վրայ, վասն զի Ն է միջակէտ ԲԳ կողման. Նմանապէս ԲԱ կողմն պիտի իյնայ ԳԴ կողման վրայ, և Ա կէտը Դ կէտին վրայ, որովհետև կանոնաւոր բազմանկիւն ըլլալով թէ անկիւնքն և թէ կողմունքն հաւասար են ։ Ուրեմն ԿԱ=ԿԴ, վասն զի իրենց ծայրերը զիրար կը շօշափեն՝ որով եթէ Կ կեդրոնէն ԿԱ շառաւիղով շրջապատ մը քաշենք, նոյն շրջապատն պիտի անցնի Դ գագաթէն ալ ։

Նոյն ոճով կրնանք ցուցընել որ այս շրջապատն կ'անցնի բազմանկեան միւս գագաթներէն. ուրեմն այս կանոնաւոր բազմանկիւնն կրնայ ստորագրուիլ բոլորակի մը մէջ ։

2. Երկրորդ, ստորագրեալ բազմանկեան ԱԲ, ԲԳ, ԳԴ.. կողմունքն՝ են այս շրջապատին հաւասար լարերը, որով եթէ Կ կեդրոնէն ուղղահայեացներ ԿՄ, ԿՆ իջեցընենք այս լարերուն վրայ, այս ուղղահայեացներն իրարու հաւասար կ'ըլլան (11 . Ա) ։ Ուստի եթէ Կ կեդրոնէն ԿՄ շառաւիղով շրջապատ մը քաշենք, պիտի անցնի բազմանկեան բոլոր կողմանց միջակէտներէն, և անոնց իւրաքանչիւրին շօշափող է (11 .՝ Բ). Հետևաբար շրջապատն՝ ստորագրեալ պիտի ըլլայ բազմանկեան մէջ, կամ բազմանկիւնն պարագրեալ շրջապատին վրայ ։

Ծանօթութիւն. — Կէտն Կ որ թէ՛ պարագրեալ և թէ՛ ստորագրեալ բոլորակաց կեդրոն է, կոչի կեդրոն կանոնաւոր բազմանկեան ։

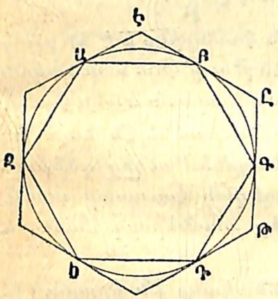
Կանոնաւոր բազմանկեան շառաւիղ ըսելով կ'իմանանք պարագրեալ շրջապատին շառաւիղն. իսկ հեռադիր (Apothème) ըսելով կ'իմանանք ստորագրեալ բոլորակին շառաւիղն, ինչպէս ԿՄ է հեռադիր ։

Կանոնաւոր բազմանկեան անկիւն կեդրոնական է ԿԱ, ԿԲ երկու յաջորդ շառաւիղներէն ձևացած անկիւնն ։ Կեդրոնական անկիւնքն հաւասար են, որովհետև հաւասար աղեղներ կը կտրեն պարագրեալ շրջապատին վրայ. այս անկեանց իւրաքանչիւրին յարաբերութիւնն առ ուղիղ անկիւնն՝ հաւասար է $\frac{4}{Թ}$. Թ կը ցուցընէ կանոնաւոր բազմանկեան կողմանց թիւն ։

Բ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Թէ որ շրջապատ մը բաժնենք հաւասար աղեղներ. 1. Աղեղանց լարերը կը ձևացընեն կանոնաւոր կորընթարդ բազմանկիւն մը, ստորագրեալ 'ի շրջապատի ։ 2. Բաժանմանց կէտերէն քաշուած շօշափողքն՝ նոյնպէս կը ձևացընեն կորնթարդ կանոնաւոր բազմանկիւն մը՝ պարագրեալ շրջապատին վրայ ։

2. Աղեղքն ԱԲ, ԲԳ... հաւասար ըլլալով անոնց լարերն ալ հաւասար են . ուրեմն ստորագրեալ բազմանկեան կողմունքն հաւասար են . Նոյնպէս անկիւնքն ալ հաւասար են, որովհետև Բ անկեան չափն է ԴԱ և ԴԳ աղեղանց գումարին կէսն, (13 . Դ) և Գ անկեան չափն է ԴԱ և ԱԲ աղեղանց գումարին կէսն, և որովհետև ԴԳ աղեղն հաւասար է ԱԲ աղեղան, ուրեմն անկիւնն Բ=Գ ։ Կրնանք նոյնպէս ցուցընել որ միւս անկիւններն ալ իրարու հաւասար են, որով ԱԲԳԴ... ստորագրեալ բազմանկիւնն՝ է կանոնաւոր ։



(Ձև 171)

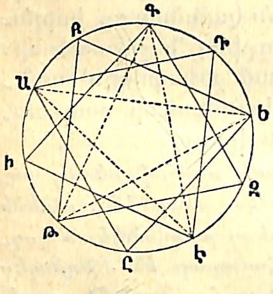
2. Բազմանկիւնն ԷՀԹ... որ ձևացած է Ա, Բ, Գ...

կէտերէն քաշուած շօշափողներէն, է նոյնպէս կանոնաւոր։ Որովհետև ԷԱԲ և ԸԲԳ եռանկիւնքն հաւասար են, վասն զի ԱԲ=ԲԳ ըստ ենթադրութեան, ԷԱԲ անկիւնն՝ որոյ չափն է ԱԲ աղեղան կէսն (13. Դ. Հ. բ) հաւասար է ԸԲԳ անկեան, որոյ չափն է ԲԳ աղեղան կէսն. Նոյն պատճառաւ նաև անկիւնն ԷԲԱ=ԸԳԲ։ Ուսկից առաջ կու գայ որ

1. Բազմանկեան Է, Ը, Թ... անկիւնքն հաւասար են։

2. Շօշափողքն ԷԲ=ԸԲ=ԸԳ=ԹԳ... որով բազմանկեան կողմն ԷԸ=ԸԹ=ԹԺ... ուրեմն պարագրեալ բազմանկիւնն կանոնաւոր է։

Հետեւանք. — Եթէ բաժնենք շրջապատ մը հաւասար մասանց, զոր օրինակ տասը մաս, եւ սկսեալ Աէն միացընենք ուղիղ գծերով բաժանման կէտերն 'ի Թէն առ Թ, Թ ըլլալով ամբողջական թիւ մը փոքր քան զկէսն 10ի, կը ծեւանայ մէկ կանոնաւոր գոգաւոր բազմանկիւն մը 10 կողմունքով, եթէ Թ նախնական թիւ է ընդ 10. բայց թէ որ Թ և 10 նախնական չեն, եւ թէ Բ է իրենց մեծագոյն հասարակաց բաժանարարն, այս ոճով շինուած կանոնաւոր բազմանկեան կողմանց թիւն է $\frac{10}{Բ}$։



(Ձև 172)

Նախ համարինք թէ Թ ըլլայ 3, որով 10 թուոյ հետ նախնական է. ուստի շրջապատն տասը հաւասար մասանց բաժնելէն ետև, երեքէ առ երեք իրարու հետ կը միացընեմ ուղիղ գծերով, որ է ըսել կ'առնում կարգաւ ԱԴ աղեղան հաւասար աղեղներ, որ կը ցուցընէ շրջապատին երեք տասներորդ մասն, և կը քաշեմ այս աղեղանց լարերը։

Ինչպէս որ 3 և 10 թիւերն նախնականք են իրարու, իրենց փոքրագոյն հասարակաց բազմապատիկն է 10×3=30, որով ԱԴ աղեղան հաւասար՝ տասը աղեղանց գումարն 30, հաւասար է 3 անգամ շրջապատին երկայնութեան, և է նաև ԱԴ աղեղան փոքրագոյն բազմապատիկն՝ որ կը պարունակէ

հաւասար անգամ զշրջապատն։ Որով 10 աղեղանց լարերն կը ձևացընեն մէկ բազմանկիւնային փակեալ գիծ մը, որովհետև Ա կէտէն կը սկսի և կը վերջանայ նոյն կէտին վրայ։ Այս գիծն տասը կողմունք ունի, որով տասը հատ գագաթունք՝ որք կը գտնուին շրջապատին տասը բաժանմանց վրայ. ուրեմն կը ձևացընեն գոգաւոր և կանոնաւոր տասնանկիւն մը, որովհետև հարկաւ իրեն կողմունքն հաւասար են, ինչպէս նաև անկիւնքն, և իւրաքանչիւր կողմն կը կտրէ կ'անցնի իւր մակերևոյթը։

Երկրորդ ենթադրենք որ Թ հաւասար ըլլայ 4ի, այս թիւը 10ի հետ նախնական չէ, և որովհետև 10 և 4 թուոց մեծագոյն հասարակաց բաժանարարն է 2, ուրեմն եթէ Ա կէտէն սկսեալ՝ շրջապատին բաժանման տասը մասունքն չորս չորս իրարու հետ միացընեմ, նորէն կու գամ Ա կէտին՝ 5 հաւասար լար քաշելէն ետև, վասն զի $\frac{10}{2}=5$։ Արդ այս լարերուն 5 հաւասար աղեղներն, շրջապատին 5 անգամ $\frac{4}{10}$ին հաւասար են կամ 2 անգամ շրջապատն։ Ուրեմն այս կերպով կը ձևացընենք կանոնաւոր գոգաւոր բազմանկիւն մը հինգ կողմով։

Այս գոգաւոր, և կանոնաւոր բազմանկիւնքն՝ կոչին բազմանկիւնք աստղաձեւք իրենց ձևոյն համար։ Մէկ միայն աստղաձև հնգանկիւն կայ, երկու աստղաձև եօթնանկիւն, մէկ հատ ութանկիւն աստղաձև, մէկ հատ տասնանկիւն, մէկ հատ երկոտասանանկիւն աստղաձև և երեք հատ հնգետասանանկիւն աստղաձև։ Որ է ըսել իւրաքանչիւր բազմանկեան Թ կողմով այնչափ աստղաձև բազմանկիւն կայ՝ որչափ որ նախնական թիւեր կը գտնուի Թի հետ, փոքր քան զկէսն Թի։

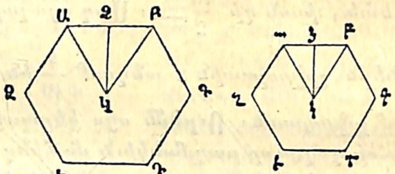
Ծանօթութիւն. — Եթէ բոլորակի մը մէջ ստորագրենք կանոնաւոր բազմանկիւն մը, զոր օրինակ վեցանկիւն մը, և ապա ուրիշ բազմանկիւնք միշտ կրկնապատիկ կողմունքով, որ է ըսել՝ 12, 24, 48... այս բազմանկեանց պարաչափքն երթալով կ'աճին, բայց միշտ շրջապատէն պզտիկ մնալով, յորում ստորագրեալ են, և որոյ անսահման կերպով կը մօտենան. Նոյնպէս իրենց մակերևոյթն երթալով կը մօտենայ *բոլորակին մակերեւոյթին։ Ուրեմն կրնանք ըսել որ շրջապատն և բոլորակն' են սահման' առ որ կը դիմէ ստորագրեալ կանոնաւոր բազմանկեան պարաչափն և մակերեւոյթն, և որոյ կողմանց թիւն կ'աճի անսահմանապէս։*

Գ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

1. Երկու կանոնաւոր բազմանկիւնք' որ հաւասար թուով կողմունք ունին' նման են իրարու։

2. Այս բազմանկեանց պարաչափուց յարաբերութիւնն' հաւասար է իրենց շառաւիղաց կամ հեռադրաց յարաբերութեան։

1. *Ունենանք* ԱԲԳԴԵԶ, աբգդեզ *երկու կանոնաւոր վեցանկիւնք, կ'ուզենք ցուցընել որ ասոնք իրարու նման են։*



(Ձև 173)

Որովհետև այս վեցանկեանց իւրաքանչիւրին անկեան գումարն' հաւասար է 2×4=8 *ուղիղ անկեանց* (7. Ե), *որով այս կանոնաւոր բազմանկեանց իւրաքանչիւր անկիւնն' հաւասար է* $\frac{8}{6}$ *ուղիղ անկեան մը. ուրեմն այս բազմանկեանց անկիւնքն իրարու հաւասար են։ Նոյնպէս իրենց կողմունքն ալ համեմատական են. վասն զի յարաբերութիւնքն*

$$\frac{\text{ԱԲ}}{\text{աբ}}=\frac{\text{ԲԳ}}{\text{բգ}}=\frac{\text{ԳԴ}}{\text{գդ}}\ldots$$

ճիշդ են ըստ ենթադրութեան, ուրեմն այս բազմանկիւնքն իրարու նման են։

2. *Բազմանկեանց կեդրոններն ըլլան* Կ *և* կ, *կը քաշեմ* ԱԿ, ԲԿ, ակ, բկ *շառաւիղները, և* ԿՁ, կձ *հեռադիրքն։ Այս բազմանկիւնքն նման ըլլալով, նաև իրենց պարաչափքն*

$$\frac{\text{ԱԲԳ}\ldots}{\text{աբգ}\ldots}=\frac{\text{ԱԲ}}{\text{աբ}}\ (18.\ \text{Թ}).$$

Արդ ԿԱԲ, կաբ *եռանկիւնքն հաւասարասրուն են, և ունին* Կ *անկիւնն հաւասար* կ *անկեան 'ի մէջ երկու համեմատական կողմանց, ուրեմն այս եռանկիւնքն նման են* (18. Գ).

$$\text{որով}\ \frac{\text{ԱԲ}}{\text{աբ}}=\frac{\text{ԿԱ}}{\text{կա}}$$

$$\text{կամ}\ \frac{\text{ԱԲԳ}\ldots}{\text{աբգ}\ldots}=\frac{\text{ԿԱ}}{\text{կա}}։$$

Վերջապէս' ԿՁԱ, կձա *ուղղանկիւն եռանկիւնքն նման են, վասն զի սուր անկիւնն* ԱԿՁ=ակձ, *երկու հաւասար կեդրոնական անկեանց կէսերն ըլլալով. որով* $\frac{\text{ԿԱ}}{\text{կա}}=\frac{\text{ԿՁ}}{\text{կձ}}$, *ուստի կրնանք դնել* $\frac{\text{ԱԲԳ}\ldots}{\text{աբգ}\ldots}=\frac{\text{ԿՁ}}{\text{կձ}}$, *զոր կ'ուզէինք ցուցընել։*

Դ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու շրջապատք այնպէս կը համեմատին իրարու' ինչպէս իրենց շառաւիղքն։

Ունենանք երկու շրջապատք' որոց շառաւիղքն ըլլան Շ *և* շ, *ստորագրեմք անոնց մէջ կանոնաւոր բազմանկիւնք, օրինակի համար վեցանկիւնք, այս բազմանկեանց պարաչափքն այնպէս կը համեմատին իրարու' ինչպէս* Շ *առ* շ (Գ)։ *Եթէ ուրիշ բազմանկիւնք ստորագրեմք առաջիններուն կրկին անգամ աւելի կողմամբք, միշտ իրենց պարաչափուց յարաբերութիւնն' հաւասար է իրենց շառաւիղաց յարաբերութեան։ Ուրեմն ըսել է որ այս առընչութիւնն երկու պարաչափուց մէջ' միշտ նոյն է, ինչ ալ ըլլայ կողմանց թիւն, որով նոյն է նաև անոնց սահմանին համար. որ է ըսել' երկու շրջապատք այնպէս կը համեմատին իրարու' ինչպէս իրենց շառաւիղքն։ Կոչենք* Պ *և* պ *երկու շրջապատքն, կ'ունենանք*

$$\frac{\text{Պ}}{\text{պ}}=\frac{\text{Շ}}{\text{շ}}.$$

Հետեւանք․ — Շրջապատի մը առ իւր տրամագիծն ունեցած յարաբերութիւնն՝ հաստատուն է։

Վերի տուեալ հաւասարութենէն կրնանք հետեւցընել նաև

$$\frac{\text{Պ}}{2\text{Շ}}=\frac{\text{պ}}{2\text{շ}}$$

որ է ըսել, շրջապատի մը առ տրամագիծն ունեցած յարաբերութիւնն՝ միշտ հաւասար է ուրիշ որ և իցէ շրջապատի մը առ տրամագիծն ունեցած յարաբերութեան։

Այս հաստատուն յարաբերութիւնն՝ ընդհանրապէս կը նշանակուի π յունական տառով․ Լամբերդ փորձեց տեսաւ որ այս թիւս անբանաւոր է, որով միայն մօտաւոր կերպով կրնանք հաշուել, իրեն գտած թիւն է

$$\pi=3,1415926535897932\cdots$$

Առաջին անգամ Արքիմեդէս (250 Ն․ Ք) եղաւ՝ որ գտաւ π զօրութիւնն ՚ի մէջ $3\frac{10}{70}$ և $3\frac{10}{71}$ թուոց, ընդհանրապէս մեծագոյնն $3\frac{1}{7}$ կը գործածուի, որ աւելի է քան զπ կէս–հարիւրորդով մը։

Արդ շրջապատին առ տրամագիծն ունեցած յարաբերութիւնն հաստատուն ըլլալով կրնանք իբր ընդհանուր ձև գրել

$$(1)\quad \frac{\text{Տրջ Շ}}{2\text{Շ}}=\pi$$

ուսկից

$$(2)\quad \text{Տրջ Շ}=2\text{Շ}\pi=2\pi\text{Շ}$$

այսինքն շրջապատը գտնելու համար, որոյ տրամագիծն տրուած է, պէտք է բազմապատկել տրամագիծն π թուով։

Դարձեալ

$$(3)\quad 2\text{Շ}=\frac{\text{Տրջ Շ}}{\pi}$$

այսինքն՝ տուեալ շրջապատի մը տրամագիծն գտնելու համար՝ պէտք է բաժնել շրջապատն π թուոյն վրայ։

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Հաշուել Թ աստիճանոց աղեղի մը երկայնութիւնը, որոյ Շ շառաւիղն տուեալ ըլլայ։

Այս Շ շառաւիղով քաշուած շրջապատն՝ հաւասար ըլլալով $2\pi\text{Շ}$, մէկ աստիճան ունեցող աղեղն՝ հաւասար պիտի ըլլայ $\frac{2\pi\text{Շ}}{360}$ կամ $\frac{\pi\text{Շ}}{180}$․ իսկ Թ աստիճանով աղեղին չափն է Թ անգամ $\frac{\pi\text{Շ}}{180}$ կամ $\frac{\pi\text{Շ}\text{Թ}}{180}$․ ուրեմն երկայնութիւնն՝

$$(4)\quad \text{Ե}=\frac{\pi\text{Շ}\text{Թ}}{180}$$

այս ձևով կրնանք գտնել Ե, Շ, Թ քանակութեանց մին, երբ երկուքն տուեալ ըլլան։

Ե․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու նման աղեղներ՝ համեմատական են իրենց շառաւիղաց։

Նման աղեղք ըսելով կ՚իմանանք երկու տարբեր շրջապատից աղեղքն՝ որոց աստիճանաց թիւն նոյն է։ Կոչենք Շ, Շ′ շառաւիղքն, և Ե, Ե′ նման աղեղանց երկայնութիւնքն, որոց աստիճանաց թիւն ըլլայ Թ, ըստ (4) տարազին կ՚ունենանք

$$\text{Ե}=\frac{\pi\text{Շ}\text{Թ}}{180},\quad \text{Ե}'=\frac{\pi\text{Շ}'\text{Թ}}{180}$$

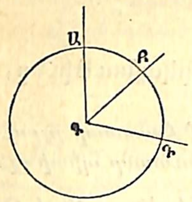
Բաժնելով այս երկու հաւասարութիւնքն անդամ առ անդամ

$$\frac{\text{Ե}}{\text{Ե}'}=\frac{\text{Շ}}{\text{Շ}'}$$

այսինքն, նման աղեղք համեմատական են իրենց շառաւիղաց։

Զ․ ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Թէ որ ԲԳԴ անկեան գագաթը կեդրոն առնելով՝ քաշեմ շրջապատ մը որ եւ իցէ ԳԲ շառաւիղով, եւ եթէ ԱԳԲ կեդրոնական անկիւնն՝ առնում իբր միութիւն չափու, որ շրջապատին վրայ ԱԲ աղեղը կը կտրէ շառաւիղին հաւասար, ԲԳԴ անկեան չափն է՝ ԲԴ աղեղան առ ԳԲ շառաւիղն ունեցած յարաբերութիւնն։



(Ձև 174)

Որովհետև գիտենք որ (13. Բ)

$$\frac{\text{ԲԳԴ}}{\text{ԱԳԲ}}=\frac{\text{ԲԴ}}{\text{ԱԲ}}$$

Բայց ըստ Նախընթաց ենթադրութեան՝ աղեղն ԱԲ=ԳԲ շառաւիղի, ուսկից կը հետևի՝ որ $\frac{\text{ԲԳԴ}}{\text{ԱԳԲ}}=\frac{\text{ԲԴ}}{\text{ԳԲ}}$։

Այս $\frac{\text{ԲԳԴ}}{\text{ԱԳԲ}}$ կամ $\frac{\text{ԲԴ}}{\text{ԳԲ}}$ կը ցուցընէ ԲԳԴ անկեան չափն, վասն զի ԱԳԲ անկիւնն՝ իբր միութիւն առինք։

Ծանօթութիւն Ա. — Կոչենք ա=ԲԳԴ, և Շ=ԳԲ և ե=ԲԴ աղեղին երկայնութիւնը. կ'ունենանք հաւասարութիւնն ե=աՇ, որ շատ կարևոր է եռանկիւնաչափութեան մէջ։

Ծանօթութիւն Բ. — Եթէ ուզենք հաշուել ԱԳԲ միութեան անկեան մէջ աստիճանաց թիւը, պէտք է համարինք վերի (4) տարազին մէջ ե=Շ, այսինքն այս ձևոյն մէջ

$$\text{ե}=\frac{\pi\text{ՇԹ}}{180}$$

ուսկից Թ արժէքը կը գտնենք այսպէս

$$(5)\quad \text{Թ}=\frac{180}{\pi}=57^{\circ},\ 17',\ 44''$$

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆՔ

1. Ո՞րչափ է շրջապատն՝ եթէ տրամագիծն է 8″։ — Պխ. — 25, 1328″

2. Ի՞նչ է երկրիս շառաւիղն՝ եթէ շրջապատն է 40000 հազարամէտր։ — Պխ. — 6366

3. Ի՞նչ է շառաւիղն՝ 25° 15′ աղեղան մը, որոյ երկայնութիւնն է $8^{\text{մ}}$, 5։ — Պխ. — $19^{\text{մ}}$, 29

4. Ի՞նչ է աղեղի մը երկայնութիւնն, որոյ շառաւիղն է $1^{\text{մ}}$, 6 և աստիճանն 38°, 42′։ — Պխ. — $1^{\text{մ}}$, 08։

5. Քանի՞ աստիճան է աղեղ մը՝ որոյ երկայնութիւնն է 1 մէտր և շառաւիղն $0^{\text{մ}}$, 46։ — Պխ. — 124°, 32′, 44″, 16։

6. Գտնել բոլորաձև աւազանի մը շրջապատը՝ որոյ տրամագիծն է $26^{\text{մ}}$, 52։ — Պխ. — $82^{\text{մ}}$, 686912։

7. Երկու աղեղ որ նոյն երկայնութիւնն ունին, որոց մէկուն շառաւիղն է $0^{\text{մ}}$, 25 և միւսին $0^{\text{մ}}$, 18, եթէ մին 15°, 20′ ունի, միւսն ո՞րչափ աստիճան պիտի ըլլայ։ — Պխ. — 21° 17′ 46″, 67։

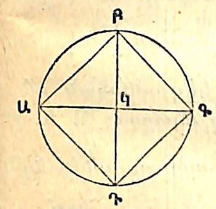
ՅՕԴՈՒԱԾ ՔՍԱՆԵՐՈՐԴ ՀԻՆԳԵՐՈՐԴ

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆՔ ԿԱՆՈՆԱՒՈՐ ԲԱԶՄԱՆԿԵԱՆՑ ՎՐԱՅ. — ՍՏՈՐԱԳՐԵԱԼ ԿԱՆՈՆԱՒՈՐ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ, ՎԵՑԱՆԿԻՒՆ, ՏԱՍՆԱՆԿԻՒՆ. — ԹԷ Ի՛ՆՉ ԿԵՐՊՈՎ ԿՐՆԱՆՔ ԳՏՆԵԼ ՇՐՋԱՊԱՏԻՆ ԵՒ ՏՐԱՄԱԳԾԻՆ ՄԷՋ ԵՂԱԾ ՅԱՐԱԲԵՐՈՒԹԻՒՆԸ։

Ա. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Տուեալ շրջապատի մը մէջ ստորագրել քառակուսի մը։

Կը քաշեմ երկու ԱԳ, ԲԴ տրամագիծներ իրարու ուղղահայեաց, և իրենց Ա, Բ, Գ, Դ ծայրերը կը միացընեմ ուղիղ գիծերով։ Քառակողմն ԱԲԳԴ է քառակուսի մը, որովհետև ԱԿԲ, ԲԿԳ... կեդրոնական անկիւնքն ուղիղ ըլլալով՝ իրարու հաւասար են, որով ԱԲ, ԲԳ... լարերն ալ իրարու հաւասար են։



(Ձև 175)

Եթէ ուզենանք ԱԲ կողման առ ԱԿ շառաւիղն ունեցած յարաբերութիւնը գտնել, կը դիտենք որ ԱԿԲ ուղղանկիւն եռանկիւն ըլլալով՝ կ'ունենանք

$$\overline{\text{ԱԲ}}^2=\overline{\text{ԱԿ}}^2+\overline{\text{ԲԿ}}^2=2\overline{\text{ԱԿ}}^2$$

ուսկից յառաջ կու գայ $\frac{ԱԲ}{ԱԿ}=\sqrt{2}$. ուրեմն ստորագրեալ քառակուսւոյ մը կողման առ շառաւիղն ունեցած յարաբերութիւնն՝ է անքանաւոր:

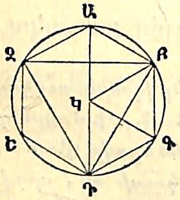
Հետեւանք. — Եթէ ութանկիւն մը ուզենանք ստորագրել, վերի ստորագրեալ քառակուսւոյն կողմանց աղեղները երկու հաւասար մասն կը բաժնենք, և ուղիղ գիծերով միացընելով բաժանմանց կէտերը՝ կ'ունենանք խնդրեալ ութանկիւնն:

Նոյնպէս եթէ 16 կողմով բազմանկիւն մը ուզենանք ստորագրել, ստորագրեալ ութանկեան կողմանց աղեղները երկու հաւասար մասն կը բաժնենք, և կը միացընենք իրարու հետ: Այսպէս կրնանք շարունակել՝ 32, 64... կողմամբք կանոնաւոր բազմանկիւններ ունենալու համար:

Բ. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Տուեալ շրջապատի մը մէջ ստորագրել վեցանկիւն մը, եւ հաւասարակող եռանկիւն մը:

1. Համարինք թէ առաջարկութիւնն լուծեալ ըլլայ, և վեցանկեան մէկ կողմն ըլլայ ԱԲ, կ'ըսենք թէ հաւասար է շառաւիղին:



(Ձև 176)

Որովհետև ԿԱԲ եռանկիւնն է հաւասարասրուն, և ԱԿԲ անկիւնն՝ հաւասար է և $\frac{4Ո}{6}$ և կամ $\frac{2Ո}{3}$ ուղիղ անկեան, վասն զի վեցանկեան կեդրոնական անկիւններէն մին է, իսկ մնացած Ա և Բ անկիւնքն հաւասար են $2Ո-\frac{2Ո}{3}=\frac{4Ո}{3}$. բայց այս անկիւնքն հաւասար են, ուրեմն իւրաքանչիւրն հաւասար է $\frac{2Ո}{3}$, և ԱԿԲ եռանկիւնն՝ է հաւասարակող. հետևաբար կանոնաւոր վեցանկեան ԱԲ կողմն հաւասար է շառաւիղին:

Այս բազմանկիւնը ձևացընելու համար՝ բաւական է բոլորակին մէջ վեց հատ յաջորդաբար լար քաշել շառաւիղին հաւասար:

2. Եթէ ԱԲԳԴԵԶ ստորագրեալ վեցանկեան գագաթունքն երկու առ երկու իրարու հետ միացընեմ, կը ձևանայ հաւասարակող ԲԴԶ եռանկիւնն:

Կ'ուզենք գտնել թէ ինչ է ԲԴ կողման առ ԱԿ շառաւիղն ունեցած յարաբերութիւնն, կը քաշեմ ԱԴ տրամագիծը, ԱԲԴ ուղղանկիւն եռանկիւն ըլլալով

$$\overline{ԲԴ}^2=\overline{ԱԴ}^2-\overline{ԱԲ}^2=4\overline{ԱԿ}^2-\overline{ԱԿ}^2$$

կամ

$$\overline{ԲԴ}^2=3\overline{ԱԿ}^2$$

ուսկից

$$\frac{ԲԴ}{ԱԿ}=\sqrt{3}$$

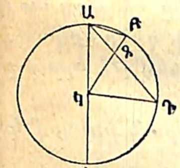
Ուրեմն ստորագրեալ հաւասարակող եռանկեան մը կողման առ շառաւիղն ունեցած յարաբերութիւնն՝ է անքանաւոր:

Հետեւանք. — Թէ որ ուզենք նոյն շրջապատին մէջ ստորագրել 12, 24, 48... կողմամբք բազմանկիւններ, պէտք է վեցանկեան կողմանց աղեղները 2, 4, 8... հաւասար մասանց բաժնել, և իրարու հետ միացընել լարերով:

Գ. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Տուեալ շրջապատի մը մէջ ստորագրել կանոնաւոր տասնանկիւն մը:

Համարինք առաջարկութիւնը լուծեալ, և ԱԲ ըլլայ տասնանկեան մէկ կողմն. կ'ըսենք որ այս կողմն հաւասար է շառաւիղին մեծագոյն մասին, երբ միջին և չորրորդ համեմատական բաժնենք զայն:



(Ձև 177)

Եռանկիւնն ԿԱԲ հաւասարասրուն ըլլալով՝ կեդրոնական անկիւնն Կ հաւասար է ուղիղ անկեան $\frac{4}{10}$, կամ $\frac{2}{5}$ աց. ուրով միւս Ա և Բ անկեանց գումարն հաւասար է $2-\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$

ուղիղ անկեան· բայց այս անկիւնքն իրարու հաւասար են, ուրեմն իւրաքանչիւրն հաւասար է $\frac{4}{5}$ ուղիղ անկեան, կամ Կ կեդրոնական անկեան կրկնապատկին։

Այս ըսելէն ետև, ԱԳ գծով՝ երկու հաւասար մասն կը բաժնենք ԲԱԿ անկիւնը, այս գիծն՝ ԿԱԲ եռանկեան ԿԲ կողմն երկու մասն կը բաժնէ, համեմատական մերձաւոր կողմանց, որ է ըսել (17. գ.) $\frac{\text{ԱԿ}}{\text{ԱԲ}}=\frac{\text{ԳԿ}}{\text{ԳԲ}}$։ Արդ անկիւնն ԳԿԱ հաւասար է ԳԱԿ, վասն զի իւրաքանչիւրն կ'արժէ $\frac{2}{5}$ ուղիղ անկեան, որով ԳԿ=ԳԱ։ Նոյնպէս անկիւնն ԱԲԳ=ԱԳԲ, վասն զի ԱԳԲ=ԳԿԱ+ԳԱԿ=$\frac{4\text{Ո}}{5}$ որով ԱԲ=ԳԱ, և հետևապէս ԱԲ=ԳԿ։ Նախընթաց հաւասարութեան մէջ փոխանակ ԱԿ, ԱԲ գծերու՝ դնելով անոնց հաւասար ԿԲ և ԳԿ գծերը՝ կ'ունենանք $\frac{\text{ԿԲ}}{\text{ԳԿ}}=\frac{\text{ԳԿ}}{\text{ԳԲ}}$· որ է ըսել՝ Գ կէտն կը բաժնէ ԿԲ շառաւիղը միջին և չորրորդ համեմատական, և ստորագրեալ տասնանկեան ԱԲ կողմն՝ հաւասար է այս շառաւիղին հատուածոց ԳԿ մեծագունին։

Ծանօթութիւն. — Կոչենք Շ բոլորակին շառաւիղը՝ յորում տասնանկիւնն ստորագրեցինք. այս բազմանկեան մէկ կողմն հաւասար է $\frac{(\text{Շ}\sqrt{5}-1)}{2}$ (20. Ը)։

Հետևանք Ա. — Եթէ կանոնաւոր տասնանկեան մը գագաթունքն երեքէ առ երեք միացընենք, կը ձևանայ աստղաձև տասնանկիւն մը։ Որովհետև եթէ ԱԳ գիծը երկնցընեմ մինչև որ շրջապատը կտրէ Դ կէտով, կ'ըսեմ թէ երրորդ բաժանման վրայ կու գայ սկսեալ Բ կէտէն։

Վասն զի ԿԱԴ եռանկիւնն հաւասարասրուն ըլլալով և ԿԱԴ անկիւնն հաւասար $\frac{2}{5}$ ուղիղ անկեան, նոյնպէս պէտք է որ ԿԴԱ անկիւնն ըլլայ $\frac{2}{5}$· որով ԱԿԴ հաւասար է $\frac{6}{5}$, այսինքն 3 անգամ ԱԿԲ անկեան։ Ուստի առով ԱԴ կ'ըլլայ աստղաձև տասնանկեան մէկ կողմն։

Շառաւիղին հետ ունեցած յարաբերութիւնն գիտնալ ուզելով՝ կը տեսնենք որ ԿԳԴ եռանկեան մէջ ԳԿԴ անկիւնն հաւասար է $\frac{4}{5}$, նոյնպէս ԿԳԴ անկիւնն՝ հաւասար է $\frac{5}{4}$, վասն զի ԿԳԴ=ԳԱԿ+ԳԿԱ, որով նաև ԴԳ=ԿԴ=Շ· ուրեմն մինչև ցաստ ցուցածնուս հետևանք կ'ունենանք

$$\text{ԱԴ}=\text{Շ}+\text{ԳԱ}=\text{Շ}+\text{ԱԲ}=\text{Շ}+\frac{\text{Շ}}{2}(\sqrt{5}-1)=\frac{\text{Շ}}{2}(\sqrt{5}+1)$$

ուստի ըսել է՝ որ աստղաձև տասնանկեան մը կողմն կը գտնուի՝ բաժնելով շառաւիղը միջին և չորրորդ համեմատական, և առնելով այն հատուածն՝ որ համապատասխանէ այս վերջին առաջարկութեան երկրորդ լուծման։

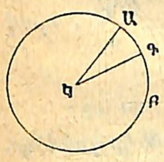
Հետևանք Բ. — Եթէ կանոնաւոր տասնանկեան գագաթունքն երկու երկու իրարու հետ միացընեմ՝ կը ձևանայ ստորագրեալ կանոնաւոր հնգանկիւն մը։

Հետևանք Գ. — Եթէ կանոնաւոր հնգանկեան մը գագաթունքն երկու առ երկու միացընեմ, կը ձևանայ աստղաձև հնգանկիւն մը։

Հետևանք Դ. — Եթէ ուզենք վերի բոլորակին մէջ 20, 40, 80, և այլն, կողմամբ բազմանկիւնք կազմել, պէտք է որ տասնանկեան կողմանց իւրաքանչիւր աղեղը 2, 4, 8, և այլն, մասն բաժնենք, և լարերով իրարու հետ միացընենք։

Դ. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Ստորագրել բոլորակի մը մէջ հնգետասանանկիւն մը։



(Ձև 178)

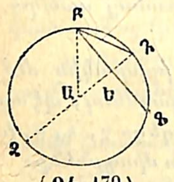
Կ'առնում ԱԲ աղեղն՝ հաւասար շրջապատին վեցերորդ մասին, և անկից կը հանեմ ԲԳ աղեղն՝ հաւասար շրջապատին տասներորդ մասին, մնացած ԱԳ աղեղն՝ հաւասար է հնգետասաներորդ մասին շրջապատին, վասն զի $\frac{1}{6}$ կոտորակն, մեծ է $\frac{1}{10}$ կոտորակէն $\frac{2}{30}$ կամ $\frac{1}{15}$ ով. որով ԱԳ աղեղան լարն է ստորագրեալ կանոնաւոր հնգետասանանկեան մէկ կողմն։

Հետեւանք Ա. — Կրնանք երեք աստղաձեւ հնգետասանանկիւնք ստորագրել, միացնելով երկու առ երկու, չորս առ չորս, եօթն առ եօթն՝ կորնթարդ հնգետասանանկեան գագաթունքն։

Հետեւանք Բ. — Եթէ ուզենք 30, 60, 120, և այլն, կողմամբք բազմանկիւնք ստորագրել, պէտք է կորնթարդ հնգետասանանկեան կողմանց իւրաքանչիւր աղեղն 2, 4, 8, և այլն, մասանց բաժնել, և միացնել լարերով։

Ե. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ

Տուեալ ըլլան ստորագրեալ բազմանկեան մը ԲԳ կողմն եւ բոլորակին ԱԲ շառաւիղն. գտնել նոյն բոլորակին մէջ ստորագրեալ ուրիշ (առաջինէն կրկին անգամ աւելի կողմունք ունեցող) բազմանկեան մը մէկ կողմն։



(Ձև 179)

Տուեալ բազմանկեան ԲԳ կողման ուղղահայեաց կը քաշեմ ԴԶ, և կը ձգեմ ԲԴ լարը. այս լարն է առաջարկեալ բազմանկեան կողմն. որովհետեւ ԲԴ աղեղն կէսն է ԲԳ աղեղան։ Սկսիմ հաշուել տուեալ բազմանկեան ԱԵ հեռադիրն. ԱԵԲ եռանկիւնն ուղղանկիւն ըլլալով, կ'ունենամ $\text{ԱԵ}=\sqrt{\overline{\text{ԱԲ}}^2-\overline{\text{ԲԵ}}^2}$

Արդ ԲԵ գիծն՝ կէսն է ԲԳ լարին, ուրեմն $\overline{\text{ԲԵ}}^2=\frac{\overline{\text{ԲԳ}}^2}{4}$, որով

$$\text{ԱԵ}=\sqrt{\overline{\text{ԱԲ}}^2-\frac{\overline{\text{ԲԳ}}^2}{4}}$$

Յետոյ առաջարկեալ բազմանկեան ԲԴ կողմն կը գտնենք, դիտելով որ ԲԴ է միջին համեմատական ՚ի մէջ ԴԶ (19. Ա.) տրամագծին և իրեն ԴԵ ստուերագրին։ Բայց ԴԶ=2ԱԲ, և ԴԵ=ԱԲ−ԱԵ, ուստի կ'ունենանք նաև հետեւեալ տարազն

$$\text{ԲԴ}=\sqrt{2\text{ԱԲ}\,(\text{ԱԲ}-\text{ԱԵ})}$$

որ կը ցուցնէ ԲԴ կողման արժէքն ՚ի ձեւն ԱԲ տուեալ շառաւիղին և ԱԵ հեռադրին, զոր արդէն գտանք։

Ծանօթութիւն. — Նախընթաց երկու տարազուց գործածութիւնն դիւրացնելու համար, տուեալ բոլորակին ԱԲ շառաւիղն կոչենք Շ, և տուեալ բազմանկեան ԲԳ կողմն մ, և բազմանկեան մէջ ստորագրեալ բոլորակին տրամագիծն կամ ԱԵ հեռադրին կրկինն՝ տ, և վերջապէս մ՛ առաջարկեալ բազմանկեան ԲԴ կողմն։ Այն ատեն ԱԵ հեռադրին արժէքն ցուցընող տարազն կ'ըլլայ,

$$\frac{\text{տ}}{2}=\sqrt{\text{Շ}^2-\frac{\text{մ}^2}{4}}$$

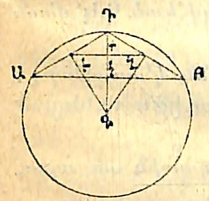
կամ (1) $\text{տ}=\sqrt{4\text{Շ}^2-\text{մ}^2}$

Իսկ ԲԴ երկայնութիւնն կ'ըլլայ

(2) $\text{մ}'=\sqrt{\text{Շ}\,(2\text{Շ}-\text{տ})}$

Զ. ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆ*

Համարինք թէ տուեալ ըլլան կանոնաւոր բազմանկեան մը շառաւիղն եւ հեռադիրն. գտնել նոյն պարաչափն ունեցող եւ կրկնաթիւ կողմամբ կանոնաւոր բազմանկեան մը շառաւիղն եւ հեռադիրն։



(Ձև 180)

Ենթադրենք որ ԱԲ ըլլայ կանոնաւոր բազմանկեան մը մէկ կողմն ստորագրեալ ԳԱ բոլորակին մէջ։ Կոչենք ԳԱ շառաւիղն՝ Շ, և իր ԳԿ հեռադիրն՝ Ճ, զոր կը ձեւացընենք հանելով Գ կէտէն ԳԴ ուղղահայեացն ԱԲ ուղիղ գծին վրայ։ Յետոյ կը քաշենք ԱԴ, ԲԴ լարերն, և այս լարերուն Ե և Զ միջակէտներն միացընող ԵԶ գիծն։ Եւ-

* Այս առաջարկութիւնս կը համարինք արտաքոյ երկրաչափութեան ծրագրին, պարզապէս ՚ի լրումն դասագրոցս դրած ենք հոս։

անկիւնքն ԴԵԶ, ԴԱԲ նմանք ըլլալով՝ ԵԶ գիծն է կէս ԱԲ գծին. և, ինչպէս որ Գ·Ե, Գ·Զ գծերն հաւասար մասանց կը բաժնեն Ա·Գ·Դ, Բ·Գ·Դ անկիւնքն, Ե·Գ·Զ անկիւնն ալ կէս է բազմանկեան Ա·Գ·Բ կեդրոնական անկեան:

Հետևապէս եթէ Գ կէտն կեդրոն առնելով Գ·Ե կամ Գ·Զ շառաւիղով բոլորակ մը գծեմ, ԵԶ գիծն պիտի ըլլայ՝ այս բոլորակին մէջ ստորագրեալ բազմանկեանն մէկ կողմն, որ նոյն պարաչափն ունի ինչ որ ԱԲ բազմանկիւնն, և կրկին կողմամբք: Կոչենք իւր Գ·Ե շառաւիղն՝ $Շ'$, և իւր Գ·Ք հեռագիրն՝ $Հ'$:

Ուղիղ գիծն ԵԶ, որ զուգահեռական է ԱԲ գծին, կը բաժնէ Գ·Կ գիծն երկու հաւասար մասունք, որովհետև Ե կէտն է միջակէտ Ա·Դ գծին (17. Ա.), որով կ'ունենանք,

$$\text{Գ·Ք}=\frac{\text{Գ·Դ}+\text{Գ·Կ}}{2}$$

$$\text{կամ}\quad Հ'=\frac{Շ+Հ}{2}$$

Եռանկիւնն Գ·Դ·Ե ուղղանկիւն ըլլալով՝ կ'ունենանք նաև

$$\text{Գ·Ե}=\sqrt{\text{Գ·Դ}\times\text{Գ·Ք}}$$

$$\text{կամ}\quad Շ'=\sqrt{Շ\times Հ'}$$

Ծանօթութիւն. — Երկու Գ·Ե, Գ·Դ գծերէն առաջինն ուղղահայեաց է և երկրորդն խոտոր Ա·Դ գծին. հետևապէս շառաւիղն $Շ'$ փոքրագոյն է $Շ$ շառաւիղէն: Ընդ հակառակն $Հ'$ հեռագիրն աւելի մեծ է $Հ$ հեռագրէն, որովհետև Գ·Կ՝ մասն մ'է Գ·Բ գծին:

Հետեւանք. — Այս առաջարկութիւնն կ'առաջնորդէ մեզ հաշուելու շրջապատին առ տրամագիծն ունեցած յարաբերութիւնն:

Համարինք թէ կ'ուզենք հաշուել շրջապատին առ տրամագիծն ունեցած յարաբերութիւնն մօտ $\frac{1}{10^{ն}}$. ենթադրենք շրջապատ մը որոյ երկայնութիւնն ըլլայ 4 մեդր, և կ'ուզենք իրեն Ծ շառաւիղն հաշուել: Գիտենք որ $\pi=\frac{4}{2Ծ}=\frac{2}{Ծ}$ (24. Գ. Հ):

ինչպէս որ Ծ շառաւիղն է սահման կանոնաւոր բազմանկեանց շառաւիղաց և հեռագրաց, որոց պարաչափն հաւասար է Ծ շրջապատին և որոց կողմանց թիւն յանհունս կ'աճին, ասկէ կը հետևի որ եթէ հաշուենք 4, 8, 16, 52... կողմունք ունեցող կանոնաւոր բազմանկեանց շառաւիղքն և հեռագիրքն, որոց պարաչափն ըլլայ 4 մեդր, այս շառաւիղքն և այս հեռագիրքն պիտի մօտենան Ծ շառաւիղին, որով եթէ այս շառաւիղաց և այս հեռագրաց մին առնունք փոխանակ Ծ շառաւիղին, այնչափ նուազ սխալ պիտի գործենք՝ $\frac{2}{Ծ}$ կամ π թուոյն վրայ, որչափ որ այս շառաւիղին կամ այս հեռագրին կանոնաւոր բազմանկեան կողմունքն շատ ըլլան:

Ենթադրենք $Շ$, $Շ'$, $Շ''$... շառաւիղքն, և $Հ$, $Հ'$, $Հ''$.... հեռագիրքն կանոնաւոր բազմանկեանց 4, 8, 16... կողմամբք, որոց պարաչափն է 4 մէդր. գիտենք որ քառակուսիէն կ'ունենանք՝ $Շ=\sqrt{2}$, և $Հ=\frac{1}{2}$, որովհետև քառակուսւոյն կողմն 1 մէդր երկայնութիւն ունի: Արդ վերի առաջարկութեան ձևը գործածելով՝ նոյն պարաչափն ունեցող 8, 16... կողմամբք կանոնաւոր բազմանկեանց, կը գտնենք կարգաւ.

Կանոնաւոր ութանկեան համար $Հ'=\frac{Շ+Հ}{2}$, և $Շ'=\sqrt{Հ'\times Շ}$

Կանոնաւոր 16 կողմունք ունեցող բազմանկեան համար $Հ''=\frac{Շ'+Հ'}{2}$, և $Շ''=\sqrt{Շ'\times Հ''}$ և այսպէս հետզհետէ:

Եթէ կանկ առնունք 4×2·Բ կողմամբք զուգապարաչափ (isoperimètre) կանոնաւոր բազմանկեան, Բ ըլլալով որ և իցէ ամբողջական թիւ մը, π կամ $\frac{2}{Ծ}$ քանակութիւնն պիտի գտնուի $\frac{2}{Հ·Բ}$ և $\frac{2}{Շ·Բ}$ թուոց մէջ. ուրեմն պէտք է որ

$$\frac{2}{Հ·Բ}-\frac{2}{Շ·Բ}<\frac{1}{10^{ն}}\quad\text{և որով}\quad Շ·Բ-Հ·Բ<\frac{Հ·Բ\times Շ·Բ}{2\times10^{ն}}:$$

Ինչպէս որ հեռագիրն ՆՔ և շառաւիղն ՇՔ աւելի մեծ են իւրաքանչիւրն քան քառակուսոյն $\frac{1}{2}$ հեռագիրն, իրենց արտադրեալն՝ ՆՔՇՔ մեծագոյն է քան $\frac{1}{4}$. ուրեմն բաւական է վերի անհաւասարութեան ՇՔ և ՆՔ սահմանել հետեւեալ կերպիւ $ՇՔ-ՆՔ<\frac{1}{8\times10^{մ}}$, և կամ թէ առ առաւելն

$$ՇՔ-ՆՔ<\frac{1}{10^{մ}+1}:$$

Հետեւաբար π քանակութիւնն մօտ $\frac{1}{10^{մ}}$ ունենալու համար՝ պէտք է շարունակել զուգապարաշափ կանոնաւոր բազմանկեանց շառաւիղաց և հեռագրաց հաշիւն, մինչև որ գըտնուի բազմանկիւն մը որոյ շառաւիղն և հեռագիրն նուազ տարբերի քան $\frac{1}{10^{մ}+1}$, և առնուլ այս շառաւիղն կամ այս հեռագիրն 4 մեղր երկայնութիւն ունեցող շրջապատին շառաւիղին զօրութիւն:

Գիտնալով որ 0 և 1 թուոց միջին թուաբանական է $\frac{1}{2}$, և 1 ու $\frac{1}{2}$ թուոց միջին երկրաչափական է $\frac{\sqrt{2}}{2}$, վերի տուածներէն կը հետեւի այս պարզ կանոնն հաշուելու π քանակութիւնն այս ինչ տուեալ մերձաւորութեամբ:

Ձեւացուր շարք մը թիւերու որոց առաջին երկուքն ըլլան 0 եւ 1, եւ որոց իւրաքանչիւր հետեւեալներն փոփոխակի ըլլան միջին թուաբանական եւ միջին երկրաչափական 'ի մէջ երկու նախընթացից. շարունակէ այս հաշիւն մինչեւ որ երկու յաջորդ թիւերն ըլլան $մ+1$ հասարակ տասնորդական նախնական, յետոյ բաժնէ ընդ 2 այս թիւերէն որ եւ իցէ մին, հաշուելով $մ$ տասնորդական թիւ այս բաժանման մէջ: Քանորդն պիտի ըլլայ πին արժէքն մօտ $\frac{1}{10^{մ}}$:

Գնենք հոս 4, 8, 16, ... 512, 1024, 2048 կողմունք ունեցող կանոնաւոր բազմանկեանց շառաւիղաց և հեռագրաց արժէքն, որպէս զի հաշուենք π մօտ հարիւր հազարորդի

4 . . . . $Ն=0,500000$ . . . . $Շ=0,707107$
8 . . . . $Ն_1=0,603553$ . . . . $Շ_1=0,653281$
16 . . . . $Ն_2=0,628417$ . . . . $Շ_2=0,640729$
32 . . . . $Ն_3=0,632573$ . . . . $Շ_3=0,637645$
64 . . . . $Ն_4=0,636108$ . . . . $Շ_4=0,636873$

Առաջին $Ն_4$ և $Շ_4$ թիւերուն կէսն նոյն ըլլալով կրնանք փոխանակել իրենց միջին երկրաչափականը՝ իրենց միջին թուաբանականին հետ, որ անկէ՝ վեցերորդ տասնորդականէն անդին կը տարբերի: Նոյնն շարունակելով հետեւեալ անդամոց համար, հաշիւն կը վերածենք միջին թուաբանականքն առնելու:

128 . . . . $Ն_5=0,636492$ . . . . $Շ_5=0,636684$
256 . . . . $Ն_6=0,636588$ . . . . $Շ_6=0,636636$
512 . . . . $Ն_7=0,636612$ . . . . $Շ_7=0,636624$
1024 . . . . $Ն_8=0,636618$ . . . . $Շ_8=0,636621$
2048 . . . . $Ն_9=0,636620$ . . . . $Շ_9=0,636620$

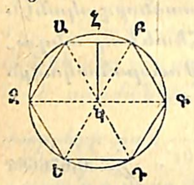
Ինչպէս որ $Ն_9$ և $Շ_9$ արժէից տարբերութիւնն մէկ միլիոներորդէն նուազ է, πին արժէքն է $\frac{2}{0,636620}=3,14159$, մօտ հարիւր հազարորդի մը:

ՅՕԴՈՒԱԾ ՔՍԱՆԵՐՈՐԴ ՎԵՑԵՐՈՐԴ

ԿԱԼ ԿԱՆՈՆԱՒՈՐ ԲԱԶՄԱՆԿԵԱՆ. — ԿԱԼ ԲՈԼՈՐԱԿԻ ՄԸ, ՀԱՏՈՒԱԾՈՂԻ ՄԸ ԵՒ ԲՈԼՈՐԱԿԻ ՀԱՏՈՒԱԾԻ ՄԸ։

Ա. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Կանոնաւոր բազմանկեան մը կալն՝ հաւասար է իրեն պարաչափուն՝ բազմապատկեալ իւր հեռադրին կիսոյն հետ։



(Ձև 181)

Ունենանք ԱԲԳԴ... կանոնաւոր վեցանկիւն մը, և Կ իրեն կեդրոնն. այս կէտէն կը ձգեմ ուղիղ գծեր ամէն գագաթանց. որով բազմանկիւնն այնչափ հաւասար եռանկեանց կը բաժնուի, որչափ որ կողմունք ունի։ Բազմանկեան կեդրոնէն կ'իջեցնեմ ԿՀ ուղղահայեացն ԱԲ կողման վրայ, որ միանգամայն հեռադիր է բազմանկեան և բարձրութիւն ԿԱԲ եռանկեան. որոյ չափն է $ԱԲ \times \frac{ԿՀ}{2}$։ Արդ առաջարկեալ բազմանկեան կալն հաւասար է վեց եռանկեանց կալերուն գումարին, որ ամէնն ալ ԿԱԲ եռանկեան հաւասար են. ուրեմն ըսել է որ վեց անգամ $ԱԲ \times \frac{ԿՀ}{2}$ արտադրեալն, կամ բազմանկեան պարաչափուն 6ԱԲ բազմապատկեալ իրեն հեռադրին ԿՀ կիսոյն։

Ծանօթութիւն. — Որ և իցէ բազմանկեան պարագրեալ բոլորակի մը կալն՝ հաւասար է իրեն պարաչափուն՝ բազմապատկեալ ստորագրեալ բոլորակին շառաւիղին կիսոյն։

Այս հայեցողութեան ապացուցութիւնն ճիշդ նոյն է վերի հայեցողութեան հետ։

Բ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Բոլորակի մը կալն՝ հաւասար է իրեն շրջապատին բազմապատկեալ իւր շառաւիղին կիսոյն։

Նախ բոլորակին մէջ ստորագրեմ կանոնաւոր բազմանկիւն մը, զոր օրինակ վեցանկիւն մը, յետոյ ուրիշ 12, 24, 48 և այլն, կողմամբք։ Այս ամէն բազմանկեանց կալն հաւասար է իւր պարաչափուն՝ բազմապատկեալ հեռադրին կիսոյն։ Որովհետև այս կանոնս ընդհանուր է ամէն ստորագրեալ կանոնաւոր բազմանկեանց՝ որչափ ալ շատ ըլլայ կողմանց թիւն, ուստի բոլորակն սահման ըլլալով այս բազմանկեանց մակերեւութից, հետևապէս նոյն կանոնն կրնանք յատկացընել բոլորակի ալ. որով բոլորակի մը կալն՝ հաւասար է իրեն պարաչափուն կամ իր շրջապատին, բազմապատկեալ իրեն հեռադրին կամ շառաւիղին կիսոյն։

Հետեւանք. — Կոչենք Շ տուեալ բոլորակին շառաւիղն, որով կ'ունենանք

$$Բոլորակ\ Բ = Շրջապատ\ Շ \times \frac{Շ}{2}$$

Եթէ այս ձևոյս մէջ փոխանակ շրջապատ Շի դնեմ իւր արժէքն $2\pi Շ$, կը գտնեմ $Բ = \pi Շ^{2}$.

Այս հաւասարութենէս յառաջ կու գայ.

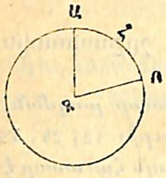
1. Բոլորակի մը կալն գտնելու համար, որոյ շառաւիղն տուեալ է, կրնանք իրեն շառաւիղին քառակուսին բազմապատկել ընդ π։

2. Փոխադարձաբար. բոլորակի մը կալն գիտնալով անոր շառաւիղին երկայնութիւնը գտնելու համար, պէտք է բաժնել կալը ցուցընող թիւն ընդ π և քանորդէն քառակուսի արմատն հանել։

Գ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Հատանողի մը կալն հաւասար՝ է իրեն աղեղին երկայնութեան, բազմապատկեալ իւր շառաւիղին կիսոյն։

Ունենանք ԱԳԲ հատուածողն, ԳԱ իւր շառաւիղն. հատուածոյն՝ բոլորակին մասն ըլլալով $\frac{\text{հատ. ԱԳԲ}}{\text{բոլ. ԳԱ}}=\frac{\text{աղեղ ԱԲ}}{\text{շրջ. ԳԱ}}$



(Զև 182)

և վերջին յարաբերութեան երկու անդամները բազմապատկելով ԳԱ շառաւիղի կիսովն, կ'ունենանք

$$\frac{\text{հատ. ԱԳԲ}}{\text{բոլ. ԳԱ}}=\frac{\text{աղեղ ԱԲ}\times\frac{\text{ԳԱ}}{2}}{\text{շրջ. ԳԱ}\times\frac{\text{ԳԱ}}{2}}$$

ԳԱ բոլորակին չափն ըլլալով շրջապատ $\text{ԳԱ}\times\frac{\text{ԳԱ}}{2}$, նախընթաց հաւասարութիւնն կը վերածի

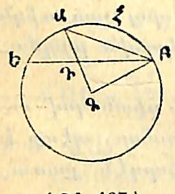
$$\text{հատ ԱԳԲ}=\text{աղեղ ԱԲ}\times\frac{\text{ԳԱ}}{2}:$$

Ծանօթութիւն. — Կոչենք Ռ շառաւիղն ԳԱ, և Թ աստիճանաց թիւն ԱԲ աղեղան, այս աղեղին երկայնութիւնն է

$$\frac{\pi\text{ՌԹ}}{180}\ (24.\ \text{Դ}).$$

Իսկ ԱԳԲ հատուածոյին կալն է $\frac{\pi\text{ՌԹ}}{180}\times\frac{\text{Ռ}}{2}$ կամ $\frac{\pi\text{Ռ Թ}}{360}$:

Հետևանք. — Հատուածի մը կալն հաւասար է ընդ ԳԱՀԲ հատուածողին կալին, նուազ՝ ԱԳԲ եռանկեան կալն:



(Զև 183)

Հատուածոյին ԳԱՀԲ չափն է աղեղն

$$\text{ԱԲ}\times\frac{\text{ԳԱ}}{2}.$$

եթէ ԲԱԳ եռանկեան Բ գագաթէն իջեցընենք ուղղահայեաց մը ԲԴ 'ի վերայ ԱԳ գծին, և երկնցընենք մինչև Ե կէտն՝ ուր շրջապատը կը կտրէ, եռանկեան չափն է

$$\text{ԲԴ}\times\frac{\text{ԳԱ}}{2}\ \text{կամ}\ \frac{\text{ԲԵ}}{2}\times\frac{\text{ԳԱ}}{2}.$$

վասն զի ԳԱ շառաւիղն երկու հաւասար մասն կը բաժնէ ԲԵ աղեղը և անոր լարը: Հետևաբար, ԱՀԲ հատուածին կալն հաւասար է $\left(\text{աղեղ ԱԲ}-\frac{\text{ԲԵ}}{2}\right)\frac{\text{ԳԱ}}{2}$. որ կը ցուցընէ վերի հայեցողութիւնն, վասն զի ԲԵ լարին աղեղն՝ ԱԲ աղեղին կրկինն է:

Դ. ՀԱՅԵՑՈՂՈՒԹԻՒՆ

Երկու բոլորակաց կալերն համեմատական են իրենց շառաւիղաց քառակուսեաց:

Ցիրաւի, կոչենք Մ և Մ' երկու բոլորակաց կալերն, Ռ և Ռ' իրենց շառաւիղներն. կ'ունենանք (Բ)

$$\text{Մ}=\pi\text{Ռ}^2$$

և

$$\text{Մ}'=\pi\text{Ռ}'^2$$

ուստի

$$\frac{\text{Մ}}{\text{Մ}'}=\frac{\text{Ռ}^2}{\text{Ռ}'^2}$$

Հետևանք Ա. — Երկու նման հատուածողաց կալերն, որ է ըսել նման աղեղներ ունեցող, համեմատականք են իրենց շառաւիղաց քառակուսեաց:

Կոչենք Մ և Մ' այս հատուածողաց կալերն. Ռ և Ռ' իրենց շառաւիղներն, և Թ իրենց աղեղանց աստիճանաց թիւն. կ'ունենանք (Գ)

$$\text{Մ}=\frac{\pi\text{Ռ}^2\text{Թ}}{360}$$

և

$$\text{Մ}'=\frac{\pi\text{Ռ}'^2\text{Թ}}{360}$$

հետևաբար

$$\frac{\text{Մ}}{\text{Մ}'}=\frac{\text{Ռ}^2}{\text{Ռ}'^2}.$$

Հետևանք Բ. — Երկու նման հատուածոց կալերն՝ համեմատականք են իրենց շառաւիղաց քառակուսեաց:

Որովհետև հատուածողն և եռանկիւնն՝ որոց տարբերութիւնն հաւասար է հատուածոց մէկուն, նման են բոլորովին հատուածողին և եռանկեան, որ կը ձևացընեն միւս հատուածն.

ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹԻՒՆՔ

1. Ի՞նչ է կանոնաւոր հնգանկեան մը կալն, որոյ իւրաքանչիւր կողմն է $2^{\text{մ}}$, 40 և հեռադիրն է $1^{\text{մ}}$, 652։

Պխ. — Մ. Ք 9, 9120։

2. Ի՞նչ է կանոնաւոր վեցանկեան մը կալն, որոյ հեռադիրն է $6^{\text{մ}}$, 40 և իւրաքանչիւր կողմն 7, 59։

Պխ. — Մ. Ք. 141, 8880

3. Ի՞նչ է կանոնաւոր քառանկեան մը կալն, որոյ իւրաքանչիւր կողմն է $0^{\text{մ}}$, 185 և հեռադիրն $0^{\text{մ}}$, 118։

Պխ. — Մ. Ք. 0, 5068։

4. Հնգանկիւն մը ունինք, որոյ իւրաքանչիւր կողմն է $2^{\text{մ}}$, 40, և մակերևոյթն է $9^{\text{մ.ք}}$, 9120, ի՞նչ է իւր հեռադիրն։

Պխ. — $1^{\text{մ}}$, 652։

5. Տասնանկեան մը մակերևոյթն է $100^{\text{մ.ք}}$, 44, և հեռադիրն է $5^{\text{մ}}$, 58, ի՞նչ է իւր պարագծին։

Պխ. — Մ. 36 պարագիծ։

6. Հրապարակ մը կանոնաւոր վեցանկեան ձևն ունի, որոյ պարագիծն է $492^{\text{մ}}$. ի՞նչ է անոր մակերևոյթն. (25. Ն)։

Պխ. — Մ. Ք. 17469, 4440 մակերևոյթ։

7. Անկանոն վեցանկիւն մը բաժնեցինք 4 եռանկեան, որոց խարիսխքն են $21^{\text{մ}}$, 4. $38^{\text{մ}}$, 52. $43^{\text{մ}}$, 16. $11^{\text{մ}}$, 3. և բարձրութիւնքն $4^{\text{մ}}$, 60. $52^{\text{մ}}$, 40. $58^{\text{մ}}$, 5. $10^{\text{մ}}$։ Ի՞նչ է այս վեցանկեան մակերևոյթն (21. Առջ)։ — Պխ. — Մ. Ք. 1945, 7740։

8. Բոլորակի մը տրամագիծն է $95^{\text{մ}}$, 6, գտիր անոր մակերևոյթն։ — Պխ. — $7178^{\text{մ.ք}}$, 053344։

9. Բոլորակի մը շառաւիղն է $17^{\text{մ}}$, 20, ի՞նչ է անոր մակերևոյթն։ — Պխ. — $929^{\text{մ.ք}}$, 410944։

10. Բոլորակի մը շրջապատն է $15^{\text{մ}}$,708. ի՞նչ է անոր կալն։ — Պխ. — $19^{\text{մ.ք}}$, 6350

11. Ի՞նչ է բոլորակի մը կալն որոյ շրջապատն մէկ մեդր է։

Պխ. — $0^{\text{մ.ք}}$, 079577։

12. Գտիր հատուածի մը կալն, որոյ աղեղն է $6^{\text{մ}}$, 40. և շառաւիղն $7^{\text{մ}}$, 5։ — Պխ. — $24^{\text{մ.ք}}$։

13. Հատուածի աղեղն է $120^{\text{մ}}$ և շառաւիղն է $165^{\text{մ}}$. ի՞նչ է իւր կալն։ — Պխ. — $9900^{\text{մ.ք}}$։

14. Հատուածի մը շառաւիղն է $42^{\text{մ}}$, 4, և աղեղին երկայնութիւնն $90^{\text{մ}}$. ի՞նչ է կալն։ — Պխ. — $190^{\text{մ.ք}}$. 80։

15. Հատուածի մը կալն է $4^{\text{մ.ք}}$, 48, և շառաւիղն է $3^{\text{մ}}$, 20, ի՞նչ է աղեղին երկայնութիւնն։ — Պխ. — $2^{\text{մ}}$, 80։

16. Ի՞նչ է հատուածի մը շառաւիղն, որոյ աղեղն է $0^{\text{մ}}$, 34, և կալն է $0^{\text{մ.ք}}$, 6125։ — Պխ. — $3^{\text{մ}}$, 6։

ՑՈՒՑԱԿ

ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ԲԱՌԻՑ

Աղեղ	Arc
Անկիւն	Angle
— մերձաւոր	— adjacent
— ուղիղ	— droit
— բութ	— obtus
— սուր	— aigu
— կեդրոնական	— au centre
Անկիւնք ընդդիմագագաթն	Angles opposés par le sommet
— լրացուցիչք	— complémentaires
— բովանդակիչք	— supplémentaires
— ներքին	— internes
— արտաքին	— externes
— համակողմեան	— correspondants
— ներքին փոխադարձ	— alternes-internes
— արտաքին փոխադարձ	— alternes-externes
Անկիւնաչափ	Rapporteur
Անչափակից	Incommensurable
Ապացուցութիւն	Démonstration
Առածք	Axiome
Առաջարկութիւն	Problème
Աստիճան	Degré
Բազմանկիւն	Polygone
— կանոնաւոր	— régulier
— կորնթարդ	— convexe
Բարձրութիւն	Hauteur
Բոլորակ	Cercle
Գագաթն	Sommet
Գիծ	Ligne
— ուղիղ	— droite
— կոր	— courbe
— բեկեալ	— brisée
Ենթադրութիւն	Hypothèse
Եռանկիւն	Triangle
— հաւասարանկիւն	— équiangle
ռանկիւն հաւասարակող	Triangle équilatéral
— հաւասարասրուն	— isocèle
— ուղղանկիւն	— rectangle
րկոտասանանկիւն	Dodécagone
րկրաչափութիւն	Géométrie
ուգահեռագիծ	Parallélogramme
ուգահեռական	Parallèle
ար	Corde
ծորդ կէտք	Points conjugués
արիսխ	Base
ոտոր	Oblique
ալ	Arc և Aire
արկին	Compas
Կեդրոն	Centre
— նմանութեան	— de similitude
Կէտ	Point
— երկրաչափական	— géométrique
— շօշափման	— de contact
Կողմն	Côté
Կրկնահերձ	Bissectrice
Հակուղիղ	Hypoténuse
Համադիր	Homologue
Համազօր	Équivalent
Համանիստ	Homothétie
այեցողութիւն	Théorème
ստատաչափութիւն	Stéréométrie կամ Figures dans l'espace
ատանող	Sécante
Հատուած	Segment
Հատուածող	Secteur
Հետեւանք	Corollaire
Հնգանկիւն	Péntagone
Հնգետասանանկիւն	Péntédécagone
Մակարդակ	Plan
Մակարդակաչափութիւն	Planimétrie կամ Figures planes
Մակերեւոյթ	Surface
Մանրամասն	Minute
Մանրերկրորդ	Seconde
Մարմին	Corps
Միջահատ	Médiane
Յարաբերութիւն	Rapport
— նմանութեան	— de similitude
Նման	Semblable

Շառաւիղ	Rayon
— գնայուն	— secteur
Շրջապատ	Circonférence
Շօշափող	Tangente
Ութանկիւն	Octogone
Ուղղահայեաց	Perpendiculaire
Ուղղանկիւն	Rectangle
— արտաչափի	— d'arpenteur
Ուղղաչափ	Équerre
Չափ	Mesure
— հասարակ	— commune
Չափակից	Commensurable
Պարագիծ	Contour
Պարագրեալ	Circonscrit
Պարաչափ	Périmètre
Սահման	Limite
Ստորագրեալ	Inscrit
Ստուերագիր	Projection
Վեցանկիւն	Hexagone
Տասնանկիւն	Décagone
Տարածութիւն	Étendue
Տարանկիւն	Losange
Տեղի երկրաչափական	Lieu géométrique
Տրամագիծ	Diamètre
Տրամանկիւն	Diagonale
Տրապիզ	Trapèze
Քանոն	Règle
Քառակողմն	Quadrilatère
Քառակուսի	Carré